中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080405

數一數 - 方格紙上的正方形和長方形

學校名稱：臺中市中區光復國民小學

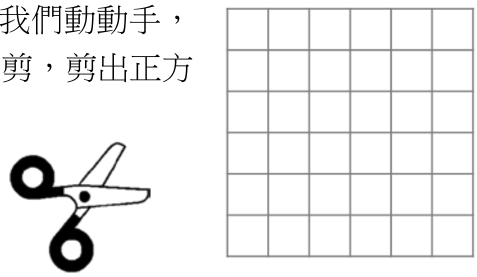
作者：	指導老師：
小六　林芳儀	張東瑋
小五　陳虹亘	
小六　郭玥彤	
小六　陳以琳	
小六　連翊涵	

關鍵詞：矩形、等差數列

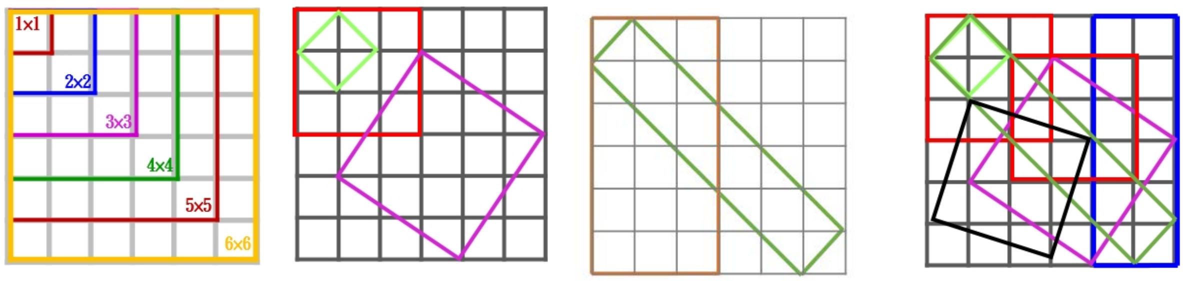
摘　　要：運用方格的格子點試著連出正方形和長方形，我們發現這些連接方法的類型和規律，並歸納出正方形和長方形數量的通式。(1)正方形：奇數邊長總數＝(N^2＋4N－1)/4；偶數邊長總數＝(N^2＋4N)/4。(2)長方形分三種結果：(a)正長方形總數：(N^2－N)/2、(b)斜長方形 45 度角總數：奇數邊長(N^2－1)^2/4、偶數邊長(N^2－2N)/4。(c)斜長方形非 45 度角總數有規律，但無通式。

壹、　研究動機

上數學課平面圖形(數學五上)的時候，老師為了讓我們動動手，給我們一張方格紙，請大家運用方格的格子點試著剪一剪，剪出正方形。同學們剪出了各式各樣不同的正方形。

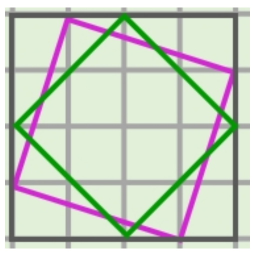


老師給的是一個長邊 6 格和寬邊 6 格的長方形方格紙，運用方格紙上的格子，可以很快速地找到 1x1、2x2、3x3、4x4、5x5、6x6 的正方形(下圖左)。也有人不照著方格的線來剪，而是運用方格紙上的格子點，剪出一個斜斜的正方形。(下圖中)還有同學沒看清楚，也沒注意老師的說明，剪出長方形(下圖右)。



我們改用畫圖的方式，找到更多不同的正方形，沒料到可以畫出來的正方形很多，數也數不清楚，連在這裡是否重複都搞不清楚了！還有同學因為線條太亂了，竟然畫出長方形，連他自己也沒有發現。

點心如何塞進禮盒?
禮物如何塞進禮盒?



真沒想到我們可以利用格子和格子點，剪出這麼多不同邊長的正方形和長方形。總數量是多少呢?有規律嗎？於是我們先收集並研討舊資料，發現也有一些研究過「正方形數」的資料（第 48 屆科展：方之律動），不過沒有研究長方形數。在生活中，如果想把**底面是正方形或長方形**的點心或禮物，塞進禮盒裡，好像很類似這個數學問題的原理。於是我們便開始研究這一個正方形和長方形數量的問題。

貳、　研究目的

在同學的討論及老師的指導下，我們訂出了這次研究的目標及方向。

一、　在方格紙上，不同的正正方形和斜正方形的類型。

二、　在方格紙上，不同的正正方形和斜正方形的總數。

三、　在方格紙上，不同的正長方形和斜長方形的類型。

四、　在方格紙上，不同的正長方形和斜長方形的總數。

五、　嘗試歸納通式。

參、　研究設備及器材

紙張、筆、電腦、計算機

肆、　研究過程或方法

一、　名詞解釋

在這次的科展研究中，我們接觸到許多數學專有名詞，有些是我們已經學過的，有些則是第一次接觸。在老師的指導下，我們先到圖書館以及網路上搜尋相關的資料，並且記錄下來。

（一）矩形

長方形(rectaNgle)對邊等長並互相平行,而且所有內角都是直角的四邊形。長方形 2 條對稱軸，也是 2 階旋轉對稱圖形，對角線都等長。長方形也稱為矩形。(奧斯朋出版編輯群，2018)

數學上指一種特殊的平行四邊形。具有下列性質：四內角皆為直角、對角線相等且互相平分、對邊平行且相等、面積等於底乘以高。(教育部國語辭典簡編本，2023 年 1 月 3 日)

（二）求總和

在一個等差數列中，所有數字和=（首項+末項）×項數÷2

(數學王子的家 2023 年 1 月 3 日)

（三）全等三角形(coNgrueNt triaNgles)

形狀大小完全相同的三角形(奧斯朋出版編輯群，2018)

（四）畢氏定理

直角三角形斜邊的平方等於另外兩邊的平方和(奧斯朋出版編輯群，2018)

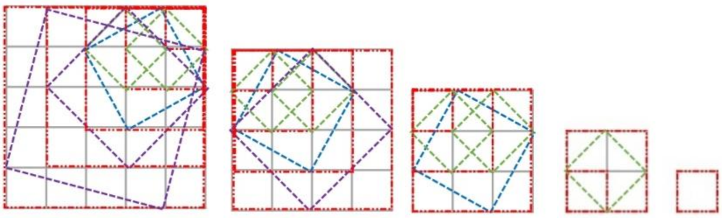
（五）畢式數-畢式三元數(PythagoreaN triple 或 PythagoreaN triad)
代表三角形的邊長(a、b、c),而且滿足畢氏定理($a^2+b^2=c^2$)的三個正整數，畢氏三元數組有無限多個，最常見的有：3,4,5、5,12,13、7,24,25、8,15,17(奧斯朋出版編輯群，2018)

（六)「正」正方形、「斜」正方形、「正」長方形、「斜」長方形
「正」正方形：邊長與方格紙同方向、重疊的正方形
「斜」正方形：邊長與方格紙不同向、不重疊的正方形
「正」長方形：邊長與方格紙同方向、重疊的長方形
「斜」長方形：邊長與方格紙不同向、不重疊的長方形
(本研究中所使用，自行定義的名詞)

(七) 等差數列
每次固定增加或減少一個常數所排成的數列，也稱為線型數列。例如，以公式 2N-1 可以排出每次都增加 2 的數列：1,3,5,7,9, 11....
(奧斯朋出版編輯群，2018)

二、 研究限制
本研究的問題是老師請我們在方格紙上運用方格剪出不同的正方形，所以只研究可以在**格子點上連接的正方形和長方形**。
同時，在這裡我們找出不同的正方形與長方形指的是**邊長、面積不相同的正方形與長方形**。

三、 簡化-找出 N×N 正方形方格上的正方形數
我們決定先從比較小的方格紙上開始研究，同時，運用「正方形 N×N」方格紙。



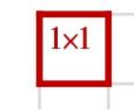
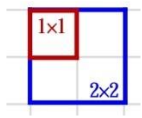
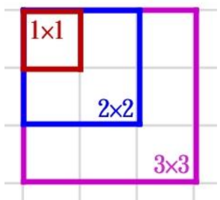
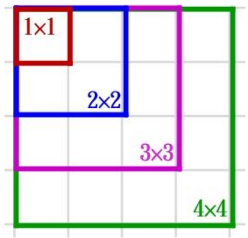
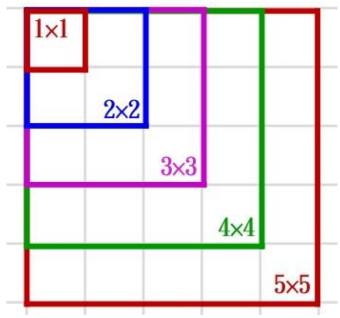
在大家的討論中，我們發現有時候會不小心漏掉了許多不同大小的正方形，於是老師指導我們要更有系統的歸納與討論。
我們便先從「與方格同向的正方形」來進行討論-我們稱為「正」正方形。
接著再討論「與方格不同向的、斜的正方形」-我們稱為「斜」正方形。

(一) 與方格同向-正正方形數
在 1×1 的方格上，正正方形會有 1 種，最大邊長為 1；
在 2×2 的方格上，正正方形會有 2 種，最大邊長為 2；
在 3×3 的方格上，正正方形會有 3 種，最大邊長為 3；
在 4×4 的方格上，正正方形會有 4 種，最大邊長為 4；

在 5×5 的方格上，正正方形會有 5 種，最大邊長為 5；

可以推測：在 N×N 的方格上，正正方形會有 N 種，最大邊長為 N；

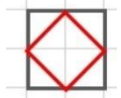
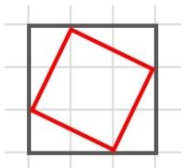
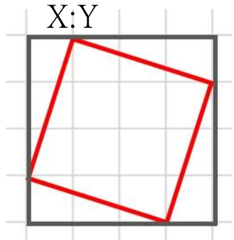
如下圖：

1×1	3×3	4×4	5×5
 2×2 			

得到結論：在一個 N×N 的方格上，正正方形最大邊長為 N。

(二)斜正方形的類型探討

接著討論「與方格不同向、斜的正方形」。有同學問：像下圖中這樣的四邊形，一定會是正方形嗎? 除了測量以外，還有沒有其他的方法來說明呢?

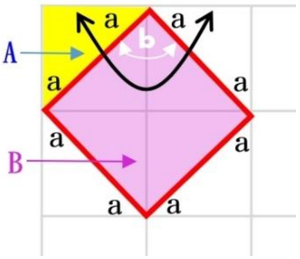
X:Y 	X:Y 	X:Y 
四個邊分成 X:Y，作斜正方形的頂點。且 X+ Y＝N		

我們用尺和量角器，實際在方格紙上做邊與角的測量，發現上面這三個正方形。每邊都一樣長，且每個角都是直角。這是剛好的? 或是另有原理?

我們觀察到，連接這個正方形的四個點，都在 N×N 方格的邊上。而且，這些正方形的頂點，剛好會把方格上的邊(灰色邊)等分成 1:1、1:2、1:3⋯X:Y，其中的 X + Y＝N

運用直角三角形中，2 個底角和為 90 度，可以發現這些「斜四邊形」內角都是直角。下面說明一和說明二以圖示法來說明。

說明一：角 b 是直角，且粉紅色的四邊形一定是正方形

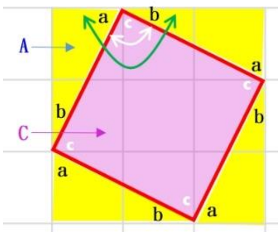


在左圖 2×2 的方格上，可以發現

1. 等腰直角三角形 A (黃色) 中的兩底角 a 會是 45 度。
2. 黃色三角形：a+a=90 度
3. a+b+a=180 度(平角)
4. 所以 <u>**b 會是直角**</u>。
5. 一樣的方法可以說明四邊形 B 的四個角都是直角。
6. 如果把方格上兩個點之間的距離訂為 1，我們也可以從三角形的商高定理中知道，四邊形 B 的邊長都會是$\sqrt{2}$。

   所以可以知道四邊形 B 會是一個正方形。

說明二：角 C 是直角，且粉紅色的四邊形一定是正方形



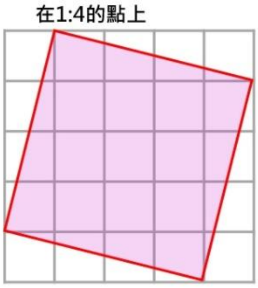
在左圖 3×3 的方格上，可以發現

1. 直角三角形 A 中的角 a 和角 b 會是 90 度(180-直角)
2. 黃色三角形：a+b=90 度
3. 四個黃色直角三角形是一樣大的(邊長和角都一樣)。因此我們將所有相等的角標示成 a 和 b。
4. 因為 a+b=90，所以綠色箭頭所標示的平角也會是 180 度，180-(a+b)=90，所以四邊形 C 的四個角也都會是直角。
5. 在邊的部分，運用商高定理的計算，得知四邊形 C 的邊長都會是$\sqrt{5}$。

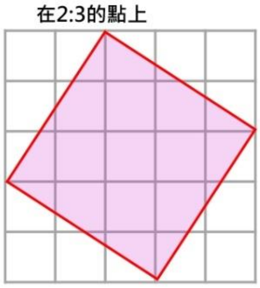
   所以可以知道四邊形 C 會是一個正方形。

在上面兩種類型的討論中，可以知道四邊形 B 和四邊形 C 都會是正方形。因此，可以推論：連接 N×N 方格邊上的 4 個點，圍出一個四邊形。如果這些點把邊分成 X：Y，此時四角落會出現相同的直角三角形，中間的四邊形就會是正方形。下面舉幾個例子說明。

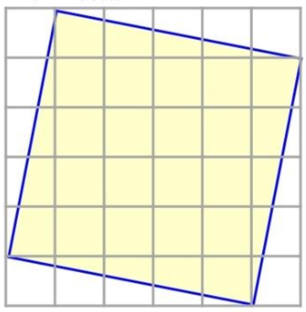
在1:4的點上



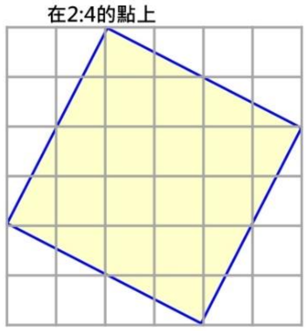
在2:3的點上



在1:5的點上

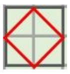
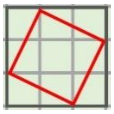
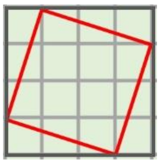
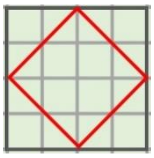
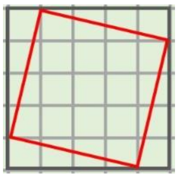
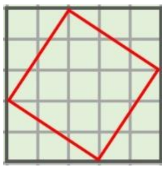
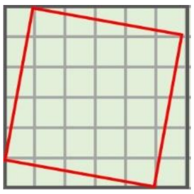
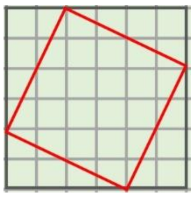
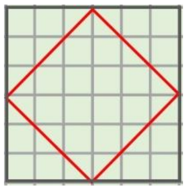
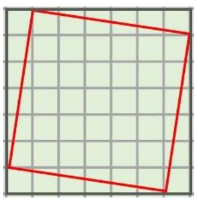
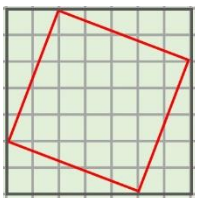
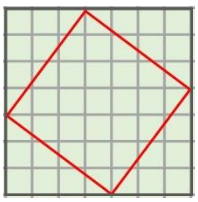


在2:4的點上



(三)與方格不同向-斜正方形數

在斜正方形的類型探討中，我們發現可以用同比值的分法，創造出四角落相同直角三角形，也就將「**整數**方格上的邊」以「分數字」的方法，就可以找到不同的斜正方形。下面為圖示與說明：

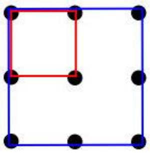
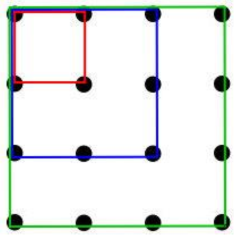
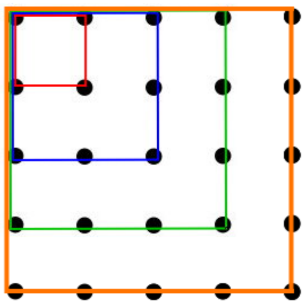
方格 N×N	方格 邊長 N	邊長分 數字	分出來 的組數	圖例			備註
1×1	1	無斜正方形					此方法是仿照前面的最大正方形畫法，在方格的四個邊上找四個點。 發現：斜正方形的角度越「不斜」，面積越大
2×2	2	1：1	1				
3×3	3	1：2	1				
4×4	4	1：3 2：2	2				
5×5	5	1：4 2：3	2				
6×6	6	1：5 2：4 3：3	3				
7×7	7	1：6 2：5 3：4	3				

這裡討論的是在方格上的「邊」找四個點連連接成斜正方形。但是會不會有其他的情形?在方格「中」能不能找到四個點來連結成正方形?這個問題我們將會在下面研究與討論。

四、　NxN 的正正方形數

前面已經知道，在一個 NxN 的方格上，正正方形最大邊長為 N。

我們接著在圖中發現，若方格邊長為 N，　那麼這個方格上所有的正正方形便會是由 1、2、3、、、、、、N。下面為圖例：

方格	邊長	圖例	正正方形邊長	正正方形數
1x1	1		1	1
2x2	2		1、2	2
3x3	3		1、2、3	3
4x4	4		1、2、3、4	4

在我們這一次的研究中，因為只考慮不同面積的正方形，所以隨著方格紙邊長變大，邊長每增加 1，就只會多一個正方形。這一個正方形會是(最大邊長)×(最大邊長)

因此從 1x1、2x2、、、、、、、、NxN，正正方形數會是有 N 個。

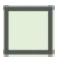
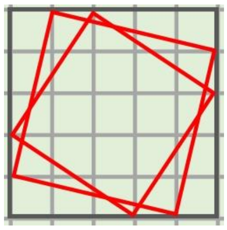
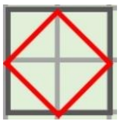
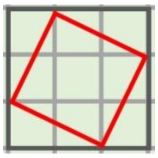
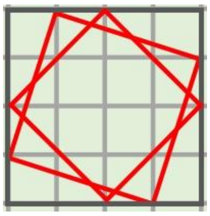
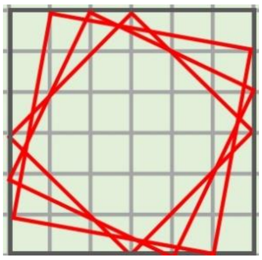
隨著邊長增大的關係，正正方形數是：前一方格的正正方形數 ＋1（此為(最大邊長)×(最大邊長)的正方形）。

斜正方形數也有這樣的包含關係嗎?下面是我們的討論。

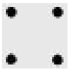
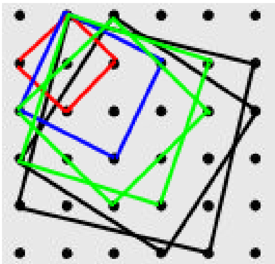
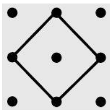
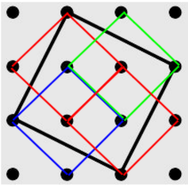
五、　NxN 的斜正方形數

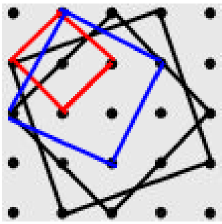
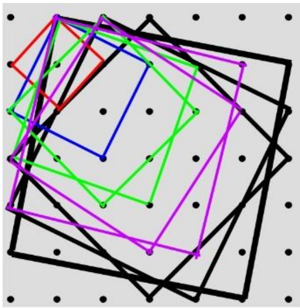
先考慮每一個 NxN 的方格上的最大斜正方形。最大的斜正方形應是：(一)連接方格周圍邊上的點；(二)用比值的分法，創造出四角落相同直角三角形，也就將「方格上的邊」用「分數字」分法，圍出來的正方形。

分析的結果如下：

方格	邊長	方格邊上點 連接之斜正方形	連接出來的斜正方形數	方格	邊長	方格邊上點 連接之斜正方形	連接出來的斜正方形數
1x1	1		0	5x5	5		2
2x2	2		1				
3x3	3		1				
4x4	4		2	6x6	6		3

關於所有斜正方形數的討論，我們想知道：
當方格是 2x2 時，斜正方形數是否為「1x1 斜正方形數」＋「新增 2x2 斜正方形數」;
當方格是 3x3 時，斜正方形數是否為「2x2 斜正方形數」＋「新增 3x3 斜正方形數」;
當方格是 4x4 時，斜正方形數是否為「3x3 斜正方形數」＋「新增 4x4 斜正方形數」;
這也就是如同上面正正方形數的包含關係。

方格上的 所有斜正方形	方格上的 所有斜正方形數	方格上的 所有斜正方形	方格上的 所有斜正方形數
	0		6 (圖中彩色的斜正方形在前一方格已出現)
	1		
	2 (圖中 4 個彩色的斜正方形是邊長相同，只能算 1 個)		9 (黑 3) (紫 2) (綠 2) (藍 1)

	4 (圖中 2 個彩色的斜正方形可以在其他位置，但找不到其他不同邊長的斜正方形)		(紅 1)

由上面這些實際的例子發現，斜正方形數會是：

前一方格的斜正方形數 ＋ 新方格邊上點連接的斜正方形數。例如:

方格	邊長	新增斜正方形數	所有斜正方形數	計算說明
1x1	1	0	0	
2x2	2	1	1	1(新增)+0(前一所有)
3x3	3	1	2	1(新增)+1(前一所有)
4x4	4	2	4	2(新增)+2(前一所有)
5x5	5	2	6	2(新增)+4(前一所有)
6x6	6	3	9	3(新增)+6(前一所有)

我們發現，正正方形數與斜正方形數的規律是類似的，都可以說是:

總正方形數 ＝ 前一方格的正方形數 ＋ 新方格邊上點連接的正方形數。

六、 正正方形數和斜正方形數的計算

在前面的討論中已經知道，如果增大方格紙，會發現只會增加【「最大邊長」上的點所形成的正正方形或斜正方形】。

所以我們就用包含的關係(新增 ＋ 前一方格)來計算方格上的所有正正方形數，如附錄一。下面節錄部分資料：

方格 NxN	邊長 N	A 新增 正正方形數 A_N	B 新增 斜正方形數 B_N	邊長分數字的比 (算斜正方形數)	C 前一方格 總正方形數 C_{N-1}	總和 $C_N=$ $C_{N-1}+A_N+B_N$
1x1	1	1	0		0	1
2x2	2	1	1	（1：1）	1	3
3x3	3	1	1	（1：2）	3	5
4x4	4	1	2	（1：3）（2：2）	5	8
5x5	5	1	2	（1：4）（2：3）	8	11
6x6	6	1	3	（1：5）（2：4） （3：3）	11	15
7x7	7	1	3	（1：6）（2：5）	15	19

				(3：4)		
8x8	8	1	4	(1：7)(2：6)(3：5)(4：4)	19	24
9x9	9	1	4	(1：8)(2：7)(3：6)(4：5)	24	29
10x10	10	1	5	(1：9)(2：8)(3：7)(4：6)(5：5)	29	35
11x11	11	1	5	(1：10)(2：9)(3：8)(4：7)(5：6)	35	41
12x12	12	1	6	(1：11)(2：10)(3：9)(4：8)(5：7)(6：6)	41	48
13x13	13	1	6	(1：12)(2：11)(3：10)(4：9)(5：8)(6：7)	48	55
14x14	14	1	7	(1：13)(2：12)(3：11)(4：10)(5：9)(6：8)(7：7)	55	63
15x15	15	1	7	(1：14)(2：13)(3：12)(4：11)(5：10)(6：9)(7：8)	63	71
16x16	16	1	8		71	80

計算出這些正方形數的總和後，在過程中我們發現其實是有許多規律的！我們很想找出一個簡單的式子，能代表方格上的邊長 N 與總正方形數的關係。

七、 歸納方格上的正方形數

如果從方格大小和正方形數的總和來看，一下子看不出是沒有規律的，但是如果從表中的每一項目去分析，就可以先得到這樣的結果：

在一個 N×N 的方格上，正方形的總數= 1 (A) + 新增斜正方形數(B) + 前一方格正方形數(C)

在這個式子裡包含三個部分：A、B、C

A 新增正正方形數：1

B 新增斜正方形數：分數字的組數

C 前一方格正方形數

下面就 ABC 這三個部份以及統整正方形數的總和分別討論。

(一)　新增正正方形數

這一部分是最容易理解，每次都會加 1。

(二)　新增斜正方形數；分數字的組數

我們把分數字的結果單獨列出表格來，發現組數是兩個兩個一組，每次都會增加 1(請參考下表中的黃和綠標示)。

方格	邊長	分數字組數	邊長分數字的比	說明	
1x1	1	0		N=1，組數=0	
2x2	2	1	（1：1）	N=2，組數=1	組數=N÷2
3x3	3	1	（1：2）	N=3，組數=1	組數=(N-1)÷2
4x4	4	2	（1：3）（2：2）	N=4，組數=2	組數=N÷2
5x5	5	2	（1：4）（2：3）	N=5，組數=2	組數=(N-1)÷2
6x6	6	3	（1：5）（2：4）（3：3）	N=6，組數=3	組數=N÷2
7x7	7	3	（1：6）（2：5）（3：4）	N=7，組數=3	組數=(N-1)÷2
8x8	8	4	（1：7）（2：6）（3：5）（4：4）	N=8，組數=4	組數=N÷2
9x9	9	4	（1：8）（2：7）（3：6）（4：5）	N=9，組數=4	組數=(N-1)÷2
10x10	10	5	（1：9）（2：8）（3：7）（4：6）（5：5）	N=10，組數=5	組數=N÷2
11x11	11	5	（1：10）（2：9）（3：8）（4：7）（5：6）	N=11，組數=5	組數=(N-1)÷2
12x12	12	6	（1：11）（2：10）（3：9）（4：8）（5：7）（6：6）	N=12，組數=6	組數=N÷2
13x13	13	6	（1：12）（2：11）（3：10）（4：9）（5：8）（6：7）	N=13，組數=6	組數=(N-1)÷2
14x14	14	7	(略，請參考附件的詳細記錄)	N=14，組數=7	組數=N÷2
15x15	15	7		N=15，組數=7	組數=(N-1)÷2
16x16	16	8		N=16，組數=8	組數=N÷2
17x17	17	8		N=17，組數=8	組數=(N-1)÷2
18x18	18	9		N=18，組數=9	組數=N÷2
19x19	19	9		N=19，組數=9	組數=(N-1)÷2
20x20	20	10		N=20，組數=10	組數=N÷2

如果將這樣兩個一組、具有相同的類型用數學式子表示，可以用「除以 2」來處理。另外，因為他們倆兩一組，可以將 N 分成奇數與偶數來算，我們就會得到兩種式子：

奇數或偶數	N	分數字的組數
N 為偶數	2、4、6、8、10、12、14、16 ……	組數= N÷2
N 為奇數(1 以外)	3、5、7、9、11、13、15、17 ……	組數=(N-1)÷2
N 為 1	當 N=1，分數字組數 0 這也符合奇數的組數=(N-1)÷2	

所以可以歸納出：N 為奇數時，組數= (N-1)÷2

N 為偶數時，組數= N÷2

(三)　統整正方形數的總和

正方形數總和=（新增正正方形數：1）＋（新增斜正方形數）＋（前一方格正方形數）

每一次的新增=（新增正正方形數：1）＋ (組數：(N-1)÷2 或 N÷2)

我們列出表格如下，想要找找看有沒有規律。

方格	邊長 N	前一方格正方形數	新增的數 (1+組數)	總和	方格	邊長 N	前一方格正方形數	增加的數 (1+組數)	總和
1x1	1	0	1+0＝1	1	2x2	2	1	1+1＝2	3
3x3	3	3	1+1＝2	5	4x4	4	5	1+2＝3	8
5x5	5	8	1+2＝3	11	6x6	6	11	1+3＝4	15
7x7	7	15	1+3＝4	19	8x8	8	19	1+4＝5	24
9x9	9	24	1+4＝5	29	10x10	10	29	1+5＝6	35
11x11	11	35	1+5＝6	41	12x12	12	41	1+6＝7	48
13x13	13	48	1+6＝7	55	14x14	14	55	1+7＝8	63
15x15	15	63	1+7＝8	71	16x16	16	71	1+8＝9	80
17x17	17	80	1+8＝9	89	18x18	18	89	1+9＝10	99
19x19	19	99	1+9＝10	109	20x20	20	109	1+10＝11	120

把增加的數列出，也發現是兩兩一組的規律。(增加的數為 1、2、2、3、3、4、4、5、5、6、6、7、8、8…)

在這種固定增加數的規律中，有沒有方法可以找出所有的總和呢?有部分同學曾經學過利用**數列求總和**公式來算出固定增加數的總數，我們把這個問題跟老師討論，老師說這種狀況叫做等差數列，確實是可以運用梯形面積公式來做計算。所以我們便開始進行總正方形數的計算。

八、 利用 數列求總和公式 計算總正方形數

我們發現這些數會是一個的等差數列，所以就直接用所得到的總數做歸納，並運用數列求總和公式：總和=（前項+後項）×項數÷2，試著找出正方形數的通式。這與我們學過的梯形面面積公式也有相似之處。

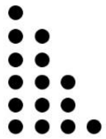
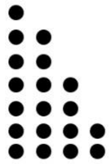
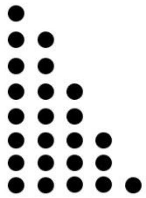
（一） 將數變成一個個的圖形，並作排列

先將方格上的正方形數總和列出來，結果如下：

邊長 N	正方形數總和	與前一數差 (等差數列)	邊長	正方形數總和	與前一數差 (等差數列)
1	1	1	11	41	6
2	3	2	12	48	7
3	5	2	13	55	7
4	8	3	14	63	8
5	11	3	15	71	8
6	15	4	16	80	9
7	19	4	17	89	9
8	24	5	18	99	10
9	29	5	19	109	10
10	35	6	20	120	11

我們把這些數，用小圓點來代表，並排列成梯形。在梯形的排列中，每多加一層，就是新增加的數。下面是 N=1 到 N=8 畫出來的圖形列表。

N	總和	差	圖	上底	下底	高
				梯形公式對應(*說明 1)		
				1	【斜正方形組數】 +1： 奇數(N-1)/2 +1 偶數 N/2 +1	層數：N
1	1	1	●	1	1	1
2	3	2	● ●●	1	2	2
3	5	2	● ●● ●●	1	2	3
4	8	3	● ●● ●● ●●●	1	3	4
5	11	3	● ●● ●● ●●● ●●●	1	3	5

6	15	4		1	4	6
7	19	4		1	4	7
8	24	5		1	5	8

***說明 1：討論上底、下底和高**

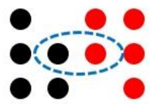
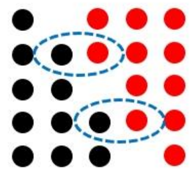
在一個梯形公式中，上底、下底、高是必要的資料，所以我們把這些資料也列出來。列出來後發現，**上底必定是 1**；**下底可以想成「新增加的數」**，也就是新增斜正方形數，再加上新增的正正方形數(1)；而**高剛好是 N** 。

梯形公式對應	上底：	1
	下底：	新增加的數=新增斜正方形數+新增正正方型數 =新增斜正方形數+1 =奇數(N-1)/2 +1　　或　　偶數 N/2 +1
	高：	層數=N

可是用這樣的資料來進行計算，發現在 N=3、5、7 時答案不合，這又是為什麼呢?

N	實際總和	上底	下底	高	公式計算總合	是否相符
		梯形公式對應				
			【斜正方形組數】+1： 奇數(N-1)/2 +1 偶數 N/2 +1	層數：N		
1	1	1	1	1	(1＋1)x1÷2＝1	
2	3	1	2	2	(1＋2)x2÷2＝3	
3	5	1	2	3	(1＋2)x3÷2＝4.5	不符
4	8	1	3	4	(1＋3)x4÷2＝8	
5	11	1	3	5	(1＋3)x5÷2＝10	不符
6	15	1	4	6	(1＋4)x6÷2＝15	
7	19	1	4	7	(1＋4)x7÷2＝17.5	不符

我們實際畫畫看，用梯形面積的原理（用 2 個相同圖形，其中一個旋轉 180 度）來拼湊成矩形，發現 N 為奇數時，無法拼出完整的矩形，所以無法用公式來進行計算的。如下圖：

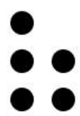
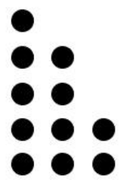
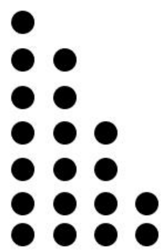
N 為偶數-可以拼出矩形		N 為奇數-無法拼出矩形	
N=2，總數為 3	N=4，總數為 8	N=3，總數為 5	N=5，總數為 11
			
可以用梯形公式		不能用梯形公式	

如果只考慮 N 為偶數，那麼正方形數的總數已經找到通式：

$$總數=\left[\left(1+\left(\frac{N}{2}+1\right)\right)\times(N)\right]\div 2$$

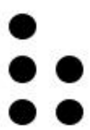
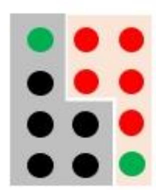
（二） N 為偶數時的改良算法

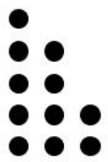
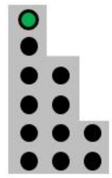
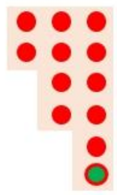
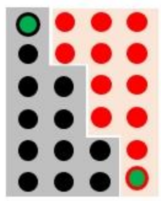
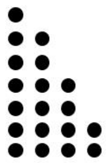
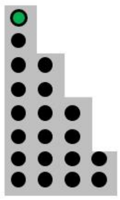
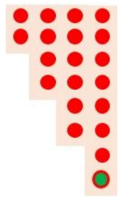
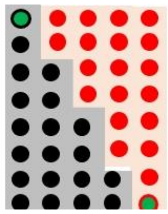
前面已經找到 N 為偶數的通式，接著我們想找 N 為奇數時的通式。從上面的圖中，發現如果 N 為奇數時，無法由梯形拼出矩形的原因，是跟上底(1)只有 1 層有關。因為在 N 為奇數的總正方形數中，每次增加的新數是兩兩一組，而且恰好會有兩數相同的兩層。如下圖：

			
第 1 層 只有一個(1)	新增 2 層 (2，2)	新增 2 層 (3，3)	新增 2 層 (4，4)

為了解決這個問題，我們就把**每一個數都再加 1**，讓這些數都會有兩數相同的 2 層，再進行計算。例如下表的圖：

最後套入梯形公式後，要記得【－1】，把之前加上去的數減回來。

			
N=3，數量=5	第一層上面多加 1 (綠色點)	反向組合成矩形	上底 1，下底(N-1)/2 +1 高 N+1

 N=5，數量=11	 ＋  第一層上面多加 1　　反向組合成梯形	 上底 1，下底(N-1)/2 +1 高 N+1
 N=7，數量=19	 ＋  第一層上面多加 1　　反向組合成梯形	 上底 1，下底(N-1)/2 +1 高 N+1

關於梯形公式對應上底、下底和高：

上底：1

下底：在前面斜正方形增加數的計算中，我們得到的結果是$\frac{N-1}{2}$ ＋1，可寫成$\frac{N+1}{2}$

高：因為要組合成梯形，所以高會變成 N+1

N	方格	總和	上底	下底 $(\frac{N+1}{2})$	新層數 N+1	套入梯形公式後【-1】
1	1x1	1	1	1	2	(1+1) x2÷2-1＝1
3	3x3	5	1	2	4	(1+2) x4÷2-1＝5
5	5x5	11	1	3	6	(1+3) x6÷2-1＝11
7	7x7	19	1	4	8	(1+4) x8÷2-1＝19
9	9x9	29	1	5	10	(1+5) x10÷2-1＝29
11	11x11	41	1	6	12	(1+6) x12÷2-1＝41

驗算之後，這個通式真的能算出實際的答案。

從上面上底、下底與新層數的討論中，把 N 放入就可以得到下面的通式: (N 為奇數)

$$總數=\left[\left(1+\frac{N+1}{2}\right)\times(N+1)\right]\div 2\ -1$$

（三） 通式

比較 N 為偶數和 N 為奇數的通式，發現它們其實是非常相似的。老師請我們試試看，把它們整理成更類似的形式，**<u>最好只留下一點點的不同。</u>**

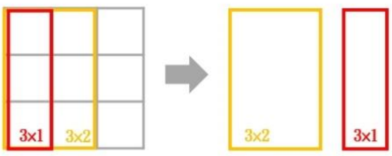
N 為奇數	N 為偶數
總數=$\left[\left(1+\frac{N+1}{2}\right)\times(N+1)\right]\div 2$ - 1 =$\left[\left(\frac{2+N+1}{2}\right)\times(N+1)\right]\div 2$ - 1 =$\left[\left(\frac{N+3}{2}\right)\times(N+1)\right]\div 2$ - 1 =$\left[\left(\frac{(N+3)\times(N+1)}{2}\right)\right]\div 2$ - 1 =$\left[\left(\frac{(N+3)\times(N+1)}{4}\right)\right]$ - 1 = $\frac{(N^2+4N+3)}{4}$ - 1 = $\frac{(N^2+4N+3)-4}{4}$ = $\frac{N^2+4N-1}{4}$	總數=$\left[\left(1+\left(\frac{N}{2}+1\right)\right)\times(N)\right]\div 2$ =$\left[\left(\frac{2+N+2}{2}\right)\times(N)\right]\div 2$ =$\left(\frac{N+4}{2}\right)\times N\div 2$ =$\left(\frac{N^2+4N}{2}\right)\div 2$ =$\left(\frac{N+4N}{4}\right)$

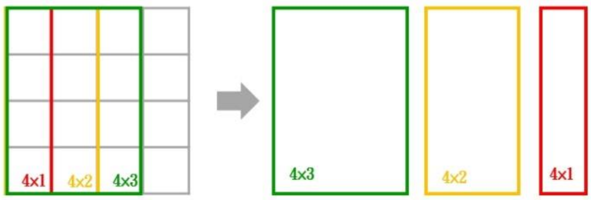
九、 正「長方形」的類型與數量

運用前面的方式，我們使用表格列出正「長方形」的數量，並且也是運用數列求總和的公式計算。

正-長方形的數			
方格紙 邊長 N×N	<u>新增$\boxed{\text{正}}$長方形數</u>	<u>長方形邊長</u>	<u>所有$\boxed{\text{正}}$長方形數</u>
1×1	0	0	0
2×2	1	2×1	1
3×3	2	3×2、3×1	1+2
4×4	3	4×3、4×2、4×1	1+2+3
5×5	4	以此類推	1+2+3+4
6×6	5		1+2+3+4+5
7×7	6		1+2+3+4+5+6
8×8	7		1+2+3+4+5+6+7
9×9	8		1+2+3+4+5+6+7+8
10×10	9		1+2+3+4+5+6+7+8+9

N×N	(N -1)	N×(N -1)、 N×(N -2)、 N×(N -3)、 : N×1	(1＋(N -1)) × (N -1)÷2 ＝$(N^2- N)/2$



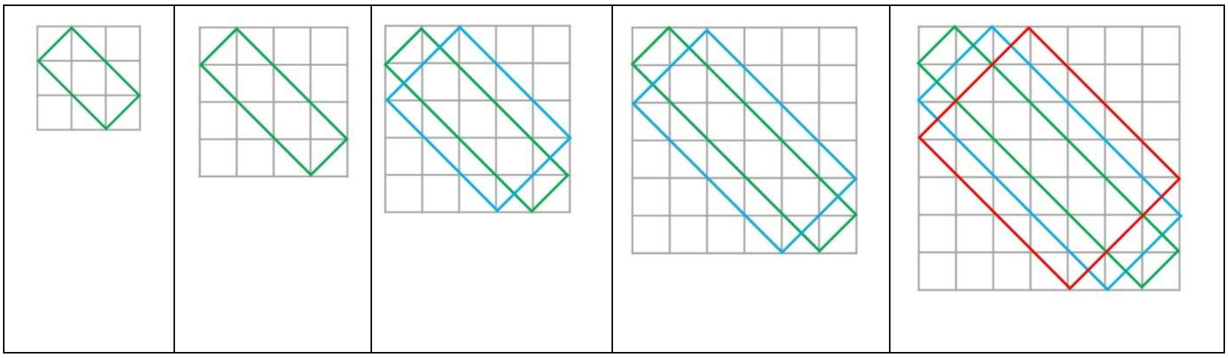


十、 斜「長方形」類型探討

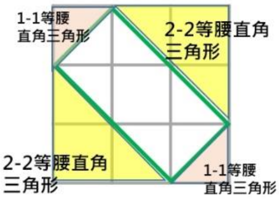
直接在方格紙上畫圖，我們又把斜長方形細分成以下兩種

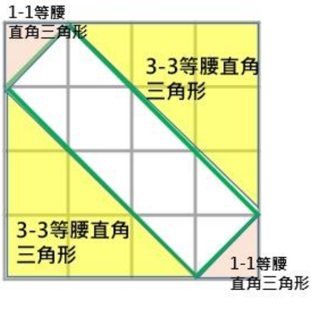
(一) 45 度斜長方形類型

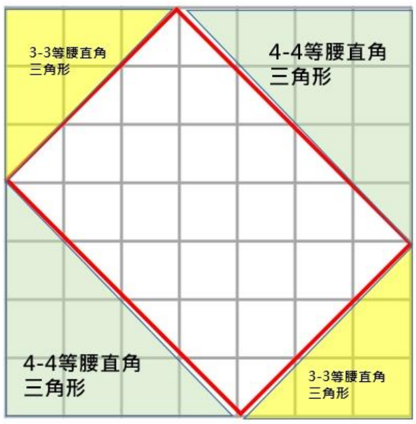
在方格紙上畫出來的斜長方形，有一種的邊，會剛好和方格夾 45 度角。如下圖。



仔細觀察，這種 45 度斜長方形，頂點在方格紙上是有規律的。這是因為他的邊如果要剛好和方格夾 45 度角，四個角必須是等腰直角三角形。但長方形的四個邊又不能等長，所以這 4 個等腰直角三角形，會剛好分成相等的 2 組。如右圖。

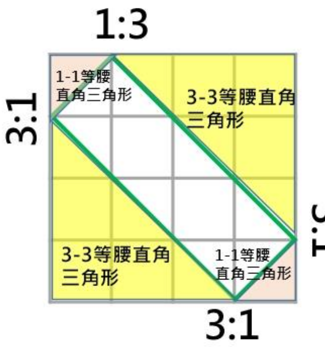


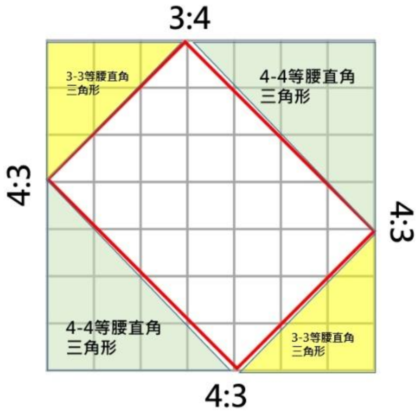




(二) 45 度斜長方形總數

要計算 45 度斜長方形總數，可以運用斜正方形的分數字方法，但本來每一邊都是 a：b，現在要變成 a：b、b：a、a：b、b：a。這種分法的總數會與**分數字的組數**，也就是前面已經歸納出來的「**斜正方形的組數**」很像，但畫在方格紙上會變成 45 度斜長方形。

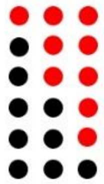
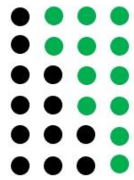




在這裡有一種狀況，若是 a=b，就無法連接成長方形。下表中以刪除線表示差異。

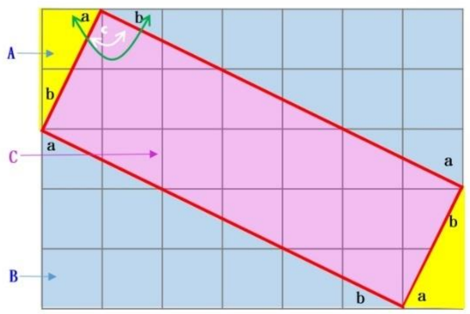
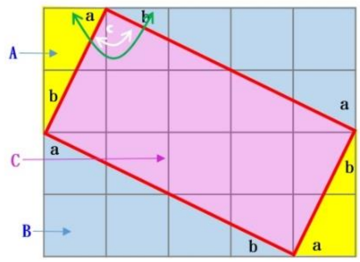
方格	邊長	分數字組數	邊長分數字的比	說明	
		(累計總和)			
1×1	1	0		N=1，組數=0	
2×2	2	0	~~（1：1）~~	N=2，組數=0	
3×3	3	1	（1：2）	N=3，組數=1	組數=(N-1)÷2
4×4	4	1(2)	（1：3）~~（2：2）~~	N=4，組數=2	組數=N÷2-1
5×5	5	2(4)	（1：4）（2：3）	N=5，組數=2	組數=(N-1)÷2
6×6	6	2(6)	（1：5）（2：4）~~（3：3）~~	N=6，組數=3	組數=N÷2
7×7	7	3(9)	（1：6）（2：5）（3：4）	N=7，組數=3	組數=(N-1)÷2
8×8	8	3(12)	（1：7）（2：6）（3：5）~~（4：4）~~	N=8，組數=4	組數=N÷2-1
9×9	9	4(16)	（1：8）（2：7）（3：6）（4：5）	N=9，組數=4	組數=(N-1)÷2
10×10	10	4(20)	（1：9）（2：8）（3：7）（4：6）~~（5：5）~~	N=10，組數=5	組數=N÷2-1
11×11	11	5(25)	（1：10）（2：9）（3：8）（4：7）（5：6）	N=11，組數=5	組數=(N-1)÷2
12×12	12	5(30)	（1：11）（2：10）（3：9）（4：8）（5：7）~~（6：6）~~	N=12，組數=6	組數=N÷2-1
13×13	13	6(36)	（1：12）（2：11）（3：10）（4：9）（5：8）（6：7）	N=13，組數=6	組數=(N-1)÷2
14×14	14	6(42)	(略，請參考附件的詳細記錄)	N=14，組數=7	組數=N÷2-1
15×15	15	7(49)		N=15，組數=7	組數=(N-1)÷2
16×16	16	7(56)		N=16，組數=8	組數=N÷2-1
17×17	17	8(64)		N=17，組數=8	組數=(N-1)÷2
18×18	18	8(72)		N=18，組數=9	組數=N÷2-1
19×19	19	9(81)		N=19，組數=9	組數=(N-1)÷2
20×20	20	9(90)		N=20，組數=10	組數=N÷2-1

所以在上表中的說明，所歸納的組數與 N 的關係，會與分數字的組數，也就是前面已經歸納出來的「斜正方形的組數」很像，但稍有不同。總數計算如下：

N 為奇數-可以拼出矩形		N 為偶數-可以拼出矩形	
N=5，總數為 4	N=7，總數為 9	N=6，總數為 6	N=8，總數為 12
			

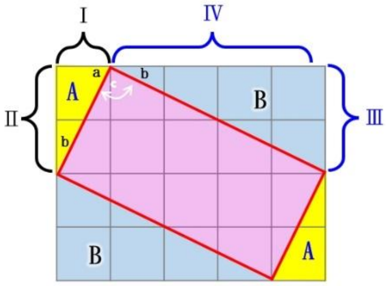
	上底	下底	高	總和
N 為奇數	上底+下底=矩形長 =(N-1)÷2		N-1	【(N-1)÷2】×(N-1) ÷2 $=(N-1)^2/4$
N 為偶數	1	N÷2-1	N2	【1＋(N÷2-1)】×(N-2) ÷2 $=(N^2-2N)/4$

(三) 非 45 度斜長方形類型

說明：(1)角 C 是直角(2)粉紅色的四邊形一定是長方形
 
1. 黃色直角三角形 A 中的角 a 和角 b 會是 90 度(180-直角) 2. 藍色直角三角形 B 中的角 a 和角 b 會是 90 度(180-直角) 3. 黃色直角三角形和藍色直角三角形，因為底和高的比是一樣的(2:1、4:2) (2:1、6:3)，所以角會一樣大。(六年級數學：縮圖與擴大圖) 4. 我們將所有相等的角標示成 a 和 b。 5. 因為 a+b=90，所以綠色箭頭所標示的平角也會是 180 度，180-(a+b)=90，所以四邊形 C 的四個角也都會是直角。 6. 在邊的部分，因為對角的三角形一樣大，可以得知四邊形 C 的對邊都一樣長。 所以可以知道四邊形 C 會是一個長方形。

(四) 非 45 度斜長方形的關鍵數

從上面的類型分析中，我們可以知道，非 45 度斜長方形在方格上，四個角落會形成 2 組的直角三角形(A 和 B)。而這兩組直角三角形底和高的比是一樣，所以中間的四邊形四角才會為直角。



依據 A 和 B 邊長比必須是等比，可以歸納出以下式子：

Ⅰ ：Ⅱ =Ⅲ ：Ⅳ

Ⅰ < Ⅲ 且 Ⅱ <Ⅳ

Ⅰ+Ⅳ為關鍵數，是斜長方形所佔的較長邊格子數，關鍵數不可超過方格邊長，這個斜長方形才能塞進格子裡。例如：1：2＝2：4 ，1+4=5 ，右上圖的長邊就是 5 格。

(五) 非 45 度斜長方形總數

於是依據此狀況，我們慢慢找出非 45 度斜長方形總數

N×N	$x_1 : y_1 = x_2 : y_2$ （關鍵數：$x_1 + y_2 \leq N$）						
	1：2	1：3	1：4	1：5	1：6	1：7	1：8
2x2	×	×	×	×	×	×	×
3x3	×	×	×	×	×	×	×
4x4	×	×	×	×	×	×	×
5x5	1：2=2：4(5)	×	×	×	×	×	×
6x6	×	×	×	×	×	×	×
7x7	1：2=3：6(7)	1：3=2：6(7)	×	×	×	×	×
8x8	×	×	×	×	×	×	×
9x9	1：2=4：8(9)	×	1：4=2：8(9)	×	×	×	×
10x10	×	1：3=3：9(10)	×	×	×	×	×
11x11	1：2=5：10(11)	×	×	1：5=2：10(11)	×	×	×
12x12	×	×	×	×	×	×	×
13x13	1：2=6：12(13)	1：3=4：12(13)	1：4=3：12(13)	×	1：6=2：12(13)	×	×
14x14	×	×	×	×	×	×	×
15x15	1：2=7：14(15)	×	×	×	×	1：7=2：14(15)	×
16x16	×	1：3=5：15(16)	×	1：5=3：15(16)	×	×	×

N×N	$x_1 : y_1 = x_2 : y_2$ （關鍵數：$x_1 + y_2 \leq N$）*前面出現過的相等比						
	2：3	2：4	2：5	2：6	2：7	×	
2x2	×	×	×	×	×	×	
3x3	×	×	×	×	×	×	
4x4	×	×	×	×	×	×	
5x5	×	×	×	×	×	×	
6x6	×	×	×	×	×	×	

7x7	×	×	×	×	×	×	
8x8	2：3=4：6(8)	×	×	×	×	×	
9x9	×	×	×	×	×	×	
10x10	×	2：4=4：8(10)*	×	×	×	×	
11x11	2：3=6：9(11)	×	×	×	×	×	
12x12	×	×	2：5=4：10(12)	×	×	×	
13x13	×	×	×	×	×	×	
14x14	2：3=8：12(14)	2：4=6：12(14)*	×	2：6=4：12(14)*	×	×	
15x15	×	×	×	×	×	×	
16x16	×	×	×	×	2：7=4：14(16)	×	

NxN	$x_1：y_1＝x_2：y_2$ （關鍵數：$x_1＋y_2 \leqq$ N） *前面出現過的相等比						
	3：4	3：5	3：6	3：7	4：5	4：6	4：7
2x2	×	×	×	×	×	×	×
3x3	×	×	×	×	×	×	×
4x4	×	×	×	×	×	×	×
5x5	×	×	×	×	×	×	×
6x6	×	×	×	×	×	×	×
7x7	×	×	×	×	×	×	×
8x8	×	×	×	×	×	×	×
9x9	×	×	×	×	×	×	×
10x10	×	×	×	×	×	×	×
11x11	3：4=6：8(11)	×	×	×	×	×	×
12x12	×	×	×	×	×	×	×
13x13	×	3：5=6：10(13)	×	×	×	×	×
14x14	×	×	×	×	4：5=8：10(14)	×	×
15x15	×	×	3：6=6：12(15)*	×	×	×	×
16x16	×	×	×	×	×	4：6=8：12(16)*	×

NxN	$x_1：y_1＝x_2：y_2$ （關鍵數：$x_1＋y_2 \leqq$ N）				
	5：6	更大的比就不找不到答案了	總和		
2x2	×	×	0		
3x3	×	×	0		
4x4	×	×	0		
5x5	×	×	1		
6x6	×	×	0		
7x7	×	×	2		
8x8	×	×	1		

9×9	×	×	2		
10×10	×	×	1		
11×11	×	×	4		
12×12	×	×	1		
13×13	×	×	5		
14×14	×	×	2		
15×15	×	×	2		
16×16	×	×	3		

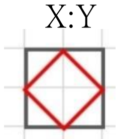
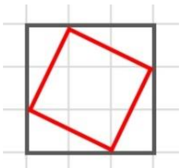
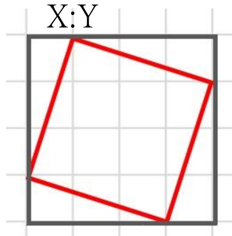
這樣的規律目前還無法找到通式，但有需要時，可以根據這樣的規則慢慢找到在 N×N 非 45 度角的斜長方形總數。

伍、　研究結果

一、　在方格紙上，不同的正正方形和斜正方形的類型。

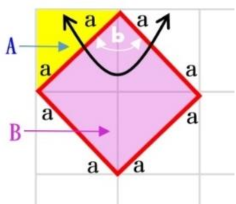
「與方格同向的正方形」來進行討論-我們稱為「正」正方形。

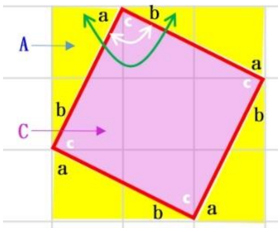
「與方格不同向的、斜的正方形」-我們稱為「斜」正方形。

X:Y 	X:Y 	X:Y 
四個邊分成 X:Y，作斜正方形的頂點。且 X+ Y＝N		

上面這幾個斜正方形，連接的四個點，都在 N×N 方格的邊上。而且，這些正方形的頂點，剛好會把方格上的邊(灰色邊)等分成 1：1、1：2、1：3…A：B，其中的 X+ Y＝N

運用直角三角形中，2 個底角和為 90 度，可以發現這些「斜四邊形」內角都是直角。下面說明一和說明二以圖示法來說明。

說明一：角 b 是直角，且粉紅色的四邊形一定是正方形	
	1. 等腰直角三角形 A (黃色) 中的兩底角 a 會是 45 度。 2. 黃色三角形：a+a=90 度 3. a+b+a=180 度(平角) 4. 所以 **b 會是直角**。 5. 一樣的方法可以說明四邊形 B 的四個角都是直角。 6. 如果把方格上兩個點之間的距離訂為 1，我們也可以從三角形的商高定理中知道，四邊形 B 的邊長都會是$\sqrt{2}$。 所以可以知道四邊形 B 會是一個正方形。

<table>
<tr><th colspan="2">說明二：角 C 是直角，且粉紅色的四邊形一定是正方形</th></tr>
<tr><td>
</td><td>1. 直角三角形 A 中的角 a 和角 b 會是 90 度(180-直角)
2. 黃色三角形：a+b=90 度
3. 四個黃色直角三角形是一樣大的(邊長和角都一樣)。因此我們將所有相等的角標示成 a 和 b。
4. 因為 a+b=90，所以綠色箭頭所標示的平角也會是 180 度，180-(a+b)=90，所以四邊形 C 的四個角也都會是直角。
5. 在邊的部分，運用商高定理的計算，得知四邊形 C 的邊長都會是$\sqrt{5}$。

所以可以知道四邊形 C 會是一個正方形。</td></tr>
</table>

在上面兩種類型的討論中，可以知道四邊形 B 和四邊形 C 都會是正方形。因此，可以推論：連接 N×N 方格邊上的 4 個點，圍出一個四邊形。如果這些點把邊分成 X：Y，此時四角落會出現相同的直角三角形，中間的四邊形就會是正方形。

二、 在方格紙上，不同的正正方形和斜正方形的總數。

運用「每次新增都是最大邊的正方形」、「整數格子邊分數字的組數」，最後用「數列求總和公式」(對應梯形公式)，我們得到正方形的結果：

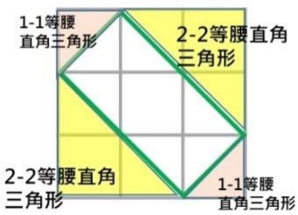
格子紙的邊長 N 為奇數	格子紙的邊長 N 為偶數
總數= $\frac{N^2+4N-1}{4}$	總數=$\left(\frac{N^2+4N}{4}\right)$

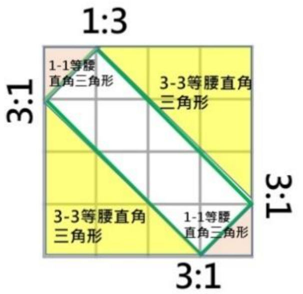
三、 在方格紙上，不同的正長方形和斜長方形的類型。

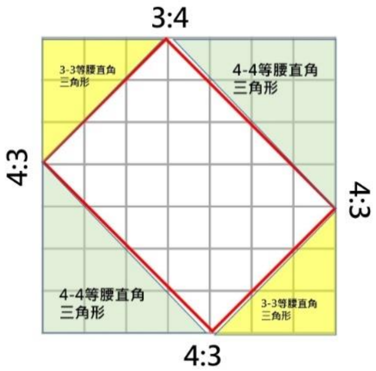
方格紙上的長方形可分為：

（一） 正長方形：長方形的邊和方格紙同方向(重疊)

（二） 45 度角斜長方形：長方形的邊和方格紙夾 45 度角，如下圖。邊長比整數分數字的比。

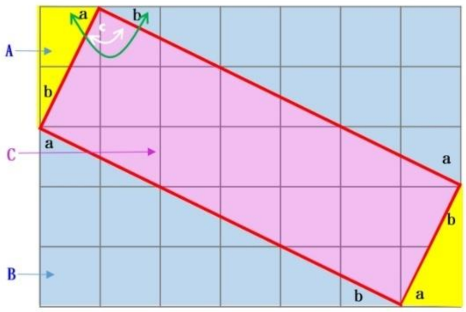


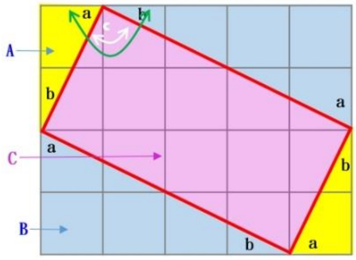




（三） 非 45 度角斜長方形：如下圖

說明：(1)角 C 是直角(2)粉紅色的四邊形一定是長方形





1. 黃色直角三角形 A 中的角 a 和角 b 會是 90 度(180-直角)
2. 藍色直角三角形 B 中的角 a 和角 b 會是 90 度(180-直角)
3. 黃色直角三角形和藍色直角三角形，因為底和高的比是一樣的(2：1、4：2) (2：1、6：3)，所以角會一樣大。(六年級數學：縮圖與擴大圖)
4. 我們將所有相等的角標示成 a 和 b。
5. 因為 a+b=90，所以綠色箭頭所標示的平角也會是 180 度，180-(a+b)=90，所以四邊形 C 的四個角也都會是直角。
6. 在邊的部分，因為對角的三角形一樣大，可以得知四邊形 C 的對邊都一樣長。
   所以可以知道四邊形 C 會是一個長方形。

四、 在方格紙上，不同的正長方形和斜長方形的總數。

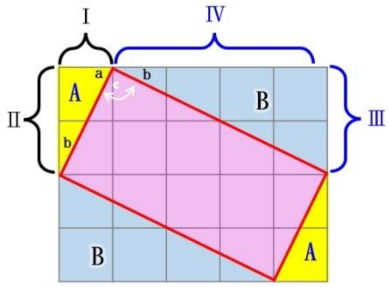
（一） 正長方形：長方形的邊和方格紙同方向(重疊)

總數＝$(N^2- N)/2$

（二） 45 度角斜長方形總數：(數列求總和對應梯形公式)

	上底	下底	高	總和
N 為奇數	上底+下底=矩形長 =(N-1)÷2		N-1	【(N-1)÷2】×(N-1) ÷2 $=(N-1)^2/4$
N 為偶數	1	N÷2-1	N-2	【1＋(N÷2-1)】×(N-2) ÷2 $=(N^2-2N)/4$

（三） 關鍵數與非 45 度角斜長方形總數：



依據邊長比必須是等比的類型，才能連出長方形，可以歸納出以下式子：

Ⅰ：Ⅱ =Ⅲ ：Ⅳ

Ⅰ < Ⅲ 且 Ⅱ <Ⅳ

Ⅰ+Ⅳ為**<u>關鍵數</u>**，是斜長方形所佔的較長邊格子數，關鍵數不可超過方格邊長，這個斜長方形才能塞進格子裡。例如：1：2 = 2：4 ，1+4=5 ，右上圖的長邊就是 5 格。

而總和有規律無通式，需要找出等比、算出關鍵數，才能慢慢找出。

陸、 討論

在做研究的過程，除了找答案以外，還有幾個值得思考的問題：

一、列出表格找到規律

找規律的過程中，很多時候像大海撈針找不到結果，但常常把資料列出表格，把相關類型一個個列出來就找到規律了！這給了我們很大的信心！

二、怪梯形面積的改良算法

正正方形數的總和計算，我們是運用梯形面積求等差級數的原理，經過改良，才算出結果！這種改良算法是用在我們的研究中，原來變化萬千的數學問題也可以利用創意與幾項基本規則進行研究喔!

三、幾何問題與數的計算

在研究的初始，本來是進行幾何的問題，但後來進行總數計算時又運用等差級數的運算。所以在一個數學問題中，包藏了各式各樣的數學原理！

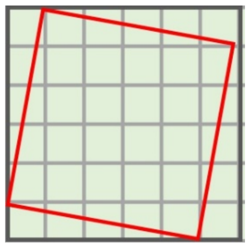
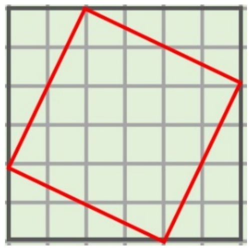
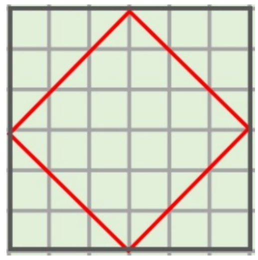
四、重複問題

如果直角三角形的三邊 abc 中，ab 是整數，c 也恰好是整數，就會出現重複計算。例如邊長 5 的正方形，會同時出現在 5x5 的正正方形，和分數字(3：4)的斜正方形。我們查資料，發現這樣的數叫做商高數，下面是我們查到的幾組商高數。

a	b	c
3	4	5
5	12	13
6	8	10
7	24	25
8	15	17
9	40	41

五、斜正方形的面積：

發現斜正方形的角度越「不斜」，面積越大。例如下面這三個斜正方形，左邊分數字 1：的斜正方形面積最大。這可以用商高定先算出斜正方形的邊長，再算出來。

6×6 方格		
斜正方形邊長： $\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$	斜正方形邊長： $\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$	斜正方形邊長： $\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$
		
斜正方形面積：26	斜正方形面積：20	斜正方形面積：18

六、未來研究方向：

我們試著研究方格上的三角形的類型和數量的歸納，未來可以將方格上的三角形分類並持續的研究。

柒、 結論

我們從剪出方格紙上的正方形開始進行研究，除了找到連結正方形和長方形的方法、規律，最後還利用數列求總和公式找到正方形數和長方形的總和，並做出通式正方形：奇數邊長總數= $\frac{N^2+4N-1}{4}$偶數邊長總數=$\left(\frac{N^2+4N}{4}\right)$。長方形分三種結果：正長方形總數：$(N^2-N)/2$、斜長方形 45 度角總數 - 奇數邊長$(N-1)^2/4$、偶數邊長$(N^2-2N)/4$。斜長方形非 45 度角總數有規律，但無通式。看起來很困難的代數通式，其實是身為小學生的我們也可以理解的。

捌、 參考資料

奧斯朋出版編輯群（2018）。圖解數學辭典，遠見天下文化。

「矩形」，取自教育部國語辭典簡編本，2023 年 1 月 3 日取自
https://dict.revised.moe.edu.tw/dictView.jsp?ID=96746&q=1&word=%E7%9F%A9%E5%BD%A2

「等差數列數字和」，數學王子的家，2023 年 1 月 3 日

黃健賓、林祈詮、鍾昕陽、白竟言、葉心慈（2008）。方之律動--方格板上的「斜」正方形。第 48 屆科學展覽會。

玖、　附錄

附錄　分數字的組數

方格	邊長	新增 正正方形數	新增 斜正方形數	邊長分數字的比	前一方格正方形數	總和
2×2	1	1	0		0	1
3×3	2	1	1	（1：1）	1	3
4×4	3	1	1	（1：2）	3	5
5×5	4	1	2	（1：3） （2：2）	5	8
6×6	5	1	2	（1：4） （2：3）	8	11
7×7	6	1	3	（1：5） （2：4） （3：3）	11	15
8×8	7	1	3	（1：6） （2：5） （3：4）	15	19
9×9	8	1	4	（1：7） （2：6） （3：5） （4：4）	19	24
10×10	9	1	4	（1：8） （2：7） （3：6） （4：5）	24	29
11×11	10	1	5	（1：9） （2：8） （3：7） （4：6） （5：5）	29	35
12×12	11	1	5	（1：10） （2：9） （3：8） （4：7） （5：6）	35	41
13×13	12	1	6	（1：11） （2：10） （3：9） （4：8） （5：7） （6：6）	41	48
14×14	13	1	6	（1：12） （2：11） （3：10） （4：9） （5：8） （6：7）	48	55
15×15	14	1	7	（1：13） （2：12） （3：11） （4：10） （5：9） （6：8） （7：7）	55	63
16×16	15	1	7	（1：14） （2：13） （3：12） （4：11） （5：10） （6：9） （7：8）	63	71

17×17	16	1	8	（1：15） （2：14） （3：13） （4：12） （5：11） （6：10） （7：9） （8：8）	71	80
18×18	17	1	8	（1：16） （2：15） （3：14） （4：13） （5：12） （6：11） （7：10） （8：9）	80	89
19×19	18	1	9	（1：17） （2：16） （3：15） （4：14） （5：13） （6：12） （7：11） （8：10） （9：9）	89	99
20×20	19	1	9	（1：18） （2：17） （3：16） （4：15） （5：14） （6：13） （7：12） （8：11） （9：10）	99	109

【評語】080405

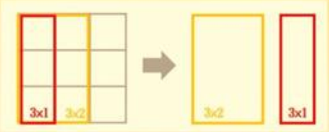
1. 能從老師所給的一個小任務出發，繼而發展出一系列有趣的數學問題，並逐步進行探究，符合科學探究的精神。

2. 作者透過方格紙的點數，找出正擺、斜放等各種大小尺寸的正方形及長方形種類，並進而推導出公式。研究過程中嘗試把方格上的邊等分成 X:Y(其中 X + Y＝N)來探討「斜正方形」，除能更有系統地討論，亦能避免重複計數，不失為一個好方法。

3. 整體而言，研究過程實在，動機鮮明且研究結果明確。

作品海報

數一數

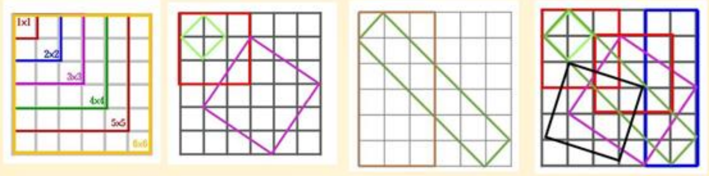


方格紙上的正方形和長方形

壹、研究動機

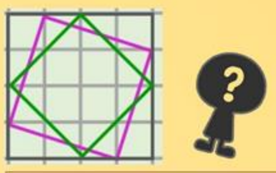
上數學課平面圖形(數學五上)的時候，老師給我們一張方格紙，請大家運用**方格的格子點**試著剪一剪，剪出正方形。同學們剪出了各式各樣不同的正方形。

這是一個長邊6格和寬邊6格的方格紙，運用方格紙上的格子，可以很快速地找到1x1、2x2、3x3、4x4、5x5、6x6的正方形(下圖左)。也有人不照著方格的線來剪，而是運用方格紙上的<u>格子點</u>，剪出一個斜斜的正方形(下圖中)。還有同學沒看清楚，也沒注意老師的說明，剪出長方形(下圖右2)。



我們改用畫圖的方式，<u>找到更多不同的正方形</u>，沒料到可以畫出來的正方形很多，<u>數也數不清楚</u>，還有同學因為線條太亂了，竟然畫出長方形，連他自己也沒有發現。

這麼多不同邊長的正方形和長方形。總數量是多少呢?有規律嗎？在生活中，如果想把**正方形或長方形的點心或禮物，塞進禮盒裡**，好像很類似這個數學問題的原理。於是我們便開始研究這一個正方形和長方形數量的問題。



點心如何塞進**禮盒**?
禮物如何塞進**禮盒**?

貳、研究目的

一、在方格紙上，不同的正正方形和斜正方形的類型。
二、在方格紙上，不同的正正方形和斜正方形的總數。
三、在方格紙上，不同的正長方形和斜長方形的類型。
四、在方格紙上，不同的正長方形和斜長方形的總數。
五、嘗試歸納通式。

參、研究過程或方法

一 名詞解釋(本研究中所使用，自行定義的名詞)

「正」正方形：邊長與方格線同方向、重疊的正方形
「斜」正方形：邊長與方格線不同向、不重疊的正方形
「正」長方形：邊長與方格線同方向、重疊的長方形
「斜」長方形：邊長與方格線不同向、不重疊的長方形

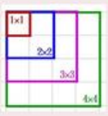
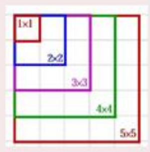
二 研究限制

本研究只研究可以在格子點上連接的正方形和長方形。不同的正方形與長方形指的是邊長、面積不相同的正方形與長方形。

三 找出N×N正方形方格上的正方形數

(一)與方格同向-正正方形數

在1x1的方格上，正正方形會有1種，最大邊長為1；
在2x2的方格上，正正方形會有2種，最大邊長為2；
在3x3的方格上，正正方形會有3種，最大邊長為3；
<u>**推測：在NxN的方格上，正正方形會有N種，最大邊長為N**</u>

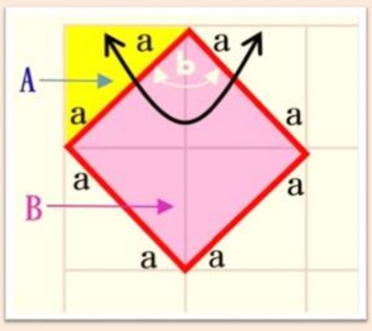
1x1	2x2	3x3	4x4	5x5
				

(二)斜正方形的類型探討

接著討論「與方格不同向、斜的正方形」。運用直角三角形中，2個底角和為90度，可以發現這些「斜四邊形」內角都是直角。下面說明一和說明二以圖示法來說明。

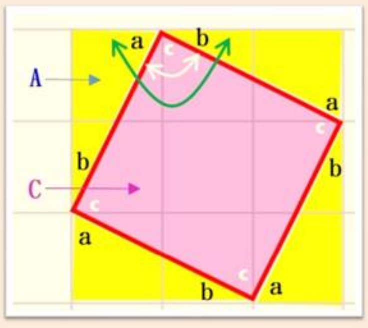
說明一:角b是直角，且粉紅色的四邊形一定是正方形

1. 等腰直角三角形A（黃色）中的兩底角a會是45度。
2. 黃色三角形：a+a=90度
3. a+b+a=180度(平角)
4. 所以b會是<u>直角</u>。
5. 一樣的方法可以說明四邊形B的四個角都是直角。
6. 如果把方格上兩個點之間的距離訂為1，我們也可以從三角形的商高定理中知道，四邊形B的邊長都會是$\sqrt{2}$。<u>**所以可以知道四邊形B會是一個正方形。**</u>



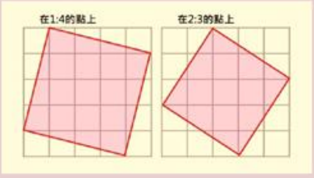
說明二:角C是直角，且粉紅色的四邊形一定是正方形

1. 直角三角形A中的兩底角a和b會是90度(180-直角)
2. 黃色三角形：a+b=90度
3. 四個黃色直角三角形是一樣大的(邊長和角都一樣)。因此我們將所有相等的角標示成a和b。
4. 因為a+b=90，所以綠色箭頭所標示的平角也會是180度，180-(a+b)=90，所以四邊形C的四個角也都會是直角。
5. 在邊的部分，運用商高定理的計算，得知四邊形C的邊長都會是$\sqrt{5}$。 <u>**所以可以知道四邊形C會是一個正方形。**</u>

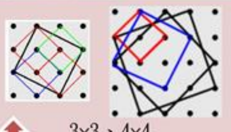
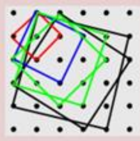
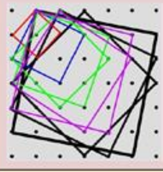


(三)與方格不同向-斜正方形數

<u>1.將「**整數**方格上的邊」以「分數字」的方法</u>，就可以找到不同的斜正方形。

	邊長	邊長分數字		組數	圖例
1x1	1	無			
2x2	2	1：1		1	
3x3	3	1：2		1	
4x4	4	1：3	2：2	2	
5x5	5	1：4	2：3	2	

2.原有+新增：
當方格是2x2時，斜正方形數為「1x1斜正方形數」+「新增2x2斜正方形數」；
當方格是3x3時，斜正方形數為「2x2斜正方形數」+「新增3x3斜正方形數」；
當方格是4x4時，斜正方形數為「3x3斜正方形數」+「新增4x4斜正方形數」；

斜正方形圖示	斜正方形數	斜正方形圖示	斜正方形數
 1x1、2x2	0、 1	 3x3、4x4	2、4
	6 (圖中彩色的斜正方形在前一方格已出現)		9 (黑3)(紫2)(綠2)(藍1)(紅1)

圖中4個彩色的斜正方形是邊長相同，只能算1個

由上面這些實際的例子發現，斜正方形數會是：
<u>前一方格的斜正方形數 + **新方格邊上點**連接的斜正方形數</u>。例如:
<u>總正方形數 = 前一方格的正方形數 + 新增邊上點連接的正方形數</u>。

(四)歸納方格上的正方形數

A 新增正正方形數：1
B 新增斜正方形數：分數字的組數
C 前一方格正方形數

A<u>.**新增正正方形數**</u>：每次都會加1。
B<u>.**新增斜正方形數**</u>：分數字的組數
我們把分數字的結果單獨列出表格來，發現組數是兩個兩個一組，每多增一組組數都會增加1。

新增斜正方形數

方格 NxN	邊長	分數字組數	邊長分數字的比	說明	
1x1	1	0		N=1，組數=0	
2x2	2	1	（1：1）	N=2，組數=1	組數=N÷2
3x3	3	1	（1：2）	N=3，組數=1	組數=(N-1)÷2
4x4	4	2	（1：3）（2：2）	N=4，組數=2	組數=N÷2
5x5	5	2	（1：4）（2：3）	N=5，組數=2	組數=(N-1)÷2
6x6	6	3	（1：5）（2：4）（3：3）	N=6，組數=3	組數=N÷2
7x7	7	3	（1：6）（2：5）（3：4）	N=7，組數=3	組數=(N-1)÷2
8x8	8	4	（1：7）（2：6）（3：5）（4：4）	N=8，組數=4	組數=N÷2
9x9	9	4	（1：8）（2：7）（3：6）（4：5）	N=9，組數=4	組數=(N-1)÷2
10x10	10	5	（1：9）（2：8）（3：7）（4：6）（5：5）	N=10，組數=5	組數=N÷2
11x11	11	5	（1：10）（2：9）（3：8）（4：7）（5：6）	N=11，組數=5	組數=(N-1)÷2

如果將這樣兩個一組、具有相同的類型用數學式子表示，可以用「除以2」來處理。另外，因為他們倆兩一組，可以將N分成奇數與偶數來算，我們就會得到兩種式子：

N為奇數時，組數= (N-1)÷2
N為偶數時，組數= N÷2

(五)統整正方形數的總和

正方形數總和=（新增正正方形數：1）＋（新增斜正方形數）
＋（前一方格正方形數）

每一次新增=1＋斜正方形數= 1＋(組數：(N-1)÷2或N÷2)

我們列出表格如下，想要找找看有沒有規律。

方格	邊長 N	前一方格正方形數	新增的數 (1+組數)	總和	方格	邊長 N	前一方格正方形數	新增的數 (1+組數)	總和
1x1	1	0	1+0＝1	1	2x2	2	1	1+1＝2	3
3x3	3	3	1+1＝2	5	4x4	4	5	1+2＝3	8
5x5	5	8	1+2＝3	11	6x6	6	11	1+3＝4	15
7x7	7	15	1+3＝4	19	8x8	8	19	1+4＝5	24
9x9	9	24	1+4＝5	29	10x10	10	29	1+5＝6	35
11x11	11	35	1+5＝6	41	12x12	12	41	1+6＝7	48
13x13	13	48	1+6＝7	55	14x14	14	55	1+7＝8	63
15x15	15	63	1+7＝8	71	16x16	16	71	1+8＝9	80
17x17	17	80	1+8＝9	89	18x18	18	89	1+9＝10	99
19x19	19	99	1+9＝10	109	20x20	20	109	1+10＝11	120

我們發現這些數會是一個的等差數列，所以下面就直接用所得到的總數，並運用數列求總和公式做歸納。

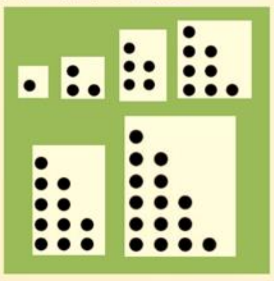
四 運用數列求總和公式

邊長N	正方形數總和	與前一數差 (等差數列)	邊長N	正方形數總和	與前一數差 (等差數列)
1	1	1	11	41	6
2	3	2	12	48	7
3	5	2	13	55	7
4	8	3	14	63	8
5	11	3	15	71	8
6	15	4	16	80	9
7	19	4	17	89	9
8	24	5	18	99	10
9	29	5	19	109	10
10	35	6	20	120	11

(一)將數變成一個個小圓點，排列成梯形

老師請我們把這些數用小圓點來代表，並排列成梯形。在梯形的排列中，每多加一層，就是新增加的數。下面是N=1到N=6畫出來的圖形列表。

N	總和	差	上底	下底(*說明1)	高(層數:N)
1	1	1	1	1	1
2	3	2	1	2	2
3	5	2	1	2	3
4	8	3	1	3	4
5	11	3	1	3	5
6	15	4	1	4	6



(*說明1)【斜正方形組數】 +1：奇數(N-1)/2 +1
偶數N/2 +1

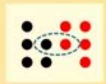
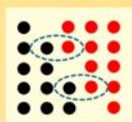
在一個梯形公式中，上底、下底、高是必要的資料。列出來後發現，**上底必定是1**；**下底可以想成「新增加的數」**，也新增斜正方形數，再加上新增的正正方形數(1)；而**高剛好是N**。

上底： 1
下底：新增加的數=新增斜正方形數+新增正正方型數
=新增斜正方形數+1
=奇數(N-1)/2 +1　　或　　偶數N/2 +1
高　：層數=N

N	總和	差	上底	下底	高	公式計算總合	是否相符
1	1	1	1	1	1	(1＋1)x1÷2＝1	
2	3	2	1	2	2	(1＋2)x2÷2＝3	
3	5	2	1	2	3	(1＋2)x3÷2＝4.5	不符
4	8	3	1	3	4	(1＋3)x4÷2＝8	
5	11	3	1	3	5	(1＋3)x5÷2＝10	不符
6	15	4	1	4	6	(1＋4)x6÷2＝15	
7	19	4	1	4	7	(1＋4)x7÷2＝17.5	不符

?可是用這樣的資料來進行計算，發現在N=3、5、7時答案不合，這又是為什麼呢?

原來如此！老師請我們實際用梯形面積的原理來拼湊，發現N為奇數時無法拼出完整的矩形，所以是不能運用梯形面積公式來進行計算的。如下圖:

N為偶數-可以拼出矩形		N為奇數-無法拼出矩形	
N=2，總數為3	N=4，總數為8	N=3，總數為5	N=5，總數為11
			
可以用梯形公式		不能用梯形公式	

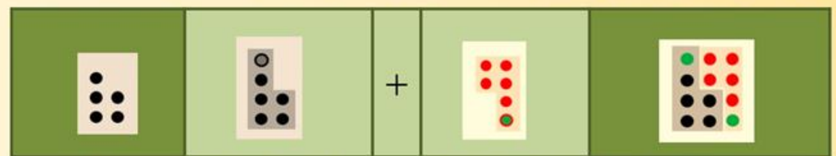
如果只考慮N為偶數，那麼正方形數的總數已經找到通式：

$$總數=\left[\left(1+\left(\frac{N}{2}+1\right)\right)\times(N)\right]\div 2$$

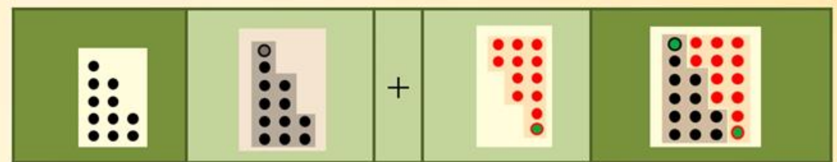
(二)N為奇數時的改良算法

如果N為奇數時，無法由梯形拼出矩形的原因，是跟上底(1)只有1層有關。因為在N為奇數的總正方形數中，每次增加的新數是兩兩一組，而且恰好會有兩數相同的兩層。

若把每一個數都再加1，讓這些數都會有兩數相同的兩層，再進行計算。例如下表的圖：**最後套入梯形公式後要記得【－1】**。



N=3，數量=5	第一層上面多加1	+	反向組合成梯形	上底1 下底(N-1)/2 +1 高N+1



N=5，數量=11	第一層上面多加1	+	反向組合成梯形	上底1 下底(N-1)/2 +1 高N+1

關於改良算法的上底、下底和高：

上底：1

下底：在前面斜正方形增加數的計算中，我們得到的結果是(N-1)/2+1，可寫成(N+1)/2

高：因為要組合成梯形，所以高會變成N+1

N	方格	總和	上底	下底$(\frac{N+1}{2})$	新層數N+1	套入梯形公式後【-1】
1	1x1	1	1	1	2	(1+1) x2÷2-1＝1
3	3x3	5	1	2	4	(1+2) x4÷2-1＝5
5	5x5	11	1	3	6	(1+3) x6÷2-1＝11
7	7x7	19	1	4	8	(1+4) x8÷2-1＝19
9	9x9	29	1	5	10	(1+5) x10÷2-1＝29
11	11x11	41	1	6	12	(1+6) x12÷2-1＝41

驗算之後，這個通式真的能算出實際的答案。

從上面上底、下底與新層數的討論中，把N放入就可以得到通式: $\left[\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{N+1}}{\mathbf{2}}\right)\times(\mathbf{N+1})\right]\div\mathbf{2}\ -\ \mathbf{1}$

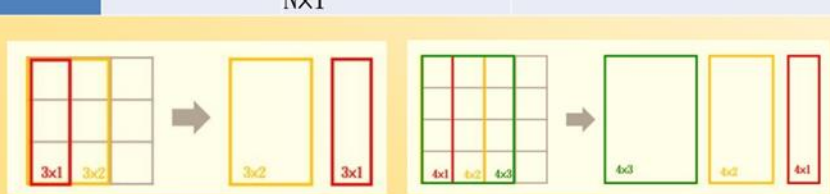
(三)通式　比較N為偶數和N為奇數的通式，發現它們其實是非常相似的。老師請我們試試看，把它們整理成更類似的形式，**最好只留下一點點的不同。**

N為奇數	N為偶數
$總數=\left[\left(1+\frac{N+1}{2}\right)\times(N+1)\right]\div 2-1$ $=\left[\left(\frac{2+N+1}{2}\right)\times(N+1)\right]\div 2-1$ $=\left[\left(\frac{N+3}{2}\right)\times(N+1)\right]\div 2-1$ $=\left[\left(\frac{(N+3)\times(N+1)}{2}\right)\right]\div 2-1$ $=\left[\left(\frac{(N+3)\times(N+1)}{4}\right)\right]-1$ $=\frac{(N^2+4N+3)}{4}-1$ $=\frac{(N^2+4N+3)-4}{4}$ $=\frac{N^2+4N-1}{4}$	$總數=\left[\left(1+\left(\frac{N}{2}+1\right)\right)\times(N)\right]\div 2$ $=\left[\left(\frac{2+N+2}{2}\right)\times(N)\right]\div 2$ $=\left(\frac{N+4}{2}\right)\times N\div 2$ $=\left(\frac{N^2+4N}{2}\right)\div 2$ $=\left(\frac{N^2+4N}{4}\right)$

五 正長方形的類型與數量

運用前面的方式，我們使用表格列出正「長方形」的數量，並且也是運用**數列求總和**公式求出總和。

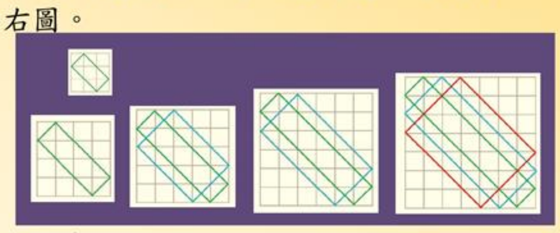
正 － 長方形數			
方格紙邊長	新增正長方形數	長方形邊長	所有正長方形數
1x1	0	0	0
2x2	1	2x1	1
3x3	2	3x2、3x1	1+2
4x4	3	4x3、4x2、4x1	1+2+3
NxN	(N -1)	Nx(N -1)、 Nx(N -2)、 Nx(N -3)、 : Nx1	(1＋(N -1)) x (N -1)÷2 ＝$(N^2-N)/2$



六-1 斜長方形的類型與總數

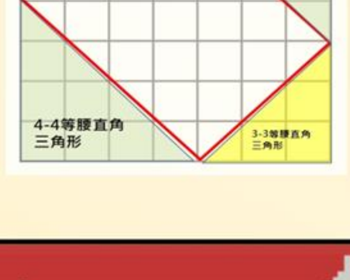
（一） 45度斜長方形類型

在方格紙上畫出來的斜長方形，有一種的邊，會剛好和方格夾45度角。如右圖。



仔細觀察，這種45度斜長方形，頂點在方格紙上是有規律的。這是因為他的邊如果要剛好和方格夾45度角，四個角必須是等腰直角三角形。

但長方形的四個邊又不能等長，所以這4個等腰直角三角形，會剛好分成相等的2組。如右圖。



續六　斜長方形的類型與總數

(二)45度斜長方形總數

要計算45度斜長方形總數，可運用分數字的方法，但本來每一邊都**是a：b，現在四邊改為a：b、b：a、a：b、b：a**。

這種分法的總數會與**分數字的組數**，也就是前面已經歸納出來的「**斜正方形的組數**」很像，但畫在方格紙上會變成45度斜長方形。

在這裡有一種狀況，若是a=b，就無法連接成長方形。下表中以刪除線表示。

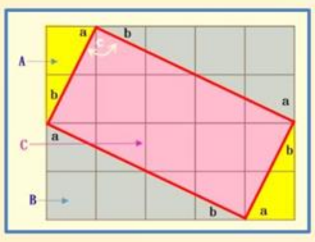
方格	邊長	分數字組數（累計總和）	邊長分數字的比	說明	
1x1	1	0		N=1，組數=0	
2x2	2	0	~~(1：1)~~	N=2，組數=0	
3x3	3	1	(1：2)	N=3，組數=1	組數=(N-1)÷2
4x4	4	1(2)	(1：3) ~~(2：2)~~	N=4，組數=2	組數=N÷2-1
5x5	5	2(4)	(1：4) (2：3)	N=5，組數=2	組數=(N-1)÷2
6x6	6	2(6)	(1：5) (2：4) ~~(3：3)~~	N=6，組數=3	組數=N÷2
7x7	7	3(9)	(1：6) (2：5) (3：4)	N=7，組數=3	組數=(N-1)÷2
8x8	8	3(12)	(1：7) (2：6) (3：5) ~~(4：4)~~	N=8，組數=4	組數=N÷2-1
9x9	9	4(16)	(1：8) (2：7) (3：6) (4：5)	N=9，組數=4	組數=(N-1)÷2
10x10	10	4(20)	(1：9) (2：8) (3：7) (4：6) ~~(5：5)~~	N=10，組數=5	組數=N÷2-1
11x11	11	5(25)	(1：10) (2：9) (3：8) (4：7) (5：6)	N=11，組數=5	組數=(N-1)÷2
12x12	12	5(30)	(1：11) (2：10) (3：9) (4：8) (5：7) ~~(6：6)~~	N=12，組數=6	組數=N÷2-1
13x13	13	6(36)	(1：12) (2：11) (3：10) (4：9) (5：8) (6：7)	N=13，組數=6	組數=(N-1)÷2

上表所歸納的組數與N的關係，會與**分數字的組數**，也就是前面已經歸納出來的「斜正方形的組數」很接近。總數計算分成奇數與偶數。

	上底	下底	高	總和
N為奇數	上底+下底=矩形長 =(N-1)÷2		N-1	【(N-1)÷2】×(N-1) ÷2 =$(N-1)^2$ /4
N為偶數	1	N÷2-1	N-2	【1+(N÷2-1)】×(N-2) ÷2 =(N^2-2N)/4

(三)非45度斜長方形類型

1. 黃色直角三角形A中的兩底角a和b會是90度(180-直角)
2. 藍色直角三角形B中的兩底角a和b會是90度(180-直角)
3. 黃色直角三角形和藍色直角三角形，因為底和高的比是一樣的(2:1、4:2) (2:1、6:3)，所以角會一樣大。
4. 我們將所有相等的角標示成a和b。
5. 因為a+b=90，所以藍色箭頭所標示的平角也會是180度，180-(a+b)=90，所以四邊形C的四個角也都會是直角。
6. 在邊的部分，因為對角的三角形一樣大，可以得知四邊形 C的對邊都一樣長。



所以可以知道四邊形C會是一個長方形。

(四)非45度斜長方形總數

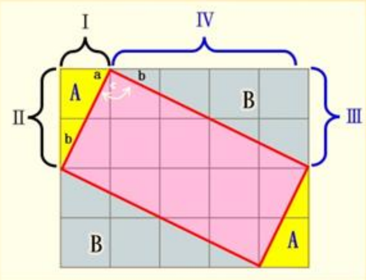
從上面的分析中，我們可以知道，非45度斜長方形在方格上，四個角落會形成2組的直角三角形。而這兩組直角三角形底和高的比是一樣，所以中間的四邊形的四角為直角。

依據邊長比必須是等比的類型，可以歸納出以下式子：

Ⅰ：Ⅱ　=Ⅲ　：Ⅳ

Ⅰ　<　Ⅲ　且　Ⅱ　<Ⅳ

Ⅰ+Ⅳ為關鍵數，是斜長方形所佔的較長邊的格子數，關鍵數不可超過方格邊長，這個斜長方形才能塞進格子裡。



例如：

1：2 = 2：4

Ⅰ+Ⅳ = 1+4=5 (5是關鍵數)

左圖的<u>長邊</u>就是5格。

(五)找出非45度斜長方形總數

N×N	$a_1：b_1=a_2：b_2$　(關鍵數：a_1+b_2 ≦N)						
	1：2	1：3	1：4	1：5	1：6	1：7	1：8
2x2	×	×	×	×	×	×	×
3x3	×	×	×	×	×	×	×
4x4	×	×	×	×	×	×	×
5x5	1：2=2：4(5)	×	×	×	×	×	×
6x6	×	×	×	×	×	×	×
7x7	1：2=3：6(7)	1：3=2：6(7)	×	×	×	×	×
8x8	×	×	×	×	×	×	×
9x9	1：2=4：8(9)	×	1：4=2：8(9)	×	×	×	×
10x10	×	1：3=3：9(10)	×	×	×	×	×
11x11	1：2=5：10(11)	×	×	1：5=2：10(11)	×	×	×
12x12	×	×	×	×	×	×	×
13x13	1：2=6：12(13)	1：3=4：12(13)	1：4=3：12(13)	×	1：6=2：12(13)	×	×
14x14	×	×	×	×	×	×	×
15x15	1：2=7：14(15)	×	×	×	×	1：7=2：14(15)	×
16x16	×	1：3=5：15(16)	×	1：5=3：15(16)	×	×	×

N×N	$a_1：b_1=a_2：b_2$　(關鍵數：a_1+b_2 ≦N) *前面出現過的相等比					
	2：3	2：4	2：5	2：6	2：7	×
2x2	×	×	×	×	×	×
3x3	×	×	×	×	×	×
4x4	×	×	×	×	×	×
5x5	×	×	×	×	×	×
6x6	×	×	×	×	×	×
7x7	×	×	×	×	×	×
8x8	2：3=4：6(8)	×	×	×	×	×
9x9	×	×	×	×	×	×
10x10	×	2：4=4：8(10)*	×	×	×	×
11x11	2：3=6：9(11)	×	×	×	×	×
12x12	×	×	2：5=4：10(12)	×	×	×
13x13	×	×	×	×	×	×
14x14	2：3=8：12(14)	2：4=6：12(14)*	×	2：6=4：12(14)*	×	×
15x15	×	×	×	×	×	×
16x16	×	×	×	×	2：7=4：14(16)	×

這樣的規律目前還無法找到通式，但有需要時，可以根據這樣的規則慢慢找到在N×N斜長方形的總數。

肆、研究結果

一、不同的正正方形和斜正方形的類型：

「與方格<u>同向</u>的正方形」我們稱為「正」正方形。

「與方格<u>不同向</u>的、斜的正方形」我們稱為「斜」正方形。

二、不同的正正方形和斜正方形的總數：

運用「每次新增都是最大邊的正方形」、「整數格子邊分數字的組數」、「梯形面積求總和」，我們得到正方形的結果：

格子紙的邊長N為奇數	格子紙的邊長N為偶數
總數= $\frac{N^2+4N-1}{4}$	總數= $\left(\frac{N^2+4N}{4}\right)$

三、在方格紙上，不同長方形的類型：

<u>長方形可分為：</u>

(一)正長方形：長方形的邊和方格紙同方向(重疊)

(二)45度角斜長方形：長方形的邊和方格紙夾45度角，邊長比整數分數字的比。

(三)非45度角斜長方形

四、正長方形和斜長方形的總數：

(一)正長方形：長方形的邊和方格紙同方向(重疊)

總數＝(N^2-N)/2

(二) 45度角斜長方形總數：

	總和
N為奇數	【(N-1)÷2】×(N-1) ÷2　=$(N-1)^2$ /4
N為偶數	【1+(N÷2-1)】×(N-2) ÷2 =(N^2-2N)/4

(三)非45度角斜長方形總數：

<u>總和有規律但無通式，需要慢慢找出</u>。

柒、參考資料

奧斯朋出版編輯群(2018)。圖解數學辭典，遠見天下文化。

「矩形」，取自教育部國語辭典簡編本，2023年1月3日取自 https://dict.revised.moe.edu.tw/dictView.jsp?ID=96746&q=1&word=%E7%9F%A9%E5%BD%A2

「等差數列數字和」，數學王子的家，2023年1月3日取自http://euler.tN.edu.tw/

黃健賓、林祈詮、鍾昕陽、白竟言、葉心慈(2008)。方之律動--方格板上的「斜」正方形。第48屆科學展覽會。

伍、討論

一、列出表格找到規律

找規律的過程中，把相關類型一個個列出來就找到規律了！這給了我們很大的信心！

二、數列求總和的改良算法

正正方形數的總和計算，我們是運用數列求總和公式求等差級數的原理，經過改良，才算出結果！這種改良算法是用在我們的研究中，原來變化萬千的數學問題也可以利用創意與幾項基本規則進行研究喔!

三、幾何問題與數的計算

在研究的初始，本來是進行幾何的問題，但後來進行總數計算時又運用等差級數的運算。所以在一個數學問題中，包藏了各式各樣的數學原理。

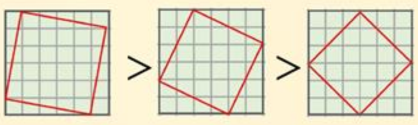
四、重複問題

如果直角三角形的三邊abc中，ab是整數，c也恰好是整數，就會出現重複計算。例如邊長5的正方形，會同時出現在5x5的正正方形，和分數字(3：4)的斜正方形。我們查資料，發現這樣的數叫做商高數，右表是我們查到的幾組商高數。

a	b	c
3	4	5
5	12	13
6	8	10
7	24	25
8	15	17
9	40	41
11	60	61
12	35	37
13	84	85
16	63	65
20	21	29

五、斜正方形的面積：

同一個方格紙上，連結邊上點的斜正方形，角度越「不斜」，面積越大。



六、未來研究方向：

未來可以將方格上的三角形分類並持續的研究。

陸、結論

從剪出方格紙上的正方形開始進行研究，除了找到連結正方形和長方形的方法、規律，最後還利用**數列求總和公式**找到正方形數和長方形的總和，並做出通式正方形：奇數邊長總數= $\frac{N^2+4N-1}{4}$　偶數邊長總數= $\left(\frac{N^2+4N}{4}\right)$。長方形分三種結果：正長方形總數：($N^2$-N)/2、斜長方形45度角總數 －奇數邊長$(N-1)^2$ /4、偶數邊長(N^2-2N)/4。斜長方形非45度角總數有規律，但無通式。看起來很困難的代數通式，其實是身為小學生的我們也可以理解的。