

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

第二名

080404

開闔有度聚散離奇

學校名稱：臺北市私立靜心高級中學(小學部)

作者： 小六 曾裕展 小六 袁巍愷 小六 藍妙涵 小六 林其翰	指導老師： 陳慧娟 謝智偉
---	-----------------------------

關鍵詞：剪刀間形、封閉剪刀組、正 n 邊形

摘要

在「拼組相同剪刀、剪刀組能完全開合」條件下，我們發現若 4 段臂兩兩等長，則能拼出直線行進剪刀組；若軸心不在 2 臂中點，則能拼出弧線行進剪刀組；若 4 段臂不全等長，則能拼出斜線行進剪刀組。

將弧線行進剪刀組頭尾相拼，形成封閉剪刀組，當其剪刀間形的變化是三角形時，內圈會圍成正 n 邊形，我們能依此算出在平面中，拼成封閉剪刀組所需的剪刀數量。在彎曲臂剪刀部分，只有當彎曲臂夾角皆相等，且夾角為正 n 邊形一內角度數時，才能拼成封閉剪刀組，其能在平面中朝圓心、圓周作變動，但不能像直線與斜線行進剪刀組般能無限網狀拼組。

拼組、操控剪刀組能增加面積、體積或折疊縮小，將此應用在太空科技中，能節省運送太陽能板的空間。

壹、研究動機

伸縮玩具(如圖 1)是由許多相同的 X 構造組成，當扣壓板機，改變一個 X 間的夾角，就能帶動全部 X 一起變動，放開板機，X 便縮回原狀，非常有趣。我們把 X 稱為剪刀，想知道剪刀一定要等長且軸心在正中央，才具有伸縮效果嗎？如果改變長度或改變軸心位置，結果會如何？伸縮效果只能直線前進嗎？有無可能變成斜線或轉彎呢？我們想改變剪刀構造，探討剪刀該如何設計、如何拼組，伸縮效果會呈現何種狀態，樣貌有何改變，以供生活應用。



圖 1

貳、研究目的

研究一、探討拼組相同的剪刀，能完全開合的樣貌。

研究二、探討能拼成封閉剪刀組的條件與樣貌。

研究三、探討剪刀該怎麼設計，組成封閉剪刀組在二維空間能變動。

參、研究設備及器材

幾何扣條、圖釘、熱熔膠條、橡皮擦、直尺、剪刀、瞬間膠、量角器、GSP 軟體。

肆、研究方法

一、名詞解釋及符號定義

1. 剪刀：由 2 臂 1 軸心組合而成(如圖 2)， \overline{AD} 、 \overline{BC} 為剪刀的 2 臂， O 為軸心， \overline{AO} 、 \overline{OD} 、 \overline{BO} 、 \overline{OC} 為剪刀的 4 段， A 、 B 、 C 、 D 為連接點，當操控不同臂的 2 段時(其間夾角為 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)，稱為開合角)，剪刀能開合。

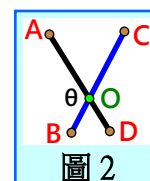
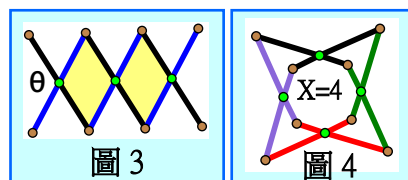
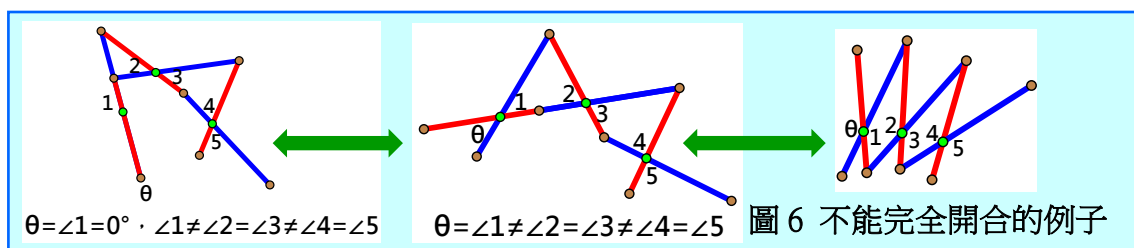
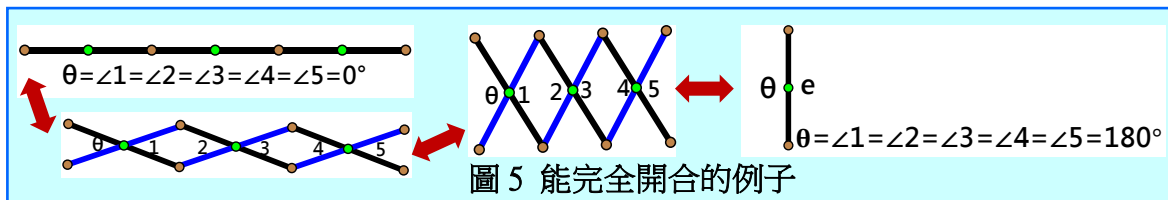


圖 2

2.剪刀組：將數個剪刀拼在一起，拼組數量以 X 表示，其間所圍成的圖形稱為剪刀間形(如圖 3 黃色部分)，若剪刀組頭尾能相拼，稱為封閉剪刀組(如圖 4)。



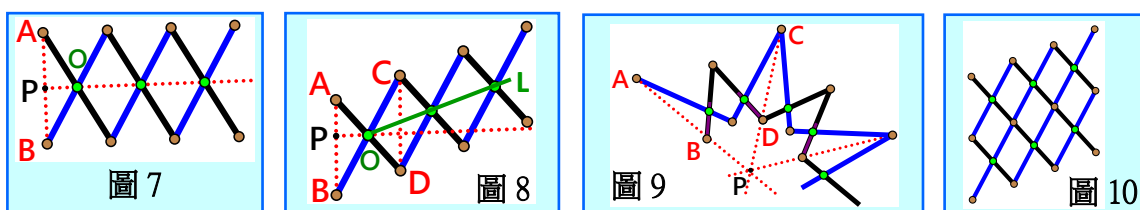
3.完全開合：剪刀組的 θ 能從 0° 到 180° 自由開合，且在開合過程中， θ 的對角保持相等(如圖 5)。



4.剪刀組完全開合的行進動態：

- (1)直線行進：如圖 7，若能在 \overline{AB} 上找到一點 P ，使得 $\overrightarrow{PO} \perp \overline{AB}$ 且 \overrightarrow{PO} 通過全部剪刀的軸心。
- (2)斜線行進：如圖 8，若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且能在 \overline{AB} 上找到一點 P ，使得 $\overrightarrow{PO} \perp \overline{AB}$ 但 \overrightarrow{PO} 沒有通過全部剪刀的軸心。 L 為軸心連線， L 與 \overrightarrow{PO} 的夾角 ϕ ，稱為斜線行進偏移角度。
- (3)弧線行進：如圖 9，若 \overline{AB} 與 \overline{CD} 交於一點 P ，其中 P 為中心，且 $\overline{PA} = \overline{PC}$ 。

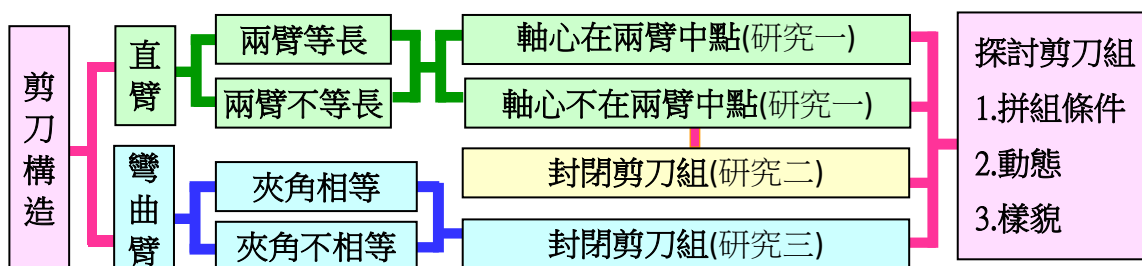
註：當剪刀組在弧線行進過程中， P 點非固定不動， \overline{PA} 長也一直在改變，但剪刀組停在某個狀態時，此時， P 為弧 AC 的圓心， \overline{PA} 為弧半徑。



5.線狀拼組：剪刀上的連接點只能與另一個剪刀拼組(如圖 7、8、9)。

6.網狀拼組：剪刀上的連接點能與多個剪刀拼組(如圖 10)。

二、研究架構圖

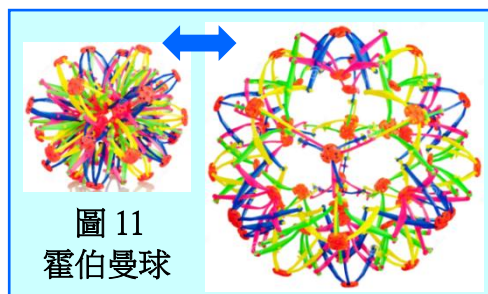


三、研究範圍與限制

- 1.我們將剪刀的兩臂視為線段，軸心、連接點視為點，故研究時不考慮其寬度與厚度。
- 2.本研究只探討拼組相同剪刀的剪刀組，拼組不同剪刀不在本研究範圍內。
- 3.我們只探討剪刀組能完全開合的情形，不能完全開合或 $\theta > 180^\circ$ 的情形不探討。

四、文獻探討

本研究從直臂剪刀出發，探討拼成封閉剪刀組所需的剪刀數量，因其動態能在三維空間做變動，故想研究出只能在二維空間做變動的封閉剪刀組，從文獻發現霍伯曼球也有提及剪刀構造，故對霍伯曼球做簡介與整理本研究與霍伯曼球的差異(如下表)。



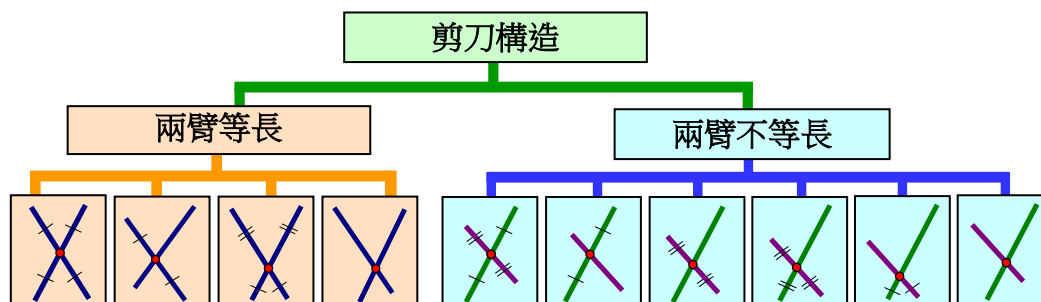
霍伯曼球(如圖 11)是由哈佛大學教授查克·霍伯曼(Chuck Hoberman)於 90 年代所發明，它是由剪刀構造所組成，對此球拉、推，此球就能向外輻射或朝中心聚合。

差異	霍伯曼球	本研究
主要內容	探討在立體空間中，球體的伸縮變化及其在生活中的應用。	主要探討在平面中，拼成封閉剪刀組所需的剪刀數量。
探討的剪刀構造	彎曲臂(等長、夾角相等)	1.直臂(等長、不等長) 2.彎曲臂(等長、夾角相等、夾角不相等)

伍、研究過程與結果

研究一、探討拼組相同的剪刀，能完全開合的樣貌。

(一)想法 剪刀是由 2 臂 1 軸心組合而成，我們列出 10 種不同的剪刀，想知道每一種剪刀該怎麼拼組才能完全開合，其樣貌有什麼變化呢？







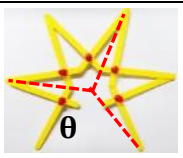


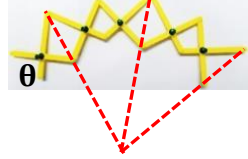

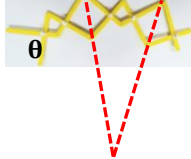
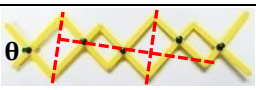
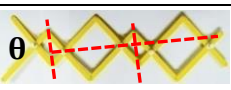
(二)製作過程 (如圖 12)

- 1.取 2 條幾何扣條當剪刀臂，下方墊橡皮擦釘入圖釘當軸心。
- 2.剪一小段熱熔膠條，封住圖釘尖端。
- 3.重覆 1.2.做出很多剪刀，再將扣條相扣，拼成剪刀組。


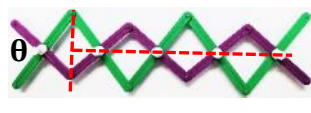

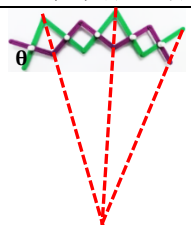
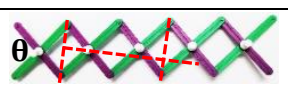
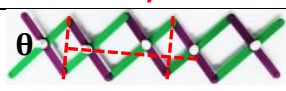

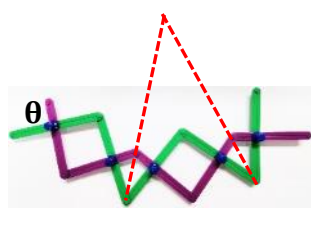

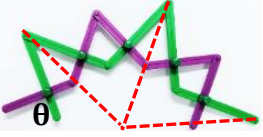
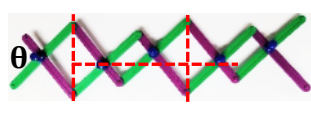
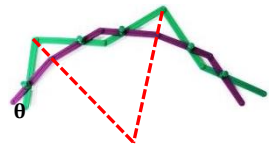
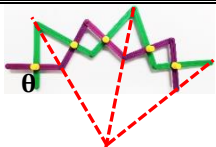
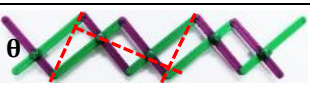

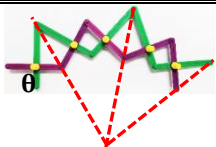

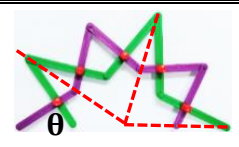
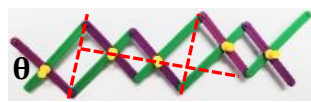
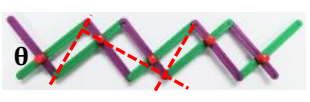


(三)製作成果

1.剪刀兩臂等長，拼組後能完全開合的情形如下表。

剪刀構造	編號	拼組 5 個剪刀的動態	剪刀構造	編號	拼組 5 個剪刀的動態
 軸心在 2 臂中點上	1-1		 不同臂 2 段等長	1-31	
				1-32	
				1-33	
 軸心只在 1 臂中點上	1-21		 4 段 都不等長	1-41	
	1-22			1-42	

2.剪刀兩臂不等長，拼組後能完全開合的情形如下表。

剪刀構造	編號	拼組 5 個剪刀的動態	剪刀構造	編號	拼組 5 個剪刀的動態
 軸心在 2 臂中點上	2-11		 3 段 等長	2-41	
	2-12			2-42	
 軸心在長臂中點上	2-21		 不同臂 2 段等長	2-51	
	2-22			2-52	
2-31		2-51			
 軸心在短臂中點上	2-31		 4 段 都不等長	2-61	
	2-32			2-62	

(四)發現與歸納

1.關於拼成剪刀組

(1)若剪刀欲拼組的 4 段中，任 3 段之和大於第 4 段，則剪刀能拼組。

理由：如右圖 13， \overline{AO} 、 \overline{BO} 、 $\overline{CO'}$ 、 $\overline{DO'}$ 為欲拼組的 4 段，

在 $\triangle ABO$ 中，因 $\overline{AO} + \overline{BO} > \overline{AB}$ ，又在 $\triangle ABO'$ 中， $\overline{AB} + \overline{CO'} > \overline{DO'}$ ，

所以 $\overline{AO} + \overline{BO} + \overline{CO'} > \overline{AB} + \overline{CO'} > \overline{DO'}$ ，

同理，任 3 段之和大於第 4 段，則剪刀能拼組。

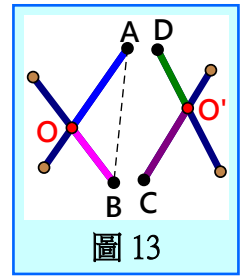


圖 13

(2)在相同剪刀形成的剪刀組中，若剪刀間形為平行四邊形或箏形，則開合角 θ 能完全開合、帶動。

理由：①若剪刀間形為平行四邊形(如圖 14)，

則對角相等($\theta = \theta'$)，故能完全開合、帶動。

②若剪刀間形為箏形(如圖 15)，

則對角相等($\theta = \theta'$)。

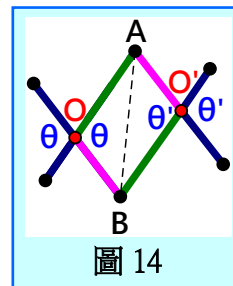


圖 14

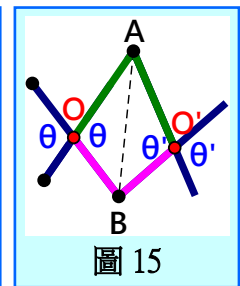


圖 15

由①②得知若剪刀間形為平行四邊形或箏形，則能完全開合、帶動。

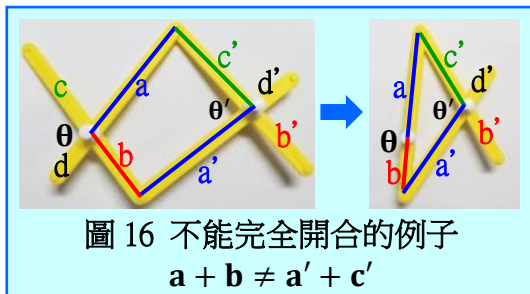


圖 16 不能完全開合的例子
 $a + b \neq a' + c'$

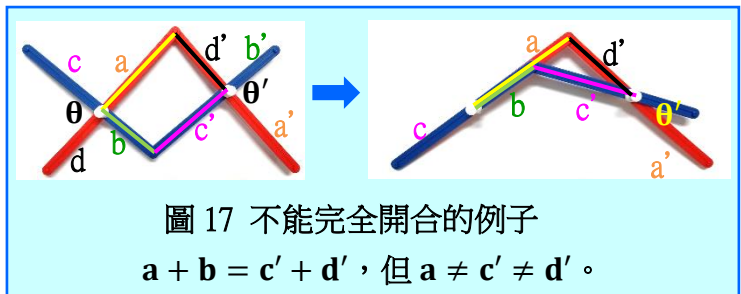


圖 17 不能完全開合的例子
 $a + b = c' + d'$ ，但 $a \neq c' \neq d'$ 。

(3)剪刀組若能完全開合，最多只有 3 種拼組方式，如 P.4(三)製作成果。

2.剪刀組完全開合的行進動態探討

一開始，我們先將研究一(三)1.2.整理成下表

剪刀構造		兩臂等長				兩臂不等長					
行進動態與編號	直線	1-1	無	1-31	無	2-11	無	無	無	無	無
	弧線	無	1-21	1-32	1-41	無	2-21	2-31	2-41	2-51 2-52	2-61
	斜線	無	1-22	1-33	1-42	2-12	2-22	2-32	2-42	2-53	2-62

由上頁表中我們發現在相同剪刀形成的剪刀組中

(1)在兩臂等長中，若剪刀間形為菱形，則當剪刀組開合時，會呈直線行進，如編號 1-1、1-31。

理由：(圖 18) $AOBO'$ 與 $CO'DO''$ 為菱形，所以 $\overline{AB} \perp \overline{OO'}$ 、 $\overline{CD} \perp \overline{O'O''}$ ，

因 $\angle AO'B = \angle CO'D$ (剪刀對頂角相等)，

$\overline{OO'}$ 、 $\overline{O'O''}$ 分別為菱形 $AOBO'$ 、 $CO'DO''$ 的對角線，

所以 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ ，故 $\overline{OO'}$ 與 $\overline{O'O''}$ 共線，

根據定義，此剪刀組的動態為直線行進。

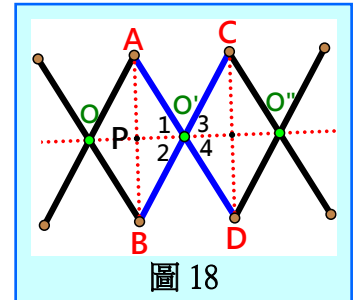


圖 18

(2)在兩臂等長中，若剪刀間形為大小相同的箏形且並排拼接，則當剪刀組開合時，會呈弧線行進，如編號 1-32。

理由：(圖 19) 因剪刀間形為相同的箏形且並排拼接，

所以 $\angle OBO' > \angle O'CO''$ ，故 $\angle 1 > \angle 2$ ，即 \overline{AB} 與 \overline{CD} 不平行，

所以延長 \overline{AB} 與 \overline{CD} 必交於一點，

根據定義，此剪刀組的動態為弧線行進。

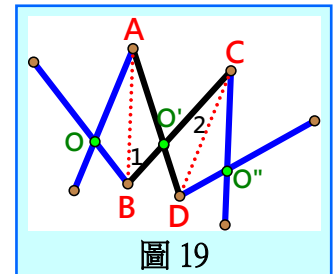


圖 19

(3)在兩臂不等長中，若剪刀間形為大小相同的箏形且上下反轉拼接，則當剪刀組開合時，會呈直線行進，如編號 2-11。

理由：(圖 20) $AOBO'$ 與 $CO'DO''$ 為箏形，所以 $\overline{AB} \perp \overline{OO'}$ 、 $\overline{CD} \perp \overline{O'O''}$ ，

因剪刀間形為相同的箏形且上下反轉拼接，

所以 $\angle 1 = \angle 4$ 、 $\angle 2 = \angle 3$ ，故 $\overline{OO'}$ 與 $\overline{O'O''}$ 共線，

根據定義，此剪刀組的動態為直線行進。

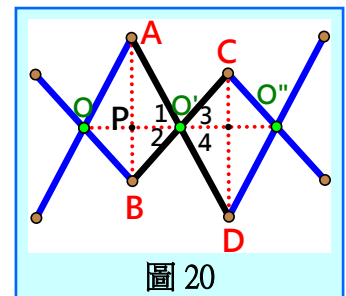


圖 20

(4)在兩臂不等長中，若剪刀間形為箏形和菱形拼接，則當剪刀組開合時，會呈弧線行進，如編號 2-41、2-52。

理由：(圖 21) 因剪刀間形為箏形和菱形拼接，

所以 $\overline{AO} \neq \overline{BO}$ 、 $\overline{CO} = \overline{DO}$ ，

因 $\overline{AO} : \overline{DO} \neq \overline{BO} : \overline{CO}$ ，所以 \overline{AB} 與 \overline{CD} 不平行，

故 \overline{AB} 、 \overline{CD} 必有交點，根據定義，此剪刀組的動態為弧線行進。

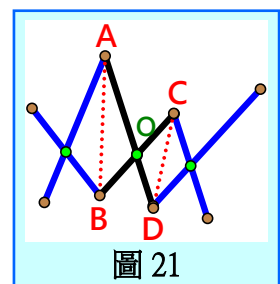


圖 21

(5)在兩臂不論是否等長中，若剪刀間形為平行四邊形且對角線沒有互相垂直，則當剪刀組開合時，會呈斜線行進，如編號 1-22、1-33、1-42、2-12、2-22、2-32、2-42、2-53、2-62。

理由：(圖 22)連接點 A、B 相連，C、D 相連，

因剪刀間形為平行四邊形，所以 $\angle 1 = \angle 2$ ，

因本研究只探討拼組相同剪刀，所以 $\angle 2 = \angle 3$ ，

故 $\angle 1 = \angle 3$ ，即 $\overline{AB} // \overline{CD}$ ，因剪刀間形的對角線沒有互相垂直，

所以若 $\overline{PO} \perp \overline{AB}$ ，則 \overline{PO} 沒有通過全部剪刀的軸心，

根據定義，此剪刀組的動態為斜線行進。

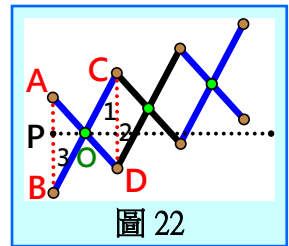


圖 22

(6)在兩臂不論是否等長中，若相鄰的剪刀間形為大小不同的箏形，則當剪刀組開合時，會呈弧線行進，如編號 1-21、1-41、2-21、2-31、2-51、2-61。

理由：相鄰的剪刀間形為不同的箏形，剪刀的兩臂 4 段組合方式有圖 23 這三種，

因 $\overline{AO} : \overline{DO} \neq \overline{BO} : \overline{CO}$ ，所以 \overline{AB} 與 \overline{CD} 不平行，故 \overline{AB} 、 \overline{CD} 必有交點，

根據定義，此剪刀組的動態為弧線行進。

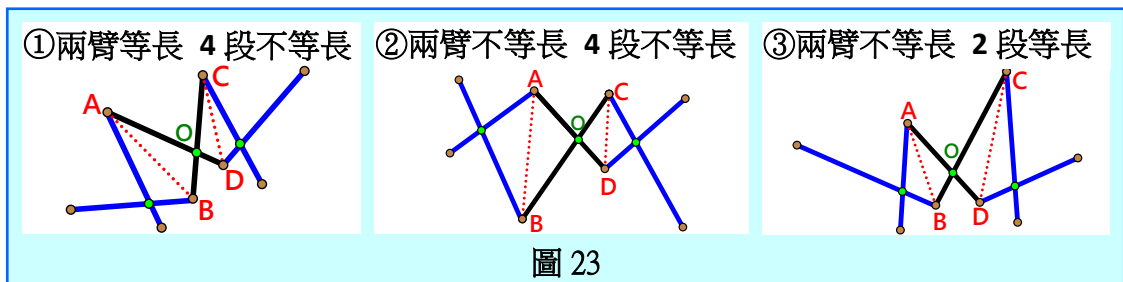


圖 23

3.觀察剪刀構造對開合行進動態的影響

(1)由 2.知，不論剪刀兩臂是否等長，

- ①若 4 段臂兩兩等長，則能拼出直線行進的剪刀組。
- ②若軸心不在 2 臂中點，則能拼出弧線行進的剪刀組。
- ③若 4 段臂中不全等長，則能拼出斜線行進的剪刀組。

(2)在兩臂等長且能斜線行進的剪刀組中，

- ①當開合角 θ 愈小時，斜線行進偏移角度愈大(圖 24)。

如編號 1-42，紅線為過軸心 O 與連接點 \overline{AB} 垂直的線，藍線為軸心 $\overline{OO'}$ 連線，紅、藍線的夾角愈大，代表斜線行進偏移角度愈大。

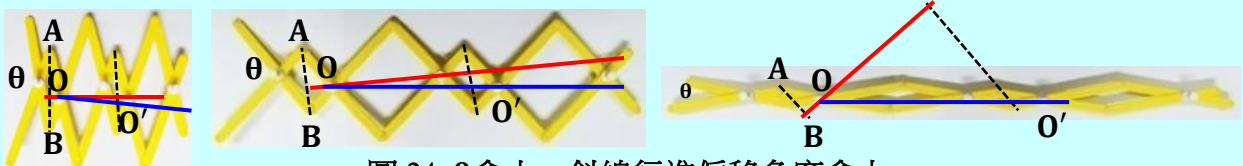

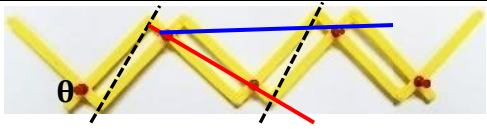

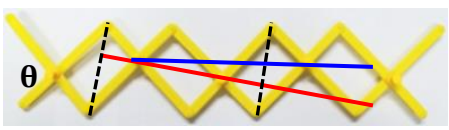


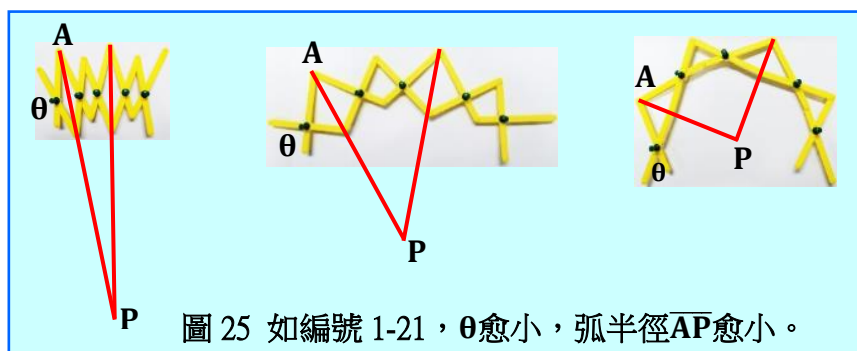
圖 24 θ 愈小，斜線行進偏移角度愈大。

②當 θ 固定時，相同的剪刀，若軸心離剪刀臂中點愈遠，則斜線行進偏移角度愈大(如下表)。


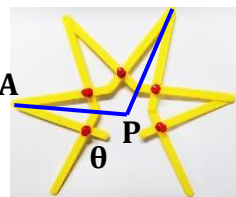

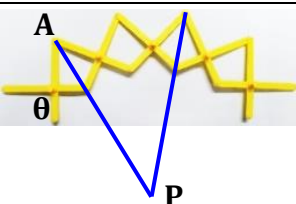
剪刀	軸心離剪刀臂中點位置	$\theta = 90^\circ$ 的狀態	斜線行進偏移角度
2 臂等長	 較遠		較大
不同臂 2 段等長	 較近		較小

(3)在兩臂等長且能弧線行進的剪刀組中，

①當開合角 θ 愈小時，弧半徑愈小(如圖 25)。



②當 θ 固定時，相同的剪刀若軸心離剪刀臂中點愈遠，則弧半徑愈小(如下表)。

剪刀	軸心離剪刀臂中點位置	$\theta = 90^\circ$ 的狀態	弧線行進
2 臂等長	 較遠		弧半徑 \overline{AP} 較小
不同臂 2 段等長	 較近		弧半徑 \overline{AP} 較大

同理，在(2)、(3)中，若兩臂不等長亦然。

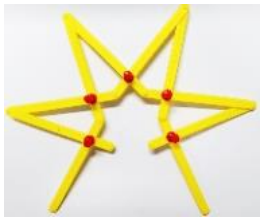
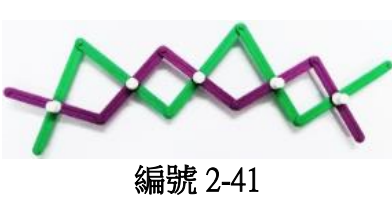

研究二、探討能拼成封閉剪刀組的條件與樣貌。

(一)觀察與想法

由研究一我們發現：不論兩臂是否等長，若軸心不在 2 臂中點，則才有可能拼出弧線行進的剪刀組。而在弧線行進剪刀組中，只要有一定數量的剪刀數，即可拼成封閉剪刀組，因此我們好奇：1.最少需要幾個剪刀才能拼成封閉剪刀組？2.剪刀 4 段長度與數量之間的關係？3.封閉剪刀組能完全開合變動嗎？

《剪刀間形～組合方式》

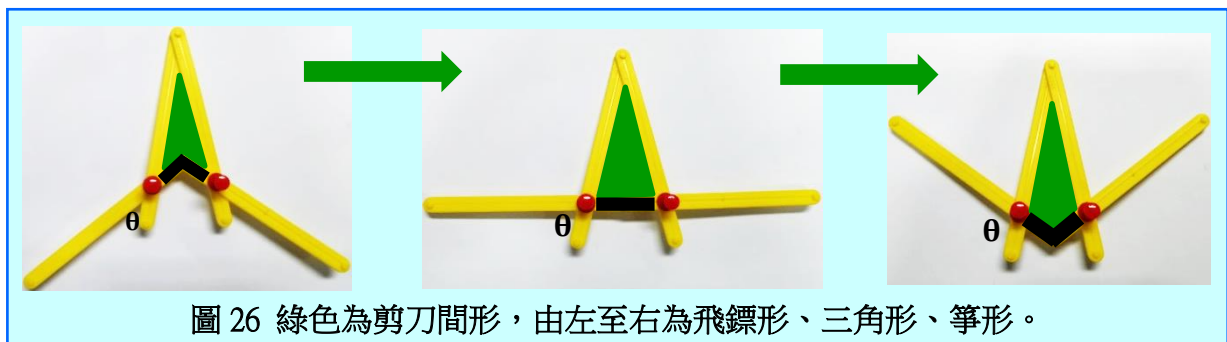
所以若要探討封閉剪刀組，我們先從弧線行進剪刀組出發，由研究一(三)1.2.知：弧線行進的剪刀組，其剪刀間形的組合方式共有三種(如下表)，我們想依此分類做探討。

剪刀間形組合方式	形狀大小皆相同	混菱形	形狀或大小不同
編號	1-31	2-41、2-52	1-21、1-41、2-21 2-31、2-51、2-61
範例圖示		 編號 2-41	 編號 1-21

(二)操控與猜想

《剪刀間形～變化情形》

另外，我們也發現：不論是哪一種剪刀間形，其都有三種變化情形，例如操控編號 1-32，發現剪刀間形會隨著開合角 θ 變大使其相鄰兩邊(圖 26 中，黑色的兩邊)會內凹、成一直線、外凸而依序呈現飛鏢形、三角形、箏形的變化(如圖 26)，其所拼成封閉剪刀組的剪刀數量會變多，我們猜想當剪刀間形是三角形時，是一個分水嶺，想找出組成封閉剪刀組且剪刀間形是三角形時，所需的剪刀數量，找出後，若剪刀數量減少，則剪刀間形呈現飛鏢形，若剪刀數量增加，則剪刀間形呈現箏形，這樣就能知道不同的剪刀間形，需要幾個剪刀才能拼成封閉剪刀組。

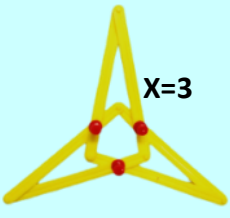


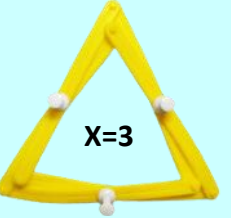
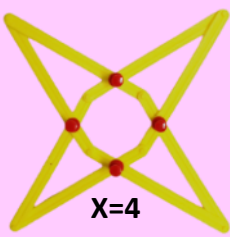
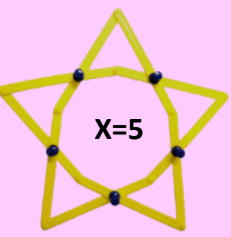
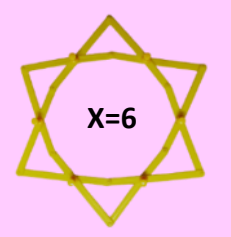
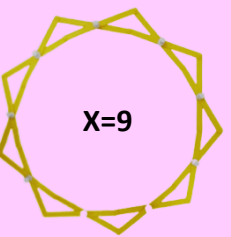
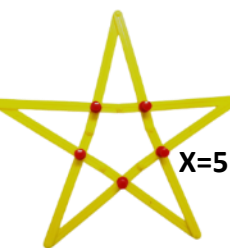
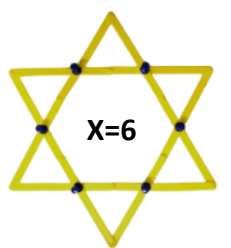
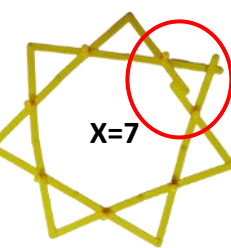
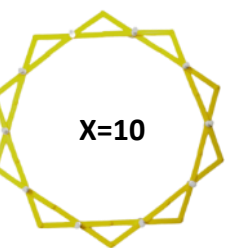
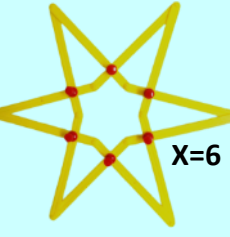
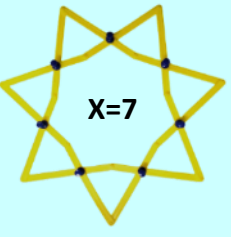
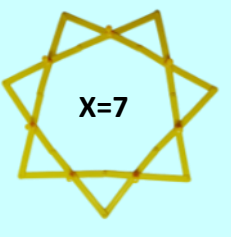
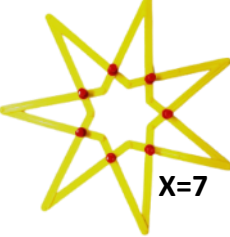
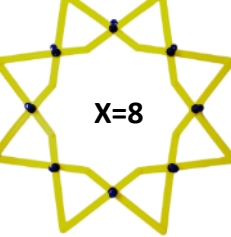
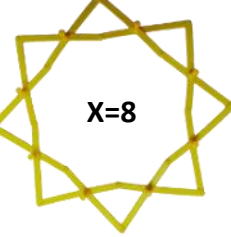
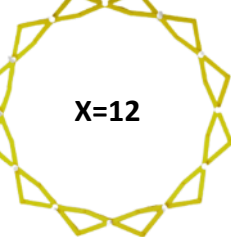


(三)製作過程

同研究一，做出三種不同剪刀間形的組合方式其變化情形來探討封閉剪刀組。

(四)製作成果 (X：剪刀數量，剪刀臂長單位：公分)

1.剪刀間形組合方式：形狀大小皆相同 (兩臂等長， $\overline{AO} = \overline{CO}$ ， $\overline{BO} = \overline{DO}$ ，但 $\overline{AO} \neq \overline{BO}$)

剪刀		編號 3-1 $\overline{AO} = \overline{CO} = 7.63$ $\overline{BO} = \overline{DO} = 2.37$	編號 3-2 $\overline{AO} = \overline{CO} = 6.67$ $\overline{BO} = \overline{DO} = 3.33$	編號 3-3 $\overline{AO} = \overline{CO} = 6.2$ $\overline{BO} = \overline{DO} = 3.8$	編號 3-4 $\overline{AO} = \overline{CO} = 5.5$ $\overline{BO} = \overline{DO} = 4.5$
剪刀間形的變化情形	飛鏢形	 X=3	 X=3	 X=3	 X=3
		 X=4	 X=5	 X=6	 X=9
	三角形	 X=5	 X=6	 X=7	 X=10
		箏形	 X=6	 X=7	 X=7
	 X=7		 X=8	 X=8	 X=12

註：1.紅圈○代表剪刀組無法在二維空間拼成封閉剪刀組之處。

2.藍底代表拼成此種剪刀間形的變化情形所需最少的剪刀數量。

3.粉紅底代表拼成此種剪刀間形的變化情形所需最多的剪刀數量。

2.剪刀間形組合方式：混菱形（兩臂不等長，但 $\overline{AO} = \overline{BO}$ ）

剪刀		編號 4-1 $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{DO}$ $= 3.54$ $\overline{CO} = 5.12$	編號 4-2 $\overline{AO} = \overline{BO} = 2.8$ $\overline{CO} = 5.86$ $\overline{DO} = 4.27$	編號 4-3 $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$ $= 5$ $\overline{DO} = 2.07$	編號 4-4 $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{DO}$ $= 4.33$ $\overline{CO} = 5.67$
剪刀間形的變化情形	飛鏢形 + 菱形	X=4	X=4	X=4	X=4
		X=6	X=6	X=6	X=6
		X=14	X=14	X=10	X=16
	三角形 + 菱形	X=14	X=16	X=11	X=18
		X=16	X=18	X=12	X=20
	箏形 + 菱形	X=18	X=20	X=14	X=22

註：1.紅圈 代表剪刀組無法在二維空間拼成封閉剪刀組之處。

2.藍底代表拼成此種剪刀間形的變化情形所需最少的剪刀數量。

3.粉紅底代表拼成此種剪刀間形的變化情形所需最多的剪刀數量。

3.剪刀間形組合方式：形狀或大小不同 (四段不一定等長，參閱 P.16、17 的情況一、二)

剪刀		編號 5-1 $\overline{AO} = 6.7$ $\overline{BO} = \overline{CO} = 5$ $\overline{DO} = 3.3$	編號 5-2 $\overline{AO} = 5.86$ $\overline{BO} = 2.27$ $\overline{CO} = 4.8$ $\overline{DO} = 2.8$	編號 5-3 $\overline{AO} = 6$ $\overline{BO} = 10.6$ $\overline{CO} = 3.54$ $\overline{DO} = 6.24$	編號 5-4 $\overline{AO} = 6.36$ $\overline{BO} = 4.77$ $\overline{CO} = \overline{DO} = 2.3$
剪刀間形的變化情形	大飛鏢形 + 小飛鏢形				
	飛鏢形 + 三角形			無	
	飛鏢形 + 箏形	無		無	
	大三角形 + 小三角形	無	無		無
	三角形 + 箏形			無	
	大箏形 + 小箏形				

註：1.紅圈 代表剪刀組無法在二維空間拼成封閉剪刀組之處。

2.藍底代表拼成此種剪刀間形的變化情形所需最少的剪刀數量。

3.粉紅底代表拼成此種剪刀間形的變化情形所需最多的剪刀數量。

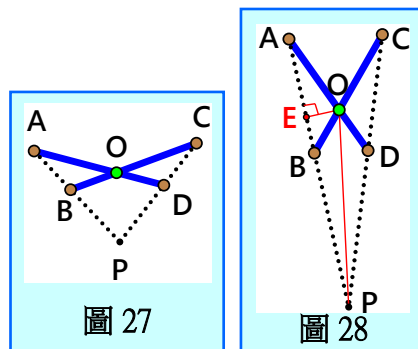
(五)察覺 由(四)製作成果發現

- 1.剪刀間形的變化情形具有規律性，隨著開合角 θ 變大，剪刀間形變為飛鏢形、三角形、箏形。
- 2.當剪刀間形的變化情形為三角形時，並不是每一個剪刀構造都能剛好拼成封閉剪刀組。
- 3.若剪刀間形的變化情形有三角形時，則封閉剪刀組內圈會圍成正多邊形。
- 4.當剪刀間形組合方式為混菱形、形狀或大小不同時，需偶數個剪刀才能拼成封閉剪刀組。

(六)分析 《封閉剪刀組的剪刀數量探討》

一開始，我們從(四)製作成果中發現**性質1**

性質1: 如圖 27，在 \overline{AD} 與 \overline{BC} 交於 O 點形成的剪刀，延伸 \overline{AB} 與 \overline{CD} 交於 P 點所圍成的飛鏢形 $APCO$ 中，若 $\angle AOC$ 越大，則 $\angle APC$ 越大；反之，若 $\angle AOC$ 越小，則 $\angle APC$ 越小。



理由：① $\angle ABC \geq 90^\circ$ 時(如圖 27)，

當 $\angle AOC$ 愈大，則 $\angle BAD$ 愈小，又 $\angle AOC = \angle BAD + \angle DCB + \angle APC$ ，所以 $\angle APC$ 愈大，同理，當 $\angle AOC$ 愈小，則 $\angle BAD$ 愈大，又 $\angle AOC = \angle BAD + \angle DCB + \angle APC$ ，所以 $\angle APC$ 愈小。

② $\angle ABC < 90^\circ$ 時(如圖 28)，

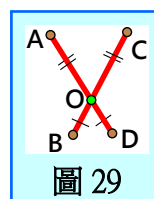
作 $\overline{OE} \perp \overline{AP}$ 於 E ，當 $\angle AOC$ 愈大，則 \overline{OP} 愈小， \overline{OE} 愈大，所以 $\angle APO$ 愈大，即 $\angle APC$ 愈大。同理，當 $\angle AOC$ 愈小，則 \overline{OP} 愈大， \overline{OE} 愈小，所以 $\angle APO$ 愈小，即 $\angle APC$ 愈小。

有了**性質1**，對於在平面上能拼成封閉剪刀組的剪刀間形中，當軸心固定且剪刀間形隨著開合角 θ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) 作不同變化時，我們將進一步探討剪刀間形的形狀與剪刀數量的關係：

1.剪刀間形：形狀大小皆相同 (兩臂等長， $\overline{AO} = \overline{CO}$ ， $\overline{BO} = \overline{DO}$ ，但 $\overline{AO} \neq \overline{BO}$)

一開始，先假設兩個剪刀形成的剪刀間形為三角形時，其開合角 θ 為 θ ($< 90^\circ$)。

(1)在封閉剪刀組中，若剪刀間形為三角形時，則 $\frac{360^\circ}{\theta}$ 為整數且剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{\theta}$ 。



理由：(如圖 30)

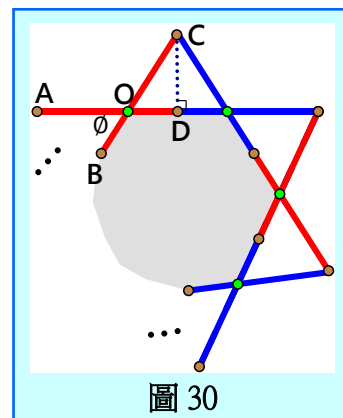
①因已知 \overline{CO} 、 \overline{DO} ，

若剪刀間形要形成三角形，可先由 $\cos \theta = \frac{\overline{DO}}{\overline{CO}}$ 找出 θ 角。

②因在封閉剪刀組中，灰色部分為正 n 邊形， θ 為外角，

所以 $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ ，即 $n = \frac{360^\circ}{\theta}$ 為整數。

③又正 n 邊形由 n 個剪刀組成，所以剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{\theta}$ 。



(2)在封閉剪刀組中,若剪刀間形為飛鏢形時,則剪刀數量最少為3;

最多為 a.當 $\frac{360^\circ}{\theta}$ 為整數時,剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{\theta} - 1$ 。

b.當 $\frac{360^\circ}{\theta}$ 不為整數時,剪刀數量為 $\lceil \frac{360^\circ}{\theta} \rceil$ 。[]為高斯符號

理由:(如圖 31)

①(利用反證法來說明)

設剪刀數量最少為2,此時若要形成封閉剪刀組,則 $\theta = 0^\circ$ (不合,因四臂(兩支剪刀)成一直線)。又剪刀數量為3時,如編號 3-1(圖 32),故剪刀最少數量為3。

②因兩個剪刀形成的剪刀間形為三角形時,其開合角為 θ ,

此時圓心角 $\angle APC$ 亦為 θ ,

若剪刀間形由三角形變為飛鏢形時, θ 會變小,

則 $\angle AOC = 180^\circ - \theta$ 會變大,

又由性質1知: $\angle AOC$ 變大,圓心角 $\angle APC$ 也會變大,即飛鏢形的 $\angle APC > \theta$,

此時,在封閉剪刀組中,若剪刀間形為飛鏢形時,

其剪刀數量 $< \frac{360^\circ}{\theta}$ 均可形成封閉剪刀組,

故 a.當 $\frac{360^\circ}{\theta}$ 為整數時,剪刀數量最多為 $\frac{360^\circ}{\theta} - 1$ 。

b.當 $\frac{360^\circ}{\theta}$ 不為整數時,剪刀數量最多為 $\lceil \frac{360^\circ}{\theta} \rceil$ 。

(3)在封閉剪刀組中,若剪刀間形為箏形時,則剪刀數量最少為 $\lceil \frac{360^\circ}{\theta} \rceil + 1$ 。[]為高斯符號

理由:(如圖 33)

因兩個剪刀形成的剪刀間形為三角形時,

其開合角為 θ ,此時圓心角 $\angle APC$ 亦為 θ ,

若剪刀間形由三角形變為箏形時, θ 會變大,

則 $\angle AOC = 180^\circ - \theta$ 會變小,

又由性質1知: $\angle AOC$ 變小,圓心角 $\angle APC$ 也會變小,

即箏形的 $\angle APC < \theta$,此時,在封閉剪刀組中,若剪刀間形為箏形時,

其剪刀數量 $> \frac{360^\circ}{\theta}$ 均可形成封閉剪刀組,故剪刀數量最少為 $\lceil \frac{360^\circ}{\theta} \rceil + 1$ 。

2.剪刀間形:混菱形 (如圖 34,兩臂不等長,但 $\overline{AO} = \overline{BO}$)

一開始,先假設兩個剪刀形成的剪刀間形為三角形時,其開合角 θ 為 $\theta (< 90^\circ)$ 。

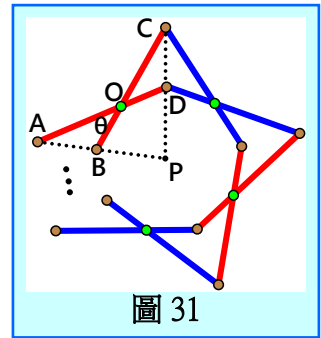


圖 31

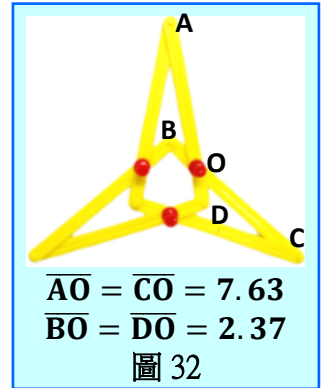


圖 32

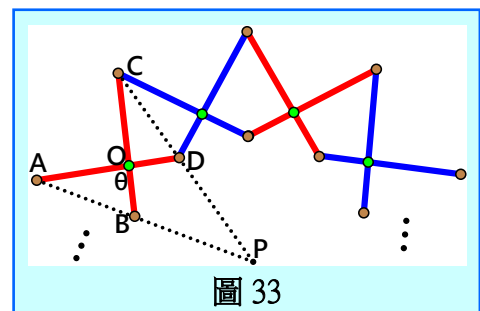


圖 33

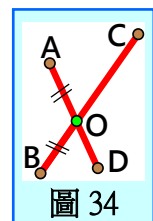


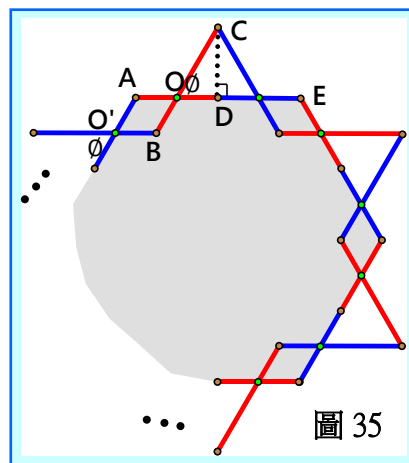
圖 34

(1)在封閉剪刀組中，若剪刀間形為三角形+菱形時，則 $\frac{360^\circ}{\phi}$ 為整數且剪刀數量為 $\frac{720^\circ}{\phi}$ 。

理由：(如圖 35)

①同 1.(1)①②灰色部分為正 n 邊形， $n = \frac{360^\circ}{\phi}$ 為整數。

②又正 n 邊形由 $2n$ 個剪刀組成，所以剪刀數量為 $\frac{720^\circ}{\phi}$ 。



(2)在封閉剪刀組中，若剪刀間形為飛鏢形+菱形時，則

①剪刀數量需為偶數個。

②剪刀數量最少為 6；最多為

a.當 $\frac{360^\circ}{\phi}$ 為整數時，剪刀數量為 $\frac{720^\circ}{\phi} - 2$ 。

b.當 $\frac{360^\circ}{\phi}$ 不為整數時，(a)若 $\lceil \frac{720^\circ}{\phi} \rceil$ 為奇數，則剪刀數量為 $\lceil \frac{720^\circ}{\phi} \rceil - 1$ 。

(b)若 $\lceil \frac{720^\circ}{\phi} \rceil$ 為偶數，則剪刀數量為 $\lceil \frac{720^\circ}{\phi} \rceil$ 。[] 為高斯符號

理由：①(利用反證法做說明)

假設在封閉剪刀組中，剪刀間形是飛鏢形+菱形時，能用奇數個剪刀拼組，

若剪刀數量 $X = 3$ 要拼成封閉剪刀組(如圖 36)，

則 \overline{AO} 、 \overline{BO} 、 $\overline{C'O'}$ 、 $\overline{D'O'}$ 4 段要拼成剪刀間形，

因 $\overline{AO} = \overline{BO}$ ， $\overline{C'O'} \neq \overline{D'O'}$ ，

所以剪刀間形無法拼成飛鏢形或菱形(與已知不合)，

當 $X > 3$ 且 X 為奇數的情形同 $X = 3$ ，

故在封閉剪刀組中，若剪刀間形為飛鏢形+菱形時，

不能用奇數個剪刀拼組，

即在封閉剪刀組中，若剪刀間形為飛鏢形+菱形時，

剪刀數量需為偶數個。

②如圖 37，理由同 1.(2)。

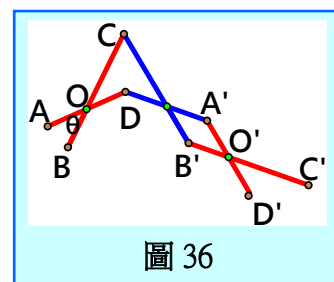


圖 36

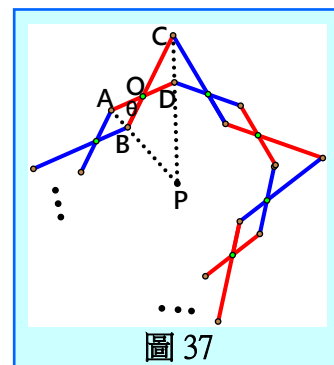


圖 37

(3)在封閉剪刀組中，若剪刀間形為箏形+菱形時，則

①剪刀數量需為偶數個。

②剪刀數量最少為 a.當 $\frac{360^\circ}{\phi}$ 為整數時，剪刀數量為 $\frac{720^\circ}{\phi} + 2$ 。

b.當 $\frac{360^\circ}{\phi}$ 不為整數時，(a)若 $\lceil \frac{720^\circ}{\phi} \rceil$ 為奇數，則剪刀數量為 $\lceil \frac{720^\circ}{\phi} \rceil + 1$ 。

(b)若 $\lceil \frac{720^\circ}{\phi} \rceil$ 為偶數，則剪刀數量為 $\lceil \frac{720^\circ}{\phi} \rceil + 2$ 。[] 為高斯符號

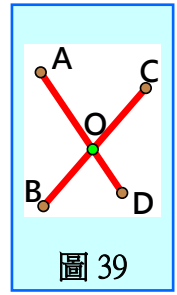
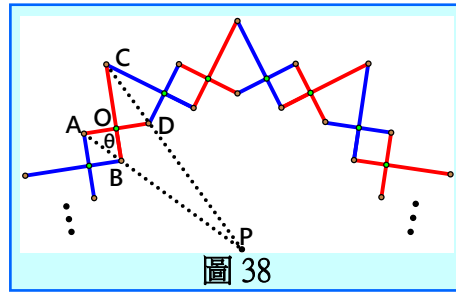
理由：(如圖 38) ①理由同 2.(2)①。

②理由同 1.(3)。

3.剪刀間形：形狀或大小不同(情況一)

(如圖 39, 不論剪刀兩臂是否等長, $\overline{BO} \neq \overline{DO}$

且 $\overline{AO} \times \overline{DO} = \overline{BO} \times \overline{CO}$)



一開始, 先假設兩個剪刀形成的剪刀間形為三角形時, 其開合角 θ 為 $\theta (< 90^\circ)$ 。

(1) 在封閉剪刀組中, 若剪刀間形為大三角形+小三角形時, 則 $\frac{180^\circ}{\theta}$ 為整數且剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{\theta}$ 。

理由：(如圖 40)

①因已知 \overline{AO} 、 \overline{BO} , 若剪刀間形要形成三角形,

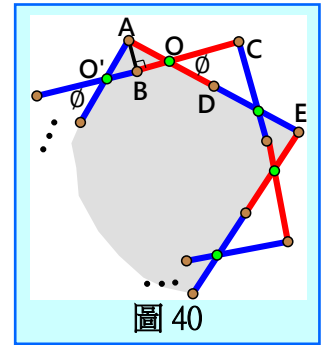
可先由 $\cos \theta = \frac{\overline{BO}}{\overline{AO}}$ 找出 θ 角。

②因在封閉剪刀組中, 灰色部分為正 n 邊形,

正 n 邊形的內角 $\angle O'AE = 180^\circ - 2\theta$,

所以外角 $= 180^\circ - 180^\circ + 2\theta = \frac{360^\circ}{n}$, 即 $n = \frac{180^\circ}{\theta}$ 。

③又正 n 邊形由 $2n$ 個剪刀組成, 所以剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{\theta}$ 。



(2) 在封閉剪刀組中, 若剪刀間形為大飛鏢形+小飛鏢形時, 則

①剪刀數量需為偶數個。

②剪刀數量最少為 4; 最多為 a. 當 $\frac{180^\circ}{\theta}$ 為整數時, 剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{\theta} - 2$ 。

b. 當 $\frac{180^\circ}{\theta}$ 不為整數時, (a) 若 $\lceil \frac{360^\circ}{\theta} \rceil$ 為奇數, 則剪刀數量為 $\lceil \frac{360^\circ}{\theta} \rceil - 1$ 。

(b) 若 $\lceil \frac{360^\circ}{\theta} \rceil$ 為偶數, 則剪刀數量為 $\lceil \frac{360^\circ}{\theta} \rceil$ 。[] 為高斯符號

理由：(如圖 41) ①理由同 2.(2)①。 ②理由同 1.(2)。

(3) 在封閉剪刀組中, 若剪刀間形為大箏形+小箏形時, 則

①剪刀數量需為偶數個。

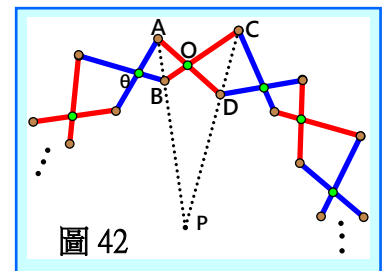
②剪刀數量最少為 a. 當 $\frac{180^\circ}{\theta}$ 為整數時, 剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{\theta} + 2$ 。

b. 當 $\frac{180^\circ}{\theta}$ 不為整數時, (a) 若 $\lceil \frac{360^\circ}{\theta} \rceil$ 為奇數, 則剪刀數量為 $\lceil \frac{360^\circ}{\theta} \rceil + 1$ 。

(b) 若 $\lceil \frac{360^\circ}{\theta} \rceil$ 為偶數, 則剪刀數量為 $\lceil \frac{360^\circ}{\theta} \rceil + 2$ 。[] 為高斯符號

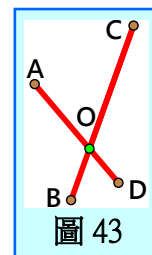
理由：(如圖 42) ①理由同 2.(2)①。

②理由同 1.(3)。



4.剪刀間形：形狀或大小不同(情況二)

(如圖 43，不論剪刀兩臂是否等長， $\overline{AO} > \overline{BO}$ ， $\overline{CO} > \overline{DO}$)

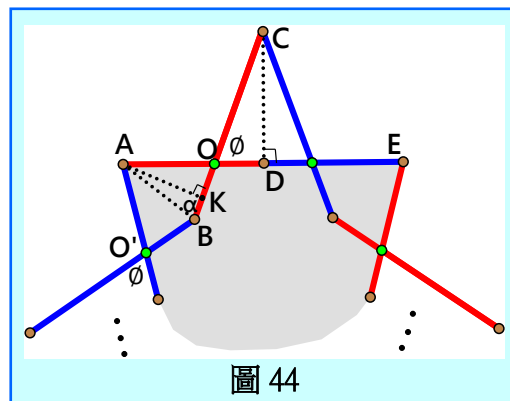


(1) 假設三個剪刀形成的剪刀間形組合方式為三角形+箏形時，

其開合角 θ 為 $\theta (< 90^\circ)$ 。

在封閉剪刀組中，若剪刀間形為三角形+箏形時，則 $\frac{180^\circ}{\theta + \alpha - 90^\circ}$ 為整數且剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{\theta + \alpha - 90^\circ}$ 。

理由：(如圖 44)



① 因已知 \overline{CO} 、 \overline{DO} ，若剪刀間形要形成三角形，

可先由 $\cos \theta = \frac{\overline{DO}}{\overline{CO}}$ 找出 θ 角。

② 設 $\overline{AO} = a$ ， $\overline{BO} = b$ ，

自 A 點畫垂線垂直 \overline{BO} ，交 \overline{BO} 於 K 點，

則 $\overline{AK} = a \sin \theta$ ， $\overline{OK} = a \cos \theta$ ，

$\Rightarrow \overline{BK} = b - a \cos \theta$ ，因此可由 $\tan \alpha = \frac{\overline{AK}}{\overline{BK}}$ 找出 α 角。

③ 因在封閉剪刀組中，灰色部分為正 n 邊形，正 n 邊形的內角 $\angle O'AE = 2(180^\circ - \theta - \alpha)$ ，

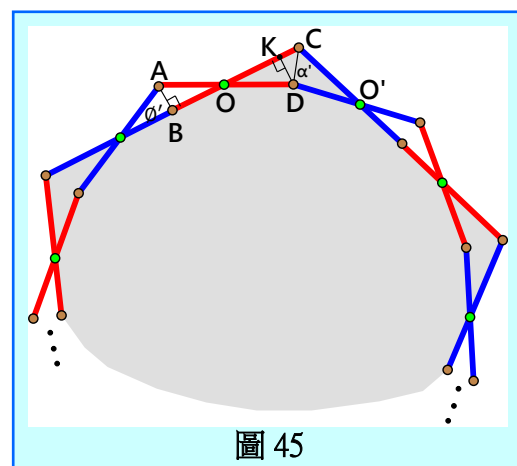
所以外角 $180^\circ - 2(180^\circ - \theta - \alpha) = \frac{360^\circ}{n}$ ，即 $n = \frac{180^\circ}{\theta + \alpha - 90^\circ}$ 為整數。

④ 又正 n 邊形由 2n 個剪刀組成，所以剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{\theta + \alpha - 90^\circ}$ 。

(2) 假設三個剪刀形成的剪刀間形組合方式為飛鏢形+三角形時，其開合角 θ 為 $\theta' (< 90^\circ)$ 。

在封閉剪刀組中，若剪刀間形為飛鏢形+三角形時，則 $\frac{180^\circ}{90^\circ - \alpha'}$ 為整數且剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{90^\circ - \alpha'}$ 。

理由：(如圖 45)



① 同 4.(1)①②由 $\cos \theta' = \frac{\overline{BO}}{\overline{AO}}$ 找出 θ' 角，

設 $\overline{CO} = c$ ， $\overline{DO} = d$ ，

$\overline{DK} = d \sin \theta'$ ， $\overline{CK} = c - d \cos \theta'$

由 $\tan \alpha' = \frac{\overline{DK}}{\overline{CK}}$ 找出 α' 角。

② 因在封閉剪刀組中，灰色部分為正 n 邊形，

正 n 邊形的內角 $\angle OCO' = 2\alpha'$ ，

所以外角 $180^\circ - 2\alpha' = \frac{360^\circ}{n}$ ，即 $n = \frac{180^\circ}{90^\circ - \alpha'}$ 為整數。

③ 又正 n 邊形由 2n 個剪刀組成，所以剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{90^\circ - \alpha'}$ 。

(3)在封閉剪刀組中，

①若剪刀間形為大箏形+小箏形時(圖 46)，則剪刀數量最少為

a.當 $\frac{180^\circ}{\theta+\alpha-90^\circ}$ 為整數時，剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{\theta+\alpha-90^\circ} + 2$ 。

b.當 $\frac{180^\circ}{\theta+\alpha-90^\circ}$ 不為整數時，(a)若 $\left[\frac{180^\circ}{\theta+\alpha-90^\circ}\right]$ 為奇數，則剪刀數量為 $\left[\frac{360^\circ}{\theta+\alpha-90^\circ}\right] + 1$ 。

(b)若 $\left[\frac{180^\circ}{\theta+\alpha-90^\circ}\right]$ 為偶數，則剪刀數量為 $\left[\frac{360^\circ}{\theta+\alpha-90^\circ}\right] + 2$ 。

②若剪刀間形為飛鏢形+箏形時(圖 47)，則剪刀數量最少為

a.當 $\frac{180^\circ}{90^\circ-\alpha'}$ 為整數時，剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{90^\circ-\alpha'} + 2$ 。

b.當 $\frac{180^\circ}{90^\circ-\alpha'}$ 不為整數時，(a)若 $\left[\frac{180^\circ}{90^\circ-\alpha'}\right]$ 為奇數，則剪刀數量為 $\left[\frac{360^\circ}{90^\circ-\alpha'}\right] + 1$ 。

(b)若 $\left[\frac{180^\circ}{90^\circ-\alpha'}\right]$ 為偶數，則剪刀數量為 $\left[\frac{360^\circ}{90^\circ-\alpha'}\right] + 2$ 。

最多為 a.當 $\frac{180^\circ}{\theta+\alpha-90^\circ}$ 為整數時，剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{\theta+\alpha-90^\circ} - 2$ 。

b.當 $\frac{180^\circ}{\theta+\alpha-90^\circ}$ 不為整數時，(a)若 $\left[\frac{180^\circ}{\theta+\alpha-90^\circ}\right]$ 為奇數，則剪刀數量為 $\left[\frac{360^\circ}{\theta+\alpha-90^\circ}\right] - 1$ 。

(b)若 $\left[\frac{180^\circ}{\theta+\alpha-90^\circ}\right]$ 為偶數，則剪刀數量為 $\left[\frac{360^\circ}{\theta+\alpha-90^\circ}\right]$ 。

③若剪刀間形為大飛鏢形+小飛鏢形時(圖 48)，則剪刀數量最少為 4；最多為

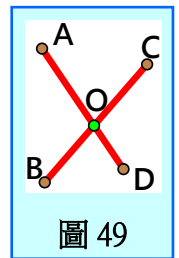
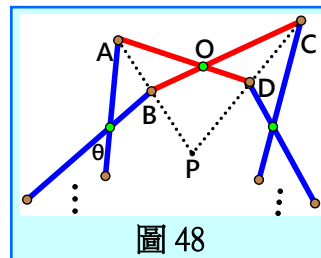
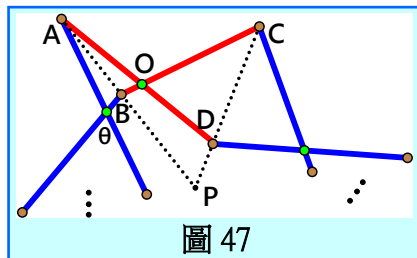
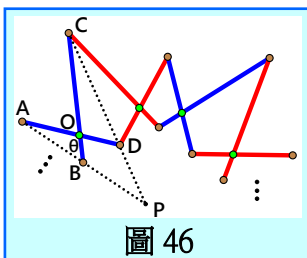
a.當 $\frac{180^\circ}{90^\circ-\alpha'}$ 為整數時，剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{90^\circ-\alpha'} - 2$ 。

b.當 $\frac{180^\circ}{90^\circ-\alpha'}$ 不為整數時，(a)若 $\left[\frac{180^\circ}{90^\circ-\alpha'}\right]$ 為奇數，則剪刀數量為 $\left[\frac{360^\circ}{90^\circ-\alpha'}\right] - 1$ 。

(b)若 $\left[\frac{180^\circ}{90^\circ-\alpha'}\right]$ 為偶數，則剪刀數量為 $\left[\frac{360^\circ}{90^\circ-\alpha'}\right]$ 。

④不論剪刀間形的組合方式為何，剪刀數量均為偶數個。

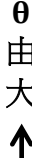







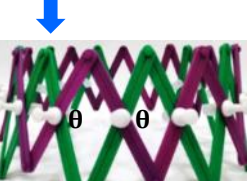
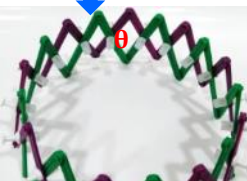
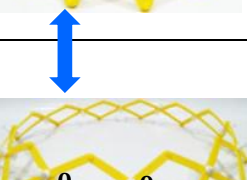
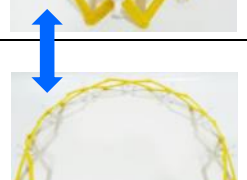
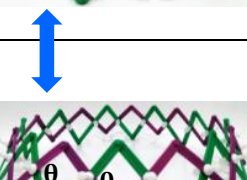
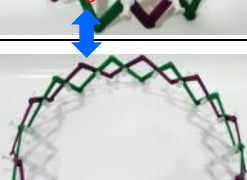
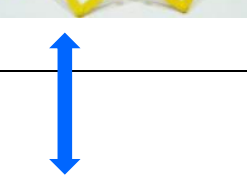
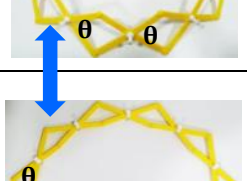
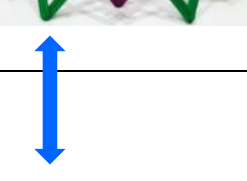
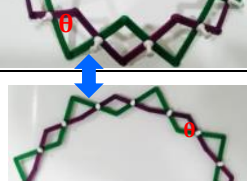
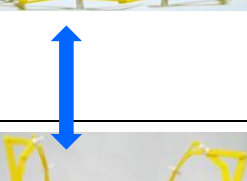
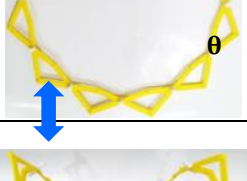
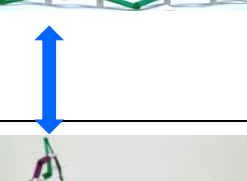
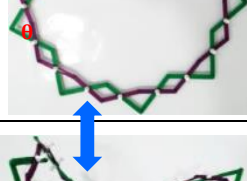
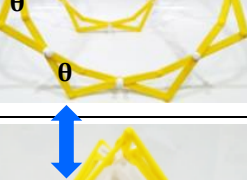
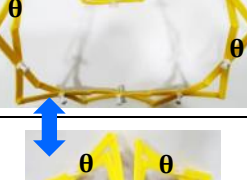
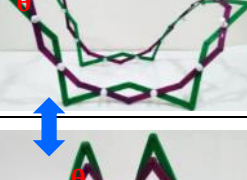
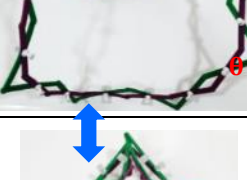
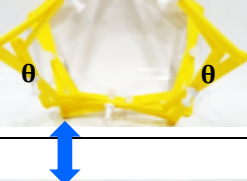
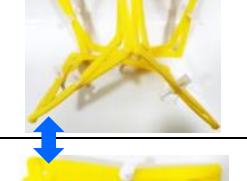
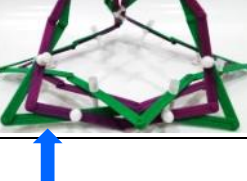
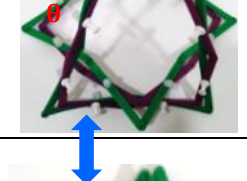








理由：因開合角 θ 由大變小時，剪刀間形的變化情形依序為大箏形+小箏形、三角形+箏形、飛鏢形+箏形、飛鏢形+三角形、大飛鏢形+小飛鏢形，所以理由同 1.(2)、(3)，2.(2)①。



(七)察覺 從(六)分析中，我們整理出：在封閉剪刀組中，其剪刀四段長的範圍為 $\overline{AO} \geq \overline{BO}$ 且 $\overline{CO} > \overline{DO}$ (圖 49)。

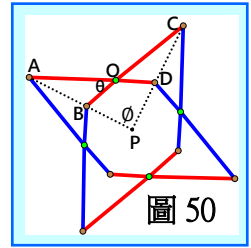
(八)進一步發展

想知道封閉剪刀組的開合角 θ 開合的變化，我們操控剪刀臂使 θ 角度不同，結果整理如下：

編號		3-4		4-1	
圖示		側面圖	俯視圖	側面圖	俯視圖
θ 由大   小	三維空間	 θ 約 180°	 θ 約 180°	 θ 約 180°	 θ 約 180°
		 θ	 θ	 θ	 θ
		 θ	 θ	 θ	 θ
	二維空間		 θ		 θ
		 θ	 θ	 θ	 θ
		 θ	 θ	 θ	 θ
	三維空間	 θ	 θ	 θ	 θ
		 θ 約 0°	 θ 約 0°	 θ 約 0°	 θ 約 0°
		 θ 約 0°	 θ 約 0°	 θ 約 0°	 θ 約 0°

發現

在二維空間中的封閉剪刀組，如果開合角 θ 要再繼續開合，則封閉剪刀組會在三維空間中呈現立體狀態，因此



1.若開合角 θ 變大時，則封閉剪刀組在三維空間中的呈現為圓台狀態。

理由：(如圖 50，以 4 個剪刀拼成封閉剪刀組作說明，同理 X 個剪刀情況相同。)

(1)在二維空間中，設開合角為 θ 時，其 $\angle APC = \phi$ ，所以 $4\phi = 360^\circ$ 。

(2)當 θ 變大時， $\angle AOC$ 變小，由**性質 1**知： ϕ 會變小(令為 ϕ')。

因此，若要維持為封閉剪刀組，則 $4\phi' < 360^\circ$ ，即會在三維空間中呈現圓台狀態。

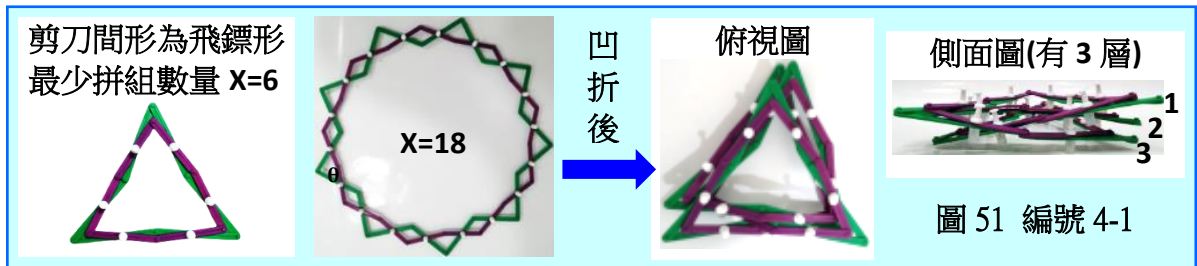
2.若開合角 θ 變小時，則封閉剪刀組會在三維空間中呈現為凹折狀態。

理由：(如圖 50，以 4 個剪刀拼成封閉剪刀組作說明，同理 X 個剪刀情況相同。)

(1)在二維空間中，設開合角為 θ 時，其 $\angle APC = \phi$ ，所以 $4\phi = 360^\circ$ 。

(2)當 θ 變小時， $\angle AOC$ 變大，由**性質 1**知： ϕ 會變大(令為 ϕ')。

因此，若要維持為封閉剪刀組，則 $4\phi' > 360^\circ$ ，即會在三維空間中呈現凹折狀態，到最後，其凹折成剪刀間形為飛鏢形最少拼組數量的樣貌(如圖 51)。



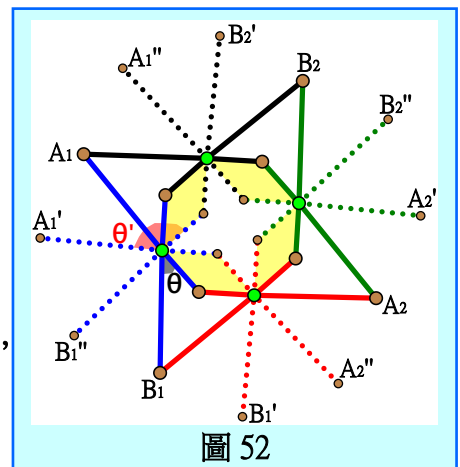
3.在二維空間中的封閉剪刀組，當 $\overline{AO} > \overline{BO}$ 且 $\overline{CO} \geq \overline{DO}$ ，其開合角 θ 為固定，無法再開合。

理由：設在二維空間中的封閉剪刀組，當 $\overline{AO} > \overline{BO}$ 且 $\overline{CO} \geq \overline{DO}$ ，其開合角為 θ

由 1.2.知：不論開合角變大或變小，其封閉剪刀組均會在三維空間中呈現立體狀態，因此在二維空間中的封閉剪刀組，其開合角 θ 為固定，無法再開合。

(九)思考

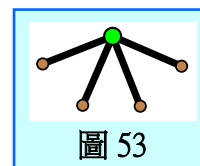
在玩幾何扣條時發現將扣條組成三角形，三角形是固定不動的，但將扣條組成四邊形，則可以變動，由圖 52 我們得到一靈感，因最外圈 B_1'' 、 A_1' 、 A_1'' 、 B_2' ...在平面上是無法相拼的，若內圈(黃色)變成是整個封閉剪刀組最外圈，可能就能在平面上變動，所以我們想改變剪刀構造(研究三)，讓封閉剪刀組只在二維空間中變動。



研究三、探討剪刀該怎麼設計，組成封閉剪刀組在二維空間能變動。

(一)觀察與發現

觀察圖 53，剪刀兩臂是彎的，4 段等長，兩臂的組成方式有 3 種類型(如下表)，拼組 2 個剪刀，當操控不同臂的 2 段時，型三的剪刀組不會一起帶動，所以型三不列入研究討論中。

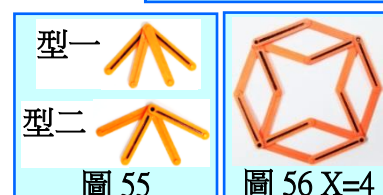
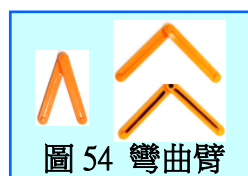


(● 軸心，● 連接點，— 彎曲的兩臂，軸心在 2 臂中點上。)

剪刀		型一	型二	型三
開合角的變化	固定不變	$\angle 2$ 、 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$	$\angle 1 + \angle 2$ 、 $\angle 2 + \angle 3$	$\angle 1$ 、 $\angle 3$
	可變動	$\angle 1$ 、 $\angle 3$	$\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$	$\angle 2$
拼組 2 個剪刀若 θ 變小的樣貌				
發現		2 個剪刀能互相帶動，剪刀間形可變動。		只有左邊黑色彎曲臂會動，剪刀間形沒變動。

(二)製作過程

- 取 2 條等長的幾何扣條，在一端塗上瞬間膠並扣住，待瞬間膠還沒乾之前，調整好剪刀臂彎摺的角度，待乾後，即做好彎曲的一臂(如圖 54)。
- 另一臂做法同 1，並在扣條上畫線，區別彎曲的兩臂(如圖 54)。
- 將彎曲兩臂在彎摺處互相扣住，即完成一個剪刀(如圖 55)。
- 重覆 1~3。做出很多剪刀，再將扣條相扣，拼成剪刀組(如圖 56)。



(三)製作成果

剪刀類型	拼組數量(X)與開合動態		
	X=3	X=4	X=5
型一 兩臂彎曲夾角分別為 35° 和 90°	 內圈扣條相拼後呈弧線，不能變動。	 能組成封閉剪刀組在二維空間不能變動	 不能組成封閉剪刀組
型二 彎曲臂夾角皆為 90°	 不能組成封閉剪刀組	 能組成封閉剪刀組在二維空間能變動	 不能組成封閉剪刀組

發現：只有型二當彎曲臂夾角皆為 90° 、拼組數量為 4 時，才能組成封閉剪刀組，且在二維空間能變動。

(四)分析

1.型一分析：型一剪刀構造是 4 段等長，兩臂彎曲夾角分別為 α 、 β ($0^\circ < \beta < \alpha < 180^\circ$)， X 為拼成封閉剪刀組的剪刀數量。

(1)設型一封閉剪刀組外圍為 $2X$ 邊的凸多邊形，則 ① $\angle 2 = \angle 3$ 。

②若 $\frac{720^\circ}{360^\circ - (\alpha + \beta)}$ 為整數，且 $X \geq 3$ 時，則 $X = \frac{720^\circ}{360^\circ - (\alpha + \beta)}$ 。

理由：①因剪刀構造 4 段等長，所以剪刀間形為菱形，故 $\angle 2 = \angle 3$ (對角相等)。

②如圖 57，在封閉剪刀組中，黑色剪刀臂圍成凸多邊形，即 X 個型一剪刀拼成凸 $2X$ 邊形， α 和 $\angle 1$ 為其內角，因剪刀間形為菱形，所以 $\angle 1 = 180^\circ - \angle 2$ ， $\angle 2 = \frac{\alpha - \beta}{2}$ ，因此凸 $2X$ 邊形內角和 = $(2X - 2) \times 180^\circ = X\alpha + X\angle 1$

$$\Rightarrow 360^\circ X - 360^\circ = X\alpha + 180^\circ X - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)X \Rightarrow X = \frac{720^\circ}{360^\circ - (\alpha + \beta)}$$

又因 X 為整數，所以若 $\frac{720^\circ}{360^\circ - (\alpha + \beta)}$ 為整數，且 $X \geq 3$ 時， $X = \frac{720^\circ}{360^\circ - (\alpha + \beta)}$ 。

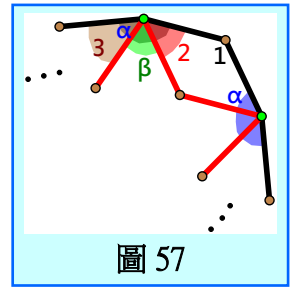


圖 57

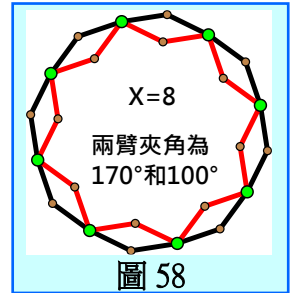


圖 58

(2)設型一封閉剪刀組外圍為 $2X$ 邊的正多邊形，則

① $3\alpha - \beta = 360^\circ$ ，②若 $\frac{180^\circ}{180^\circ - \alpha}$ 為整數，則 $X = \frac{180^\circ}{180^\circ - \alpha}$ 。

理由：如圖 59、60 所示，等長的 4 段以 a 、 b 、 c 、 d 表示，

若型一封閉剪刀組外圍為正多邊形，可能有下列 2 種情形

a.2 段臂 b 、 d 成一直線，為正多邊形的一邊(如圖 59)，

(利用反證法做說明) 假設型一 2 段臂 a 、 c 的連接點能相拼，

因三角形任兩邊之和大於第三邊，

所以 $a + c > b + d$ (與已知 4 段等長矛盾)，

故型一 2 段臂 a 、 c 的連接點不能拼在一起，無法拼成封閉剪刀組。

b.2 段臂 b 、 d 皆為正多邊形的邊(如圖 60)，所以 b 、 d 兩段臂間的夾角為 α ，

①因型一 4 段臂等長，灰色部分為菱形，

$$\text{所以菱形內角和 } 360^\circ = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \times 2 + 2\alpha \Rightarrow 3\alpha - \beta = 360^\circ,$$

②因 X 個型一剪刀組成正 $2X$ 邊形， α 為其內角，

$$\text{所以外角} = 180^\circ - \alpha = \frac{360^\circ}{2X} \Rightarrow X = \frac{180^\circ}{180^\circ - \alpha},$$

又因 X 為整數，故若 $\frac{180^\circ}{180^\circ - \alpha}$ 為整數，則 $X = \frac{180^\circ}{180^\circ - \alpha}$ 。

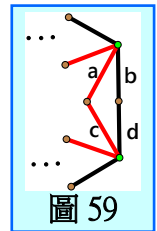


圖 59

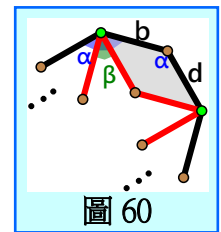


圖 60

(3) 設型一 封閉剪刀組外圍為凹多邊形，則彎曲 2 臂其中 1 段會重疊。

理由：(如圖 61，利用反證法做說明)

假設型一 彎曲 2 臂 4 段都不會重疊，

因 $\cos \gamma > \cos \delta$ ，

所以 $a > b$ ，與已知型一 4 段臂等長矛盾，

故 a、b 兩段臂會重疊。

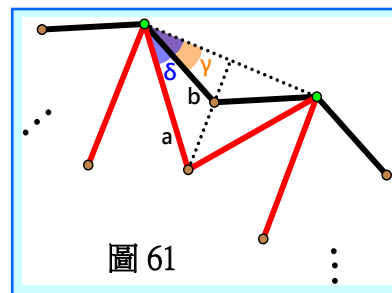


圖 61

(4) 設型一 封閉剪刀組外圍為凹多邊形，

a. 若 $2\alpha - \beta < 180^\circ$ 且 $\frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$ 為整數，則 $X = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$ 。

b. 若 $2\alpha - \beta = 180^\circ$ 且 $\frac{360^\circ}{\alpha - \beta}$ 為整數，則 $X = \frac{360^\circ}{\alpha - \beta}$ 。

理由：如圖 62，由(3)知 \overline{AB} 、 \overline{BC} 皆為彎曲 2 臂中重疊的 1 段，

將凹多邊形畫輔助線(如藍色虛線)使其成為凸多邊形，

有下列 2 種情形

a. 當 $\angle EAD < 180^\circ$ 時，($\angle EAD = 2(\alpha - \beta) + \beta = 2\alpha - \beta$)

X 個型一剪刀拼成凸 2X 邊形，

$\angle EAD$ 和 $\angle ADC$ 為其內角， $\angle ADC = 180^\circ - (\alpha - \beta)$ ，

所以凸 2X 邊形內角和 = $(2X - 2) \times 180^\circ = X(2\alpha - \beta) + X[180^\circ - (\alpha - \beta)]$

$$\Rightarrow 180^\circ X - 360^\circ = \alpha X \Rightarrow X = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$$

又因 X 為整數，故若 $\frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$ 為整數，則 $X = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$ 。(例子如圖 63)

b. 當 $\angle EAD = 180^\circ$ 時，

X 個型一剪刀拼成正 X 邊形，

$\angle ADC = 180^\circ - (\alpha - \beta)$ 是正 X 邊形一內角，

所以正 X 邊形外角 = $180^\circ - [180^\circ - (\alpha - \beta)] = \frac{360^\circ}{X}$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = \frac{360^\circ}{X} \Rightarrow X = \frac{360^\circ}{\alpha - \beta}$$

又因 X 為整數，故若 $\frac{360^\circ}{\alpha - \beta}$ 為整數，則 $X = \frac{360^\circ}{\alpha - \beta}$ 。(例子如圖 64)

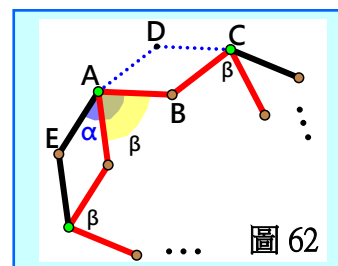


圖 62

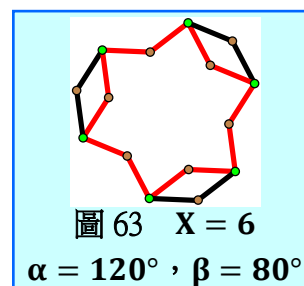


圖 63 X = 6

$\alpha = 120^\circ, \beta = 80^\circ$

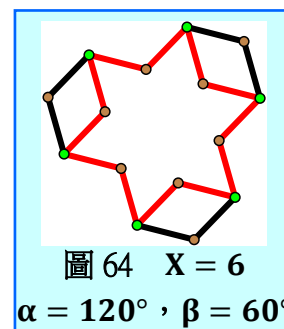


圖 64 X = 6

$\alpha = 120^\circ, \beta = 60^\circ$

(5) 型一 封閉剪刀組在二維空間中，其開合角 θ 不能變動。

理由：(利用反證法做說明)

假設型一 封閉剪刀組在二維空間中，其開合角 θ 能變動，

有下列 2 種情形

a. 封閉剪刀組外圍為凸多邊形(如圖 65)，

若開合角 θ 變小，則 $\angle 1$ 變大，

與型一封閉剪刀組為旋轉對稱圖形不合，

同理，若 θ 變大亦然。

b. 封閉剪刀組外圍為凹多邊形(如圖 66)，

\overline{AB} 、 \overline{BC} 皆為彎曲 2 臂中重疊的 1 段...①

若開合角 θ 變小，則彎曲 2 臂中沒有 1 段重疊，與①不合，

同理，若 θ 變大亦然。

所以由 a.b.得知型一封閉剪刀組在二維空間不能變動。

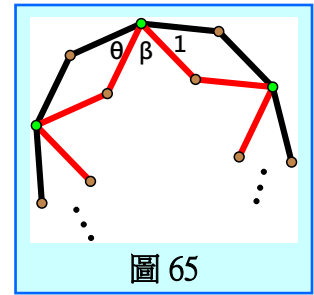


圖 65

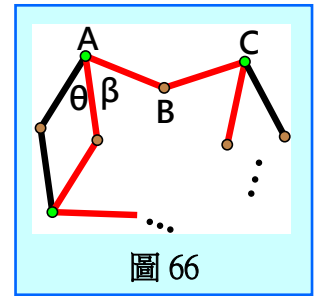


圖 66

2. 型二分析：型二剪刀構造是 4 段等長，彎曲臂夾角皆為 α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$)， X 為拼成封閉剪刀組的剪刀數量。

(1) 型二拼成封閉剪刀組中，若 $\frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$ 為整數，其剪刀數量 $X = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$ 。

理由：如圖 67， X 個型二剪刀拼成凸 $2X$ 邊形，

$\angle ABC$ 和 $\angle BCD$ 為其內角，

因 $\angle ABC = 180^\circ - \angle 1$ ， $\angle BCD = \alpha + \angle 1$ ，

所以凸 $2X$ 邊形內角和 = $(2X - 2) \times 180^\circ = X(180^\circ - \angle 1) + X(\alpha + \angle 1)$

$$\Rightarrow 180^\circ X - 360^\circ = \alpha X \Rightarrow X = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$$

又因 X 為整數，故若 $\frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$ 為整數，則 $X = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$ 。

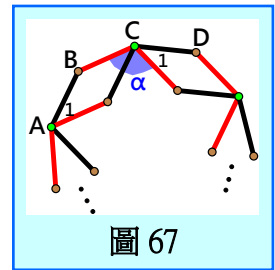


圖 67

(2) 型二封閉剪刀組在二維空間能變動，開合角 θ 的變動範圍為 0° 到 α 。

理由：(如圖 68，以 $X = 4$ 做說明，

同時等長的 4 段以 a 、 b 、 c 、 d 表示，其它情形相同。)

當 $\theta = 0^\circ$ 時，4 段臂中， a 與 b 重疊， c 與 d 重疊，

此時原本外圈 4 個菱形會變成 4 條直線。

當 $\theta = \alpha$ 時，4 段臂中，只有 b 與 c 會重疊，

此時原本外圈 4 個菱形會變成 4 個正方形。

但當 $\theta > \alpha$ 時，就不是型二剪刀構造，

會變成型三，不在討論範圍內。

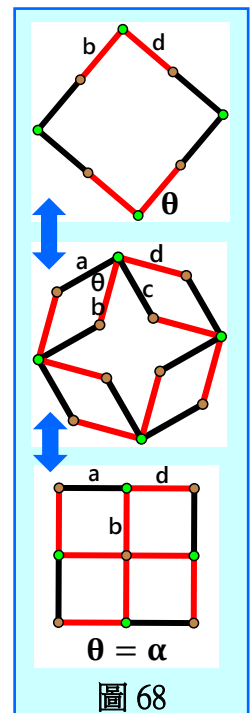


圖 68

3. 由 1.(5)和 2.(2)知只有型二封閉剪刀組能在二維空間變動，故之後的研究以型二做線狀與網狀拼組的探討。

(五)型二線狀拼組

1.製作成果：由分析得知拼成封閉剪刀組的關係式為： $X = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$ ， α 為彎曲臂夾角。

開合角 θ	$X = 3, \alpha = 60^\circ$	$X = 4, \alpha = 90^\circ$	$X = 6, \alpha = 120^\circ$
$\theta = 0^\circ$			
$\theta < \alpha$			
$\theta = \alpha$			

2.觀察與發現

由製作成果發現 X 與 α 的關係好像是正 n 邊形與其一內角的關係，我們列出下表果真都符合，我們觀察並思考其原因，將同一封閉剪刀組但開合角 θ 不同的一個剪刀構造合併一起觀察(如圖 69)，發現當 θ 愈大時，剪刀的軸心會在同一線上(L)朝圓心聚集； θ 愈小，會朝圓周擴張，而連接點都在半徑上移動，當 $\theta = 0^\circ$ 時，整個封閉剪刀組會形成圓內接 X 邊形，所以一個剪刀對應的圓心角為 $\frac{360^\circ}{X}$ ，觀察 $\triangle OAB$ 也能得知 $180^\circ - \alpha = \frac{360^\circ}{X}$ 。

X	3	4	5	6	7	8	9	...	n
α	60°	90°	108°	120°	$128\frac{4}{7}^\circ$	135°	140°	...	$\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$

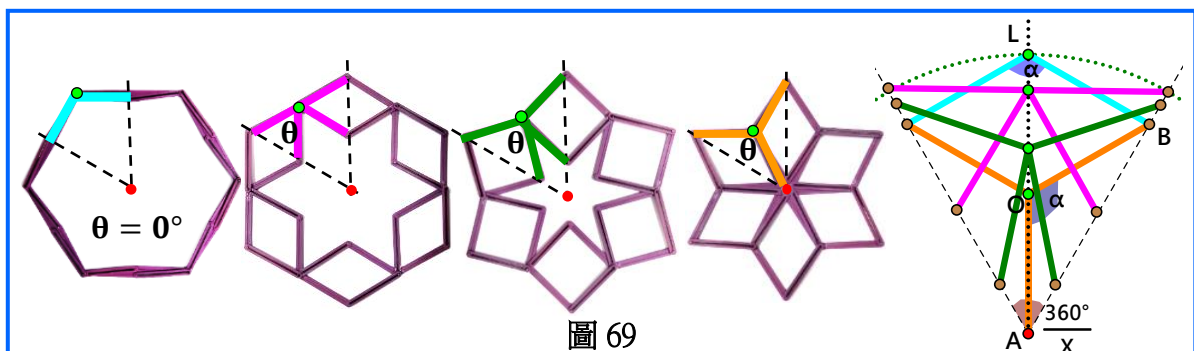


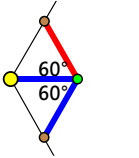
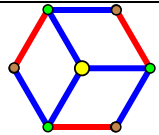
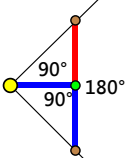
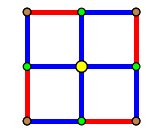
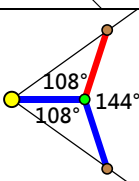
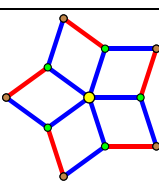
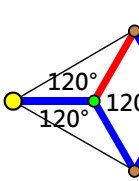
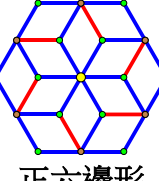
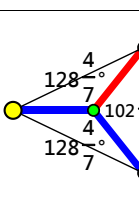
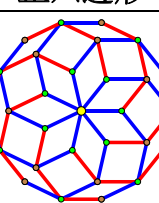
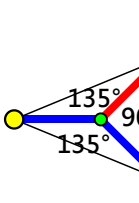
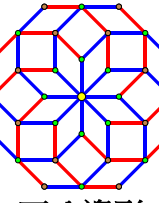
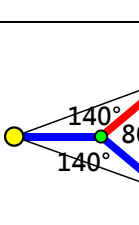
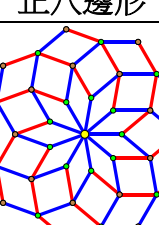
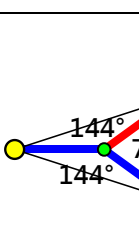
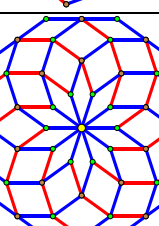
圖 69

(六)型二網狀拼組

1.想法 因開合角 θ 不同，剪刀的連接點都能在同一個扇形的半徑上移動，所以相同大小的剪刀能做網狀拼組，我們好奇一個扇形能拼組幾個剪刀。

2.畫圖思考

(X：一圈剪刀數量， α ：彎曲臂夾角，●：圓心，●：軸心，●：連接點，C：封閉剪刀組最多圈數)

X	α	剪刀從圓心向外拼組的樣貌	一圓心角剪刀數量	網狀拼組後樣貌	C
3	60°		1 個	 正六邊形	1 圈
4	90°		1 個	 正四邊形	1 圈
5	108°		1 個		1 圈
6	120°		2 個	 正六邊形	2 圈
7	$128\frac{4}{7}^\circ$		2 個		2 圈
8	135°		2 個	 正八邊形	2 圈
9	140°		2 個		2 圈
10	144°		3 個	 正十邊形	3 圈

3.分析

若剪刀臂夾角為 α (同色兩段的夾角)，則一圓心角($180^\circ - \alpha$)最多只能拼組 k 個剪刀，其中 $k > \frac{\alpha}{360^\circ - 2\alpha}$ 且 k 為最小的正整數。

理由：如圖 70，

$$\angle 1 = 360^\circ - 2\alpha, \quad \angle 2 = 360^\circ - 2\alpha + \angle 1 = 360^\circ \times 2 - 4\alpha,$$

$$\angle 3 = 360^\circ - 2\alpha + \angle 2 = 360^\circ \times 3 - 6\alpha,$$

$$\angle 4 = 360^\circ - 2\alpha + \angle 3 = 360^\circ \times 4 - 8\alpha, \quad \dots\dots$$

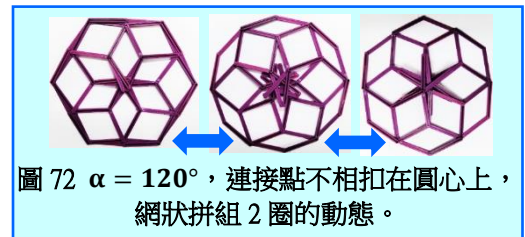
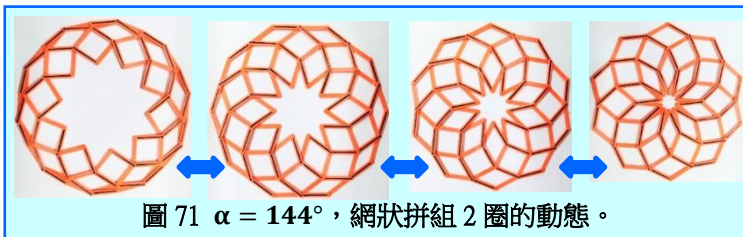
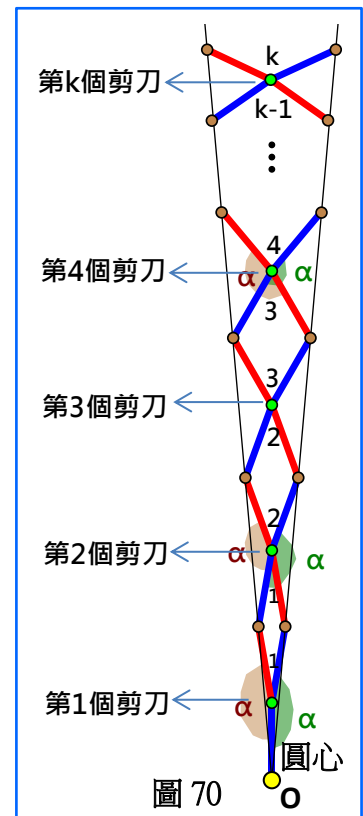
$$\angle k = 360^\circ - 2\alpha + \angle(k-1) = 360^\circ \times k - 2k\alpha,$$

當 $\angle k > \alpha$ 時，就不能再拼組下一個(第 $k+1$ 個)剪刀，

$$360^\circ \times k - 2k\alpha > \alpha \Rightarrow (360^\circ - 2\alpha)k > \alpha$$

$$\Rightarrow k > \frac{\alpha}{360^\circ - 2\alpha}, \quad \text{取 } k \text{ 為最小的正整數。}$$

4.製作成果 如圖 71、72，若網狀拼組的圈數小於最多圈數(C)或最內圈的封閉剪刀組連接點不相扣在圓心上，剪刀組就能變動。

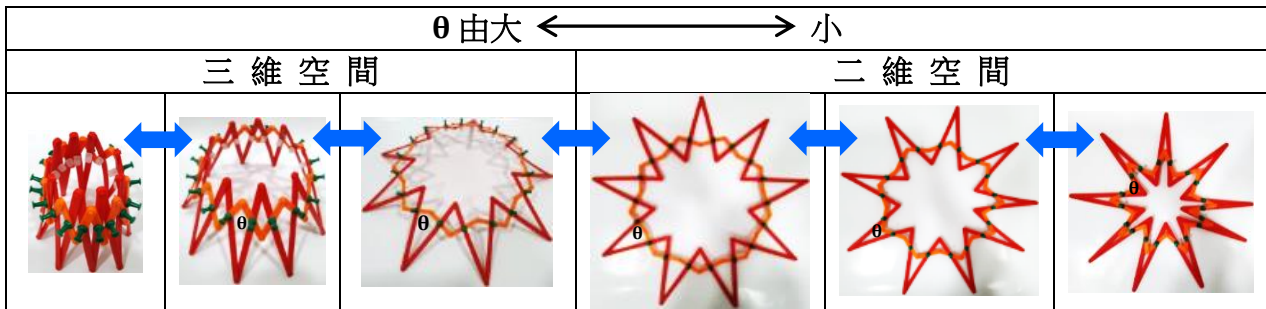
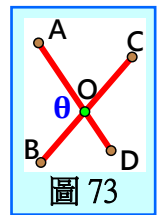


(七)其它發現 拼成封閉剪刀組的關係式為： $X = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$ ，若 $X < \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$ ，則無法在平面上拼成封閉剪刀組，如下表，當開合角 θ 愈大時，封閉剪刀組會往中心聚集，且 X 愈小，剪刀組聚集在中心處愈高，當 θ 愈小時，會往外圍擴張，其動態呈現立體的樣貌。

		X：一圈剪刀數量， $\alpha = 144^\circ$ ，網狀拼組 2 圈的動態。			
		X = 9	X = 8	X = 7	X = 6
θ 由大 ↑ ↓ 小	往中心聚集				
	↓				
	往外圍擴張				

陸、討論

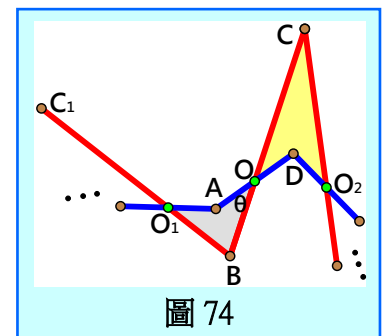
本作品主要探討剪刀 4 段長的範圍為 $\overline{AO} \geq \overline{BO}$ 且 $\overline{CO} > \overline{DO}$ (圖 73)，其封閉剪刀組在二維空間中，開合角 θ 為固定，無法再開合，但後來我們發現當剪刀 4 段長的範圍為 $\overline{AO} < \overline{BO}$ 且 $\overline{CO} > \overline{DO}$ 時，其封閉剪刀組在二維空間中，開合角 θ 是可變動的，可以再開合(如下表)。



1. 在二維空間中的封閉剪刀組，當 $\overline{AO} < \overline{BO}$ 且 $\overline{CO} > \overline{DO}$ ，其開合角 θ 是可變動的，可以再開合。

理由：如圖 74，封閉剪刀組的 \overline{AD} 臂分為 \overline{AO} 段與 \overline{DO} 段

(1) 在 \overline{DO} 段：因 $\overline{CO} > \overline{DO}$ ，所以在剪刀間形 $CODO_2$ 中(黃色)，當 \overline{CO} 與 \overline{CO}_2 (較長段) 相連接於 C 時，且 \overline{CB} 臂不動，透過開合角 θ 的變動， \overline{DO} 與 \overline{DO}_2 段(較短段)可以成一直線，即在封閉剪刀組中， \overline{DO} 與 \overline{DO}_2 段可以在 $\angle C$ 的開合角範圍內任意凹折。



(2) 在 \overline{AO} 段：同理，在封閉剪刀組中， \overline{AO} 與 \overline{AO}_1 段可以在 $\angle B$ 的開合角範圍內任意凹折。

(3) 由(1)(2)知：在封閉剪刀組中，當 \overline{BC} 臂不動， \overline{AD} 臂可以再轉動，

因此，在二維空間中的封閉剪刀組，其開合角 θ 是可變動的，可以再開合。

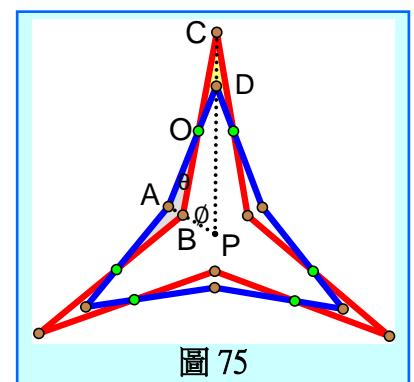
假設在二維平面中，最大的開合角為 θ

2. 若開合角 θ 變大時，則封閉剪刀組會在三維空間中呈現為圓台狀態。

理由：(如圖 75，以 6 個剪刀拼成封閉剪刀組作說明，同理 X 個剪刀情況相同。)

(1) 在二維空間中，設開合角為 θ 時，其 $\angle APC = \phi$ ，所以 $6\phi = 360^\circ$ 。

(2) 當 θ 變大時， $\angle AOC$ 變小，由 **性質 1** 知： ϕ 會變小(令為 ϕ')。



因此，若要維持為封閉剪刀組，則 $6\phi' < 360^\circ$ ，即會在三維空間中呈現圓台狀態。

3.若開合角 θ 變小時，則封閉剪刀組會在二維平面中朝圓心聚集。

(如圖 76，淺色代表在平面中，最大開合角為 θ 封閉剪刀組的樣貌，深色代表 θ 變小時，封閉剪刀組朝圓心聚集的樣貌)

由於開合角 θ 在二維平面中可以繼續開合，即是指 θ 變小時的情形，其開合方式為封閉剪刀組會朝圓心聚集。

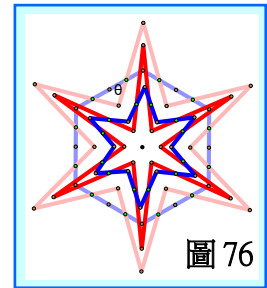
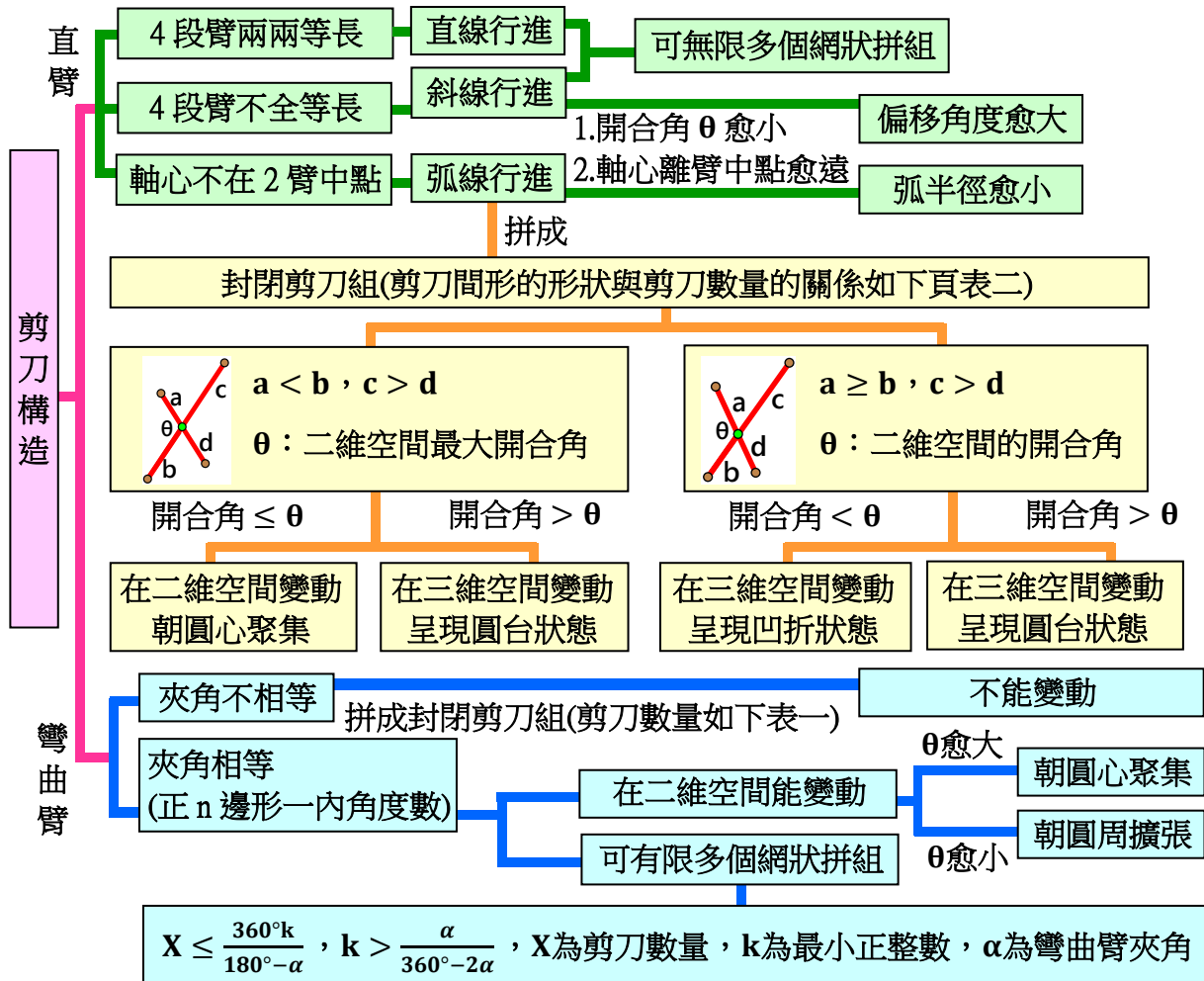


圖 76

柒、結論

在「拼組相同剪刀、剪刀組能完全開合」條件下，我們將研究結果整理如下



剪刀構造(4 段等長)	封閉剪刀組樣貌	剪刀數量(X)
型一：彎曲臂夾角為 α 、 β	凸2X邊形	$X = \frac{720^\circ}{360^\circ - (\alpha + \beta)}$
	正2X邊形	$3\alpha - \beta = 360^\circ, X = \frac{180^\circ}{180^\circ - \alpha}$
	凹多邊形	$2\alpha - \beta < 180^\circ, X = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$
		$\alpha - \beta = 180^\circ, X = \frac{360^\circ}{\alpha - \beta}$
型二：彎曲臂夾角為 α	凸2X邊形	$X = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$

在封閉剪刀組中，當每一個剪刀間形的變化情形都存在時，其所需的剪刀數量如表二

表二：直臂剪刀拼成封閉剪刀組所需的剪刀數量							
剪刀間形組合方式	剪刀間形的變化情形 (開合角 θ 由小 \leftarrow \rightarrow 大)						
形狀大小皆相同	飛鏢形			三角形($\theta = \phi$)		箏形	
	最少為 3		最多為 $\frac{360^\circ}{\phi} - 1$	$\frac{360^\circ}{\phi}$		大於 $\frac{360^\circ}{\phi}$ 的整數	
混菱形	飛鏢形+菱形			三角形+菱形($\theta = \phi$)		箏形+菱形	
	最少為 6		最多為 $\frac{720^\circ}{\phi} - 2$	$\frac{720^\circ}{\phi}$		大於 $\frac{720^\circ}{\phi}$ 的偶數	
形狀或大小不同	情況一	大飛鏢形+小飛鏢形			大三角形+小三角形($\theta = \phi$)		大箏形+小箏形
		最少為 4		最多為 $\frac{360^\circ}{\phi} - 2$	$\frac{360^\circ}{\phi}$		大於 $\frac{360^\circ}{\phi}$ 的偶數
	情況二	大飛鏢形+小飛鏢形		飛鏢形+三角形($\theta = \phi'$)	飛鏢形+箏形		三角形+箏形($\theta = \phi$)
最少為 4		最多為 $\frac{360^\circ}{90^\circ - \alpha'} - 2$	$\frac{360^\circ}{90^\circ - \alpha'}$	最少為 $\frac{360^\circ}{90^\circ - \alpha'} + 2$	最多為 $\frac{360^\circ}{\phi + \alpha - 90^\circ} - 2$	$\frac{360^\circ}{\phi + \alpha - 90^\circ}$	大於 $\frac{360^\circ}{\phi + \alpha - 90^\circ}$ 的偶數

註： $\tan \alpha = \frac{a \sin \phi}{b - a \cos \phi}$ ， $\tan \alpha' = \frac{d \sin \phi'}{c - d \cos \phi'}$ ， a 、 b 、 c 、 d 為剪刀臂 4 段長。

捌、未來展望

1. 本研究只探討拼組相同剪刀的剪刀組，未來可探討拼組成比例的剪刀，其拼組條件、動態、樣貌有何差異，也可思考剪刀臂、連接點該如何設計，才能讓剪刀臂在不同面向、 360° 自由完全開合，如此將做出不同的立體模型。
2. 剪刀構造拼組成剪刀組於應用方面可想成拆解零件到現場組裝，在運送與搬運的過程中具有節省體積、空間的優勢，當操控剪刀兩臂，剪刀組會移動並改變形狀，因而增加面積、體積或折疊成自身，將此特性應用在生活中，如伸縮帳篷、舞台設計、遮光動態窗戶...等，也能應用在太空科技中，節省運送太陽能板的空間。

玖、參考文獻資料

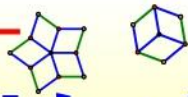
1. 彩色冰棒棍 diy 兒童玩具伸縮剪刀(2018)。51 費寶網。取自 <http://ft.51feibao.com/article.php?act=view&id=3429>
2. 霍伯曼球：玩起來像忍者絕技「螺旋丸」的玩具球(2020 年 12 月 29 日)。VITO 雜誌。取自 <https://vitomag.com/science/akdgfb.html>

【評語】 080404

1. 本研究由一個伸縮玩具中的 X 構造剪刀組進行發想，延伸出一串耐人尋味的探究問題，再運用數學知識一一解答，形成一系列豐富有趣的數學探究過程。
2. 作者將剪刀組的兩臂，依軸心所在的位置及臂長等長與否作為分類，探討其是否能完全開合。從直臂延伸探討彎曲臂(其實比較像折角臂，折角的頂點為軸心)。研究發現，當四段臂兩兩等長時，開合成直線行進；四段臂不等長，開合成斜線行進；軸心不在兩中點，開合成弧線行進。彎曲臂夾角不相等，不能變動；彎曲臂夾角相等，能變動。研究內容豐富，是一份兼具數學性與美感的作品。

作品海報

開闔有度聚散離奇



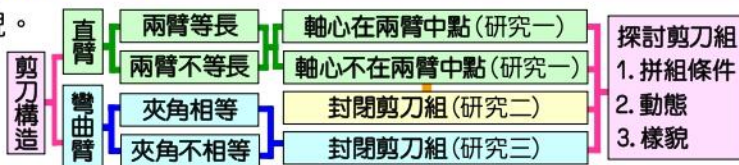
壹、研究動機

伸縮玩具(圖 1)、鐵拉門(圖 2)是剪刀臂等長、軸心在兩臂中點、直線行進的剪刀組，若改變剪刀構造，結果會如何呢？我們想探討剪刀該如何設計、如何拼組，伸縮效果會呈現何種狀態，樣貌有何改變，以供生活應用。



貳、研究目的

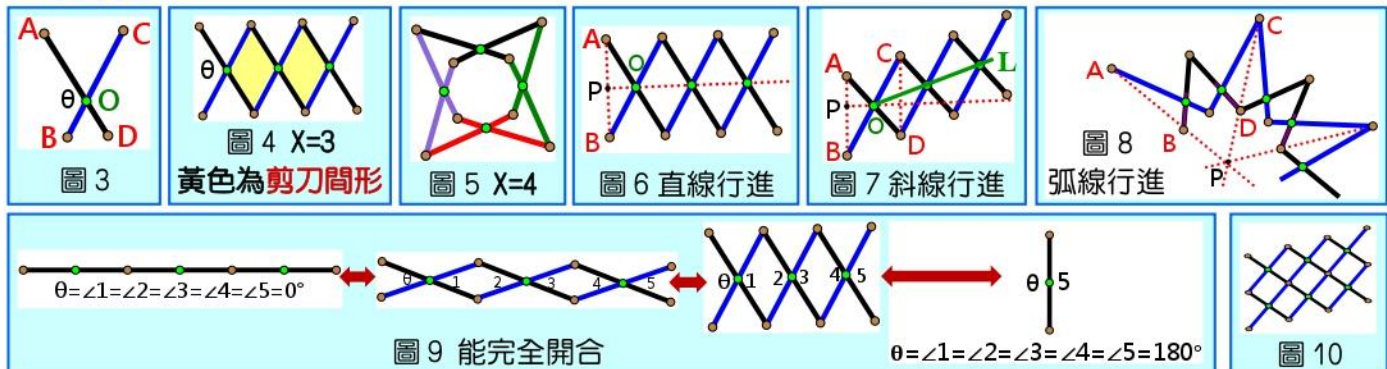
- 研究一、探討拼組相同的剪刀，能完全開合的樣貌。
- 研究二、探討能拼成封閉剪刀組的條件與樣貌。
- 研究三、探討剪刀該怎麼設計，組成封閉剪刀組在二維空間能變動。



參、研究方法

一、名詞解釋及符號定義：

- 剪刀構造**(圖 3)： \overline{AD} 、 \overline{BC} 為剪刀 2 臂， O 為軸心， \overline{AO} 、 \overline{OD} 、 \overline{BO} 、 \overline{OC} 為剪刀的 4 段， A 、 B 、 C 、 D 為連接點，假設操控 \overline{AO} 、 \overline{BO} ，開合角 θ 為 $\angle AOB$ 。
- 剪刀組**(圖 4)：數個剪刀拼在一起， X 為剪刀數量，其間所圍成的圖形稱為**剪刀間形**。
- 封閉剪刀組**(圖 5)：剪刀組能繞一圈，頭尾相拼。
- 行進動態**(圖 6~圖 8)，**線狀拼組**(圖 4~圖 9)，**網狀拼組**(圖 10)。
- 完全開合**(圖 9)：剪刀組的開合角 θ 能從 0° 到 180° 開合，其過程中 θ 的對頂角和對角永遠保持相等。



二、研究範圍與限制：

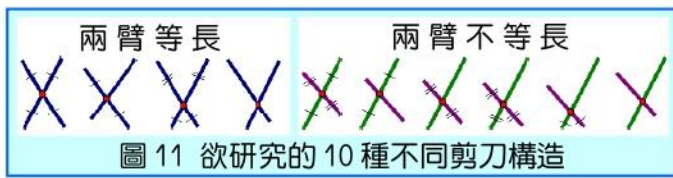
- 兩臂視為線段，軸心、連接點視為點，不考慮其寬度與厚度。
- 只探討**拼組相同剪刀**的剪刀組，且能完全開合的情形。

三、所運用的數學性質：主要運用四邊形的內角、對角線特性，及正多邊形的內外角和與圓心角的相關性質。

肆、研究過程與結果

研究一、探討拼組相同的剪刀，能完全開合的樣貌。

- 分析 1-1**：若剪刀欲拼組的 4 段中，任 3 段之和大於第 4 段，則剪刀能拼組。
- 分析 1-2**：在相同剪刀形成的剪刀組中，若剪刀間形為平行四邊形或箏形，則開合角 θ 能完全開合、帶動。
- 分析 1-3**：在相同剪刀形成的剪刀組中，剪刀間形與行進動態之關係如表一。



表一：剪刀間形與行進動態之關係

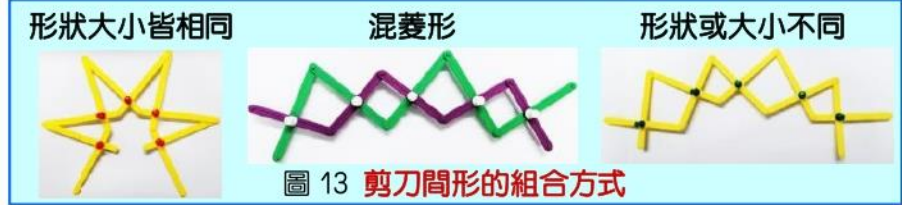
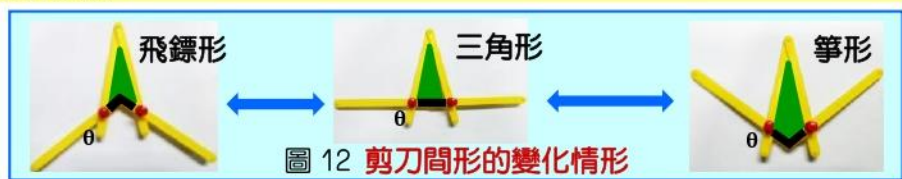
條件	<ul style="list-style-type: none"> ◆兩臂等長，剪刀間形為菱形。 ◆兩臂不等長，剪刀間形為全等箏形上下反接。 	<ul style="list-style-type: none"> ◆兩臂不論是否等長，剪刀間形為平行四邊形(非菱形)。 	<ul style="list-style-type: none"> ◆兩臂等長，剪刀間形為全等箏形並排。 ◆兩臂不等長，剪刀間形為箏形和菱形。 ◆兩臂不論是否等長，剪刀間形為大小箏形。
圖例			
動態	直線行進	斜線行進	弧線行進

- 結果**：不論剪刀兩臂是否等長，①若 4 段臂兩兩等長，則能拼出直線行進的剪刀組。
 ②若 4 段臂中不全等長，則能拼出斜線行進的剪刀組。③若軸心不在 2 臂中點，則能拼出弧線行進的剪刀組。

研究二、探討能拼成封閉剪刀組的條件與樣貌。

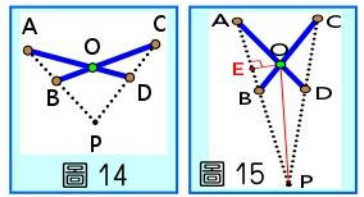
操控與猜想

- 剪刀間形隨著開合角 θ 變大，相鄰兩邊(圖 12 黑色兩邊)會內凹、成一直線、外凸而依序呈現**飛鏢形**、**三角形**、**箏形**的變化。
- 找出組成封閉剪刀組且剪刀間形是三角形時，所需的剪刀數量，若剪刀數量減少，則剪刀間形呈現**飛鏢形**，若增加，則呈現**箏形**。



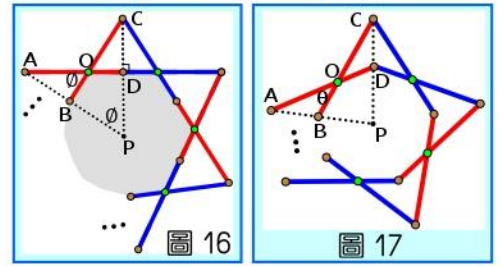
封閉剪刀組的剪刀數量探討

性質 1: 如圖 14、15，在 \overline{AD} 與 \overline{BC} 交於 O 點形成的剪刀，延伸 \overline{AB} 與 \overline{CD} 交於 P 點所圍成的飛鏢形 $APCO$ 中，若 $\angle AOC$ 越大，則 $\angle APC$ 越大；反之，若 $\angle AOC$ 越小，則 $\angle APC$ 越小。



對於在平面上能拼成封閉剪刀組的剪刀間形中，當軸心固定且剪刀間形隨著開合角 θ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) 作不同變化時，剪刀間形的形狀與剪刀數量的關係：

◆剪刀間形：形狀大小皆相同 (兩臂等長， $\overline{AO} = \overline{CO}$ ， $\overline{BO} = \overline{DO}$ ，但 $\overline{AO} \neq \overline{BO}$)
 假設兩個剪刀形成的剪刀間形為三角形時，其開合角 θ 為 ϕ ($< 90^\circ$)，在封閉剪刀組中
分析 2-1: 若剪刀間形為三角形時 (圖 16)，則 $\frac{360^\circ}{\phi}$ 為整數且剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{\phi}$ 。



理由：①因已知 \overline{CO} 、 \overline{DO} ，若剪刀間形要形成三角形，可先由 $\cos \phi = \frac{\overline{DO}}{\overline{CO}}$ 找出 ϕ 角。

②因在封閉剪刀組中，灰色部分為正 n 邊形， ϕ 為外角，

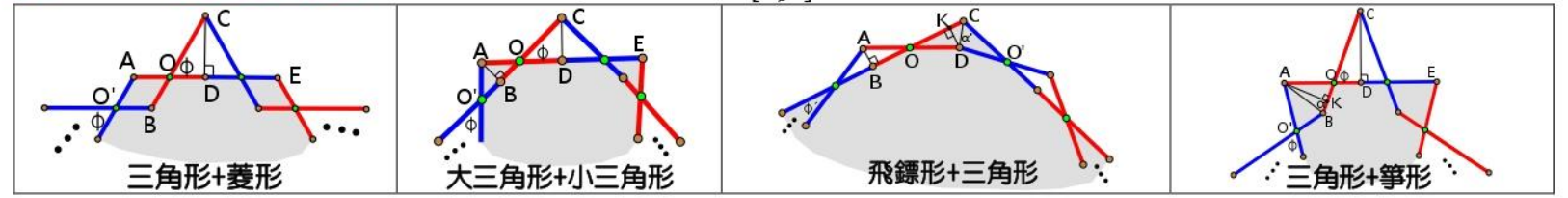
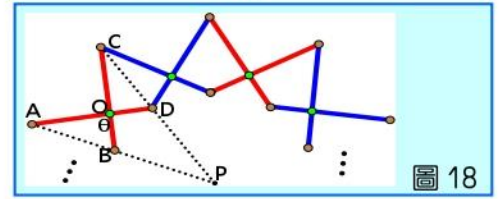
所以 $\phi = \frac{360^\circ}{n}$ ，即 $n = \frac{360^\circ}{\phi}$ 為整數。

③又正 n 邊形由 n 個剪刀組成，所以剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{\phi}$ 。

分析 2-2: 若剪刀間形為飛鏢形時 (圖 17)，則剪刀數量最少為 3；

最多為 a 。當 $\frac{360^\circ}{\phi}$ 為整數時，剪刀數量為 $\frac{360^\circ}{\phi} - 1$ 。b. 當 $\frac{360^\circ}{\phi}$ 不為整數時，剪刀數量為 $\lceil \frac{360^\circ}{\phi} \rceil$ 。

分析 2-3: 若剪刀間形為箏形時 (圖 18)，則剪刀數量最少為 $\lceil \frac{360^\circ}{\phi} \rceil + 1$ 。[] 為高斯符號



◆其它剪刀間形的組合方式，其不同剪刀間形的變化，剪刀組繞一圈形成封閉剪刀組所需的剪刀數量分析詳見作品說明書。

表二：直臂剪刀，在封閉剪刀組中，當每一個剪刀間形的變化情形都存在時，其所需的剪刀數量。

剪刀間形組合方式	剪刀間形的變化情形 (開合角 θ 由小 \leftarrow \rightarrow 大)			剪刀間形組合方式	剪刀間形的變化情形 (開合角 θ 由小 \leftarrow \rightarrow 大)		
	飛鏢形	三角形 ($\theta = \phi$)	箏形		飛鏢形+菱形	三角形+菱形 ($\theta = \phi$)	箏形+菱形
①形狀大小皆相同	最少為 3	最多為 $\frac{360^\circ}{\phi} - 1$	$\frac{360^\circ}{\phi}$	②混菱形	最少為 6	最多為 $\frac{720^\circ}{\phi} - 2$	$\frac{720^\circ}{\phi}$
③形狀或大小不同	大飛鏢形+小飛鏢形		大三角形+小三角形 ($\theta = \phi$)		大箏形+小箏形		
	最少為 4		最多為 $\frac{360^\circ}{\phi} - 2$	$\frac{360^\circ}{\phi}$	大於 $\frac{360^\circ}{\phi}$ 的偶數		
情況二	大飛鏢形+小飛鏢形		飛鏢形+三角形 ($\theta = \phi'$)	飛鏢形+箏形		三角形+箏形 ($\theta = \phi$)	大箏形+小箏形
	最少為 4	最多為 $\frac{360^\circ}{90^\circ - \alpha'} - 2$	$\frac{360^\circ}{90^\circ - \alpha'}$	最少為 $\frac{360^\circ}{90^\circ - \alpha'} + 2$	最多為 $\frac{360^\circ}{\phi + \alpha - 90^\circ} - 2$	$\frac{360^\circ}{\phi + \alpha - 90^\circ}$	大於 $\frac{360^\circ}{\phi + \alpha - 90^\circ}$ 的偶數

註： $\tan \alpha = \frac{a \sin \phi}{b - a \cos \phi}$ ， $\tan \alpha' = \frac{d \sin \phi'}{c - d \cos \phi'}$ ， a 、 b 、 c 、 d 為剪刀臂 4 段長。

動態 在平面的封閉剪刀組， θ 為固定無法再開合，若要繼續開合，則呈現立體狀態， θ 變大呈現圓台狀態； θ 變小呈現凹折狀態。

研究三、探討剪刀該怎麼設計，組成封閉剪刀組在二維空間能變動。

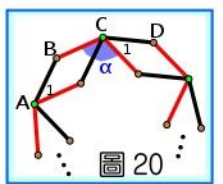
設計剪刀構造

剪刀構造	型一	型二	型三
拼組 2 個剪刀若 θ 變小的樣貌			
發現	2 個剪刀能互相帶動，剪刀間形可變動。		
拼成封閉剪刀組			只有左邊黑色彎曲臂會動，剪刀間形沒變動，故不探討。
	$\alpha = 90^\circ$ $\beta = 35^\circ$ $X=4$ 不能變動	$\alpha = 90^\circ$ $X=4$ 在二維空間能變動	

封閉剪刀組的剪刀數量探討

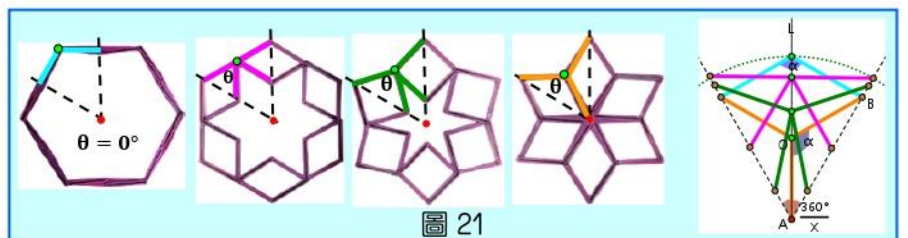
分析 3-1: 型二 (4 段等長，彎曲臂夾角皆為 α) 拼成封閉剪刀組中，若 $\frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$ 為整數，其剪刀數量 $X = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$ 。

理由：如圖 20， X 個剪刀拼成凸 $2X$ 邊形， $\angle ABC$ 和 $\angle BCD$ 為其內角，因 $\angle ABC = 180^\circ - \angle 1$ ， $\angle BCD = \alpha + \angle 1$ ，所以凸 $2X$ 邊形內角和 = $(2X - 2) \times 180^\circ = X(180^\circ - \angle 1) + X(\alpha + \angle 1)$
 $\Rightarrow 180^\circ X - 360^\circ = \alpha X \Rightarrow X = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$ ，又因 X 為整數，故若 $\frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$ 為整數，則 $X = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$ 。



觀察與發現 (圖 21)

將同一個封閉剪刀組但 θ 不同的一個剪刀合併在一起， X 與 α 的關係是正 X 邊形與其一內角的關係，當 θ 愈大時，剪刀的軸心會在同一線上 (L) 朝圓心聚集； θ 愈小，會朝圓周擴張，連接點都在半徑上移動。



型二網狀拼組

X：一圈剪刀數量， X_c ：一圓心角剪刀數量，
C：封閉剪刀組最多圈數

X	α	從圓心向外拼組的樣貌	X_c	網狀拼組樣貌	C
8	135°		2		2
9	140°		2		2
10	144°		3		3

網狀拼組剪刀數量分析

分析 3-2：若剪刀臂夾角為 α ，則一圓心角 $(180^\circ - \alpha)$ 最多只能拼組 k 個剪刀，其中 $k > \frac{\alpha}{360^\circ - 2\alpha}$ 且 k 為最小正整數。

理由： $\angle 1 = 360^\circ - 2\alpha$ ，

$$\angle 2 = 360^\circ - 2\alpha + \angle 1 = 360^\circ \times 2 - 4\alpha,$$

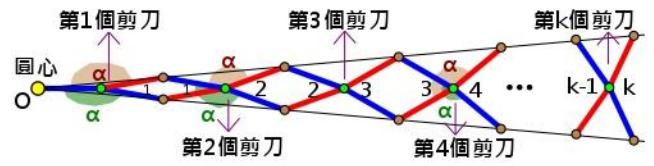
$$\angle 3 = 360^\circ - 2\alpha + \angle 2 = 360^\circ \times 3 - 6\alpha, \dots$$

$$\angle k = 360^\circ - 2\alpha + \angle (k-1) = 360^\circ \times k - 2k\alpha,$$

當 $\angle k > \alpha$ 時，就不能再拼組下一個(第 k+1 個)剪刀，

$$360^\circ \times k - 2k\alpha > \alpha \Rightarrow (360^\circ - 2\alpha)k > \alpha$$

$$\Rightarrow k > \frac{\alpha}{360^\circ - 2\alpha}, \text{ 取 } k \text{ 為最小正整數。}$$

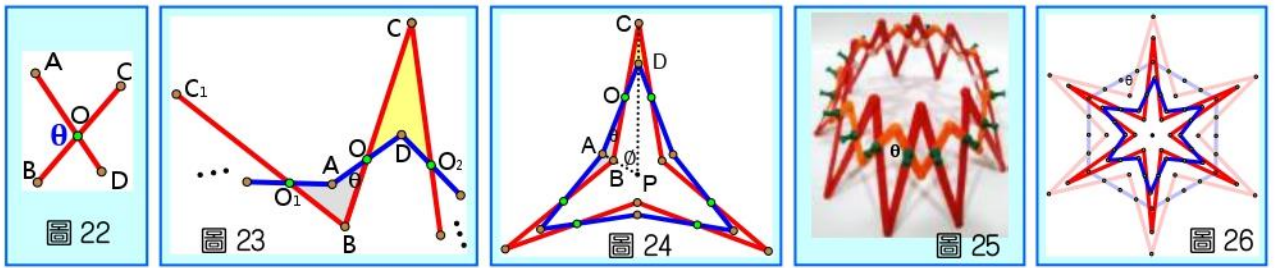


伍、討論

由研究二知剪刀 4 段長為 $\overline{AO} \geq \overline{BO}$ 且 $\overline{CO} > \overline{DO}$ (圖 22)，其封閉剪刀組在二維空間中，開合角 θ 為固定，無法再開合。但當剪刀 4 段長為 $\overline{AO} < \overline{BO}$ 且 $\overline{CO} > \overline{DO}$ 時，我們發現其封閉剪刀組在二維空間中，開合角 θ 是可變動的，可以再開合。假設在二維空間中，最大的開合角為 θ

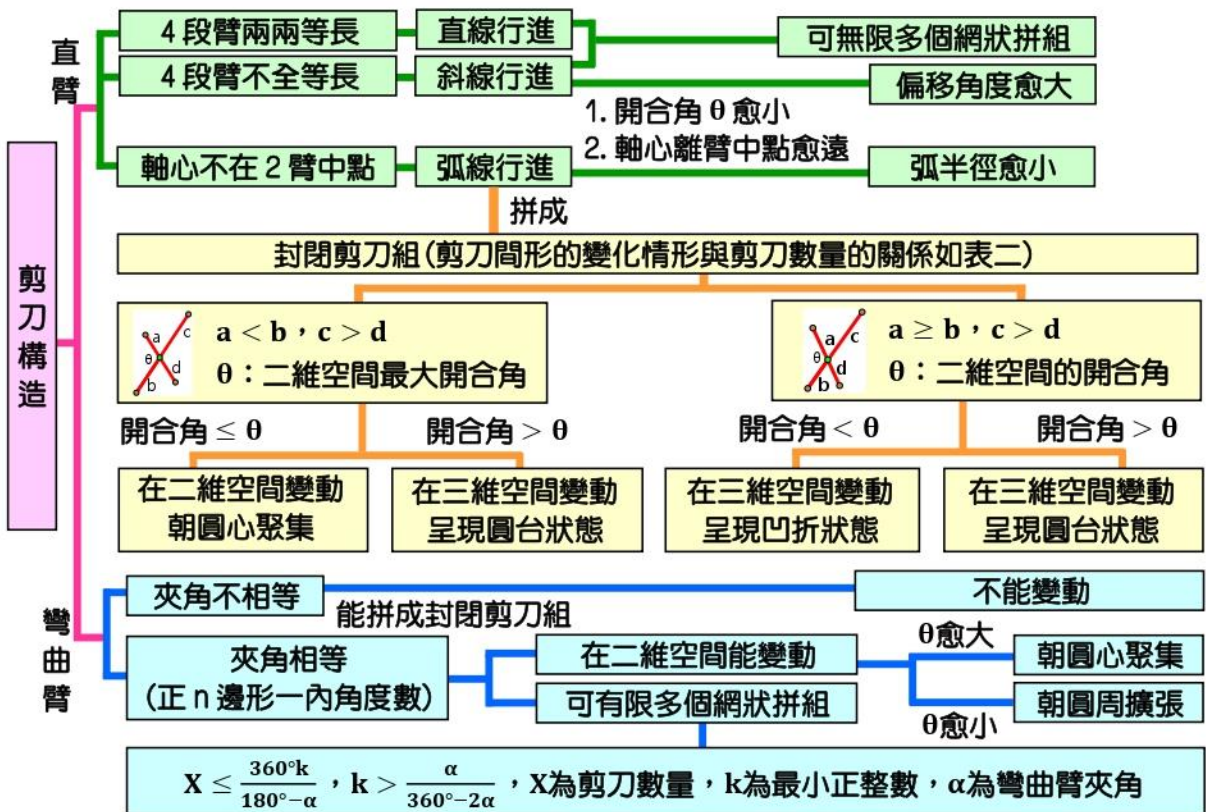
分析 1：若開合角 θ 變大時，則封閉剪刀組會在三維空間中呈現圓台狀態(圖 25)。

分析 2：若開合角 θ 變小時，則封閉剪刀組會在二維空間中朝圓心聚集(圖 26)。



陸、結論

在「拼組相同剪刀、剪刀組能完全開合」條件下，研究結果整理如下



柒、未來展望

1. 可繼續探討：(1) 拼組成比例的剪刀或型二剪刀 4 段不全等長，其拼組條件、動態、樣貌有何差異。(2) 剪刀臂、連接點該如何設計，才能讓剪刀組在不同面向， 360° 自由完全開合。
2. 優勢：(1) 拆解零件到現場組裝省空間。(2) 剪刀組能移動並改變形狀，因而增加面積、體積或折疊縮小。
應用：太空艙運送太陽能板省空間，伸縮組合屋、舞台設計、遮光動態窗戶...等。

捌、參考文獻資料

1. 彩色冰棒棍 diy 兒童玩具伸縮剪刀(2018)·51 費寶網·取自 <http://ft.51feibao.com/article.php?act=view&id=3429>
2. 霍伯曼球：玩起來像忍者絕技「螺旋丸」的玩具球(2020 年 12 月 29 日)·VITO 雜誌·取自 <https://vitomag.com/science/akdgfb.html>