

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

第三名

080402

三菱六計，同心「和」力

學校名稱：臺中市私立華盛頓國民小學

作者： 小五 鄭宇涵 小五 何苡棠 小五 賴芊兆 小五 楊燁 小五 劉仕傑	指導老師： 鄭智先 李昕芬
--	-----------------------------

關鍵詞：角落區塊、對稱性、數陣

摘要

在小正三角形拼成的三角形和菱形棋盤中填入數字，使得棋盤邊長-1的三個(三角形)或四個(菱形)角落區塊總和皆相同。隨著棋盤邊長增加、填入數字越多、角落重疊部分擴大，使用了順時針接力和順逆迴轉等方式，有規律的填入數字。研究內容包括：

- 1.找出重疊區的圖形與小三角形的數量，並觀察圖形與小三角形增加的規律。
- 2.在求角落總和最大值和最小值的目標之下，如何有規律的填入數字。
- 3.推論角落總和最大值和最小值的公式。

接著用小正三角形設計出六邊形棋盤，依循之前的實驗過程，修正六邊形棋盤會遇到的困難，發展出星星對稱、右逆跳格和對角跳格等方法，雖然過程複雜，但都能夠找到共通性，也有了肯定的結論。

壹、前言

一、研究動機：

課堂上老師讓我們挑戰數陣問題，數陣有很多種形狀：正方形、圓形等多種形狀組合而成。一開始我們嘗試把1到9的九個數字不重複，填入 3×3 方陣中，使四個角落的田字形總和相等。這個問題引起我們的好奇，進而想把類似的規則套用在由小正三角形拼成的三角形棋盤上。嘗試之後發現，原本方形棋盤的「行」、「列」填數個數相同，而由三角形拼成的棋盤更有挑戰性，除了「行」、「列」個數不同，且能利用正三角形 60 度角的特性，變化出菱形和六邊形的棋盤，讓我們有股衝勁，想要解開這個問題，便開始了這趟探究之旅。

二、研究目的：

- (一)探討三角形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。
- (二)探討菱形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。
- (三)探討六邊形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

三、相關文獻參考：

文獻名稱	與研究相關的內容摘要	對本研究啟發與差異之處
「和」成角落方陣	1.探討能否找到一種有規律的填法，使四個角落內數字的總和相等並恰好就是最大值或最小值。 2. $n \times n$ 方陣中，若要找最大值，內圈依規律的方式由大到小填入，下一圈以反方向填入，以此類推；角落區塊分成不同區域。同樣以規律的方向由大到小填入，一圈之後，再反方向繞回來，以此類推。最小值則將數字由小到大填入，填法和上面類似。	1.本研究找出在小正三角形拼成的三角形、菱形和六邊形棋盤中，找到一種有規律的填法，使角落數字的總和相等並找出最大值或最小值。 2.尋找角落總和時候，在三角形、菱形棋盤使用了順時針接力和順逆迴轉等方式，有規律的填入數字。在六邊形棋盤，發展出星星對稱、右逆跳格和對角跳格等複雜方法。
方陣之美	探討奇數階平面方陣及奇數階立體方陣的規則，建構奇數階立體方陣的規則；依據階數，將所有數字平均分組，接著將所有數字座標化。	在填數時，大部分重疊區可將數字總和平均分配。但在研究六邊形棋盤時，有些重疊區的總和無法平均分配，進而發展出星星對稱、右逆跳格和對角跳格等複雜方法。

魔方陣的變形	作品由三角形的魔方陣出發，設定規則如下：在 n 階三角形魔方陣中填入給定數字，使其三個 $n-1$ 階三角形數字和相等。	讓本研究從較多作品研究的方陣延伸到三角形棋盤，再進一步變成菱形棋盤、六邊形棋盤。
魔方陣的變化球	在解決基本三階魔方陣的過程中，得到解題的要訣在於訂立中心位置為5，可以得到八組解。每個位置出現同一個數字的次數也有線對稱關係。	本研究在填數時，會從中央區域，也就是重疊次數最多的區域開始填數，接著依序由重疊次數較多的區域往重疊次數較少的區域填數。填數的位置也具有對稱性。

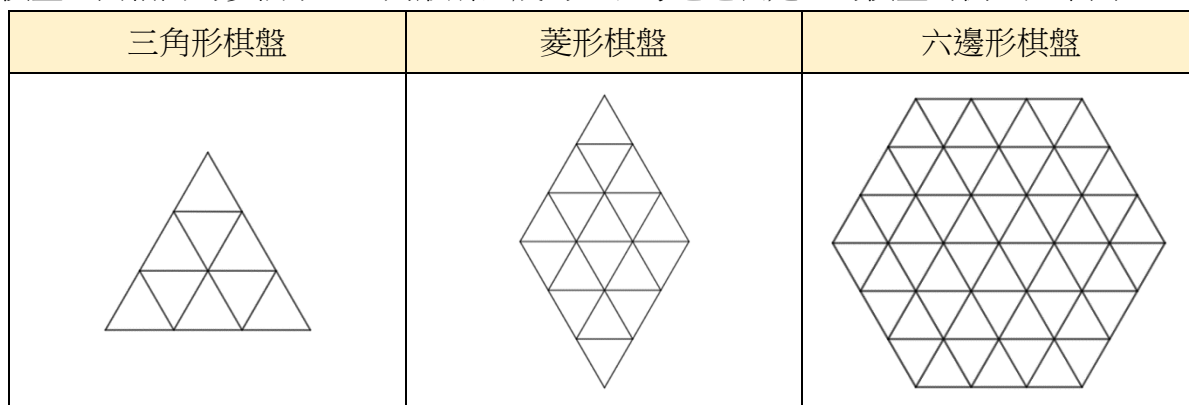
貳、研究設備及器材

電腦、iPad、自製棋盤、紀錄本、筆、白板、計算機。

參、研究過程或方法

一、名詞定義：

(一)棋盤：由相同的多個小正三角形所組成的，以每邊邊長是 3 的棋盤為例，如下圖。



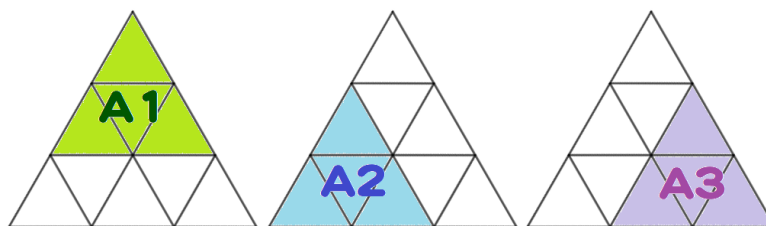
(二)棋盤邊長 L ：接下來使用 L 來表示多邊形棋盤的邊長，例如： $L=3$ 的三角形棋盤。

(三)棋盤小正三角形總數 N ：例如 $L=3$ 的三角形棋盤，小正三角形總共是 $1+3+5=9$ 個，我們記作 $N=9=3^2=L^2$ ，表示需在每個小正三角形各別填入 $1\sim N$ 的所有正整數，且數字不重複。

(四)棋盤總和 S ：當棋盤全部填滿數字，將數字加總，即為總和 S 。舉例： $L=3$ 的三角形棋盤會填入 $1、2、\dots、8、9$ 共九個數字， $S=1+2+\dots+8+9=45$ 。

(五)角落區塊與總和：角落區塊的邊長皆為 $L-1$ 。以三角形棋盤為例：從每個頂點開始， $L-1$ 為邊長的正三角形作為角落區塊的範圍，總共會有 3 個。

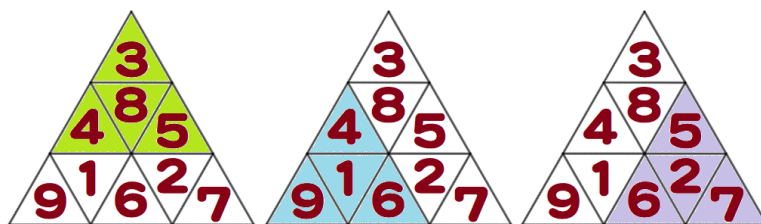
※當 $L=3$ 時，角落的綠色、藍色和紫色區塊正三角形邊長為 $3-1=2$ ，以此類推。當 $L=4$ 時，三個角落區塊的邊長為 $4-1=3$ ；當 $L=5$ 時，三個角落區塊的邊長為 $5-1=4$ 。



填入數字時，要使上圖中綠色區塊的四個數字總和與藍色區塊、紫色區塊的數字總和

皆相同。我們定義綠色區塊數字總和為「A1」，藍色區塊數字總和為「A2」，紫色區塊數字總和為「A3」，將三個區塊總和統稱為「角落總和」；當 $A1=A2=A3$ 時，用「A」表示其結果。

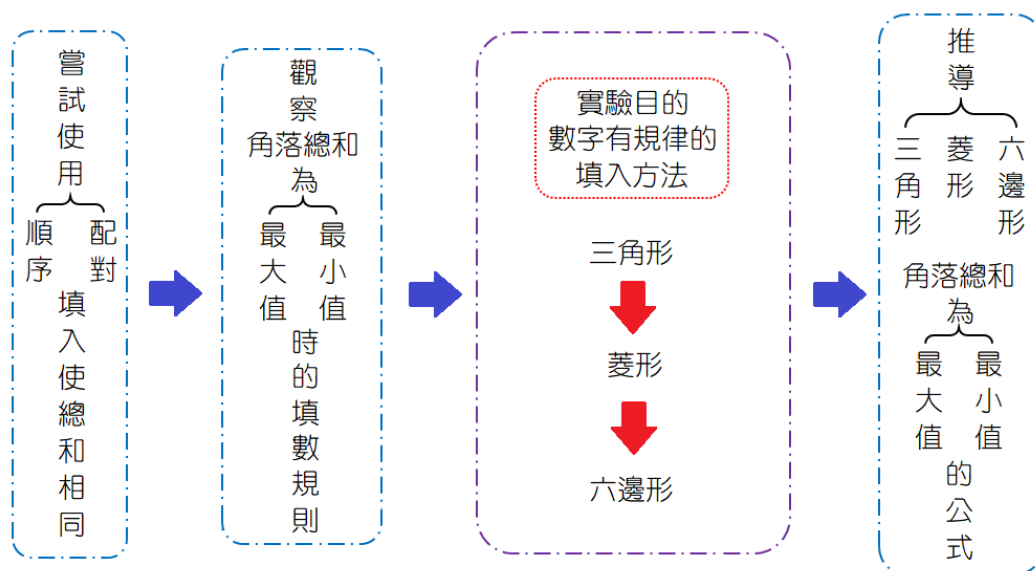
(六)數陣填數舉例說明：



綠色區塊 $A1=3+4+8+5=20$ ；藍色區塊 $A2=4+9+1+6=20$ ；紫色區塊 $A3=5+6+2+7=20$ ，挑戰成功。

(七)重疊區 R：當區塊沒有重複計算時定義為「R1」，當區塊重複計算兩次時為「R2」，當區塊重複計算三次時為「R3」，以此類推。

二、研究歷程與方法：



活動一：探討三角形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

- (一)觀察 $L=3$ 的實驗結果，並嘗試尋找有規律的填入方式
- (二)利用重疊區塊依序放入數字，找到角落總和最大值與最小值的填入方法
- (三)整理實驗方法與結果，找出其規律性並將角落總和歸納成通用公式

活動二：探討菱形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

- (一)參考三角形棋盤的實驗結果，嘗試找出菱形棋盤的重疊區
- (二)比較三角形和菱形棋盤的差異，找到角落總和最大值與最小值的填入方法
- (三)整理實驗方法與結果，找出其規律性並將角落總和歸納成通用公式

活動三：探討六邊形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

- (一)觀察六邊形棋盤重疊區的變化並找出規律
- (二)修正六邊形棋盤的擺放方式，並找到角落總和最大值與最小值的填入方法
- (三)整理實驗方法與結果，找出其規律性並將角落總和歸納成通用公式

肆、研究結果

一、探討三角形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

(一)觀察 $L=3$ 的實驗結果，並嘗試尋找有規律的填入方式：

1.總和 $A=17、19、20、21、23$ 皆能成功，且每個總和的填法不只一種，以下列出四種進行觀察與討論：

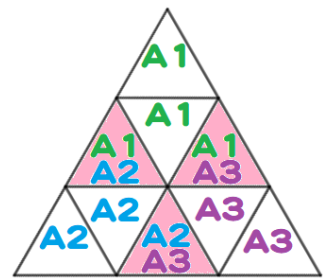
	<p>綠色 $A1=8+\boxed{1}+6+\underline{2}=17$； 藍色 $A2=\boxed{1}+9+4+\underline{3}=17$； 紫色 $A3=\underline{2}+3+5+7=17$， 挑戰成功。</p>
	<p>綠色 $A1=8+\boxed{1}+6+\underline{4}=19$； 藍色 $A2=\boxed{1}+9+2+\underline{7}=19$； 紫色 $A3=\underline{4}+7+3+5=19$， 挑戰成功。</p>
	<p>綠色 $A1=5+\boxed{7}+1+\underline{8}=21$； 藍色 $A2=\boxed{7}+9+2+\underline{3}=21$； 紫色 $A3=\underline{8}+3+4+6=21$， 挑戰成功。</p>
	<p>綠色 $A1=1+\boxed{8}+5+\underline{9}=23$； 藍色 $A2=\boxed{8}+2+6+\underline{7}=23$； 紫色 $A3=\underline{9}+7+3+4=23$， 挑戰成功。</p>

我們發現：

- ▲實驗過程中， $A1、A2、A3$ 三個區塊的數字中，都會有 3 個數字重複計算。
- ▲當總和 $A=17$ 時，重複計算的數字為 1、2、3，是九個數字中最小的三個。
- ▲當總和 $A=23$ 時，重複計算的數字為 7、8、9，是九個數字中最大的三個。

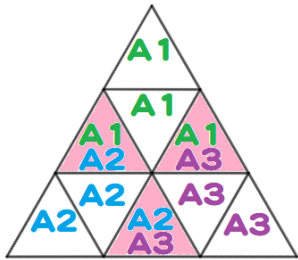
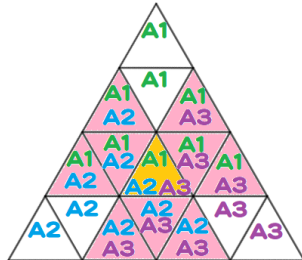
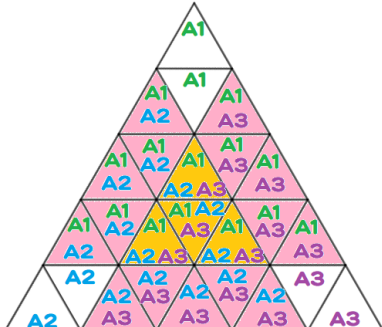
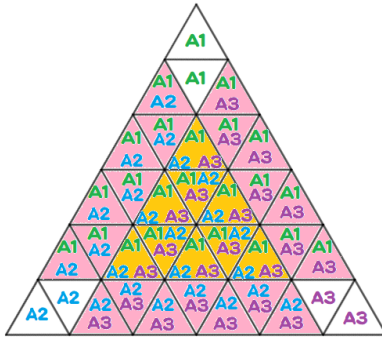
2.利用圖形觀察，將三個區塊 $A1、A2、A3$ 標示在圖形上，如右圖。

- (1)粉紅色的部分，為數字重複兩次計算的小正三角形。
- (2)棋盤的三個角，分別為三個菱形(兩個小正三角形組成)，為數字沒有重複的部分。
- (3)根據上面的實驗，當總和最小時，會將 1、2、3 填入粉紅色區塊；當總和最大時，會將 7、8、9 填入粉紅色區塊；我們定義粉紅色區塊為「重疊區 R 」。



(二)利用「重疊區」依序放入數字，找到角落總和最大值與最小值的填入方法：

1. 觀察 L=3、4、5、6 的三角形棋盤，將重疊區標示出來。

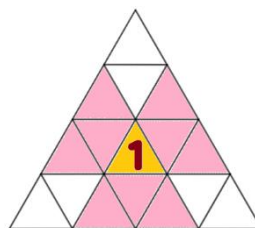
<p style="text-align: center;">L=3 的三角形棋盤</p>  <p>① A1、A2、A3 為邊長 $3-1=2$ 的正三角形。 ② 粉紅色區塊為重疊區 R2，共有三區。</p>	<p style="text-align: center;">L=4 的三角形棋盤</p>  <p>① A1、A2、A3 為邊長 $4-1=3$ 的正三角形。 ② 粉紅色區塊為重疊區 R2，共有三區，皆為梯形形狀。 ③ 黃色區塊為重疊區 R3，共有一區。</p>
<p style="text-align: center;">L=5 的三角形棋盤</p>  <p>① A1、A2、A3 為邊長 $5-1=4$ 的正三角形。 ② 粉紅色區塊為重疊區 R2，共有三區，皆為梯形形狀。 ③ 黃色區塊為重疊區 R3，共有一區，是一個正三角形。</p>	<p style="text-align: center;">L=6 的三角形棋盤</p>  <p>① A1、A2、A3 為邊長 $6-1=5$ 的正三角形。 ② 粉紅色區塊為重疊區 R2，共有三區，皆為梯形形狀。 ③ 黃色區塊為重疊區 R3，共有一區，是一個正三角形。</p>

我們發現：

- ▲ 從 L=4 開始，隨著 L 變長，三角形棋盤重疊區有規律的擴大範圍。
- ▲ 重疊區 R3 在三角形棋盤的正中間，是 A1、A2、A3 都會計算到的區域，皆是一個正三角形，邊長為 $L-3$ 。
- ▲ 重疊區 R2 在三角形棋盤的三邊，是計算兩次的區域，皆為梯形形狀，小正三角形的個數皆為奇數個，梯形上底為 $L-3$ ，下底為 $L-2$ 。
- ▲ 重疊區 R1 在三角形棋盤的三個角，是 A1、A2、A3 各算一次的區域，皆是一個菱形，固定是兩個小正三角形組成。

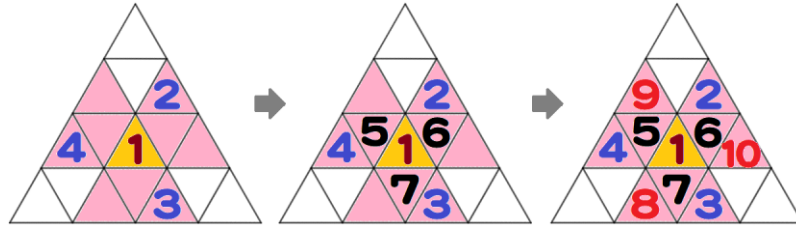
2. 角落總和為最小值 min 的數字填入順序：

(1) 將重疊區 R3 填進數列中最小的幾個數字，從 $1、2、\dots、(L-3)^2$ 。以 L=4 為例：



(2)將重疊區 R2 填進數列中接下來的幾個數字，從 $(L-3)^2+1$ 、 $(L-3)^2+2$ 、...、 L^2-6 (因為要留下最後六個數字放入重疊區 R1)。

以 $L=4$ 為例：重疊區 R2 共有九個數字，分別為 2、3、4、5、6、7、8、9、10，如果實驗目的是 $A_1=A_2=A_3$ ，則若三個梯形的總和都相等，會最容易成功。將九個數字分三組，我們採用順時針「接力」的方式，如下圖。



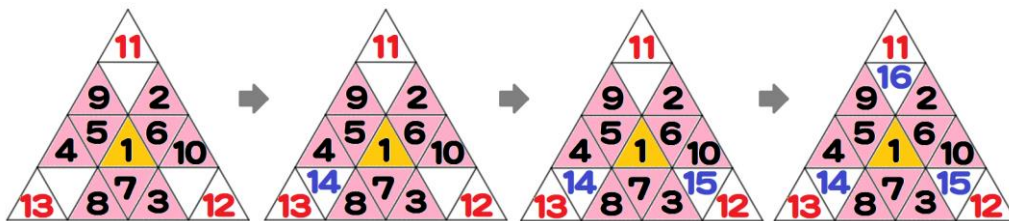
※各梯形內的數字會相加在一起，所以填入同一個梯形的三個數字可以互換位置。

※順時針「接力」的數字分配如下表：

2	→	3	→	4
6	→	7	↓	5
10	→	8	↓	9
和=18		和=18		和=18

(3)將重疊區 R1 填進數列中的最後六個數字。

以 $L=4$ 為例：重疊區 R1 共有六個數字，分別為 11、12、13、14、15、16，將三個菱形的數字總和分別相等會最容易成功的。將六個數字分三組，我們採用順逆「迴轉」的方式，如下圖。



※菱形內的數字會相加在一起，所以填入同一個菱形的兩個數字可以互換位置。

※順逆「迴轉」的數字分配如下表：

11	→	12	→	13
16	←	15	←	14
和=27		和=27		和=27

(4)驗證實驗結果：



① $A_1=11+9+16+2+4+5+1+6+10=64$ ；

$A_2=9+4+5+1+13+14+8+7+3=64$ ；

$A_3=2+1+6+10+8+7+3+15+12=64$ ；挑戰成功。

② A1 包含 R3 三角形、R2 梯形兩個、R1 菱形一個；

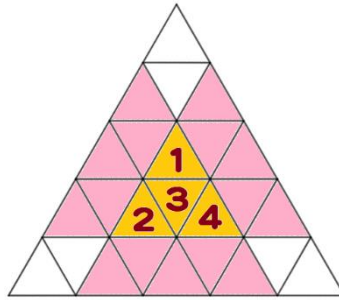
A2 包含 R3 三角形、R2 梯形兩個、R1 菱形一個；

A3 包含 R3 三角形、R2 梯形兩個、R1 菱形一個；

故總和會相同，且重複次數多的數字皆較小，所以總和會是最小的。

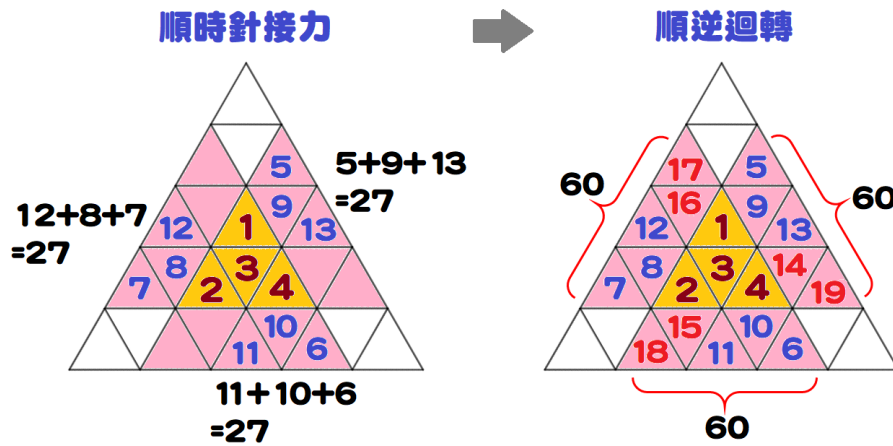
(5)使用相同填入規則，完成 L=5 的三角形棋盤：

①將重疊區 R3 填進數列中最小的幾個數字，從 1、2、3、4。



②將重疊區 R2 填進數列中接下來的幾個數字，從 5、6、...、19。

在填入的時候，我們發現每個梯形從 3 個小正三角形變成了 5 個，所以決定使用順時針「接力」和順逆「迴轉」接續進行的方式。順時針「接力」能夠使三個小三角形總和相等，而順逆「迴轉」能使兩個小三角形總和相等，最後能讓 R2 的每個梯形總和也相同。



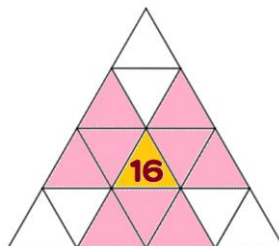
③將重疊區 R1 填進數列中的最後六個數字，從 20、21、...、25。我們採用順逆「迴轉」的方式，如下圖。



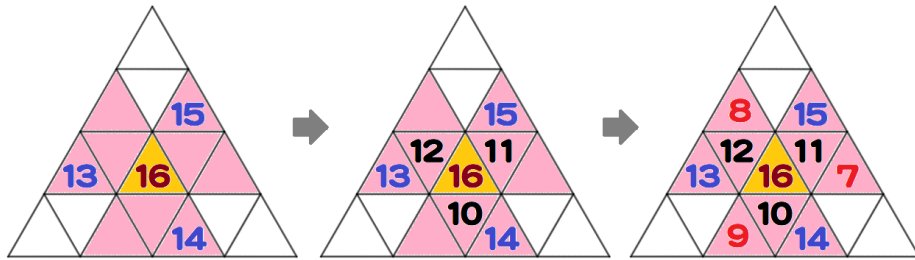
④驗證實驗結果：A1=A2=A3=175，挑戰成功。

3.角落總和為最大值 Max 數字填入順序：希望總和能越大，重複計算越多的位置要填越大的數字，所以我們決定仿照最小值 min 的填寫方式，但是從數字最大的開始填入。

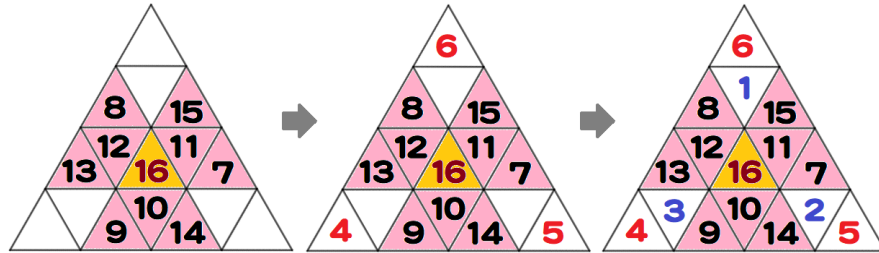
(1)重疊區 R3 填進數列中最大的幾個數字，以 L=4 為例，填進 L^2 ，也就是 16。



(2)重疊區 R2 填進數列中由大到小接下來的幾個數字，以 $L=4$ 為例，填進 L^2-1 、 L^2-2 、...、(留下六個數字放在 R1)，也就是 15、14、...、7。



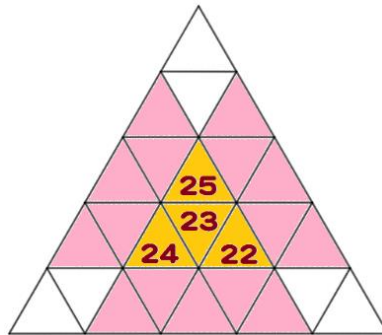
(3)將重疊區 R1 填進數列中的最小的六個數字，以 $L=4$ 為例：填入 6、5、...、1。



(4)驗證實驗結果： $A1=A2=A3=89$ ，挑戰成功。

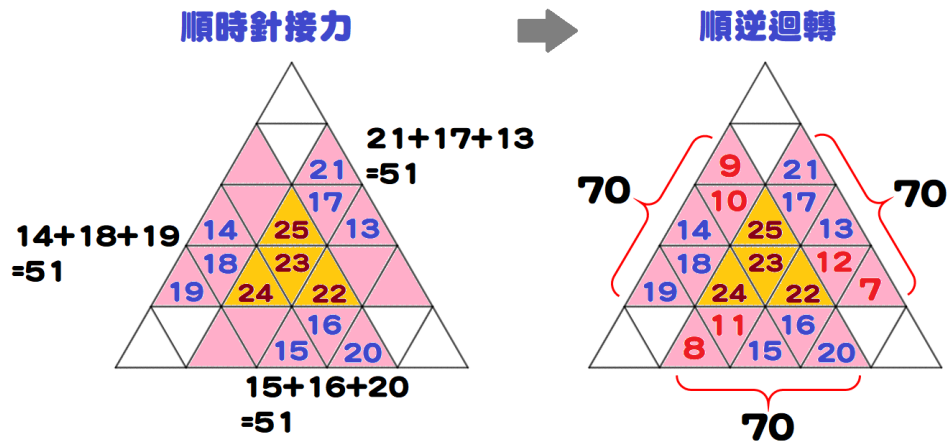
(5)使用相同填入規則，完成 $L=5$ 的三角形棋盤：

①將重疊區 R3 填進數列中最大的幾個數字，分別為 L^2 、 L^2-1 、 L^2-2 、 L^2-3 。

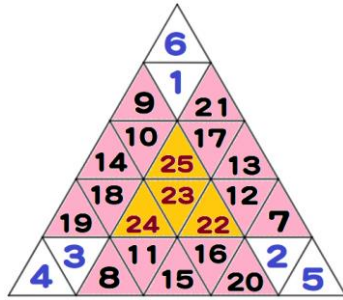


②將重疊區 R2 填進數列中接下來的幾個數字，從 L^2-4 、 L^2-5 、...、7。

填入時使用順時針「接力」和順逆「迴轉」接續進行的方式。順時針「接力」能夠使三個小三角形總和相等，而順逆「迴轉」能使兩個小三角形總和相等，最後能讓 R2 的每個梯形總和也相同。

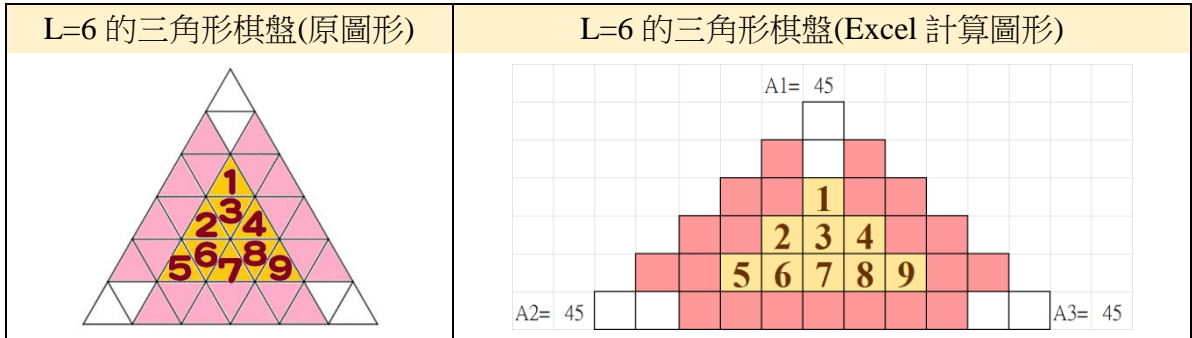


③將重疊區 R1 填進數列中的最小的六個數字，從 6、5、...、1。我們採用順逆「迴轉」的方式，如下圖。

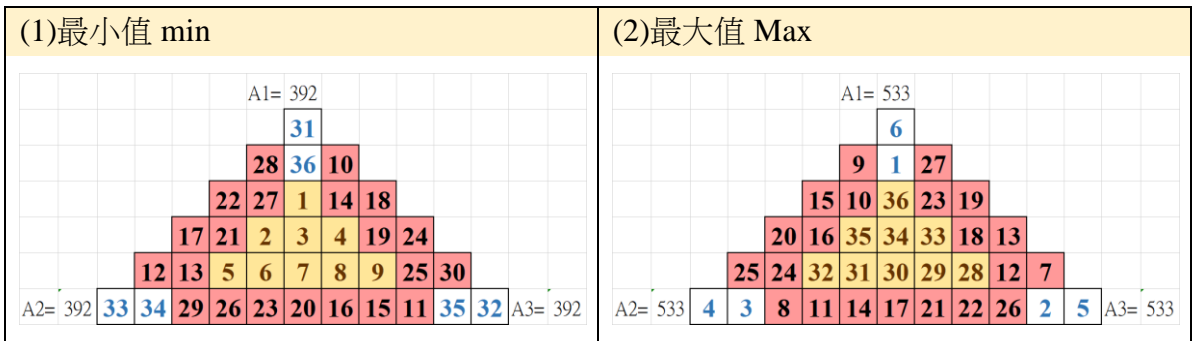


④驗證實驗結果：A1=A2=A3=241，挑戰成功。

4.接下來討論的棋盤邊長越來越長，小正三角形數量越來越多，為了讓實驗的計算更加簡便，我們使用了 Excel 輔助計算，以 L=6 的三角形棋盤為例：

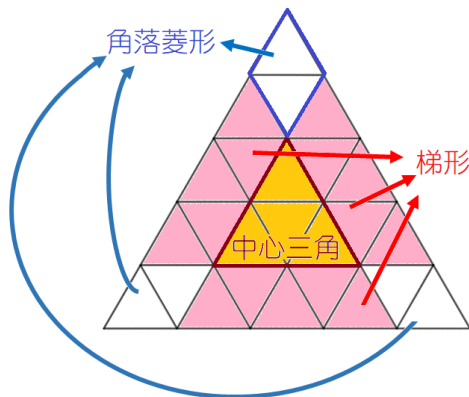


L=6 的三角形棋盤中角落總和最小值 min 與最大值 Max：



(三)整理實驗方法與結果，找出其規律性並將角落總和歸納成通用公式：

我們發現在找最大值或最小值時，A1、A2、A3 三個區域所包含重疊區數量一樣，有 1 個角落菱形、2 個梯形和 1 個中心三角。如下圖：



1.總和通式：先列出 A 的通式=2 × 梯形 + 1 × 角落菱形 + 1 × 中心三角.....①

因為中心三角內的小正三角形個數是平方數個，較容易觀察和計算。R1 在找最大值的時，各區角落菱形總和固定。為了方便推導公式，把梯形用角落菱形、中心三角代替。

$$\text{梯形} = \frac{S - \text{中心三角} - 3 \times \text{角落菱形}}{3} \dots\dots \textcircled{2}, \text{ 代入} \textcircled{1}$$

$$\text{得到 A 的總和通式} = \frac{2 \times S + \text{中心三角} - 3 \times \text{角落菱形}}{3} \dots\dots \textcircled{3}$$

2. 角落總和最大值公式推導：隨著三角形邊長增加，各個重疊區內的數字範圍也會跟著改變，進而影響總和。將各重疊區內數字範圍和填入數字個數整理如下：

(1) 填入的數字範圍

三角形邊長	4	5	6	L
棋盤全部	1~16	1~25	1~36	1~L ²
中心三角	16	22~25	28~36	[L ² - (L - 3) ² + 1]~L ²
角落菱形	1~6	1~6	1~6	1~6

(2) 小正三角形的個數

三角形邊長	4	5	6	L
棋盤全部	16	25	36	L ²
中心三角	1	4	9	(L - 3) ²
角落菱形	6	6	6	6

(3) 不同重疊區的總和

$$S = 1 + 2 + \dots + L^2 = \frac{(1 + L^2) \times L^2}{2} = \frac{L^2 + L^4}{2} \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\begin{aligned} \text{中心三角} &= \frac{\{L^2 + [L^2 - (L - 3)^2 + 1]\} \times (L - 3)^2}{2} = \frac{(L^2 + 6L - 8)(L^2 - 6L + 9)}{2} \\ &= \frac{L^4 - 35L^2 + 102L - 72}{2} \dots\dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

$$\text{角落菱形} \text{ 數字兩兩配對總和一樣，總和} = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 7 \dots\dots \textcircled{6};$$

將④、⑤、⑥的結果代入③，算式整理之後，可以得到最大值的公式：

$$\begin{aligned} \text{最大值公式} &= \frac{1}{3} \times \left[2 \times \frac{(L^2 + L^4)}{2} + \frac{L^4 - 35L^2 + 102L - 72}{2} - 3 \times 7 \right] \\ &= \frac{L^4 - 11L^2 + 34L - 38}{2} \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

3. 角落總和最小值公式推導：最小值總和和最大值總和的通式一樣，但因填數字的順序與最大值不同，先將各重疊區的數字範圍和填入數字個數列出來，再求各重疊區的總和；推導公式過程如同最大值。

(1) 填入的數字範圍

三角形邊長	4	5	6	L
棋盤全部	1~16	1~25	1~36	1~L ²
中心三角	1	1~4	1~9	1~(L - 3) ²
角落菱形	11~16	20~25	31~36	(L ² - 5)~L ²

(2) 小正三角形的個數

三角形邊長	4	5	6	L
棋盤全部	16	25	36	L ²
中心三角	1	4	9	(L - 3) ²
角落菱形	6	6	6	6

(3)不同重疊區的總和

$$S = 1+2+\dots+L^2 = \frac{(1+L^2) \times L^2}{2} = \frac{L^2+L^4}{2} \dots\dots④$$

$$\boxed{\text{中心三角}} = \frac{[1+(L-3)^2] \times (L-3)^2}{2} = \frac{(L-3)^2(L-3)^4}{2} = \frac{L^4-35L^2+102L-72}{2} \dots\dots⑧$$

$\boxed{\text{角落菱形}}$ 數字兩兩配對總和一樣，

$$\text{總和} = L^2 + (L^2 - 5) = (L^2 - 1) + (L^2 - 4) = (L^2 - 2) + (L^2 - 3) = 2L^2 - 5 \dots\dots⑨$$

將④、⑧、⑨的結果代入③，算式整理之後，可以得到最小值的公式：

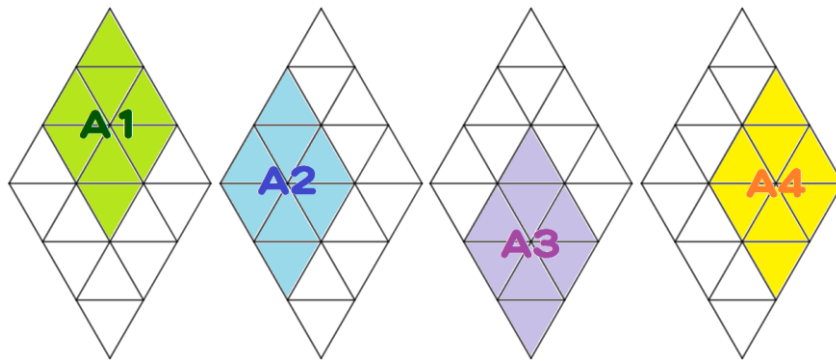
$$\begin{aligned} \text{最小值公式} &= \frac{1}{3} \left[2 \times \frac{(L^2+L^4)}{2} + \frac{L^4-35L^2+102L-72}{2} - 3 \times (2L^2 - 5) \right] \\ &= \frac{3L^4-12L^3+45L^2-114L+120}{6} \dots\dots⑩ \end{aligned}$$

4.三角形棋盤角落總和 A 的最大值與最小值如下：

三角形邊長	4	5	6	L
A 的最大值	89	241	533	$\frac{L^4 - 11L^2 + 34L - 38}{2}$
A 的最小值	64	175	392	$\frac{3L^4 - 12L^3 + 45L^2 - 114L + 120}{6}$

二、探討菱形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

我們定義綠色區塊數字總和為「A1」，藍色區塊數字總和為「A2」，紫色區塊數字總和為「A3」，黃色區塊數字總和為「A4」；當 A1=A2=A3=A4 時，用「A」表示其結果。



(一)參考三角形棋盤的實驗結果，嘗試找出菱形棋盤的重疊區：

將 L=3、4、5、6 的菱形棋盤重疊區標示出來，並找出規律。

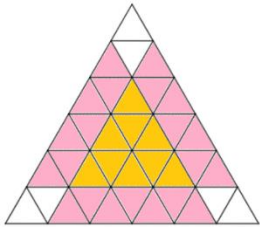
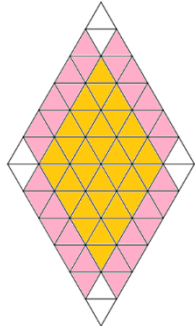
L=3 的菱形棋盤	L=4 的菱形棋盤	L=5 的菱形棋盤	L=6 的菱形棋盤

我們發現：

- ▲從 $L=3$ 開始，隨著 L 變長，菱形棋盤重疊區有規律的擴大範圍。
- ▲重疊區 $R4$ 在菱形棋盤的正中間，是 $A1$ 、 $A2$ 、 $A3$ 和 $A4$ 都會計算到的區域，皆是一個菱形，邊長為 $L-2$ 。
- ▲重疊區 $R2$ 在菱形棋盤的四邊，是計算兩次的區域，四邊皆為平行四邊形的形狀，且平行四邊形的底為 $L-2$ ，每個平行四邊形裡面的小正三角形的個數皆為偶數個，是 $(L-2) \times 2$ 個。
- ▲重疊區 $R1$ 在菱形棋盤的四個角，是 $A1$ 、 $A2$ 、 $A3$ 和 $A4$ 算一次的區域，皆是一個菱形，固定是兩個小正三角形組成。

(二)比較三角形和菱形棋盤的差異，找到角落總和最大值與最小值的填入方法：

1.三角形棋盤重疊區和菱形棋盤的重疊區比較，以 $L=6$ 為例：

棋盤形狀	$L=6$ 的三角形棋盤	$L=6$ 的菱形棋盤
重疊區圖形		
重疊區 (黃色)	$R3$ 為一個邊長 $L-3$ 的大正三角形 ※都是重複計算最多次數的區域 最小值 \min → 填入最小的幾個數字；最大值 Max → 填入最大的幾個數字。	$R4$ 為一個邊長 $L-2$ 的大菱形
重疊區 (粉紅)	重疊區 $R2$ 分布在三個邊，為梯形形狀，小正三角形個數為奇數個。 ※都是只重複計算兩次的區域 梯形有「奇數個」小正三角形，採用順時針「接力」和順逆「迴轉」兩種方式配合即可完成。	重疊區 $R2$ 分布在四個邊，為平行四邊形，小正三角形個數為偶數個。 平行四邊形有「偶數個」小正三角形，可以只使用順逆「迴轉」多次即可完成。
重疊區 (白色)	重疊區 $R1$ 在三角形棋盤的三個角，皆是菱形，固定是兩個小正三角形組成。 ※形狀皆相同，採用順逆「迴轉」的方式，即可完成。	重疊區 $R1$ 在菱形棋盤的四個角，皆是菱形，固定是兩個小正三角形組成。

2.角落總和為最小值 \min 的數字填入順序：

- (1)邊長 L 的菱形棋盤，小正三角形的總個數為 $L^2 \times 2$ ，也就是需要填入 $1、2、3、\dots、L^2 \times 2$ 的所有整數。
- (2)將重疊區 $R4$ 填進數列中最小的幾個數字，從 $1、2、\dots、(L-2)^2 \times 2$ 。
- (3)將重疊區 $R2$ 填進數列中接下來的幾個數字，從 $(L-2)^2 \times 2 + 1、(L-2)^2 \times 2 + 2、\dots、L^2 \times 2 - 8$ (因為要留下最後八個數字放入重疊區 $R1$)。
- (4)將重疊區 $R1$ 填進數列中的最後八個數字。
- (5)以 $L=3、4、5$ 為例，將填入過程紀錄在下面：

5.順逆「迴轉」和順時針「接力」兩種填法的比較：

(1)在填數過程中，順逆「迴轉」是運用高斯求和的概念，讓連續數字的頭尾依序兩兩一組配對，便可以使總和相等；這個方法的限制較少，只需要「偶數」個小三角形的條件即可，在三角形棋盤或菱形棋盤都適用。

(2)三角形棋盤中的順時針「接力」是利用三個連續數字為一組，利用差皆為1的原理，將數字交錯排列，使總和相等，如下表。當遇到菱形棋盤時，四邊形需要四個連續數字為一組，此時如果要讓總和相等，至少需要四組交錯排列才能成功。雖然也能運用在菱形棋盤上，但此種方法的限制較多，需要「4×4的倍數」個的小三角形，因此我們使用順逆「迴轉」取代順時針「接力」。

三角形棋盤

第一組	1	2	3
第二組	2	3	1
第三組	3	1	2
總和	6	6	6

- 1** 表示該組連續數字中的最小值
- 2** 表示該組連續數字中第二小的數字
- 3** 表示該組連續數字中的最大值

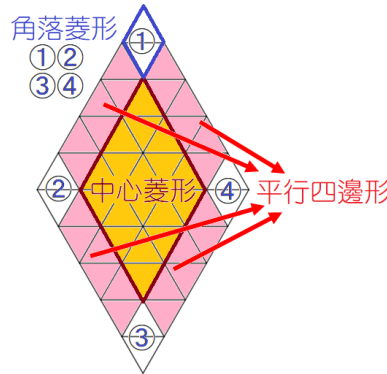
菱形棋盤

第一組	1	2	3	4
第二組	2	3	4	1
第三組	3	4	1	2
第四組	4	1	2	3
總和	10	10	10	10

- 1** 表示該組連續數字中的最小值
- 2** 表示該組連續數字中第二小的數字
- 3** 表示該組連續數字中第三小的數字
- 4** 表示該組連續數字中的最大值

(三)整理實驗方法與結果，找出其規律性並將角落總和歸納成通用公式：

如同三角形棋盤的情況，找角落總和的最大值或最小值時，A1、A2、A3、A4 三個區域所包含的重疊區數量一樣，有 1 個角落菱形、2 個平行四邊形和 1 個中心菱形。



1.總和 A 的通式： $2 \times \text{平行四邊形} + 1 \times \text{角落菱形} + 1 \times \text{中心菱形} \dots\dots$ ⑪

因為中心菱形的小正三角形個數是平方數個的 2 倍，較容易觀察和計算。角落菱形在找最大值和最小值的時候，各區角落菱形總和固定。為了方便推導公式，把平行四邊形用角落菱形、中心菱形代替。

$$\text{平行四邊形} = \frac{S - \text{中心菱形} - 4 \times \text{角落菱形}}{4} \dots\dots$$
⑫，代入⑪

$$\text{得到 A 的總和通式} = \frac{S + \text{中心菱形} - 2 \times \text{角落菱形}}{2} \dots\dots$$
⑬

2.角落總和最大值公式推導：隨著菱形棋盤邊長增加，各個重疊區內的數字範圍也會跟著改變，進而影響總和。將各重疊區內數字範圍和填入數字個數整理如下：

(1)填入的數字範圍

菱形邊長	3	4	5	L
棋盤全部	1~18	1~32	1~50	1~2L ²
中心菱形	17~18	25~32	33~50	[2L ² - 2(L - 2) ² + 1]~2L ²
角落菱形	1~8	1~8	1~8	1~8

(2)小正三角形的個數

菱形邊長	3	4	5	L
棋盤全部	18	32	50	2L ²
中心菱形	2	8	18	2(L - 2) ²
角落菱形	8	8	8	8

(3)不同重疊區的總和

$$S = 1+2+\dots+2L^2 = \frac{(1+2L^2)\times 2L^2}{2} = L^2 + 2L^4 \dots\dots \textcircled{14}$$

$$\begin{aligned} \text{中心菱形} &= \frac{\{[2L^2 - 2(L-2)^2 + 1] + 2L^2\} \times 2(L-2)^2}{2} = \frac{(2L^2 + 8L - 7)(2L^2 - 8L + 8)}{2} \\ &= 2L^4 - 31L^2 + 60L - 28 \dots\dots \textcircled{15} \end{aligned}$$

$$\text{角落菱形} \text{ 數字兩兩配對總和一樣，總和} = 1+8=2+7=3+6=4+5=9 \dots\dots \textcircled{16}$$

將⑭、⑮、⑯的結果代入⑬，算式整理之後，可以得到最大值的公式。

$$\begin{aligned} \text{最大值公式} &= \frac{1}{2}[L^2 + 2L^4 + 2L^4 - 31L^2 + 60L - 28 - 2 \times 9] \\ &= 2L^4 - 15L^2 + 30L - 23 \dots\dots \textcircled{17} \end{aligned}$$

3.角落總和最小值公式推導：最小值總和和最大值總和的通式一樣，但因填數字的順序與最大值不同，先將各重疊區的數字範圍和填入數字個數列出來，再求各重疊區的總和；推導公式過程如同最大值。

(1)填入的數字範圍

菱形邊長	3	4	5	L
棋盤全部	1~18	1~32	1~50	1~2L ²
中心菱形	1~2	1~8	1~18	1~2(L - 2) ²
角落菱形	11~18	25~32	43~50	(2L ² - 7)~2L ²

(2)小正三角形的個數

菱形邊長	3	4	5	L
棋盤全部	16	25	36	2L ²
中心菱形	2	8	18	2(L - 2) ²
角落菱形	8	8	8	8

(3)不同重疊區的總和

$$S = 1+2+\dots+2L^2 = \frac{(1+2L^2)2L^2}{2} = L^2 + 2L^4 \dots\dots \textcircled{14}$$

$$\begin{aligned} \text{中心菱形} &= \frac{[1+2(L-2)^2] \times 2(L-2)^2}{2} = \frac{2(L-2)^2 + 4(L-2)^4}{2} \\ &= 2L^4 - 16L^3 + 49L^2 - 68L + 36 \dots\dots \textcircled{18} \end{aligned}$$

角落菱形 數字兩兩配對總和一樣，

$$\begin{aligned} \text{總和} &= 2L^2 + (2L^2 - 7) = (2L^2 - 1) + (2L^2 - 6) = (2L^2 - 2) + (2L^2 - 5) \\ &= (2L^2 - 3) + (2L^2 - 4) = 4L^2 - 7 \dots\dots(19) \end{aligned}$$

將⑭、⑱、⑲的結果代入⑬，算式整理之後，可以得到最小值的公式：

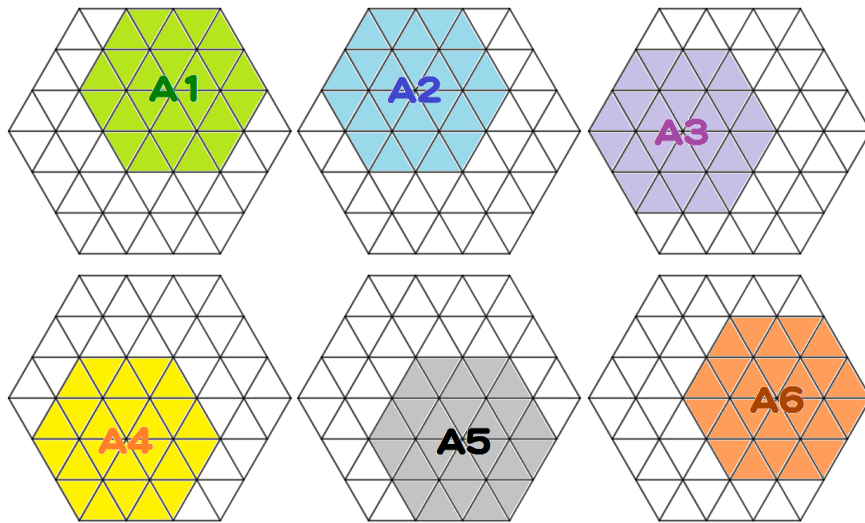
$$\begin{aligned} \text{最小值公式} &= \frac{1}{2}[L^2 + 2L^4 + 2L^4 - 16L^3 + 49L^2 - 68L + 36 - 2 \times (4L^2 - 7)] \\ &= 2L^4 - 8L^3 + 21L^2 - 34L + 25 \dots\dots(20) \end{aligned}$$

4. 菱形棋盤角落總和 A 的最大值與最小值如下：

菱形邊長	3	4	5	L
A 的最大值	94	369	1002	$2L^4 - 15L^2 + 30L - 23$
A 的最小值	58	225	630	$2L^4 - 8L^3 + 21L^2 - 34L + 25$

三、探討六邊形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

我們定義綠色區塊數字總和為「A1」，藍色區塊數字總和為「A2」，紫色區塊數字總和為「A3」，黃色區塊數字總和為「A4」，灰色區塊數字總和為「A5」，橘色區塊數字總和為「A6」；當 $A1=A2=A3=A4=A5=A6$ 時，用「A」表示其結果。



六邊形棋盤中，角落區塊有六個區域，增加了實驗的挑戰性；且六邊形棋盤的小正三角形數量遽增，邊長 L 的六邊形棋盤，小正三角形的總個數為 $L^2 \times 6$ 。

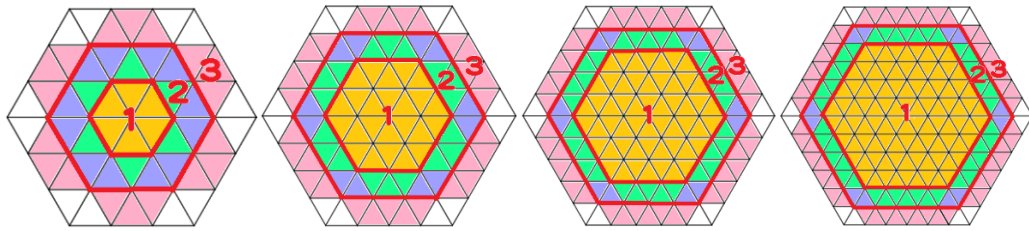
(一) 觀察六邊形棋盤重疊區的變化並找出規律：

將 L=3、4、5、6 的六邊形棋盤重疊區標示出來，並找出規律。

L=3 的六邊形棋盤	L=4 的六邊形棋盤	L=5 的六邊形棋盤	L=6 的六邊形棋盤

我們發現：

▲從 $L=3$ 開始，隨著 L 變長，六邊形棋盤重疊區有規律的擴大範圍，而且都會以中心圍繞出 3 層正六邊形，如下圖。



▲重疊區 R6(黃色)在六邊形棋盤的正中間，是 A1、A2、A3、A4、A5 和 A6 都會計算到的區域，皆是一個正六邊形，邊長為 $L-2$ 。

▲重疊區 R4(綠色)在重疊區 R6 的外圍，也就是第 2 層六邊形的六個邊，都重複計算四次的區域，隨著 L 變長($L>3$)，會固定為梯形形狀；每個梯形的小正三角形都是奇數個，上底是 $L-3$ ，下底是 $L-2$ 。

▲重疊區 R3(紫色)在第 2 層六邊形的六個角落，皆是菱形形狀，固定由兩個小正三角形組成。

▲重疊區 R2(粉紅色)在第 3 層六邊形的六個邊，皆是梯形形狀；每個梯形的小正三角形都是奇數個，上底是 $L-2$ ，下底是 $L-1$ 。

▲重疊區 R1(白色)在六邊形棋盤的六個角，是沒有重複計算的區域，皆是菱形形狀，固定是兩個小正三角形組成。

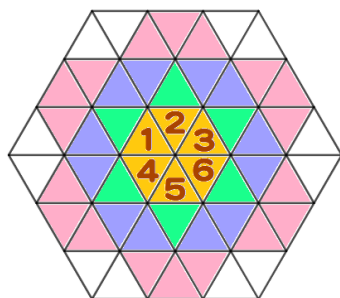
(二)修正六邊形棋盤的擺放方式，並找到角落總和最大值與最小值的填入方法：

六邊形棋盤重疊區總共區分為五類，一開始利用三角形和菱形棋盤的規則嘗試，但發現有些重疊區方法相似，例如：重疊區 R6，但也有總和無法相等的區域。接下來會以重疊區 R6、R4、R3、R2 和 R1 分別進行實驗，根據之前的觀察，只要能找出最小值 \min 數字填入順序，最大值 \max 再將數字由大到小改變填入順序即可。

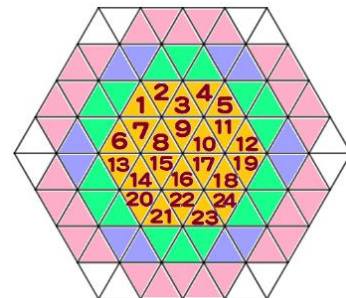
1.角落總和為最小值 \min 的數字填入順序：

(1)重疊區 R6：A1~A6 都會計算到的區域，只需要填入最小的幾個數字，從 1、2、...、 $(L-2)^2 \times 6$ 。

以 $L=3$ 為例：



以 $L=4$ 為例：



(2)重疊區 R4：觀察 R4 的小正三角形個數，皆為 6 的倍數(偶數個)。此時填入 R4 的數列中，首項或末項其中一項必為奇數，另一項必為偶數；則計算此數列的總和時，會遇到無法平分的情況：

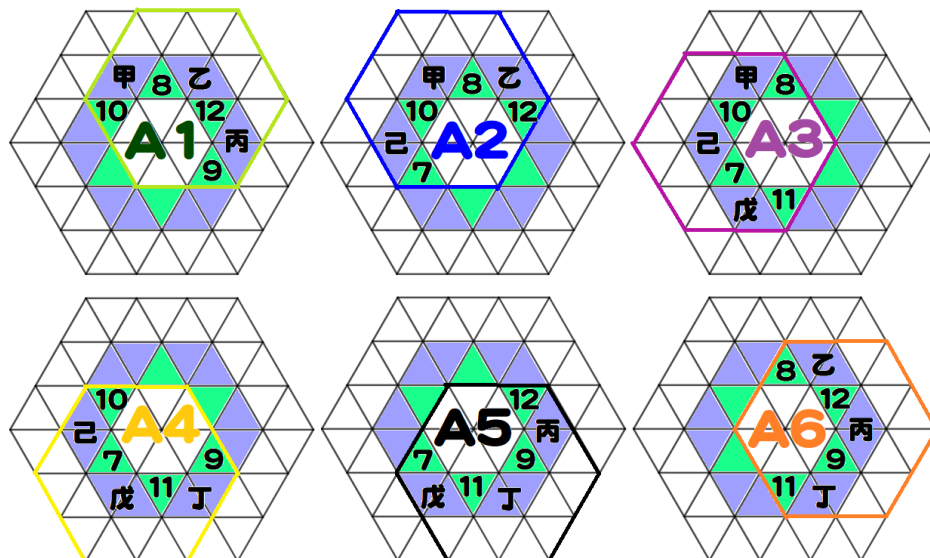
$$\begin{array}{ccc}
 (\text{首項} + \text{末項}) \times \text{項數} \div 2 = & & \text{總和} \\
 \begin{array}{l} \text{奇數} + \text{偶數} = \text{奇數} \\ \text{偶數} + \text{奇數} = \text{奇數} \end{array} & \begin{array}{l} \text{梯形個數} \\ 1 \times 6 \\ 3 \times 6 \\ \vdots \end{array} & \downarrow \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \text{奇數} & \text{6的奇數倍數} & \text{奇數乘以6的奇數倍再} \\
 & & \text{除以2的總和皆為奇數，} \\
 & & \text{無法平分成六等分。}
 \end{array}$$

以 L=4 為例，如果希望六個梯形(綠色)的總和要相等，則須將 $3 \times 6 = 18$ 個連續整數平均分配到六個梯形區域。25~42 的總和為 $(25+42) \times 18 \div 2 = 603$ ，將 $603 \div 6 = 100 \dots 3$ ，無法將這 18 個數字平分。

無法平分的情況下，會希望 R4 的六個區域差距能夠越小越好，使用星星「對稱」的方式填入數字，如下圖。

	<p>以 L=3 為例：</p> <ol style="list-style-type: none"> ①接續重疊區 R6 的數字為 7~12。 ②每區都是奇數個小正三角形，此時第 2 層六邊形的每邊只有一個，使用星星「對稱」填入。
<p>順逆「迴轉」</p>	<p>以 L=4 為例：</p> <ol style="list-style-type: none"> ①接續重疊區 R6 的數字為 24~42。 ②每個梯形都有三個小正三角形，各留下一個使用星星「對稱」填入，其餘每邊兩個都使用順逆「迴轉」讓數字和相同，這樣能讓數字和的差距較小。
<p>星星「對稱」</p>	<ol style="list-style-type: none"> ③為了 L 變長時，小正三角形數變多，所以都先用順逆「迴轉」兩兩一組，最後在使用星星「對稱」。

(3)重疊區 R3：需填入總共 12 個數字；觀察下圖第 2 層 A1~A6 的區域，發現每個區塊都包含 R3 中的三個菱形，和 R4 中的四個三角形(當 L>3 是梯形)，也就是要將這七塊圖形中所有數字的總和相等，才能夠成功。



①以 L=3 為例：(此時的甲乙丙丁戊己代表第 2 層的六個菱形)

重疊區 R4 需填入 7~12，每個數字都重複計算四次： $(7+12) \times 6 \div 2 \times 4 = 228$

重疊區 R3 需填入 13~24，每個數字都重複計算三次： $(13+24) \times 12 \div 2 \times 3 = 666$

A1~A6 每個區域的重疊區 R3+R4 數字總和為： $(228+666) \div 6 = 149$

	7	8	9	10	11	12	甲	乙	丙	丁	戊	己	總和
A1													149
A2													149
A3													149
A4													149
A5													149
A6													149

A1(R3+R4 部分)=39+甲+乙+丙=149 → 甲+乙+丙=110.....①

A2(R3+R4 部分)=37+甲+乙+己=149 → 甲+乙+己=112.....②

A3(R3+R4 部分)=36+甲+戊+己=149 → 甲+戊+己=113.....③

A4(R3+R4 部分)=37+丁+戊+己=149 → 丁+戊+己=112.....④

A5(R3+R4 部分)=39+丙+丁+戊=149 → 丙+丁+戊=110.....⑤

A6(R3+R4 部分)=40+乙+丙+丁=149 → 乙+丙+丁=109.....⑥

由①②、④⑤算式比較發現，丙+2=己；

由②③、⑤⑥算式比較發現，乙+1=戊；

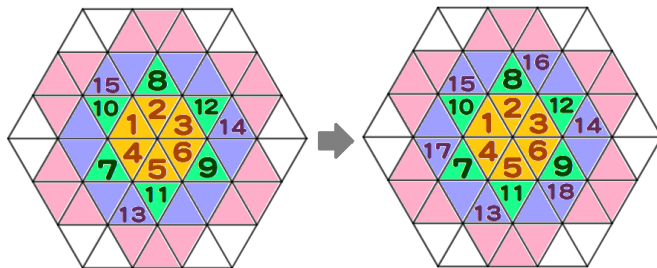
由③④、①⑥算式比較發現，丁+1=甲；

②根據上面實驗，我們找出了五組以上能夠符合條件的數字組合，最後選定以下這組總和較有規律的填入重疊區 R3：

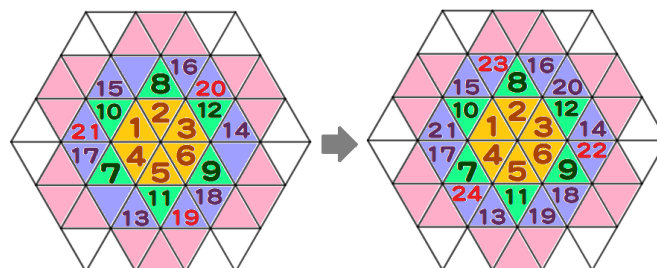
	甲	乙	丙	丁	戊	己
第一組	15	16	14	18	13	17
第二組	23	20	22	19	24	21
和	38	36	36	37	37	38

③依數字順序填入：採用逆時針「跳格」方式，分成兩組；

第一組為 13~18，13→14→15 逆時針放入後，向右一格再交錯放入 16→17→18，我們稱為右逆「跳格」。



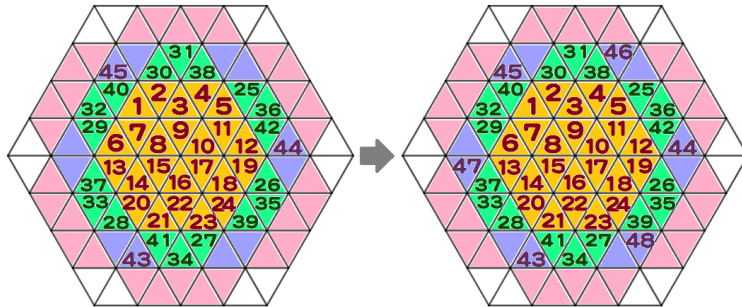
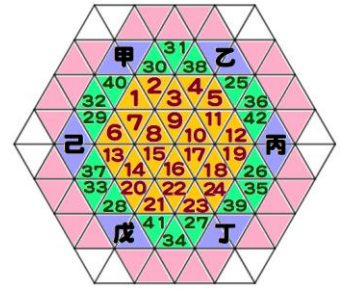
第二組為 19~24，19→20→21 逆時針放入後，至對角再交錯放入 22→23→24，我們稱為對角「跳格」。



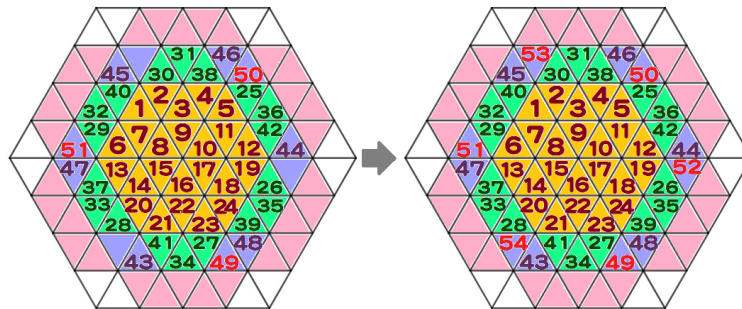
④接下來要嘗試 L=4 的六邊形棋盤，雖然 L 增加，但是重疊區 R3 一樣是六個角落的菱形，且重疊區 R4 的六個梯形也維持相同的「差」，也就是：

$\text{丙}+2=\text{己}$ ， $\text{乙}+1=\text{戊}$ ， $\text{丁}+1=\text{甲}$ 也維持不變。雖然填入的數字不同，但是都連續整數，只要填入順序相同，總和也將會相同。

第一組為 43~48，使用右逆「跳格」：43→44→45 逆時針放入後，向右一格再交錯放入 46→47→48。

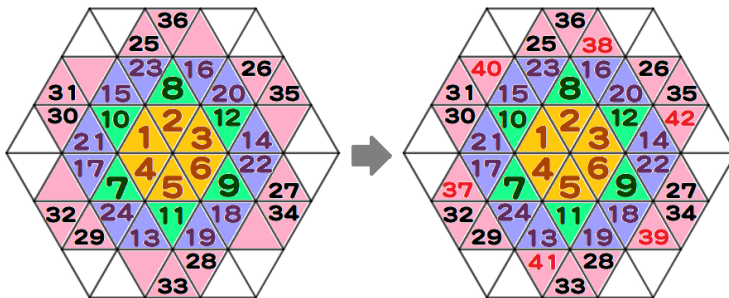


第二組為 49~54，使用對角「跳格」：49→50→51 逆時針放入後，至對角再交錯放入 52→53→54。



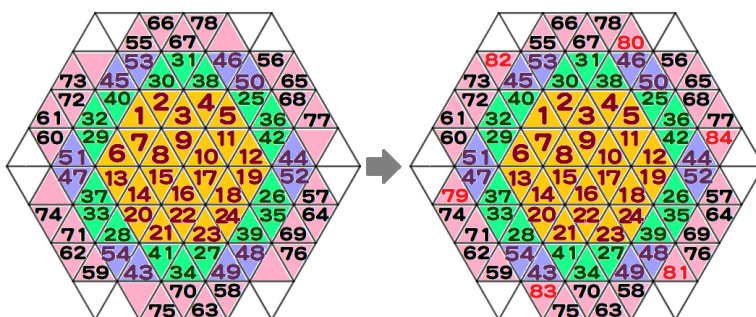
(4)重疊區 R2：和重疊區 R4 相似，每邊梯形放奇數個小正三角形，這些連續整數無法平均分配到六個梯形區域。希望 R2 的六個區域差距能夠越小，先用順逆「迴轉」兩兩一組，直到剩下最後一個再星星「對稱」填入。

以 L=3 為例：



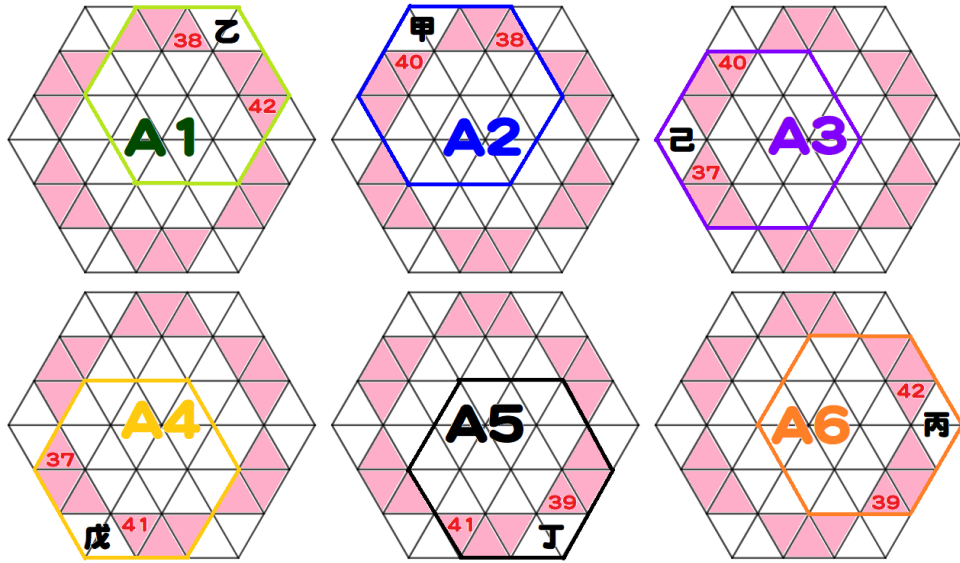
- ①接續重疊區 R3 的數字為 25~42。
- ②每區都是三個小正三角形，先用順逆「迴轉」，再使用星星「對稱」。

以 L=4 為例：



- ①接續重疊區 R3 的數字為 55~84。
- ②每個梯形都有五個小正三角形，先用順逆「迴轉」兩兩一組讓數字和相同，最後在使用星星「對稱」，這樣能讓數字和的差距較小。

(5)重疊區 R1：需填入最後的 12 個數字；觀察下圖第 3 層 A1~A6 的區域，發現每個區塊都包含 R2 中的兩個梯形，和 R1 中的一個菱形，要將這三塊圖形中所有數字的總和相等，才能夠成功。(此時的甲乙丙丁戊己代表第 3 層的六個菱形)



①以 L=3 為例：需填入 43~54。

重疊區 R2 會影響總和差異的只有紅色數字的部分，因為順逆「迴轉」會使梯形的其它部分和皆相等。

A1(R1+R2 有差異的部分)：38+乙+42=80+乙

A2(R1+R2 有差異的部分)：40+甲+38=78+甲

A3(R1+R2 有差異的部分)：37+己+40=77+己

A4(R1+R2 有差異的部分)：37+戊+41=78+戊

A5(R1+R2 有差異的部分)：41+丁+39=80+丁

A6(R1+R2 有差異的部分)：42+丙+39=81+丙

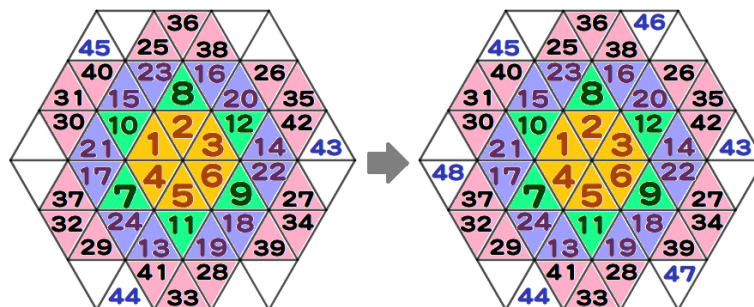
由上面六個算式比較發現，甲=戊；乙=丁；己=甲+1=戊+1=乙+3=丁+3=丙+4。

我們參考重疊區 R3 的菱形部分做比較，固定第二組的數字順序關係(填入方法也會相同)，僅更動第一組的數字順序，稍作調整如下：

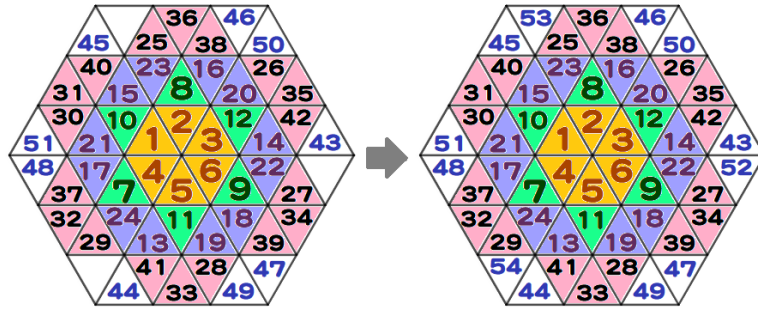
	甲	乙	丙	丁	戊	己
第一組	45	46	43	47	44	48
第二組	53	50	52	49	54	51
和	98	96	95	96	98	99

②依數字順序填入，分成兩組：

第一組為 43~48，43→44→45 順時針交錯放入後，向右一格再交錯放入 46→47→48，我們稱為右順「跳格」。

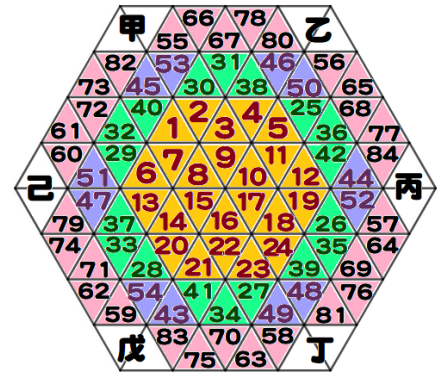


第二組為 49~54，49→50→51 逆時針放入後，至對角再交錯放入 52→53→54，
 和第二層的對角「跳格」方法相同。



將六個角落區域進行計算 $A1=A2=A3=A4=A5=A6=468$ ，挑戰成功。

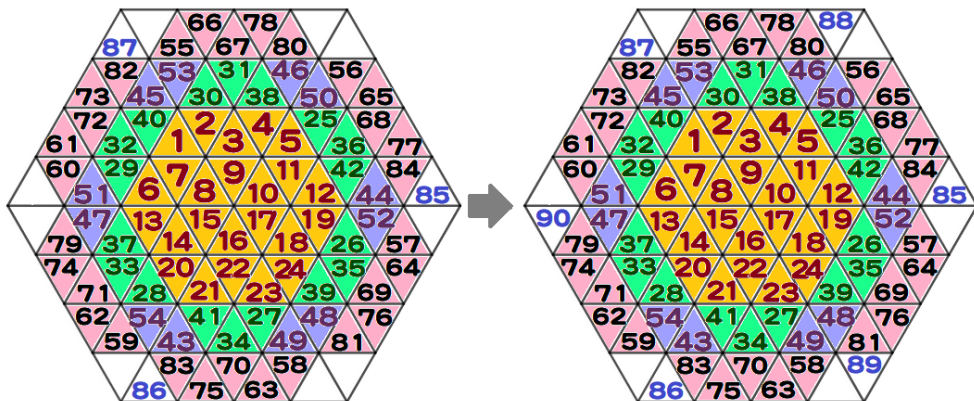
③接下來嘗試 $L=4$ 的六邊形棋盤，雖然 L 增加，
 但是重疊區 $R1$ 一樣是六個角落的菱形，且重疊
 區 $R2$ 的六個梯形也維持相同的「差」，也就
 是： $\boxed{\text{己}=\text{甲}+1=\text{戊}+1=\text{乙}+3=\text{丁}+3=\text{丙}+4}$ 也維持
 不變。雖然填入的數字不同，但是都連續整
 數，只要填入順序相同，總和也將會相同。



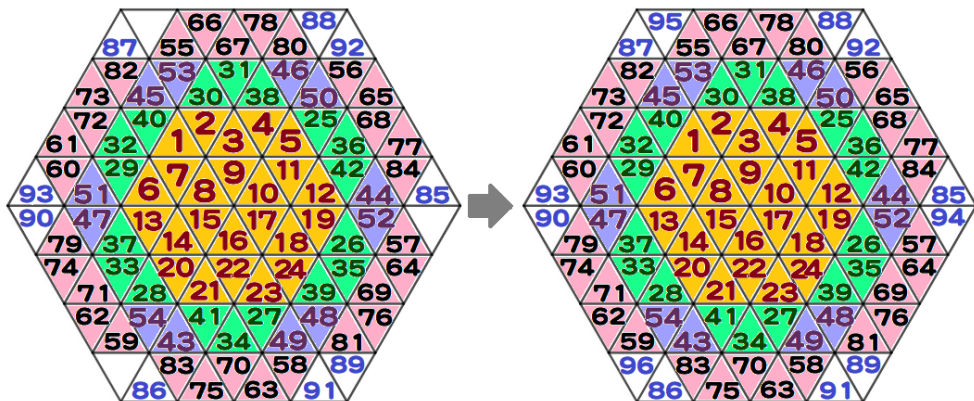
依數字順序填入，分成兩組：

第一組為 85~90，使用右順「跳格」：

85→86→87 順時針放入後，向右一格再交錯放入 88→89→90。



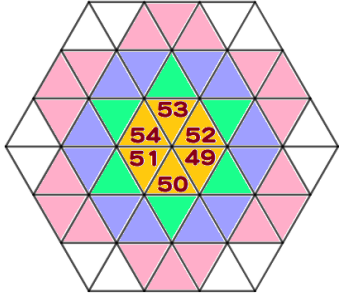
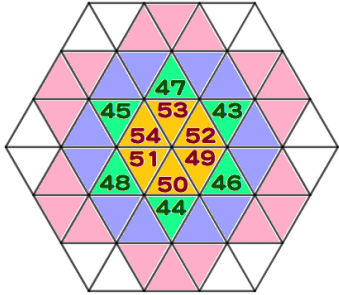
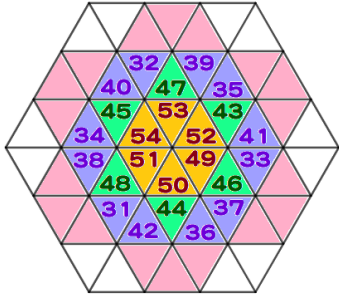
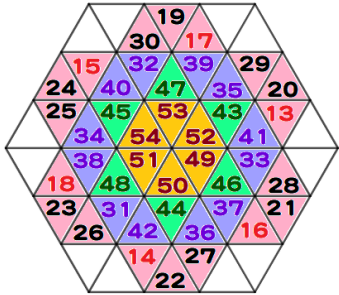
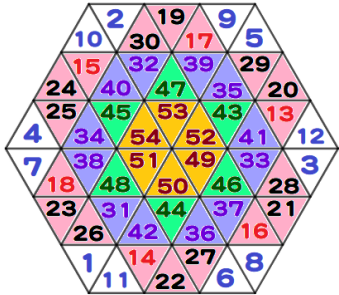
第二組為 91~96，使用對角「跳格」：91→92→93 逆時針放入後，至對角再交錯
 放入 94→95→96。



將六個角落區域進行計算 $A1=A2=A3=A4=A5=A6=1869$ ，挑戰成功。

2. 角落總和為最大值 Max 的數字填入順序：

(1) L=3 的六邊形棋盤方法如下，從最大的數字 $3 \times 3 \times 6 = 54$ 開始。

重疊區	步驟與方法	圖片說明
R6	A1~A6 都會計算到的區域，需填入最大的六個數字：54→53→52→51→50→49。(這六個數字的位置皆可以互換)	
R4	希望 R4 的六個區域差距能夠越小越好，所以使用星星「對稱」的方式填入數字：48→47→46→45→44→43。	
R3	分成兩組： 第一組使用右逆「跳格」填入數字：42→41→40→右移 39→38→37。 第二組使用對角「跳格」填入數字：36→35→34→對角 33→32→31。	
R2	希望 R2 的六個區域差距能夠越小； 先使用順逆「迴轉」(黑色)填入數字：30→29→28→27→26→25，迴轉 24→23→22→21→20→19。 再使用星星「對稱」(紅色)填入數字：18→17→16→15→14→13。	
R1	分成兩組： 第一組使用右順「跳格」填入數字：12→11→10→右移 9→8→7。 第二組使用對角「跳格」填入數字：6→5→4→對角 3→2→1。	
將六個角落區域進行計算 $A1=A2=A3=A4=A5=A6=852$ ，挑戰成功。		

(2) L=4 的六邊形棋盤方法如下，從最大的數字 $4 \times 4 \times 6 = 96$ 開始。

重疊區	步驟與方法	圖片說明
R6	A1~A6 都會計算到的區域，需填入最大的 $2 \times 2 \times 6 = 24$ 個數字：96→95→94→...→73。(這 24 個數字的位置皆可以互換)	
R4	<p>希望 R4 的六個區域差距能夠越小；</p> <p>先使用順逆「迴轉」(綠色)填入數字：72→71→70→69→68→67，迴轉 66→65→64→63→62→61。</p> <p>再使用星星「對稱」(橘色)填入數字：60→59→58→57→56→55。</p>	
R3	<p>分成兩組：</p> <p>第一組使用右逆「跳格」填入數字：54→53→52→右移 51→50→49。</p> <p>第二組使用對角「跳格」填入數字：48→47→46→對角 45→44→43。</p>	
R2	<p>希望 R2 的六個區域差距能夠越小；</p> <p>先兩兩一組使用順逆「迴轉」(黑色)填入：42→41→...→37，迴轉 36→35→...→31；</p> <p>再一次 30→29→...→25，迴轉 24→23→...→19。</p> <p>再使用星星「對稱」(紅色)填入數字：18→17→16→15→14→13。</p>	
R1	<p>分成兩組：</p> <p>第一組使用右順「跳格」填入數字：12→11→10→右移 9→8→7。</p> <p>第二組使用對角「跳格」填入數字：6→5→4→對角 3→2→1。</p>	
將六個角落區域進行計算 $A1=A2=A3=A4=A5=A6=3369$ ，挑戰成功。		

1.總和 A 的通式：

$$1 \times \text{中心六邊形} + \frac{4}{6} \times \text{一階梯形} + \frac{3}{6} \times \text{一階角落菱形} + \frac{2}{6} \times \text{二階梯形} + \frac{1}{6} \times \text{二階角落菱形} \dots\dots \textcircled{21}$$

2.角落總和最大值公式推導：隨著六邊形棋盤邊長增加，各個重疊區內的數字範圍也會跟著改變，進而影響總和。將各重疊區內數字範圍和填入數字個數整理如下：

(1)填入的數字範圍

六邊形邊長	3	4	5	L
棋盤全部	1~54	1~96	1~150	$1 \sim 6L^2$
中心六邊形	49~54	73~96	97~150	$(24L - 23) \sim 6L^2$
一階梯形	43~48	55~72	67~96	$(12L + 7) \sim (24L - 24)$
一階角落菱形	31~42	43~54	55~66	$(12L - 5) \sim (12L + 6)$
二階梯形	13~30	13~42	13~54	$13 \sim (12L - 6)$
二階角落菱形	1~12	1~12	1~12	1~12

(2)小正三角形的個數

六邊形邊長	3	4	5	L
棋盤全部	54	96	150	$6L^2$
中心六邊形	6	24	54	$6(L - 2)^2$
一階梯形	6	18	30	$6(2L - 5)$
一階角落菱形	12	12	12	12
二階梯形	18	30	42	$6(2L - 3)$
二階角落菱形	12	12	12	12

(3)不同重疊區的總和

$$\boxed{\text{中心六邊形}} = \frac{[(24L-23)+6L^2] \times 6(L-2)^2}{2} = 18L^4 - 285L^2 + 564L - 276 \dots\dots \textcircled{22}$$

$$\boxed{\text{一階梯形}} = \frac{[(12L+7)+(24L-24)] \times 6(2L-5)^2}{2} = 216L^2 - 642L + 255 \dots\dots \textcircled{23}$$

$$\boxed{\text{一階角落菱形}} = \frac{[(12L-5)+(12L+6)] \times 12}{2} = 144L + 6 \dots\dots \textcircled{24}$$

$$\boxed{\text{二階梯形}} = \frac{[13+(12L-6)] \times 6(2L-3)}{2} = 72L^2 - 66L - 63 \dots\dots \textcircled{25}$$

$$\boxed{\text{二階角落菱形}} = \frac{(1+12) \times 12}{2} = 78 \dots\dots \textcircled{26}$$

將②②、②③、②④、②⑤、②⑥的結果代入②①，算式整理之後，可以得到最大值的公式。

$$\text{最大值公式} = 1 \times (18L^4 - 285L^2 + 564L - 276) + \frac{4}{6} \times (216L^2 - 642L + 255)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{3}{6} \times (144L + 6) + \frac{2}{6} \times (72L^2 - 66L - 63) + \frac{1}{6} \times (78) \\ &= 18L^4 - 117L^2 + 186L - 111 \dots\dots \textcircled{27} \end{aligned}$$

3. 角落總和最小值公式推導：隨著六邊形棋盤邊長增加，各個重疊區內的數字範圍也會跟著改變，進而影響總和。將各重疊區內數字範圍和填入數字個數整理如下：

(1) 填入的數字範圍

六邊形邊長	3	4	5	L
棋盤全部	1~54	1~96	1~150	$1 \sim 6L^2$
中心六邊形	1~6	1~24	1~54	$1 \sim 6L^2 - 24L + 24$
一階梯形	7~12	25~42	55~84	$6L^2 - 24L + 25 \sim 6L^2 - 12L - 6$
一階角落菱形	13~24	43~54	85~96	$6L^2 - 12L - 5 \sim 6L^2 - 12L + 6$
二階梯形	25~42	55~84	97~138	$6L^2 - 12L + 7 \sim 6L^2 - 12$
二階角落菱形	43~54	85~96	139~150	$6L^2 - 11 \sim 6L^2$

(2) 小正三角形的個數

六邊形邊長	3	4	5	L
棋盤全部	54	96	150	$6L^2$
中心六邊形	6	24	54	$6(L-2)^2$
一階梯形	6	18	30	$6(2L-5)$
一階角落菱形	12	12	12	12
二階梯形	18	30	42	$6(2L-3)$
二階角落菱形	12	12	12	12

(3) 不同重疊區的總和

$$\begin{aligned} \boxed{\text{中心六邊形}} &= \frac{[1+(6L^2-24L+24)] \times 6(L-2)^2}{2} \\ &= 18L^4 - 144L^3 + 435L^2 - 588L + 300 \dots\dots\textcircled{28} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\text{一階梯形}} &= \frac{[(6L^2-24L+25)+(6L^2-12L-6)] \times 6(2L-5)^2}{2} \\ &= 72L^3 - 396L^2 + 654L - 285 \dots\dots\textcircled{29} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{一階角落菱形}} = \frac{[(6L^2-12L-5)+(6L^2-12L+6)] \times 12}{2} = 72L^2 - 144L + 6 \dots\dots\textcircled{30}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\text{二階梯形}} &= \frac{[(6L^2-12L+7)+(6L^2-12)] \times 6(2L-3)}{2} \\ &= 72L^3 - 180L^2 + 78L + 45 \dots\dots\textcircled{31} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{二階角落菱形}} = \frac{(6L^2-11+6L^2) \times 12}{2} = 72L^2 - 66 \dots\dots\textcircled{32}$$

將⑳、㉑、㉒、㉓、㉔的結果代入㉕，算式整理之後，可以得到最小值的公式。

$$\begin{aligned} \text{最小值公式} &= 1 \times (18L^4 - 144L^3 + 435L^2 - 588L + 300) \\ &\quad + \frac{4}{6} \times (72L^3 - 396L^2 + 654L - 285) + \frac{3}{6} \times (72L^2 - 144L + 6) \\ &\quad + \frac{2}{6} \times (72L^3 - 180L^2 + 78L + 45) + \frac{1}{6} (72L^2 - 66) \\ &= 18L^4 - 72L^3 + 159L^2 - 198L + 117 \dots\dots\textcircled{33} \end{aligned}$$

4.六邊形棋盤角落總和 A 的最大值與最小值如下：

六邊形邊長	3	4	5	L
A 的最大值	852	3369	9144	$18L^4 - 117L^2 + 186L - 111$
A 的最小值	468	1869	5352	$18L^4 - 72L^3 + 159L^2 - 198L + 117$

伍、討論

- 一、一開始棋盤較小，填入數字較少也較小，可使用紙筆來計算總和；當棋盤與填入數字再大一些，改用計算機來輔助；當遇到邊長 $L > 5$ ，還有六邊形棋盤的小三角形數是三角形棋盤的六倍時，計算機輔助還是速度太慢，而且容易遺漏數字，造成誤以為實驗失敗的情況，所以開始使用 EXCEL。在加總過程中，我們一步一步調整運算工具，從紙筆、計算機到電腦軟體 EXCEL；隨著數字增多，總和增加，也學會改變工具來解決問題。
- 二、研究結果中，三角形棋盤和菱形棋盤的填數情況很像，但六邊形棋盤跟三角形、菱形的填數方式卻是大大的不同，也是我們花最多時間的部分；因為無法使用重疊區的相等總和來完成實驗，更加充滿挑戰，反而找出很多意想不到的填數方法。
- 三、在討論棋盤形狀的時候，我們希望每個角落區塊都能大小相同，所以棋盤的每邊邊長需相等；加上正三角形內角是 60 度的原因，能夠拼接的只有正三角形、菱形和正六邊形棋盤。我們也嘗試使用等腰三角形進行設計，發現正多邊形都能夠使用全等的等腰三角形拼接，但是角落區塊形狀會改變，與目前研究的主題較多差異，可以作為未來研究的題目。如果使用等腰直角三角形設計邊長相等的棋盤，會成為正方形棋盤，此棋盤會和菱形棋盤的填數位置皆相同，所以不另做討論。
- 四、一開始進行實驗時，我們想要先找到填數方法，所以從最小值開始嘗試。挑戰成功後，我們推論如果將數字由大到小的依序填入，因為連續整數的差都是 1，應該也會得到角落總和相等的結果。找出最小值和最大值後，利用推導出來的公式，雙向驗證填數方法和公式計算都能得到角落總和相等的結果。接著想嘗試其它總和的可能性時，我們發現：依照相同的填數方法，但各重疊區未按照重疊次數的順序來填，結果亦可得到角落總和相等的答案，舉例如下表；也就是說，我們實驗得到的填數方法能夠應用在多種不同的角落總和上。

L=3	六邊形棋盤角落總和 A=468(最小值)	六邊形棋盤角落總和 A=588
圖示		
填入順序 1(紅)	重疊區 R6 填入 1~6	重疊區 R3 填入 1~12 (右逆跳格、對角跳格)
2(黑)	重疊區 R4 填入 7~12(星星對稱)	重疊區 R6 填入 13~18

3(紫)	重疊區 R3 填入 13~24 (右逆跳格、對角跳格)	重疊區 R2 填入 19~36 (順逆迴轉、星星對稱)
4(棕)	重疊區 R2 填入 25~42 (順逆迴轉、星星對稱)	重疊區 R1 填入 37~48 (右順跳格、對角跳格)
5(綠)	重疊區 R1 填入 43~54 (右順跳格、對角跳格)	重疊區 R4 填入 49~54(星星對稱)

陸、結論

一、探討三角形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

- 隨著 L 變長，三角形棋盤角落總和的重疊範圍有規律的擴大，出現的重疊區有三種：重疊三次的中心三角 $R3$ 、重疊二次的梯形 $R2$ 和未重疊的角落菱形 $R1$ 。
- 角落總和為最小值的數字填入順序：
 - 從重疊區 $R3$ 開始，由最小的數 1 開始依序填寫。
 - 接著填入重疊區 $R2$ ，使用順時針「接力」和順逆「迴轉」兩種方法填入。
 - 最後用順逆「迴轉」的方式填完重疊區 $R1$ 最大的六個數字。
- 角落總和為最大值的數字填入順序：
 - 從重疊區 $R3$ 開始，由最大的數開始倒序(由大到小依照順序)填入。
 - 接續著重疊區 $R3$ 的數字，繼續倒序填入重疊區 $R2$ ；分別使用順時針「接力」和順逆「迴轉」。
 - 剩下最小的六個數字，用順逆「迴轉」的方式填完重疊區 $R1$ 。
- 觀察角落總和是固定由 1 個中心三角、 2 個梯形、 1 個角落菱形組成，而且重疊區內的數字都是連續填入，使用高斯求和的方式，可求出各重疊區的總和，再加總成角落總和。隨著棋盤變大，角落總和也呈現規律變化，我們歸納出當邊長為 L 時，角落總和 A 通用的公式。分別如下：

$$\text{最大值：} \frac{L^4 - 11L^2 + 34L - 38}{2} \qquad \text{最小值：} \frac{3L^4 - 12L^3 + 45L^2 - 114L + 120}{6}$$

二、探討菱形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

- 隨著 L 變長，菱形棋盤角落總和的重疊範圍有規律的擴大，出現的重疊區有三種：重疊四次的中心菱形 $R4$ 、重疊二次的平行四邊形 $R2$ 和未重疊的角落菱形 $R1$ 。
- 角落總和為最小值的數字填入順序：
 - 從重疊區 $R4$ 開始，由最小的數 1 開始依序填寫。
 - 接著填入重疊區 $R2$ ，只需重複使用多次順逆「迴轉」即可完成。
 - 最後用順逆「迴轉」的方式填完重疊區 $R1$ 最大的八個數字。
- 角落總和為最大值的數字填入順序：
 - 從重疊區 $R4$ 開始，由最大的數開始倒序填入。
 - 接續著重疊區 $R4$ 的數字，繼續倒序填入重疊區 $R2$ ；只需重複使用多次順逆「迴轉」即可完成。
 - 剩下最小的八個數字，用順逆「迴轉」的方式填完重疊區 $R1$ 。
- 觀察角落總和是固定由 1 個中心菱形、 2 個平行四邊形、 1 個角落菱形組成，而且重疊區內的數字都是連續填入，使用高斯求和的方式，可求出各重疊區的總和，再加總成角落總和。隨著棋盤變大，角落總和也呈現規律變化，我們歸納出當邊長為 L 時，

角落總和 A 通用的公式。分別如下：

$$\text{最大值：} 2L^4 - 15L^2 + 30L - 23$$

$$\text{最小值：} 2L^4 - 8L^3 + 21L^2 - 34L + 25$$

三、探討六邊形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

1. 隨著 L 變長，六邊形棋盤角落總和的重疊範圍有規律的擴大，出現的重疊區有五種：重疊六次的中心六邊形 R6、重疊四次的一階梯形 R4、重疊三次的一階角落菱形 R3、重疊二次的二階梯形 R2 和未重疊的二階角落菱形 R1。
2. 角落總和為最小值的數字填入順序：
 - (1) 從重疊區 R6 中心六邊形開始，由最小的數 1 開始依序填寫。
 - (2) 接續 R6 的數字順序，重疊區 R4 是六個梯形，每個梯形都有奇數個小正三角形，先兩兩一組使用順逆「迴轉」讓數字和相同，最後各留下一個位置，使用星星「對稱」填入。
 - (3) 重疊區 R3 的菱形，分別使用右逆「跳格」和對角「跳格」填入。
 - (4) 接續重疊區 R3 的數字，R2 的六個梯形填法和 R4 相同，兩兩一組使用順逆「迴轉」，最後各留下一個位置，使用星星「對稱」。
 - (5) 最後重疊區 R1 留下最大的十二個數字，分別使用右順「跳格」和對角「跳格」填入即可完成。
3. 角落總和為最大值的數字填入順序：
 - (1) 從重疊區 R6 中心六邊形開始，由最大的數開始倒序填入。
 - (2) 接續 R6 的數字繼續倒序填入，重疊區 R4 的梯形先兩兩一組使用順逆「迴轉」，最後各留下一個位置，使用星星「對稱」填入。
 - (3) 接續 R4 的數字倒序填入重疊區 R3，分別使用右逆「跳格」和對角「跳格」填入。
 - (4) 重疊區 R2 接續 R3 數字倒序填入，兩兩一組使用順逆「迴轉」，最後各留下一個位置，使用星星「對稱」。
 - (5) 剩下最小的十二個數字，分別使用右順「跳格」和對角「跳格」填完重疊區 R1。
4. 觀察角落總和是固定由 1 個中心六邊形、4 個一階梯形、3 個一階角落菱形、2 個二階梯形和 1 個一階角落菱形組成，因填數方式和三角形、菱形棋盤不同，使得形狀相同的重疊區總和不同，無法單獨計算。需先算出 R6、R4、R3、R2、R1 各區全部的總和，再去計算各區占角落總和的比例，才能歸納出當邊長為 L 時，角落總和 A 通用的公式。分別如下：

$$\text{最大值：} 18L^4 - 117L^2 + 186L - 111$$

$$\text{最小值：} 18L^4 - 72L^3 + 159L^2 - 198L + 117$$

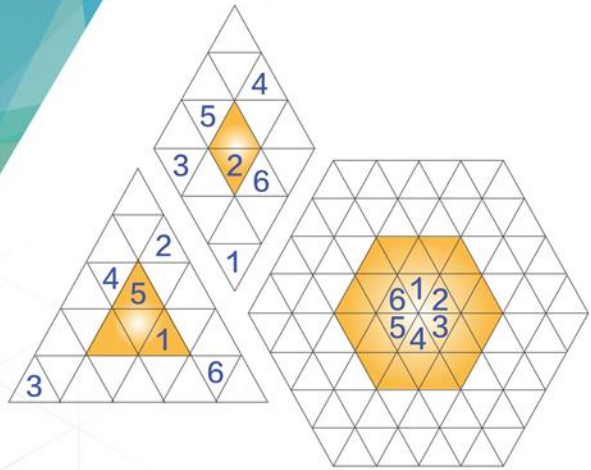
柒、參考資料

- 一、小學數學奧林匹亞訓練題庫 / 九章出版社
- 二、「和」成角落方陣 / 中華民國第五十一屆中小學科學展覽會國中組數學科作品
- 三、魔方陣的變形 / 中華民國第四十七屆中小學科學展覽會高中組數學科作品
- 四、方陣之美 / 中華民國第四十五屆中小學科學展覽會國小組數學科作品
- 五、魔方陣的變化球 / 中華民國第四十四屆中小學科學展覽會國小組數學科作品

【評語】 080402

1. 將數個小三角形拼成一個大三角形，並在小三角形中填入由 1 開始的連續數字，使得三個角落中，邊長減 1 的三個三角形內的數字和相等，探討重複計算的最大值與最小值，找出填數字的規律及推導出公式，並延伸至菱形及六邊形；同時以文字搭配圖示，清楚簡明的呈現研究的推論過程，大大提升了本篇研究報告的可讀性。
2. 能將實驗的結果以數學的形式進行公式的推導，相對提升了本研究的數學深度。
3. 整體而言，這是一個有趣的數學題目，作者自行訂出的規則，讓原本平凡的題目增添了創新與研究價值，值得讚許。

作品海報



三菱六計 同心「和」力

摘要

在小正三角形拼成的三角形和菱形棋盤中填入數字，使得棋盤邊長-1的三個(三角形)或四個(菱形)角落區塊總和皆相同。隨著棋盤邊長增加、填入數字越多、角落重疊部分擴大，使用了順時針接力和順逆迴轉等方式，有規律的填入數字。研究內容包括：

- 1.找出重疊區的圖形與小三角形的數量，並觀察圖形與小三角形增加的規律。
- 2.在求角落總和最大值和最小值的目標之下，如何有規律的填入數字。
- 3.推論角落總和最大值和最小值的公式。

接著用小正三角形設計出六邊形棋盤，依循之前的實驗過程，修正六邊形棋盤會遇到的困難，發展出星星對稱、右逆跳格和對角跳格等方法，雖然過程複雜，但都能夠找到共通性，也有了肯定的結論。

壹、前言

一、研究動機

課堂上老師讓我們挑戰數陣問題，數陣有很多種形狀：正方形、圓形等多種形狀組合而成。一開始我們嘗試把1到9的九個數字不重複，填入3X3方陣中，使四個角落的田字形總和相等。這個問題引起我們的好奇，進而想把類似的規則套用在由小正三角形拼成的三角形棋盤上。嘗試之後發現，原本方形棋盤的「行」、「列」填數個數相同，而由三角形拼成的棋盤更有挑戰性，除了「行」、「列」個數不同，且能利用正三角形60度角的特性，變化出菱形和六邊形的棋盤，讓我們有股衝勁，想要解開這個問題，便開始了這趟探究之旅。

二、研究目的

- (一)探討三角形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。
- (二)探討菱形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。
- (三)探討六邊形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

三、相關文獻參考

文獻名稱	與研究相關的內容摘要	對本研究啟發與差異之處
「和」成角落方陣	1.探討能否找到一種有規律的填法，使四個角落內數字的總和相等並恰好就是最大值或最小值。 2.nXn方陣中，若要找最大值，內圈依規律的方式由大到小填入，下一圈以反方向填入，以此類推；角落區域分成不同區域，同樣以規律的方向由大到小填入，一圈之後，再反方向繞回來，以此類推。最小值則將數字由小到大填入，填法和上面類似。	1.本研究找出在小正三角形拼成的三角形、菱形和六邊形棋盤中，找到一種有規律的填法，使角落數字的總和相等並找出最大值或最小值。 2.尋找角落總和的時候，在三角形、菱形棋盤使用了順時針接力和順逆迴轉等方式，有規律的填入數字。在六邊形棋盤，發展出星星對稱、右逆跳格和對角跳格等複雜方法。
方陣之美	探討奇數階平面方陣及奇數階立體方陣的規則，建構奇數階立體方陣的規則；依據階數，將所有數字平均分成組，接著將所有數字座標化。	在填數時，大部分重疊區可將數字總和平均分配。但在研究六邊形棋盤時，有些重疊區的總和無法平均分配，進而發展出星星對稱、右逆跳格和對角跳格等複雜方法。
魔方陣的變形	作品由三角形的魔方陣出發，設定規則如下：在n階三角形魔方陣中填入給定數字，使其三個n-1階三角形數字和相等。	讓本研究從數多作品研究的方陣延伸到三角形棋盤，再進一步變成菱形棋盤、六邊形棋盤。
魔方陣的變化球	在解決基本三階魔方陣的過程中，得到解題的要訣在於訂立中心位置為5，可以得到八組解。每個位置出現同一個數字的次數也有線對稱關係。	本研究在填數時，會從中央區域，也就是重疊次數最多的區域開始填數，接著依序由重疊次數少的區域往重疊次數較少的區域填數。填數的位置也具有對稱性。

貳、研究設備及器材

電腦、iPad、自製棋盤、紀錄本、筆、白板、計算機。

參、研究過程或方法

一、名詞定義

(一)棋盤：由相同的多個小正三角形所組成，以每邊邊長是3的棋盤為例，如圖右。



(二)棋盤邊長L：接下來使用L來表示多邊形棋盤的邊長，例如：L=3的三角形棋盤。

(三)棋盤小正三角形總數N：例如L=3的三角形棋盤，小正三角形總共是1+3+5=9個，我們記作 $N=9=3^2=L^2$ ，表示需在每個小正三角形各別填入1~N的所有正整數，且數字不重複。

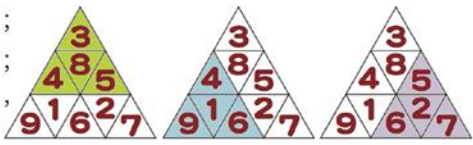
(四)棋盤總和S：當棋盤全部填滿數字，將數字加總，即為總和S。舉例：L=3的三角形棋盤會填入1、2、...、8、9共九個數字， $S=1+2+...+8+9=45$ 。

(五)角落區塊與總和：角落區塊的邊長皆為L-1。以三角形棋盤為例：從每個頂點開始，L-1為邊長的正三角形作為角落區塊的範圍，總共會有3個。

※當L=3時，角落的綠色、藍色和紫色區塊正三角形邊長為3-1=2，以此類推。當L=4時，三個角落區塊的邊長為4-1=3；當L=5時，三個角落區塊的邊長為5-1=4。填入數字時，要使上圖中綠色區塊的四個數字總和與藍色區塊、紫色區塊的數字總和皆相同。我們定義綠色區塊數字總和為「A1」，藍色區塊數字總和為「A2」，紫色區塊數字總和為「A3」，將三個區塊總和統稱為「角落總和」；當A1=A2=A3時，用「A」表示其結果。

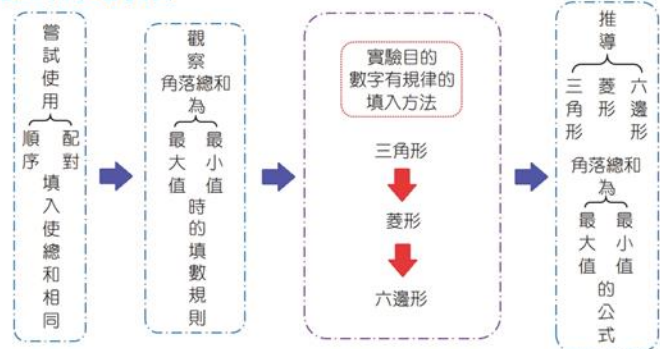
(六)數陣填數舉例說明

綠色區塊A1=3+4+8+5=20；
藍色區塊A2=4+9+1+6=20；
紫色區塊A3=5+6+2+7=20，
挑戰成功。



(七)重疊區R：當區塊沒有重複計算時定義為「R1」，當區塊重複計算兩次時為「R2」，當區塊重複計算三次時為「R3」，以此類推。

二、研究歷程與方法



活動一：探討三角形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

- (一)觀察L=3的實驗結果，並嘗試尋找有規律的填入方式
- (二)利用重疊區塊依序放入數字，找到角落總和最大值與最小值的填入方法
- (三)整理實驗方法與結果，找出其規律性並將角落總和歸納成通用公式

活動二：探討菱形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

- (一)參考三角形棋盤的實驗結果，嘗試找出菱形棋盤的重疊區
- (二)比較三角形和菱形棋盤的差異，找到角落總和最大值與最小值填入方法
- (三)整理實驗方法與結果，找出其規律性並將角落總和歸納成通用公式

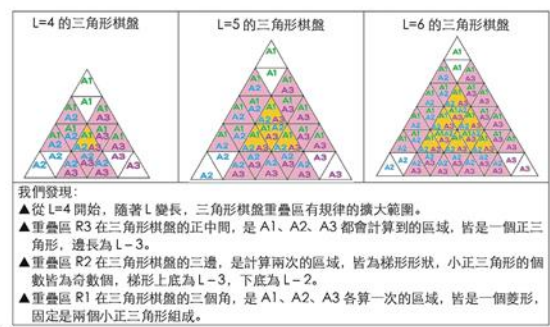
活動三：探討六邊形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

- (一)觀察六邊形棋盤重疊區的變化並找出規律
- (二)修正六邊形棋盤的擺放方式，並找到角落總和最大值與最小值填入方法
- (三)整理實驗方法與結果，找出其規律性並將角落總和歸納成通用公式

肆、研究結果

一、探討三角形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

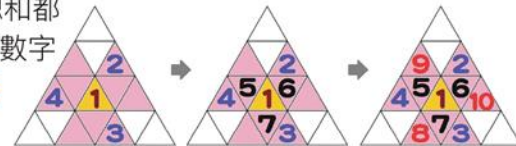
- (一)觀察L=3的實驗結果，並嘗試尋找有規律的填入方式。
- (二)利用「重疊區」依序放入數字，找到角落總和最大值與最小值的填入方法：



1.觀察L=4、5、6的三角形棋盤，將重疊區標示出來。

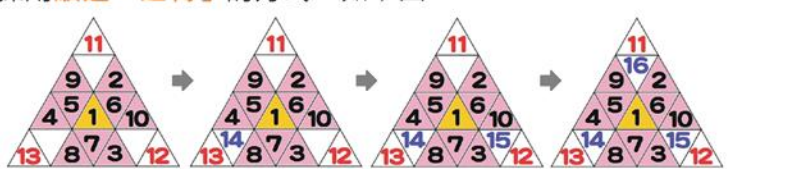
2.角落總和為最小值min的數字填入順序，以L=4為例：

- (1)重疊區R3填進數列中最小的數字1。
- (2)重疊區R2填進數列中接下來的九個數字，分別為2、3、4、5、6、7、8、9、10，若三個梯形的總和都相等，會最容易成功。將九個數字分三組，我們採用「順時針接力」的方式，如右圖。



※各梯形內的數字會相加在一起，所以填入同一個梯形的三個數字可以互換位置。

- (3)重疊區R1填進數列中最後六個數字，分別為11、12、13、14、15、16，將三個菱形數字總和分別相等會最容易成功的。將六個數字分三組，我們採用「順逆迴轉」的方式，如下圖。



※菱形內的數字會相加在一起，所以填入同一個菱形的兩個數字可以互換位置。
※順逆「迴轉」的數字分配如下表：

11	12	13
16	15	14
和=27	和=27	和=27

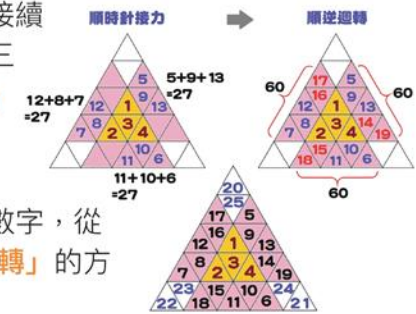
(4)驗證實驗結果：

- ① A1=11+9+16+2+4+5+1+6+10=64；A2=9+4+5+1+13+14+8+7+3=64；A3=2+1+6+10+8+7+3+15+12=64；挑戰成功。

② A1包含R3三角形、R2梯形兩個、R1菱形一個；A2包含R3三角形、R2梯形兩個、R1菱形一個；A3包含R3三角形、R2梯形兩個、R1菱形一個；故總和會相同，且重複次數多的數字皆較小，所以總和是最小的。

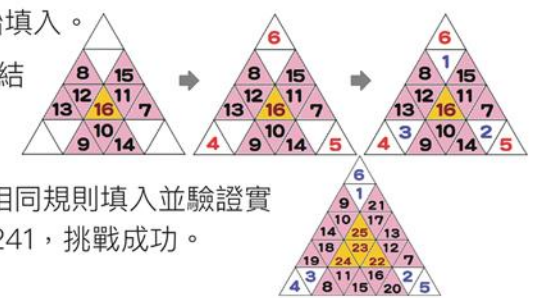
(5)使用相同填入規則，完成L=5的三角形棋盤：

- ①將重疊區R3填進數列中最小的幾個數字，從1、2、3、4。
- ②將重疊區R2填進數列中接下來的幾個數字，從5、6、...、19。在填入的時候，我們發現每個梯形從3個小正三角形變成了5個，所以決定使用「順時針接力」和「順逆迴轉」接續進行的方式。「順時針接力」能夠使三個小正三角形總和相等，而「順逆迴轉」能使兩個小正三角形總和相等，最後能讓R2的每個梯形總和也相同。
- ③將重疊區R1填進數列中的最後六個數字，從20、21、...、25。我們採用「順逆迴轉」的方式，如右圖。
- ④驗證實驗結果：A1=A2=A3=175，挑戰成功。



3.角落總和為最大值Max數字填入順序：希望總和能越大，重複計算越多的位置要填越大的數字，所以我們決定仿照最小值min的填寫方式，但是從數字最大的開始填入。

- (1)以L=4為例：驗證實驗結果：A1=A2=A3=89，挑戰成功。
- (2) L=5三角形棋盤使用相同規則填入並驗證實驗結果：A1=A2=A3=241，挑戰成功。



(三)整理實驗方法與結果，找出其規律性並將角落總和歸納成通用公式：我們現在找最大值或最小值時，A1、A2、A3三個區域所包含重疊區數量一樣，有1個角落菱形、2個梯形和1個中心三角。如下圖：

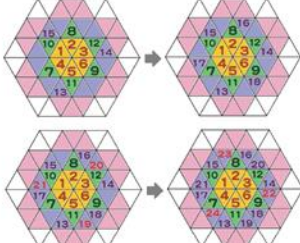
- A1(R3+R4部分)=39+甲+乙+丙=149 →甲+乙+丙=110.....①
 A2(R3+R4部分)=37+甲+乙+己=149 →甲+乙+己=112.....②
 A3(R3+R4部分)=36+甲+戊+己=149 →甲+戊+己=113.....③
 A4(R3+R4部分)=37+丁+戊+己=149 →丁+戊+己=112.....④
 A5(R3+R4部分)=39+丙+丁+戊=149 →丙+丁+戊=110.....⑤
 A6(R3+R4部分)=40+乙+丙+丁=149 →乙+丙+丁=109.....⑥

由①②、④⑤算式比較發現，丙+2=己；由②③、⑤⑥算式比較發現，乙+1=戊；由③④、①⑥算式比較發現，丁+1=甲

②根據上面實驗，我們找出了五組以上能夠符合條件的數字組合，最後選定以下這組總和較有規律的填入重疊區R3：

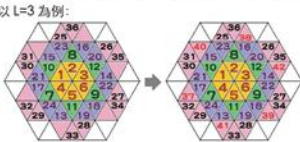
	甲	乙	丙	丁	戊	己
第一組	15	16	14	18	13	17
第二組	23	20	22	19	24	21
和	38	36	36	37	37	38

③依數字順序填入：採用逆時針「跳格」方式，分成兩組：第一組為13~18，13→14→15逆時針放入後，向右一格再交錯放入16→17→18，我們稱為**右逆「跳格」**。
 第二組為19~24，19→20→21逆時針放入後，至對角再交錯放入22→23→24，我們稱為**對角「跳格」**。

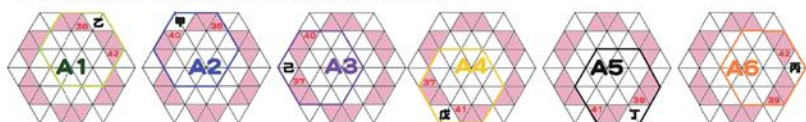


(4)重疊區R2：和重疊區R4相似，每邊梯形放奇數個小正三角形，這些連續整數無法平均分配到六個梯形區域。希望R2的六個區域差距能夠越小，先用**順逆「迴轉」**兩兩一組，直到剩下最後一個再**星星「對稱」**填入。

- ①接續重疊區R3的數字為25~42。
- ②每區都是三個小正三角形，先用**順逆「迴轉」**，再使用**星星「對稱」**。



(5)重疊區R1：需填入最後的12個數字；觀察下圖第3層A1~A6的區域，發現每個區域都包含R2中的兩個梯形，和R1中的一個菱形，要將這三塊圖形中所有數字的總和相等，才能夠成功。(此時的甲乙丙丁戊己代表第3層的六個菱形)



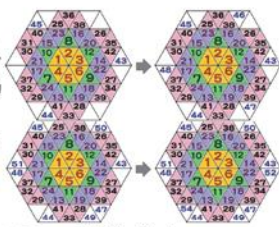
①以L=3為例：需填入43~54。重疊區R2會影響總和差異的只有紅色數字的部分，因為**順逆「迴轉」**會使梯形的其它部分和皆相等。

- A1(R1+R2有差異的部分):38+乙+42=80+乙 A4(R1+R2有差異的部分):37+戊+41=78+戊
 A2(R1+R2有差異的部分):40+甲+38=78+甲 A5(R1+R2有差異的部分):41+丁+39=80+丁
 A3(R1+R2有差異的部分):37+己+40=77+己 A6(R1+R2有差異的部分):42+丙+39=81+丙

由上面六個算式比較發現，甲=戊；乙=丁；己=甲+1=戊+1=乙+3=丁+3=丙+4。我們參考重疊區R3菱形部分做比較，固定第二組數字順序關係(填入方法也會相同)，僅更動第一組數字順序，稍作調整如右：

	甲	乙	丙	丁	戊	己
第一組	45	46	43	47	44	48
第二組	53	50	52	49	54	51
和	98	96	95	96	98	99

②依數字順序填入，分成兩組：第一組為43~48，43→44→45**順時針**交錯放入後，向右一格再交錯放入46→47→48，我們稱為**右順「跳格」**。
 第二組為49~54，49→50→51逆時針放入後，至對角再交錯放入52→53→54，和**第二層的對角「跳格」**方法相同。
 將六個角落區域進行計算A1=A2=A3=A4=A5=A6=468，挑戰成功。



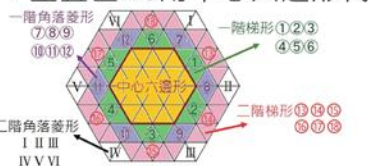
2.角落總和為最大值Max的數字填入順序：

L=3的六邊形棋盤方法如下，從最大的數字3x3x6=54開始。

重疊區	步驟與方法	圖片說明	重疊區	步驟與方法	圖片說明
R6	A1~A6 都會計算到的區域。需填入最大的2x2x6=24個數字：96→95→94→...→73。(這24個數字的位置皆可以互換)		R2	希望R2的六個區域差距能越小；先兩兩一組使用順逆「迴轉」(藍色)填入：42→41→...→37，逆轉36→35→...→31；再一次30→29→...→25，逆轉24→23→...→19；再使用星星「對稱」(紅色)填入數字：18→17→16→15→14→13。	
R4	先使用順逆「迴轉」(綠色)填入數字：72→71→70→69→68→67，逆轉66→65→64→63→62→61。 再使用星星「對稱」(橘色)填入數字：60→59→58→57→56→55。		R1	分成兩組：第一組使用右順「跳格」填入數字：12→11→10→右移9→8→7；第二組使用對角「跳格」填入數字：6→5→4→對角3→2→1。	

將六個角落區域進行計算A1=A2=A3=A4=A5=A6=852，挑戰成功。

(三)整理實驗方法與結果，找出其規律性並將角落總和歸納成通用公式：六邊形依重疊次數分成五個區域：重疊區R6用中心六邊形代表；重疊區R4用一階梯形代表；重疊區R3用一階角落菱形代表；重疊區R2用二階梯形代表；重疊區R1用二階角落菱形代表。如右圖：



接下來討論公式時，上述名稱皆代表整個重疊區域，而不像三角形和菱形棋盤代表單一圖形，因為六邊形棋盤的數字填入時是無法讓每個圖形的總和相同，只能夠相差盡量小而已；因此重疊區的情況比三角形、菱形棋盤要更複雜，討論六邊形棋盤各重疊區總和時，每個區域都會仔細觀察，找出數字範圍、個數，而不會像討論三角形、菱形把不好計算用上好計算的區域替換掉。

1.總和A的通式：

$$1 \times \text{中心六邊形} + \frac{4}{6} \times \text{一階梯形} + \frac{3}{6} \times \text{一階角落菱形} + \frac{2}{6} \times \text{二階梯形} + \frac{1}{6} \times \text{二階角落菱形} \dots\dots \textcircled{21}$$

2.角落總和最大值公式推導：隨著六邊形棋盤邊長增加，各個重疊區內的數字範圍也會跟著改變，進而影響總和。將各重疊區內數字範圍、填入數字個數、公式整理如右：

區域	值	數字範圍	個數	公式
棋盤全部		1~6L ²	6L ²	
中心六邊形		(24L-23)~6L ²	6(L ² -2L ² -2)	18L ⁴ -285L ² +564L-276.....②
一階梯形		(12L+7)~(24L-24)	6(2L-5)	216L ² -642L+255.....③
一階角落菱形		(12L-5)~(12L+6)	12	144L+6.....④
二階梯形		13~(12L-6)	6(2L-3)	72L ² -66L-63.....⑤
二階角落菱形		1~12	12	78.....⑥

將②、③、④、⑤、⑥的結果代入②，算式整理之後，可以得到最大值的公式。最大值公式 = 18L⁴-117L²+186L-111.....⑦

伍、討論

一、開始棋盤較小，填入數字較少也較小，可使用紙筆來計算總和；當棋盤與填入數字再大一些，改用計算機來輔助；當遇到邊長L>5，還有六邊形棋盤的小三角形數是三角形棋盤的六倍時，計算機輔助還是速度太慢，而且容易遺漏數字，造成誤以為實驗失敗的情況，所以開始使用EXCEL。在加總過程中，我們一步一步調整運算工具，從紙筆、計算機到電腦軟體EXCEL；隨著數字增多，總和增加，也學會改變工具來解決問題。

二、研究結果中，三角形棋盤和菱形棋盤的填數情況很像，但六邊形棋盤跟三角形、菱形的填數方式卻是大大的不同，也是我們花最多時間的部分；因為無法使用重疊區的相等總和來完成實驗，更加充滿挑戰，反而找出很多意想不到的填數方法。連續不間斷地填完，可作為我們後面持續研究的題目。

三、在討論棋盤形狀的時候，我們希望每個角落區域都能大小相同，所以棋盤的每邊邊長需相等；加上正三角形內角是60度的原因，能夠拼接的只有正三角形、菱形和正六邊形棋盤。我們也嘗試使用等腰三角形進行設計，發現正多邊形都能夠使用全等的等腰三角形拼接，但是角落區域形狀會改變，與目前研究的主題較多差異，可以作為未來研究的題目。如果使用等腰直角三角形設計邊長相等的棋盤，會成為正方形棋盤，此棋盤會和菱形棋盤的填數位置皆相同，所以不另做討論。

四、一開始進行實驗時，我們想要先找到填數方法，所以從最小值開始嘗試。挑戰成功後，我們推論如果將數字由大到小的依序填入，因為連續整數的差都是1，應該也會得到角落總和相等的結果。找出最小值和最大值後，利用推導出來的公式，雙向驗證填數方法和公式計算都能得到角落總和相等的結果。接著想嘗試其它總和的可能性時，我們發現：依照相同的填數方法，但各重疊區未按照重疊次數的順序來填，結果亦可得到角落總和相等的答案，舉例如下表；也就是說，我們實驗得到的填數方法能夠應用在多種不同的角落總和上。

L=3	六邊形棋盤角落總和A=468(最小值)	六邊形棋盤角落總和A=588
圖示		
填入順序	重疊區 R6 填入 1~6	重疊區 R3 填入 1~12 (右逆跳格、對角跳格)
2(黑)	重疊區 R4 填入 7~12(星星對稱)	重疊區 R6 填入 13~18
3(紫)	重疊區 R3 填入 13~24 (右逆跳格、對角跳格)	重疊區 R2 填入 19~36 (順逆迴轉、星星對稱)
4(綠)	重疊區 R2 填入 25~42 (順逆迴轉、星星對稱)	重疊區 R1 填入 37~48 (右順跳格、對角跳格)
5(粉)	重疊區 R1 填入 43~54 (右順跳格、對角跳格)	重疊區 R4 填入 49~54(星星對稱)

陸、結論

一、探討三角形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

1.隨著L變長，三角形棋盤角落總和的重疊範圍有規律的擴大，出現的重疊區有三種：重疊三次的中心三角R3、重疊二次的梯形R2和未重疊的角落菱形R1。

2.角落總和為最小值的數字填入順序：

- (1)從重疊區R3開始，由最小的數1開始依序填寫。
- (2)接著填入重疊區R2，使用順時針「接力」和順逆「迴轉」兩種方法填入。
- (3)最後用順逆「迴轉」的方式填完重疊區R1最大的六個數字。

3.角落總和為最大值的數字填入方法和最小值相同；從重疊區R3開始，由最大的數開始倒序(由大到小依照順序)填入。

4.觀察角落總和是固定由1個中心三角、2個梯形、1個角落菱形組成，而且重疊區內的數字都是連續填入，使用高斯求和的方式，可求出各重疊區的總和，再加總成角落總和。隨著棋盤變大，角落總和也呈現規律變化，我們歸納出當邊長為L時，角落總和A通用的公式。分別如下：

$$\text{最大值：} \frac{L^4-11L^2+34L-38}{2} \quad \text{最小值：} \frac{3L^4-12L^3+45L^2-114L+120}{6}$$

二、探討菱形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

1.隨著L變長，菱形棋盤角落總和的重疊範圍有規律的擴大，出現的重疊區有三種：重疊四次的中心菱形R4、重疊二次的平行四邊形R2和未重疊的角落菱形R1。

2.角落總和為最小值的數字填入順序：

- (1)從重疊區R4開始，由最小的數1開始依序填寫。
- (2)接著填入R2，只需重複使用多次順逆「迴轉」即可完成。
- (3)最後用順逆「迴轉」的方式填完重疊區R1最大的八個數字。

3.角落總和為最大值的數字填入方法和最小值相同；從重疊區R4開始，由最大的數開始倒序(由大到小依照順序)填入。

4.觀察角落總和是固定由1個中心菱形、2個平行四邊形、1個角落菱形組成，而且重疊區內的數字都是連續填入，使用高斯求和的方式，可求出各重疊區的總和，再加總成角落總和。隨著棋盤變大，角落總和也呈現規律變化，我們歸納出當邊長為L時，角落總和A通用的公式。分別如下：

$$\text{最大值：} 2L^4-15L^2+30L-23 \quad \text{最小值：} 2L^4-8L^3+21L^2-34L+25$$

三、探討六邊形棋盤中，角落總和最大值與最小值的填入方法，並推導出公式。

1.隨著L變長，六邊形棋盤角落總和的重疊範圍有規律的擴大，出現的重疊區有五種：重疊六次的中心六邊形R6、重疊四次的一階梯形R4、重疊三次的一階角落菱形R3、重疊兩次的二階梯形R2和未重疊的二階角落菱形R1。

2.角落總和為最小值的數字填入順序：

- (1)從重疊區R6中心六邊形開始，由最小的數1開始依序填寫。
- (2)接續R6的數字順序，重疊區R4是六個梯形，每個梯形都有奇數個小正三角形，先兩兩一組使用順逆「迴轉」讓數字和相同，最後各留下一個位置，使用星星「對稱」填入。
- (3)重疊區R3的菱形，分別使用右逆「跳格」和對角「跳格」填入。
- (4)接續重疊區R3的數字，R2的六個梯形填法和R4相同，兩兩一組使用順逆「迴轉」，最後各留下一個位置，使用星星「對稱」。
- (5)最後重疊區R1留下最大的十二個數字，分別使用右順「跳格」和對角「跳格」填入即可完成。

3.角落總和為最大值的數字填入方法和最小值相同；從重疊區R6開始，由最大的數開始倒序(由大到小依照順序)填入。

4.觀察角落總和是固定由1個中心六邊形、4個一階梯形、3個一階角落菱形、2個二階梯形和1個一階角落菱形組成，因填數方式和三角形、菱形棋盤不同，使得形狀相同的重疊區總和不同，無法單獨計算。需先算出R6、R4、R3、R2、R1各區全部的總和，再去計算各區占角落總和的比例，才能歸納出當邊長為L時，角落總和A通用的公式。分別如下：

$$\text{最大值：} 18L^4-117L^2+186L-111 \quad \text{最小值：} 18L^4-72L^3+159L^2-198L+117$$

柒、參考資料

- 一、小學數學奧林匹亞訓練題庫/九章出版社
- 二、「和」成角落方陣/中華民國第五十一屆中小學科學展覽會國中組數學科作品
- 三、魔方陣的變形/中華民國第四十七屆中小學科學展覽會高中組數學科作品
- 四、方陣之美/中華民國第四十五屆中小學科學展覽會國小組數學科作品
- 五、魔方陣的變化球/中華民國第四十四屆中小學科學展覽會國小組數學科作品