中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080401

循環小數萬花筒

學校名稱：連江縣立介壽國民中小學

作者：	指導老師：
小五 曹綍軒	李懿雲
小五 曹馨方	曾韵宜
小五 黃彥瑋	
小五 陳則智	

關鍵詞：循環小數 、循環節

循環小數萬花筒

摘要

一、分數：所有的分數皆能轉化成小數，可以分為「除得盡的分數」和「除不盡的分數」等兩大類別。

二、小數：除得盡的分數可以轉化成「有限小數」，除不盡的分數可以轉化成「純循環小數」、「混循環小數」等三大類別。

三、Scratch 程式：將數字轉換成圖像，將360°依照數字0~9，分成十等份，順時針旋轉「36°×對應的數字」，這些圖像可以分為「相同圖形」和「同邊形圖形」等兩大類別。

四、循環小數：循環小數包含「未循環數字」和「循環節」，分母因數分解後，2和5出現的次數會決定這個循環小數的類別。

壹、研究動機

記得一開始在學分數時，在課堂中常聽到老師用「一半」來舉例，代表一個 PIZZA 分成兩份，就是「二分之一」，也可以說是「0.5」，因此，對於小數有了基本的認識。這學期開始學了分數和小數的乘法運算，也在第五單元「整數、小數除以整數」中，老師告訴我們「有些分數是可以換成小數的，但有些分數卻無法用小數表示」，讓我們心中產生疑問「為什麼所有的分數不能全部都換成小數?」。原來老師說無法用小數表示的分數，利用除法運算會產生「循環小數」，在小學階段我們還不會學到，所以決定挑戰自己計算出「循環小數」。

偶然在臉書上看到一篇文章，數學家馬特・亨德森發明一種方式，可以將數字轉換成圖像。他將每個數字，化成特定角度的線條，一連串的數字就會產生一些特殊圖形，這讓我們想到資訊課時，老師在教授 Scratch 的迴圈功能時，結合畫筆功能可以畫出一幅幅對稱圖形，在與老師討論後，老師說數學中數字有規律性的，就是循環小數，建議我們可以針對循環小數做個研究，看看如果將循環小數運用馬特・亨德森的方式，可以產生什麼樣的圖形。

貳、研究目的

一、所有分數轉化成循環小數。

二、分數轉化成循環小數後的規律性。

三、循環小數轉化成圖形後的對應關係。

四、透過圖形反推循環小數。

參、研究設備及器材

一、計算紙。

二、電腦與 Scratch 程式軟體。

肆、研究過程或方法

一、所有分數轉化成小數

因為計算機在計算時的小數位數有限，我們透過傳統紙筆計算的方式，運用分數的定義

$\frac{b}{a}=b\div a$，分別計算$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$…、$\frac{1}{99}$。計算時遇到無法整除，則計算至第二個循環節開始產生時。

相關計算結果如下：

分數	轉化成小數	分數	轉化成小數
$\frac{1}{2}$	0.5	$\frac{1}{51}$	$0.\overline{0196078431372549}$
$\frac{1}{3}$	$0.\overline{3}$	$\frac{1}{52}$	$0.01\overline{923076}$
$\frac{1}{4}$	0.25	$\frac{1}{53}$	$0.\overline{0188679245283}$
$\frac{1}{5}$	0.2	$\frac{1}{54}$	$0.01\overline{851}$
$\frac{1}{6}$	$0.1\overline{6}$	$\frac{1}{55}$	$0.0\overline{18}$
$\frac{1}{7}$	$0.\overline{142857}$	$\frac{1}{56}$	$0.017\overline{857142}$
$\frac{1}{8}$	0.125	$\frac{1}{57}$	$0.\overline{017543859649122807}$
$\frac{1}{9}$	$0.\overline{1}$	$\frac{1}{58}$	$0.0\overline{1724137931034482758620689655}$
$\frac{1}{10}$	0.1	$\frac{1}{59}$	$0.\overline{\mathrm{C}}$
$\frac{1}{11}$	$0.\overline{09}$	$\frac{1}{60}$	$0.01\overline{6}$
$\frac{1}{12}$	$0.08\overline{3}$	$\frac{1}{61}$	$0.\overline{\mathrm{D}}$
$\frac{1}{13}$	$0.\overline{076923}$	$\frac{1}{62}$	$0.0\overline{161290322580645}$
$\frac{1}{14}$	$0.0\overline{714285}$	$\frac{1}{63}$	$0.\overline{015873}$
$\frac{1}{15}$	$0.0\overline{6}$	$\frac{1}{64}$	0.015625
$\frac{1}{16}$	0.0625	$\frac{1}{65}$	$0.0\overline{153846}$
$\frac{1}{17}$	$0.\overline{0588235294117647}$	$\frac{1}{66}$	$0.0\overline{15}$
$\frac{1}{18}$	$0.0\overline{5}$	$\frac{1}{67}$	$0.\overline{\mathrm{E}}$
$\frac{1}{19}$	$0.\overline{052631578947368421}$	$\frac{1}{68}$	$0.01\overline{4705882352941176}$
$\frac{1}{20}$	0.05	$\frac{1}{69}$	$0.\overline{0144927536231884057971}$
$\frac{1}{21}$	$0.\overline{047619}$	$\frac{1}{70}$	$0.0\overline{142857}$
$\frac{1}{22}$	$0.0\overline{45}$	$\frac{1}{71}$	$0.\overline{\mathrm{F}}$
$\frac{1}{23}$	$0.\overline{0434782608695652173913}$	$\frac{1}{72}$	$0.013\overline{8}$
$\frac{1}{24}$	$0.041\overline{6}$	$\frac{1}{73}$	$0.\overline{01369863}$
$\frac{1}{25}$	0.04	$\frac{1}{74}$	$0.0\overline{135}$
$\frac{1}{26}$	$0.0\overline{384615}$	$\frac{1}{75}$	$0.01\overline{3}$
$\frac{1}{27}$	$0.\overline{037}$	$\frac{1}{76}$	$0.01\overline{315789473684210526}$
$\frac{1}{28}$	$0.03\overline{571428}$	$\frac{1}{77}$	$0.\overline{012987}$
$\frac{1}{29}$	$0.\overline{0344827586206896551724137931}$	$\frac{1}{78}$	$0.01\overline{28205}$
$\frac{1}{30}$	$0.0\overline{3}$	$\frac{1}{79}$	$0.\overline{0126582278481}$
$\frac{1}{31}$	$0.\overline{032258064516129}$	$\frac{1}{80}$	0.0125

$\frac{1}{32}$	0.03125	$\frac{1}{81}$	$0.\overline{012345679}$
$\frac{1}{33}$	$0.\overline{03}$	$\frac{1}{82}$	$0.0\overline{12195}$
$\frac{1}{34}$	$0.0\overline{2941176470588235}$	$\frac{1}{83}$	$0.\overline{\mathrm{G}}$
$\frac{1}{35}$	$0.0\overline{285714}$	$\frac{1}{84}$	$0.01\overline{190476}$
$\frac{1}{36}$	$0.02\overline{7}$	$\frac{1}{85}$	$0.0\overline{011764588235294}$
$\frac{1}{37}$	$0.\overline{027}$	$\frac{1}{86}$	$0.0\overline{116279069767441860465}$
$\frac{1}{38}$	$0.0\overline{263157894736842105}$	$\frac{1}{87}$	$0.\overline{0114942528735632183908045977}$
$\frac{1}{39}$	$0.\overline{025641}$	$\frac{1}{88}$	$0.011\overline{36}$
$\frac{1}{40}$	0.025	$\frac{1}{89}$	$0.\overline{\mathrm{H}}$
$\frac{1}{41}$	$0.\overline{02439}$	$\frac{1}{90}$	$0.0\overline{1}$
$\frac{1}{42}$	$0.0\overline{238095}$	$\frac{1}{91}$	$0.\overline{010989}$
$\frac{1}{43}$	$0.\overline{023255813953488372093}$	$\frac{1}{92}$	$0.01\overline{0869565217391304347826}$
$\frac{1}{44}$	$0.02\overline{27}$	$\frac{1}{93}$	$0.\overline{010752688172043}$
$\frac{1}{45}$	$0.0\overline{2}$	$\frac{1}{94}$	$0.0\overline{\mathrm{J}}$
$\frac{1}{46}$	$0.0\overline{2173913043478260869565}$	$\frac{1}{95}$	$0.0\overline{105263157894736842}$
$\frac{1}{47}$	$0.\overline{\mathrm{A}}$	$\frac{1}{96}$	$0.01041\overline{6}$
$\frac{1}{48}$	$0.0208\overline{3}$	$\frac{1}{97}$	$0.\overline{\mathrm{K}}$
$\frac{1}{49}$	$0.\overline{\mathrm{B}}$	$\frac{1}{98}$	$0.0\overline{\mathrm{M}}$
$\frac{1}{50}$	0.02	$\frac{1}{99}$	$0.\overline{01}$

$\overline{\mathrm{A}}$	0212765957446808510638297872340425531914893617
$\overline{\mathrm{B}}$	020408163265306122448979591836734693877551
$\overline{\mathrm{C}}$	0169491525423728813559322033898305084745762711864406779661
$\overline{\mathrm{D}}$	016393442622950819672131147540983606557377049180327868852459
$\overline{\mathrm{E}}$	014925373134328358208955223880597
$\overline{\mathrm{F}}$	01408450704225352112676056338028169
$\overline{\mathrm{G}}$	01204819277108433734939759036144578313253
$\overline{\mathrm{H}}$	01123595505617977528089887640449438202247191
$\overline{\mathrm{J}}$	1063829787234042553191489361702127659574468085
$\overline{\mathrm{K}}$	010309278350515463917525773195876288659793814432989690721649484536082474 2268041237113402061855670
$\overline{\mathrm{M}}$	1020408163265306122448979591836734693877551

經過計算後，將$\frac{1}{2}$到$\frac{1}{99}$轉化成小數後，大致可分成有限小數、混循環小數及純循環小數。

（一）有限小數

當分數為$\frac{1}{a}$，a 為界於2~99間的正整數時，以除法計算$\frac{1}{a}$時，當 a=2,4,5,8,10,16,20,25,32,40,50,64,80時，都是有限小數。這些數字都有共同特性為分母的因數除了2和5以外，沒有其他的因數，透過擴分將這些分數的分母化成10的乘冪，因此，這些分數都能化成小數。

分數	分母因式分解	化成10的乘冪		化為小數
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1*5}{2*5}$	$\frac{5}{10}$	0.5
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2*2}$	$\frac{1*5*5}{2*2*5*5}$	$\frac{25}{100}$	0.25
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1*2}{5*2}$	$\frac{2}{10}$	0.2
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2*2*2}$	$\frac{1*5*5*5}{2*2*2*5*5*5}$	$\frac{125}{1000}$	0.125
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2*5}$	$\frac{1}{2*5}$	$\frac{1}{10}$	0.1
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2*2*2*2}$	$\frac{5*5*5*5}{2*2*2*2*5*5*5*5}$	$\frac{625}{10000}$	0.0625
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{2*2*5}$	$\frac{1*5}{2*2*5*5}$	$\frac{5}{100}$	0.05
$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5*5}$	$\frac{2*2}{5*5*2*2}$	$\frac{4}{100}$	0.04
$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2*2*2*2*2}$	$\frac{1*5*5*5*5*5}{2*2*2*2*2*5*5*5*5*5}$	$\frac{3125}{100000}$	0.03125
$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{2*2*2*5}$	$\frac{1*5*5}{2*2*2*5*5*5}$	$\frac{25}{1000}$	0.025
$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{2*5*5}$	$\frac{1*2}{2*5*5*2}$	$\frac{2}{100}$	0.02
$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{2*2*2*2*2*2}$	$\frac{1*5*5*5*5*5*5}{2*2*2*2*2*2*5*5*5*5*5*5}$	$\frac{15625}{1000000}$	0.015625
$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{2*2*2*2*5}$	$\frac{1*5*5*5}{2*2*2*2*5*5*5*5}$	$\frac{125}{10000}$	0.0125

（二）循環小數

當分數為$\frac{1}{b}$，b 為界於2~100的正整數時，以除法計算$\frac{1}{b}$時，除了可化成有限小數外，其餘都可以化成循環小數。以$\frac{1}{7}$為例(圖1)：

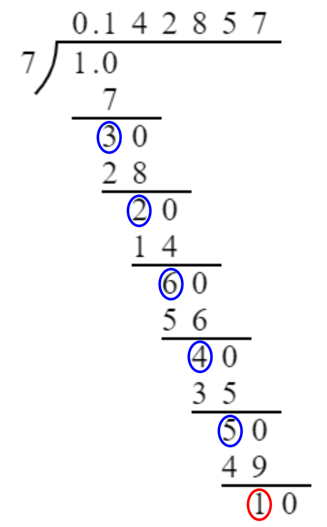


圖1

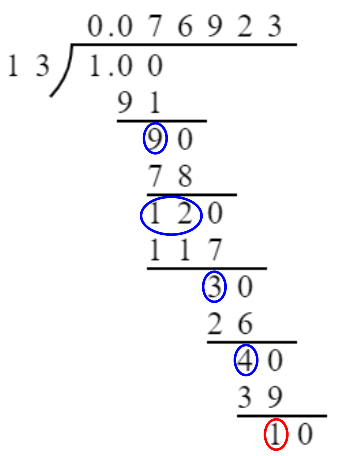


圖2

在除法過程中，餘數有可能會是1、2、3、4、5、6，當6種可能都出現的餘數都出現過後，下一個餘數必定和前面其中一個餘數重複，此時就會產生循環現象，因此可以推論，循環節的個數必定不會超過(b-1)個。但並不是所有的分數轉化成小數時，循環節的個數都是(b-1)個，以$\frac{1}{13}$為例(圖2)，在計算到小數點第6位時，餘數為1，就形成循環現象。

（三）混循環小數

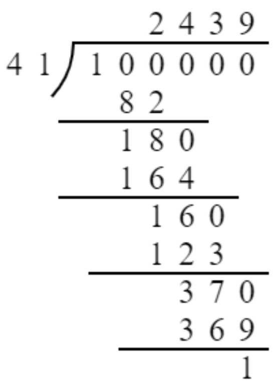
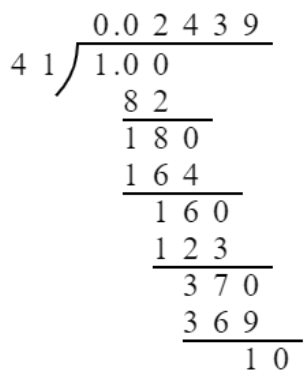
從整理的資料中發現，循環小數又可以分為純循環小數及混循環小數，我們發現混循環小數的未循環數字與分母有關：

分數	分母因式分解	擴分	化為小數
$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{2*13}$	$\frac{1}{2*5}*\frac{5}{13}=\frac{1}{10}*\frac{5}{13}$	$0.1*0.\overline{384615}=0.0\overline{384615}$
$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{2*2*13}$	$\frac{1}{2*2*5*5}*\frac{5*5}{13}=\frac{1}{100}*\frac{25}{13}$	$0.01*1.\overline{923076}=0.01\overline{923076}$
$\frac{1}{65}$	$\frac{1}{5*13}$	$\frac{1}{5*2}*\frac{2}{13}=\frac{1}{10}*\frac{2}{13}$	$0.1*0.\overline{153846}=0.0\overline{153846}$

透過擴分讓分母有相同個數2或5的因數，每一組的2和5，就是10，小數位數就會增加1位。因此，將分母進行質因數分解後，因數2或5出現較多的個數就是混循環小數中未循環的位數。

（四）循環小數的循環節數

在計算分數$\frac{1}{c}$化成小數時，c 不含2或5的因數時，當除到餘數剩1時，便開始進入循環，因此，若 c 是10^n-1的因數，則$\frac{1}{c}$的循環節有 n 位，以$\frac{1}{41}$為例，$10^5-1=99999=3*3*41*271$，所以41是10^5-1的因數，而$\frac{10^5-1}{41}=2439$，則$\frac{1}{41}=2439*\frac{1}{10^5-1}=2439*0.\overline{00001}=0.\overline{02439}$。

$100000\div41=2439 \cdots\cdots 1$ 	$1\div41=0.02439$ 
圖3	圖4

以上述推理，我們加以檢驗：

$10^1-1=3^2\rightarrow\frac{1}{3}$、$\frac{1}{9}$的循環節有1位

$10^2-1=3^2*11\rightarrow\frac{1}{11}$、$\frac{1}{33}$的循環節有2位

$10^3-1=3^3*37\rightarrow\frac{1}{27}$、$\frac{1}{37}$循環節有3位

$10^5-1=3^2*41*271\rightarrow\frac{1}{41}$循環節有5位

$10^6-1=3^3*7*11*13*37\rightarrow\frac{1}{7}$、$\frac{1}{13}$、$\frac{1}{21}$、$\frac{1}{37}$循環節有6位

$10^8-1=3^2*11*73*101*137\rightarrow\frac{1}{73}$循環節有8位

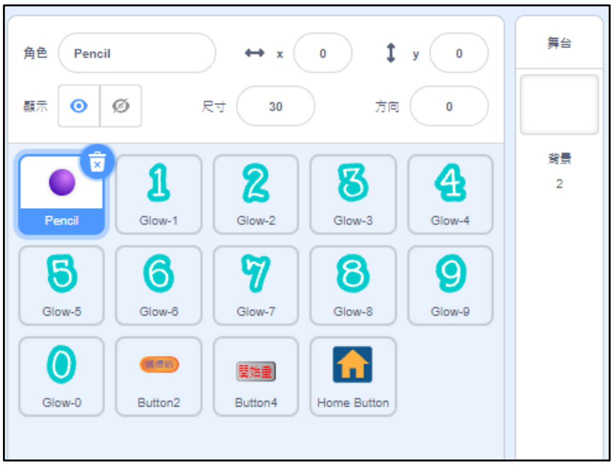
循環小數可用$\frac{1}{2^m*5^n*k}$，若 k 是(10^n-1)的因數，其循環節位數為 n。此外，透過我們所計算的分數化成小數過程中，發現分數的分母在乘以2或5的次方數後，對應的循環節位數不變。

二、循環小數轉換成圖形

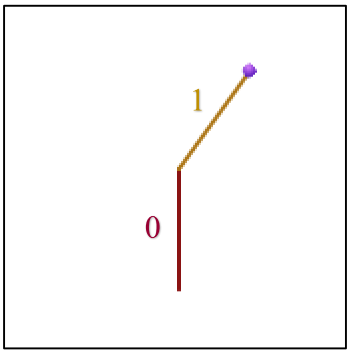
我們參考數學家馬特·亨德森的方法，將數字轉換成圖像，將360°，依照數字0~9，順時針分成十等份，如果出現數字0，朝原方向畫一單位長度，如果出現數字1，就順時針旋轉36°後，畫一單位長度，以此類推。

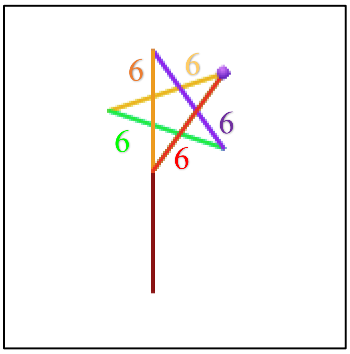
不過，如果用手畫曠日廢時，精準度也有待商榷，畫筆顏色也無法多樣性，因此我們決定利用這學期學到的程式軟體 Scratch 來畫圖形。我們運用畫筆功能，並將數字圖形植入程式，讓程式收到0~9數字指令時，依照指定角度畫出一定長度線段；在畫循環節部分，我們運用迴圈程式積木，只要輸入循環節數字，並設定好重複次數後，程式就很快幫我們畫出相對應圖形。

過程中，發生一個超出預期的情況，當循環節的位數超過16位時，所產生圖形不如我們想像中複雜，於是我們用循環節有18位的$\frac{1}{19}$做實驗，分別用迴圈方式及手動輸入方式進行測試，結果圖形果然不相同。經過討論，應該和用電腦計算機程式一樣，最多只能計算16位數，所以後續循環節位數超過16位的，我們都採用手動輸入方式。

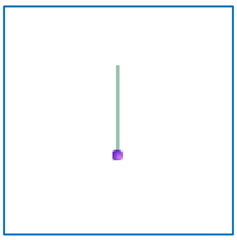
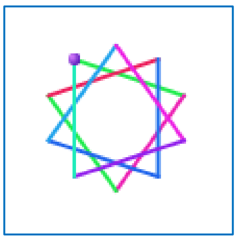
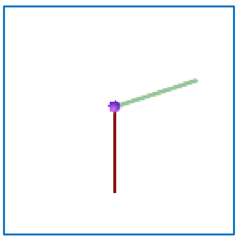
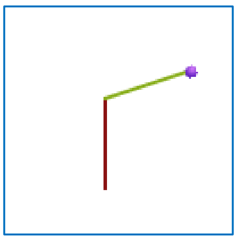


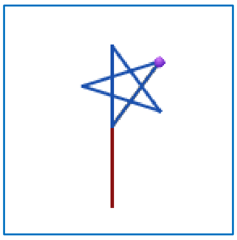
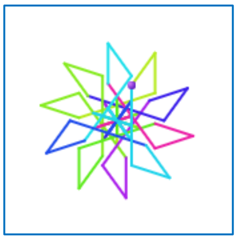
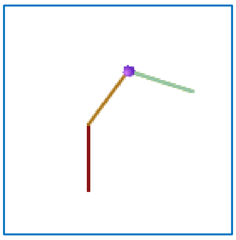
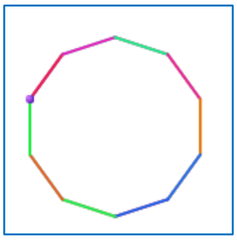
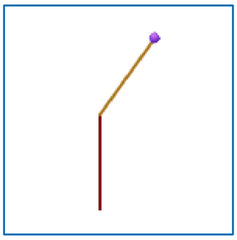
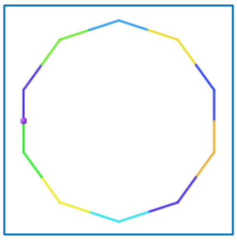
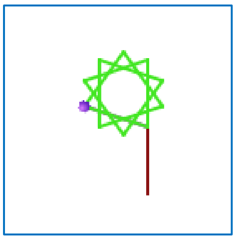
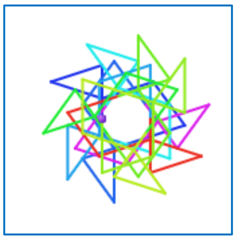
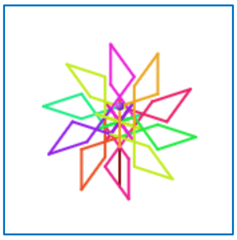
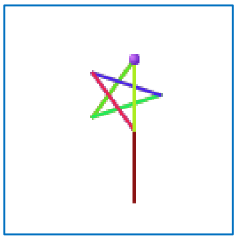
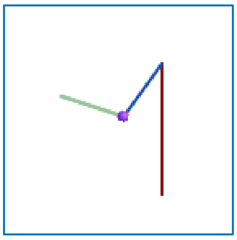
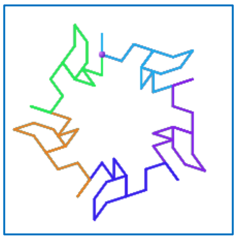
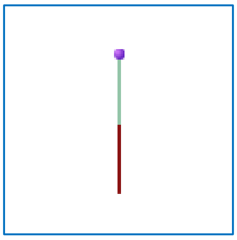
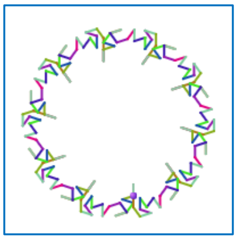
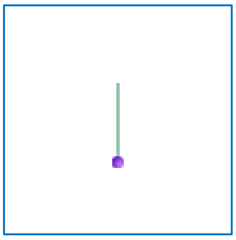
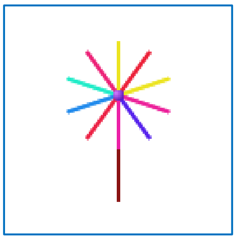
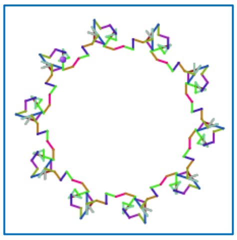
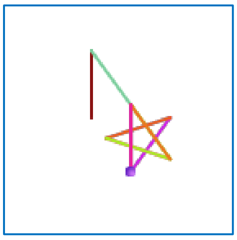
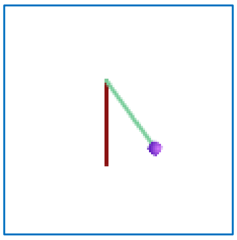
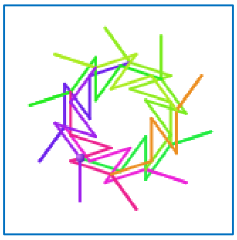
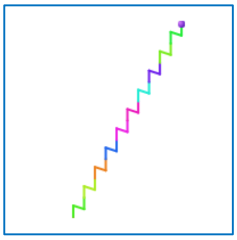
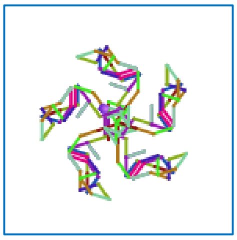
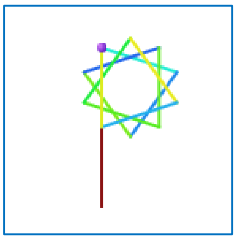
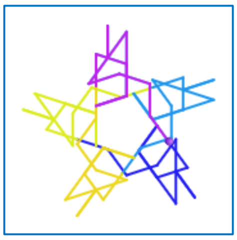
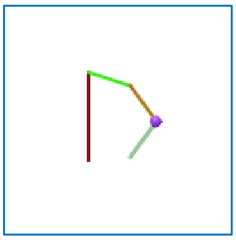
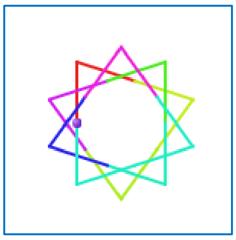
從所產生圖形可以解構出循環小數中非循環部分及循環節部分，以$\frac{1}{6}$為例，可分成非循環部分的0.1及循環部分$\overline{6}$，圖中咖啡色代表0，非循環1的部分，畫完後，就開始重複畫循環部分$\overline{6}$，所以畫筆會開始畫完一段後，右轉216°，再繼續畫一筆，反覆操作，就會畫出五芒星的圖案。

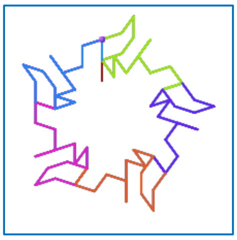
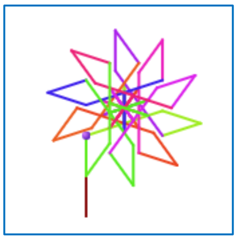
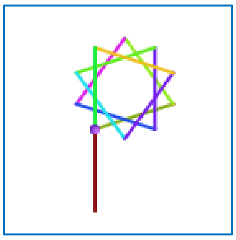
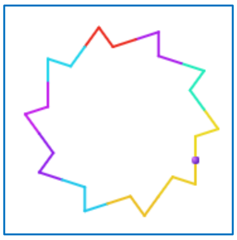
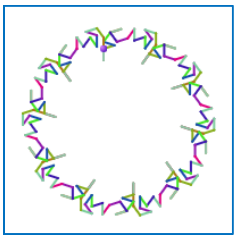
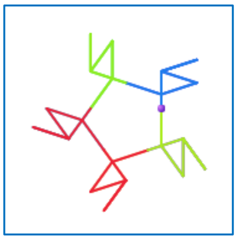
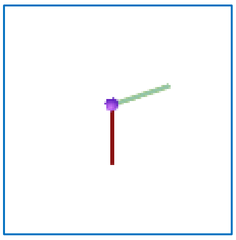
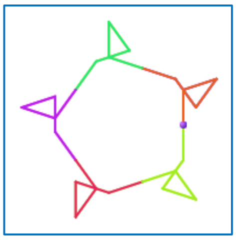
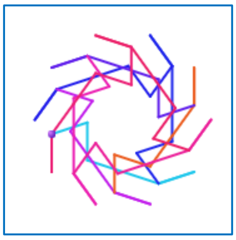
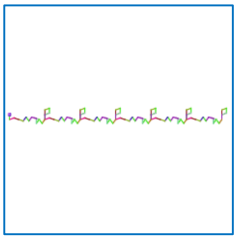
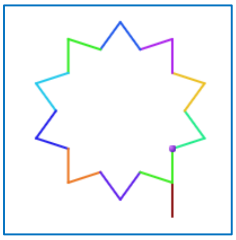
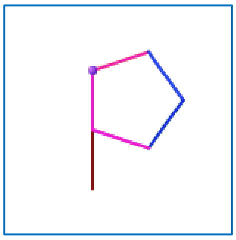
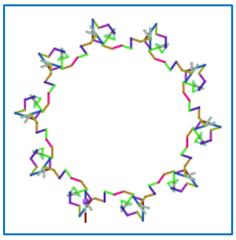
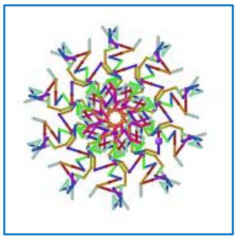
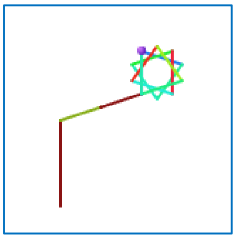
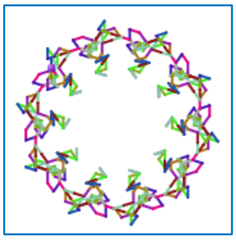
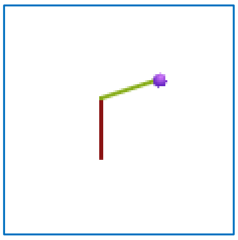
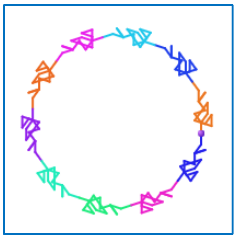
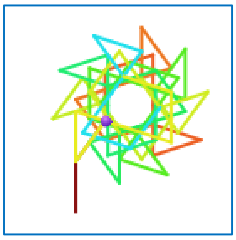
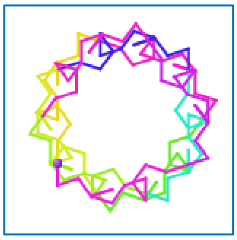
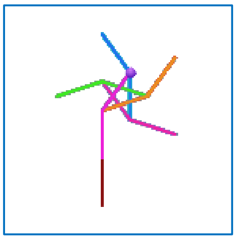
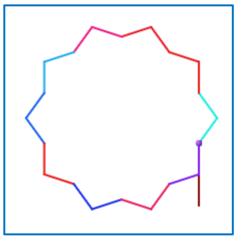
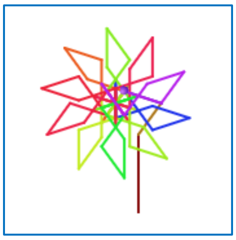
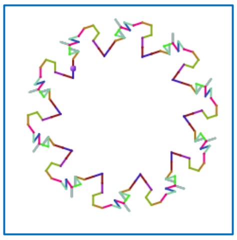
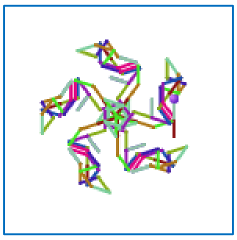
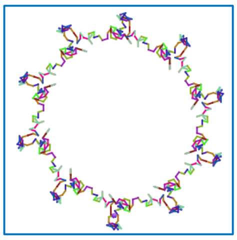
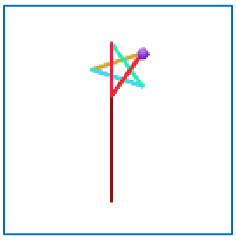
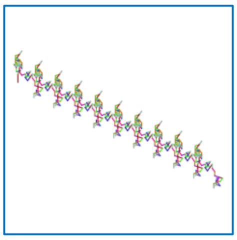


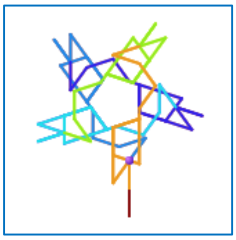
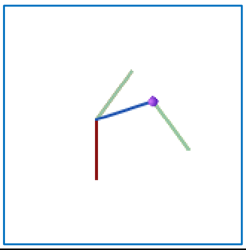
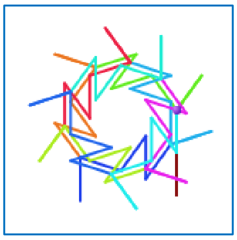
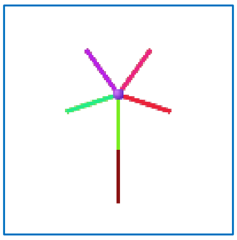
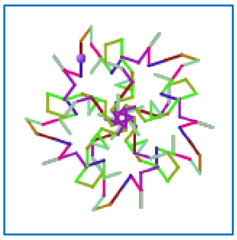
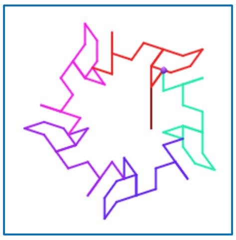
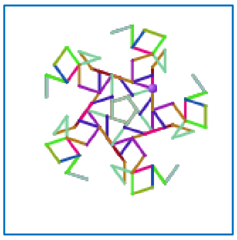
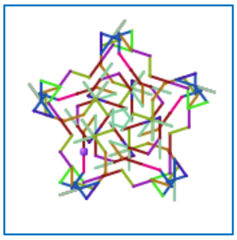
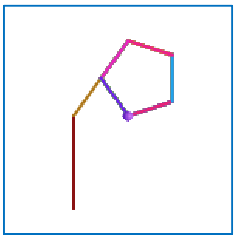
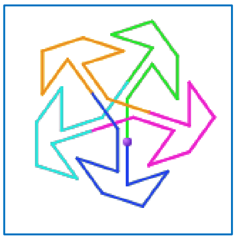
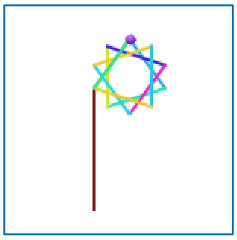
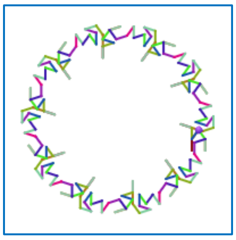
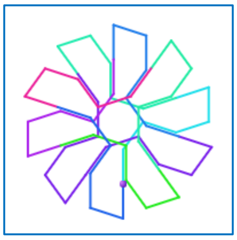
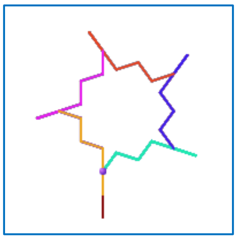
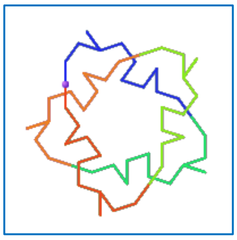
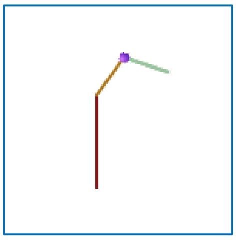
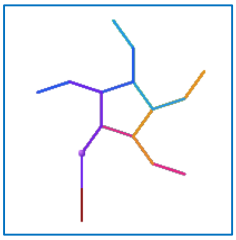
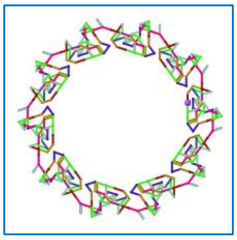
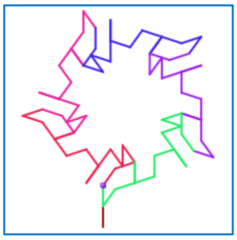
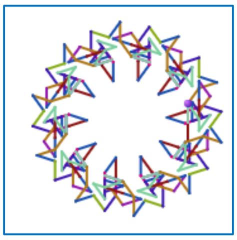
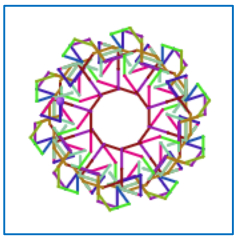
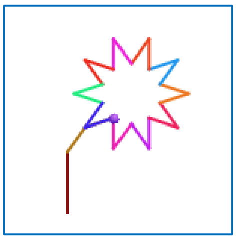
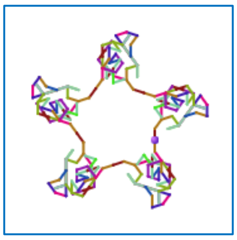


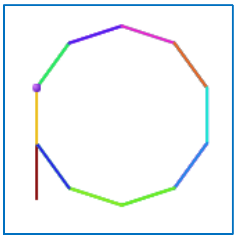
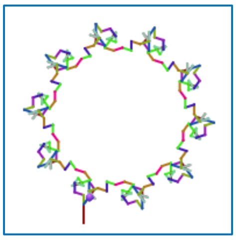
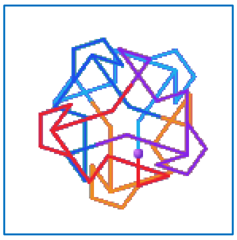
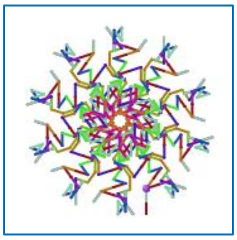
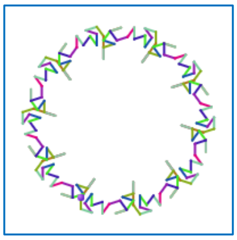
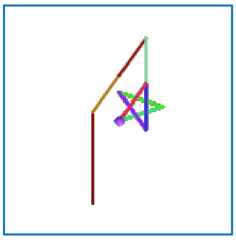
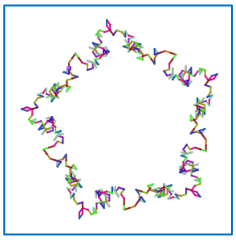
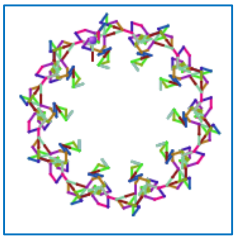
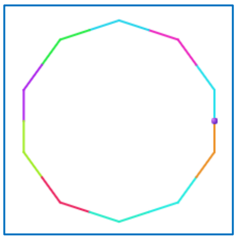
經過長時間且仔細的輸入後，終於將$\frac{1}{2}$到$\frac{1}{99}$化為小數後的數值，通通轉換成圖形，相對應圖形如下：

$\frac{1}{2}$ 	$\frac{1}{3}$ 	$\frac{1}{4}$ 	$\frac{1}{5}$ 

$\frac{1}{6}$ 	$\frac{1}{7}$ 	$\frac{1}{8}$ 	$\frac{1}{9}$ 
$\frac{1}{10}$ 	$\frac{1}{11}$ 	$\frac{1}{12}$ 	$\frac{1}{13}$ 
$\frac{1}{14}$ 	$\frac{1}{15}$ 	$\frac{1}{16}$ 	$\frac{1}{17}$ 
$\frac{1}{18}$ 	$\frac{1}{19}$ 	$\frac{1}{20}$ 	$\frac{1}{21}$ 
$\frac{1}{22}$ 	$\frac{1}{23}$ 	$\frac{1}{24}$ 	$\frac{1}{25}$ 
$\frac{1}{26}$ 	$\frac{1}{27}$ 	$\frac{1}{28}$ 	$\frac{1}{29}$ 
$\frac{1}{30}$ 	$\frac{1}{31}$ 	$\frac{1}{32}$ 	$\frac{1}{33}$ 

$\frac{1}{34}$ 	$\frac{1}{35}$ 	$\frac{1}{36}$ 	$\frac{1}{37}$ 
$\frac{1}{38}$ 	$\frac{1}{39}$ 	$\frac{1}{40}$ 	$\frac{1}{41}$ 
$\frac{1}{42}$ 	$\frac{1}{43}$ 	$\frac{1}{44}$ 	$\frac{1}{45}$ 
$\frac{1}{46}$ 	$\frac{1}{47}$ 	$\frac{1}{48}$ 	$\frac{1}{49}$ 
$\frac{1}{50}$ 	$\frac{1}{51}$ 	$\frac{1}{52}$ 	$\frac{1}{53}$ 
$\frac{1}{54}$ 	$\frac{1}{55}$ 	$\frac{1}{56}$ 	$\frac{1}{57}$ 
$\frac{1}{58}$ 	$\frac{1}{59}$ 	$\frac{1}{60}$ 	$\frac{1}{61}$ 

$\frac{1}{62}$ 	$\frac{1}{63}$ 	$\frac{1}{64}$ 	$\frac{1}{65}$ 
$\frac{1}{66}$ 	$\frac{1}{67}$ 	$\frac{1}{68}$ 	$\frac{1}{69}$ 
$\frac{1}{70}$ 	$\frac{1}{71}$ 	$\frac{1}{72}$ 	$\frac{1}{73}$ 
$\frac{1}{74}$ 	$\frac{1}{75}$ 	$\frac{1}{76}$ 	$\frac{1}{77}$ 
$\frac{1}{78}$ 	$\frac{1}{79}$ 	$\frac{1}{80}$ 	$\frac{1}{81}$ 
$\frac{1}{82}$ 	$\frac{1}{83}$ 	$\frac{1}{84}$ 	$\frac{1}{85}$ 
$\frac{1}{86}$ 	$\frac{1}{87}$ 	$\frac{1}{88}$ 	$\frac{1}{89}$ 

$\frac{1}{90}$ 	$\frac{1}{91}$ 	$\frac{1}{92}$ 	$\frac{1}{93}$ 
$\frac{1}{94}$ 	$\frac{1}{95}$ 	$\frac{1}{96}$ 	$\frac{1}{97}$ 
$\frac{1}{98}$ 	$\frac{1}{99}$ 		

完成小數轉換成圖形後，我們共同將圖卡進行分類，大致可分成相同圖形與同邊形圖形。

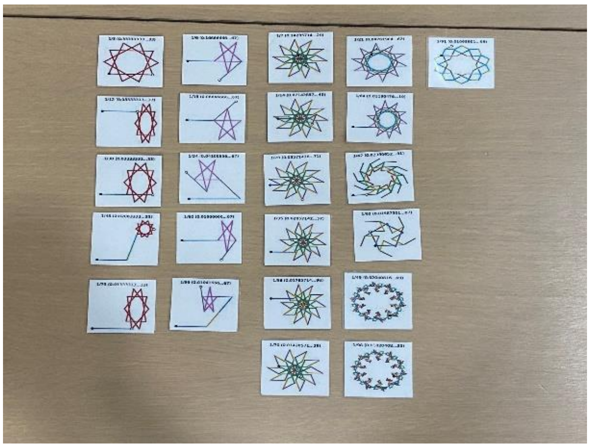
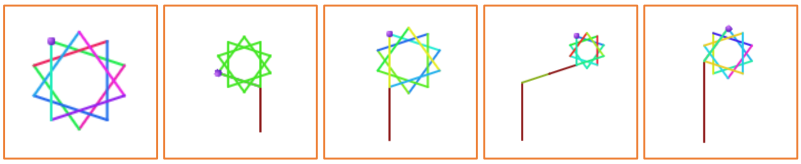
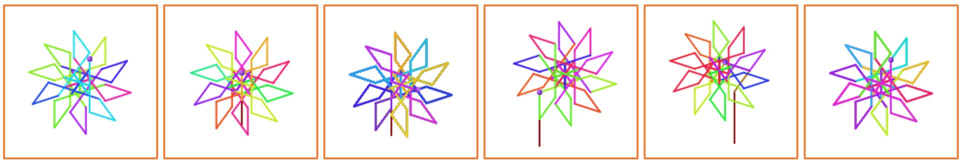
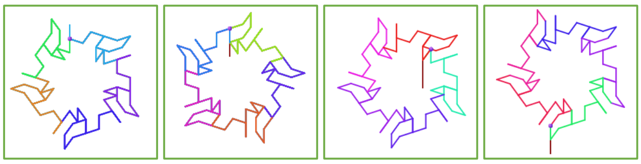
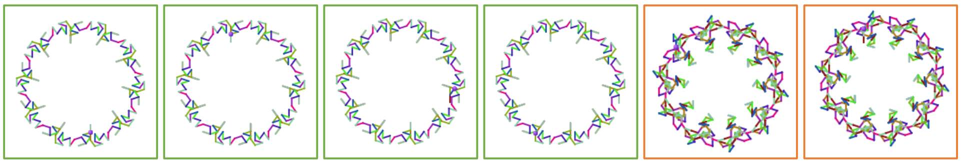
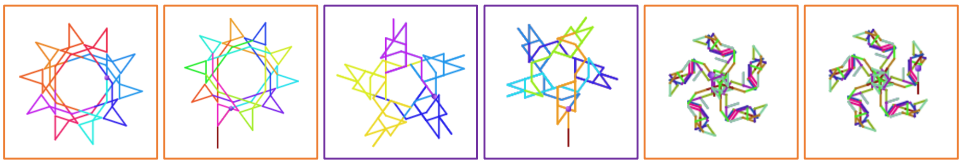
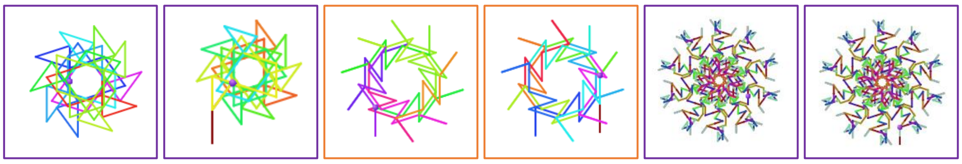
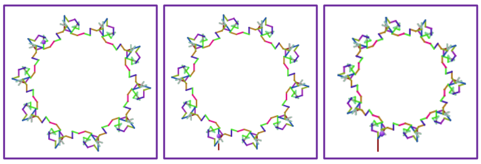


圖5	圖6

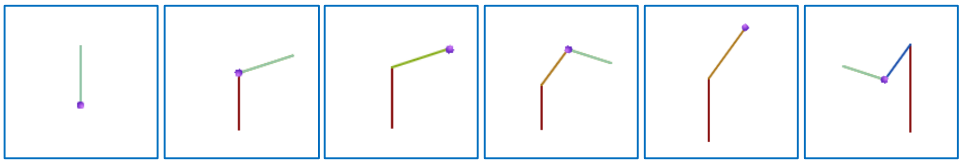
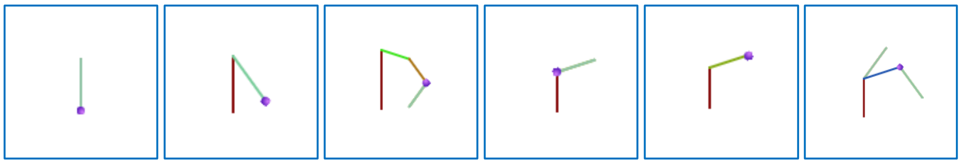
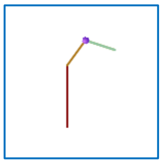
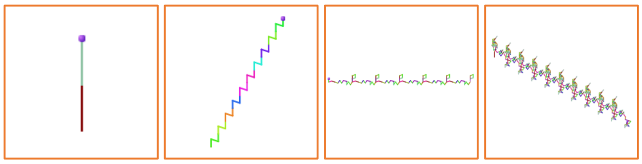
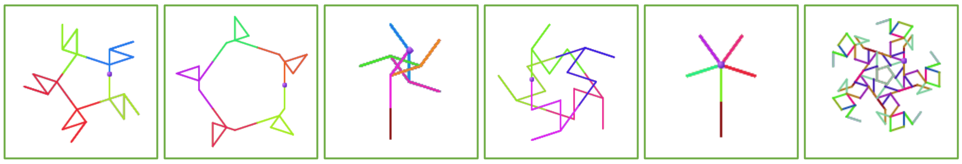
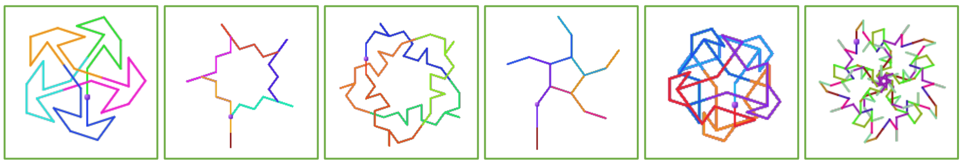
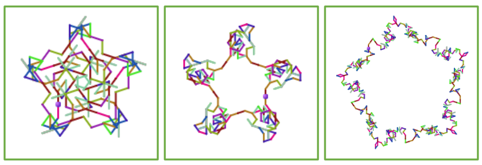
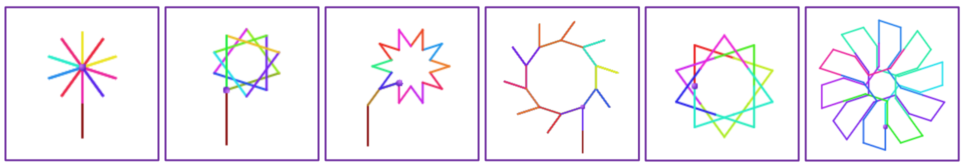
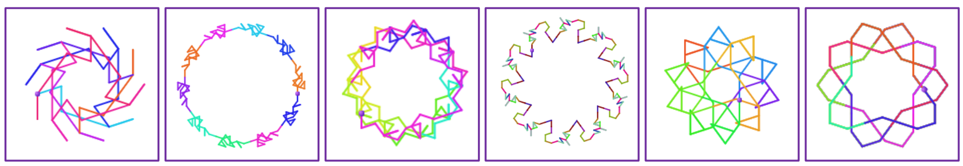
（一）相同圖形

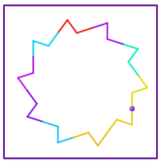
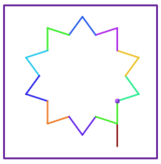
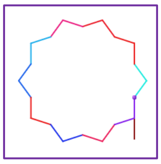
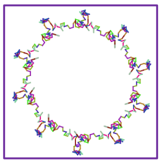
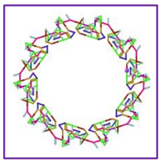
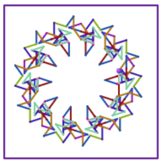
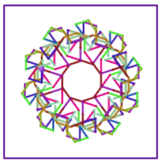
透過圖形，發現有些數字的圖形幾乎一樣，以($\frac{1}{17}$，$\frac{1}{34}$，$\frac{1}{68}$，$\frac{1}{85}$)為例，循環小數的循環節不同，但是所產生圖形卻一樣，經過仔細觀察這幾個小數的循環節，才赫然發現循環節裡的數字完全相同，順序排列也相同，只是第一個起始的數字不一樣。

相同圖形	
$(\frac{1}{3},\frac{1}{12},\frac{1}{30},\frac{1}{48},\frac{1}{75})$	
$(\frac{1}{6},\frac{1}{15},\frac{1}{24},\frac{1}{60},\frac{1}{96})$	
$(\frac{1}{7},\frac{1}{14},\frac{1}{28},\frac{1}{35},\frac{1}{56},\frac{1}{70})$	
$(\frac{1}{17},\frac{1}{34},\frac{1}{68},\frac{1}{85})$	
$(\frac{1}{19},\frac{1}{38},\frac{1}{76},\frac{1}{95})(\frac{1}{49},\frac{1}{98})$	
$(\frac{1}{21},\frac{1}{84})(\frac{1}{31},\frac{1}{62})(\frac{1}{29},\frac{1}{58})$	
$(\frac{1}{13},\frac{1}{52})(\frac{1}{26},\frac{1}{65})(\frac{1}{47},\frac{1}{94})$	
$(\frac{1}{23},\frac{1}{46},\frac{1}{92})$	

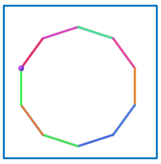
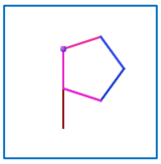
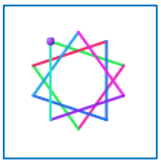
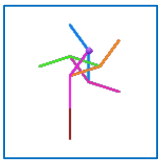
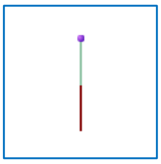
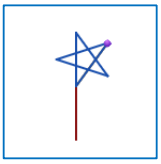
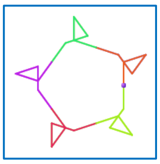
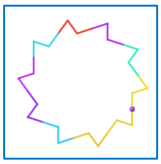
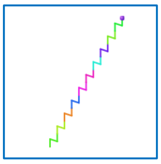
（二）同邊形圖形

經過我們討論分類後，將所產生圖形大致分成單一線段、五邊形、十邊形、長條形，其中有限小數會形成單一線段，相似的圖形也把它們分在一起，其分類後結果如下：

有限小數	
$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{8},\frac{1}{10},\frac{1}{16}$	
$\frac{1}{20},\frac{1}{25},\frac{1}{32},\frac{1}{40},\frac{1}{50},\frac{1}{64}$	
$\frac{1}{80}$	
長條形	
$\frac{1}{18},\frac{1}{27},\frac{1}{43},\frac{1}{61}$	
五邊形	
$\frac{1}{39},\frac{1}{41},\frac{1}{54},\frac{1}{63},\frac{1}{66},\frac{1}{69}$	
$\frac{1}{73},\frac{1}{78},\frac{1}{79},\frac{1}{82},\frac{1}{93},\frac{1}{67}$	
$\frac{1}{71},\frac{1}{89},\frac{1}{97}$	
十邊形	
$\frac{1}{22},\frac{1}{36},\frac{1}{88},\frac{1}{74},\frac{1}{33},\frac{1}{77}$	
$\frac{1}{42},\frac{1}{51},\frac{1}{53},\frac{1}{57},\frac{1}{81},\frac{1}{91}$	

$\frac{1}{37},\frac{1}{44},\frac{1}{55},\frac{1}{59},\frac{1}{83},\frac{1}{86}$	     
$\frac{1}{87}$	

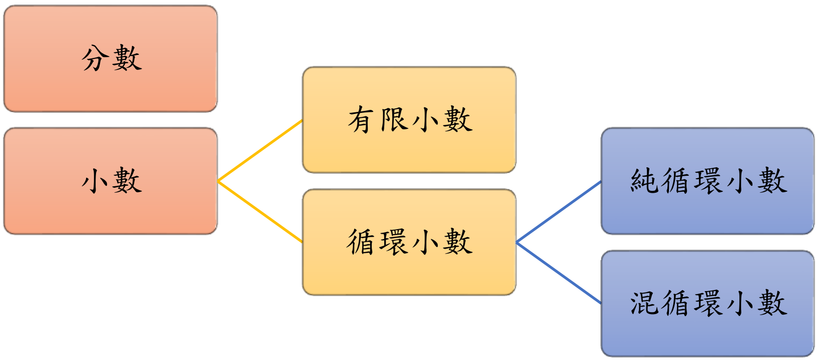
分類後，我們除了觀察到圖形複雜程度，是因為循環節的位數多寡所造成外，我們選擇了五種類型的圖形作比較，試著找出會產生五種類型圖形的原因。可以發現循環節的數字和的個位數為1,3,7,9等數字時，是十邊形；循環節的數字和的個位數為2,4,6,8等數字時，是五邊形；循環節的數字和的個位數為5時，是對稱圖形；循環節的數字和的個位數為0時，是長條形。

圖形					
循環小數	$\frac{1}{9}=0.\overline{1}$	$\frac{1}{45}=0.0\overline{2}$	$\frac{1}{3}=0.\overline{3}$	$\frac{1}{54}=0.01\overline{851}$	$\frac{1}{18}=0.0\overline{5}$
循環節 數字和	1	2	3	14	5
圖形					
循環小數	$\frac{1}{6}=0.1\overline{6}$	$\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$	$\frac{1}{41}=0.\overline{02439}$	$\frac{1}{37}=0.\overline{027}$	$\frac{1}{27}=0.\overline{037}$
循環節 數字和	6	27	18	9	10

這是因為循環節的數字和代表畫完一個循環節所轉的角度，如$\frac{1}{54}$，它的小數是$0.01\overline{851}$，$8+5+1=14$，每次畫一次循環節轉動$36°*14=504°$，必須畫5次，轉動$2520°(360°*7)$，才能繞回原點。最特別的就是循環節數字和的個位數是0的圖形，因為每個循環節畫完，它的方向就朝向0°方向，所以永遠不可能回頭，只能一路走下去，形成一個長條圖。

伍、研究結果

一、所有分數轉化成循環小數：



(一)有限小數：一個分數$\frac{1}{a}$，a為界於2~100的正整數。分母 a 除了2和5的因數外，沒有其他的質因數。當 a=2,4,5,8,10,16,20,25,32,40,50,64,80時，就可以化成有限小數。

(二)循環小數：一個分數$\frac{1}{a}$除了化成有限小數外，其餘分數$\frac{1}{b}$，b為界於1~100的正整數。當分母 b 不是2,4,5,8,10,16,20,25,32,40,50,64,80時，皆能化成循環小數。

1.純循環小數：從小數部分第一位開始的循環小數，稱為純循環小數。如下表:

分數	分母因數分解	化成小數	分數	分母因數分解	化成小數
$\frac{1}{3}$	3	$0.\overline{3}$	$\frac{1}{51}$	3*17	$0.\overline{0196078431372549}$
$\frac{1}{7}$	7	$0.\overline{142857}$	$\frac{1}{53}$	53	$0.\overline{0188679245283}$
$\frac{1}{9}$	3*3	$0.\overline{1}$	$\frac{1}{57}$	3*19	$0.\overline{017543859649122807}$
$\frac{1}{11}$	11	$0.\overline{09}$	$\frac{1}{59}$	59	$0.\overline{\mathrm{C}}$
$\frac{1}{13}$	13	$0.\overline{076923}$	$\frac{1}{61}$	61	$0.\overline{\mathrm{D}}$
$\frac{1}{17}$	17	$0.\overline{0588235294117647}$	$\frac{1}{63}$	3*3*7	$0.\overline{015873}$
$\frac{1}{19}$	19	$0.\overline{052631578947368421}$	$\frac{1}{67}$	67	$0.\overline{\mathrm{E}}$
$\frac{1}{21}$	3*7	$0.\overline{047619}$	$\frac{1}{69}$	3*23	$0.\overline{0144927536231884057971}$
$\frac{1}{23}$	23	$0.\overline{0434782608695652173913}$	$\frac{1}{71}$	71	$0.\overline{\mathrm{F}}$

$\frac{1}{27}$	3*3*3	$0.\overline{037}$	$\frac{1}{73}$	73	$0.\overline{01369863}$
$\frac{1}{29}$	29	$0.\overline{0344827586206896551724137931}$	$\frac{1}{77}$	7*11	$0.\overline{012987}$
$\frac{1}{31}$	31	$0.\overline{032258064516129}$	$\frac{1}{79}$	79	$0.\overline{0126582278481}$
$\frac{1}{33}$	3*11	$0.\overline{03}$	$\frac{1}{81}$	3*3*3*3	$0.\overline{012345679}$
$\frac{1}{37}$	37	$0.\overline{027}$	$\frac{1}{83}$	83	$0.\overline{G}$
$\frac{1}{39}$	3*13	$0.\overline{025641}$	$\frac{1}{87}$	3*29	$0.\overline{0114942528735632183908045977}$
$\frac{1}{41}$	41	$0.\overline{02439}$	$\frac{1}{89}$	89	$0.\overline{H}$
$\frac{1}{43}$	43	$0.\overline{023255813953488372093}$	$\frac{1}{91}$	7*13	$0.\overline{010989}$
$\frac{1}{47}$	47	$0.\overline{A}$	$\frac{1}{93}$	3*31	$0.\overline{010752688172043}$
$\frac{1}{49}$	7*7	$0.\overline{B}$	$\frac{1}{97}$	97	$0.\overline{K}$
			$\frac{1}{99}$	3*3*11	$0.\overline{01}$
$\overline{A}$	0212765957446808510638297872340425531914893617				
$\overline{B}$	020408163265306122448979591836734693877551				
$\overline{C}$	0169491525423728813559322033898305084745762711864406779661				
$\overline{D}$	016393442622950819672131147540983606557377049180327868852459				
$\overline{E}$	014925373134328358208955223880597				
$\overline{F}$	01408450704225352112676056338028169				
$\overline{G}$	01204819277108433734939759036144578313253				
$\overline{H}$	01123595505617977528089887640449438202247191				
$\overline{K}$	010309278350515463917525773195876288659793814432989690721649484536082474226804123711340206185567				

2.混循環小數：循環小數與非循環小數混合而成的小數，稱為混循環小數。如下表：

分數	分母因式分解	化成小數	分數	分母因式分解	化成小數
$\frac{1}{6}$	2*3	$0.1\overline{6}$	$\frac{1}{58}$	2*29	$0.0\overline{1724137931034482758620689655}$
$\frac{1}{12}$	2*2*3	$0.08\overline{3}$	$\frac{1}{60}$	2*2*3*5	$0.01\overline{6}$
$\frac{1}{14}$	2*7	$0.0\overline{714285}$	$\frac{1}{62}$	2*31	$0.0\overline{161290322580645}$
$\frac{1}{15}$	3*5	$0.0\overline{6}$	$\frac{1}{65}$	5*13	$0.0\overline{153846}$
$\frac{1}{18}$	2*3*3	$0.0\overline{5}$	$\frac{1}{66}$	2*3*11	$0.0\overline{15}$
$\frac{1}{22}$	2*11	$0.0\overline{45}$	$\frac{1}{68}$	2*2*17	$0.01\overline{4705882352941176}$
$\frac{1}{24}$	2*2*2*3	$0.041\overline{6}$	$\frac{1}{70}$	2*5*7	$0.0\overline{142857}$
$\frac{1}{26}$	2*13	$0.0\overline{384615}$	$\frac{1}{72}$	2*2*2*3*3	$0.013\overline{8}$
$\frac{1}{28}$	2*2*7	$0.03\overline{571428}$	$\frac{1}{74}$	2*37	$0.0\overline{135}$
$\frac{1}{30}$	2*3*5	$0.0\overline{3}$	$\frac{1}{75}$	3*5*5	$0.01\overline{3}$
$\frac{1}{34}$	2*17	$0.0\overline{2941176470588235}$	$\frac{1}{76}$	2*2*19	$0.01\overline{315789473684210526}$
$\frac{1}{35}$	5*7	$0.0\overline{285714}$	$\frac{1}{78}$	2*3*13	$0.01\overline{28205}$
$\frac{1}{36}$	2*2*3*3	$0.02\overline{7}$	$\frac{1}{82}$	2*41	$0.0\overline{12195}$
$\frac{1}{38}$	2*19	$0.0\overline{263157894736842105}$	$\frac{1}{84}$	2*2*3*7	$0.01\overline{190476}$
$\frac{1}{42}$	2*3*7	$0.0\overline{238095}$	$\frac{1}{85}$	5*13	$0.0\overline{011764588235294}$
$\frac{1}{44}$	2*2*11	$0.02\overline{27}$	$\frac{1}{86}$	2*43	$0.0\overline{116279069767441860465}$
$\frac{1}{45}$	3*3*5	$0.0\overline{2}$	$\frac{1}{88}$	2*2*2*11	$0.011\overline{36}$
$\frac{1}{46}$	2*23	$0.0\overline{2173913043478260869565}$	$\frac{1}{90}$	2*3*3*5	$0.0\overline{1}$
$\frac{1}{48}$	2*2*2*2*3	$0.0208\overline{3}$	$\frac{1}{92}$	2*2*23	$0.01\overline{0869565217391304347826}$

$\frac{1}{52}$	2*2*13	$0.01\overline{923076}$	$\frac{1}{94}$	2*47	$0.0\overline{\text{J}}$
$\frac{1}{54}$	2*3*3*3	$0.01\overline{851}$	$\frac{1}{95}$	5*19	$0.0\overline{105263157894736842}$
$\frac{1}{55}$	5*11	$0.0\overline{18}$	$\frac{1}{96}$	2*2*2*2*2*3	$0.01041\overline{6}$
$\frac{1}{56}$	2*2*2*7	$0.017\overline{857142}$	$\frac{1}{98}$	2*7*7	$0.\overline{\text{M}}$
$\overline{\text{J}}$	1063829787234042553191489361702127659574468085				
$\overline{\text{M}}$	1020408163265306122448979591836734693877551				

二、分數轉化成循環小數後的規律性

(一)循環小數的循環節數

如果分數$\frac{1}{k}$可化為循環小數，則分數$\frac{1}{2^m*5^n*k}$與$\frac{1}{k}$的循環節長度一定會一樣，即將分母乘以2的m 次方或是5的 n 次方，其對應的循環節位數不變。以$\frac{1}{17}$為例，$\frac{1}{17}=0.\overline{0588235294117647}$，循環節的長度為16，我們可以知道：

	分母乘以2^m*5^n	分母因式分解	化成小數	循環節長度
$\frac{1}{34}$	乘以2的一次方	$\frac{1}{17*2}$	$0.0\overline{2941176470588235}$	循環節的長度為16
$\frac{1}{68}$	乘以2的二次方	$\frac{1}{17*4}$	$0.01\overline{4705882352941176}$	循環節的長度為16
$\frac{1}{85}$	乘以5的一次方	$\frac{1}{17*5}$	$0.0\overline{1176470588235294}$	循環節的長度為16

(二)混循環小數中未循環的位數

如果分數$\frac{1}{k}$可化為循環小數，則分數$\frac{1}{2^m*5^n*k}$轉換成小數時，$\max(m,n)$的數量就是混循環小數中未循環的位數。

1.當分母出現2^m*5^n，未循環的小數位數就為增加$\max(m,n)$位，依此類推。如下表為例：

分數	分母因數分解	化成小數	m	n	未循環位數
$\frac{1}{24}$	2*2*2*3	$0.041\overline{6}$	3	0	3
$\frac{1}{60}$	2*2*3*5	$0.01\overline{6}$	2	1	2

$\frac{1}{75}$	3*5*5	$0.01\overline{3}$	0	2	2
$\frac{1}{96}$	2*2*2*2*2*3	$0.01041\overline{6}$	5	0	5

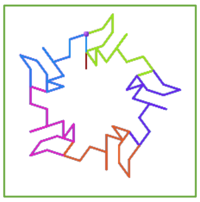
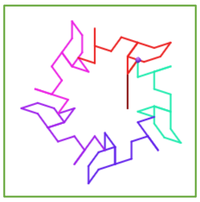
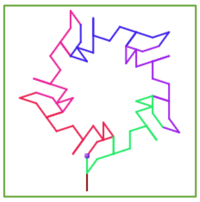
2.當分母$2^m * 5^n$出現一組10，未循環的小數位數就為增加1位，依此類推。如下表為例：

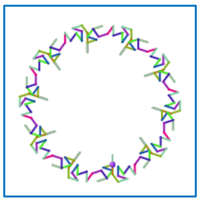
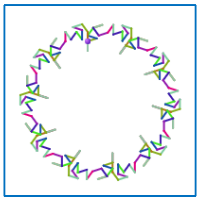
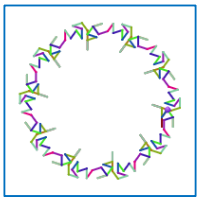
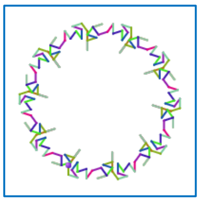
分數	化成小數	未循環位數	分數	化成小數	未循環位數
$\frac{1}{3}$	$0.\overline{3}$	0	$\frac{1}{3*10}$	$0.0\overline{3}$	1
$\frac{1}{6}$	$0.1\overline{6}$	1	$\frac{1}{6*10}$	$0.01\overline{6}$	2
$\frac{1}{7}$	$0.\overline{142857}$	0	$\frac{1}{7*10}$	$0.0\overline{142857}$	1
$\frac{1}{9}$	$0.\overline{1}$	0	$\frac{1}{9*10}$	$0.0\overline{1}$	1

三、循環小數轉換成圖形後的對應關係：

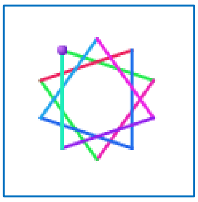
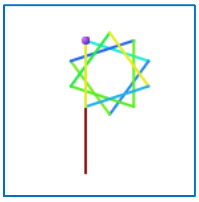
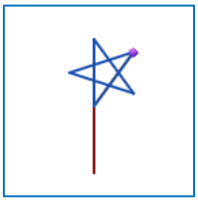
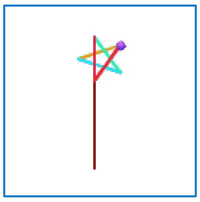
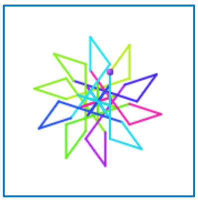
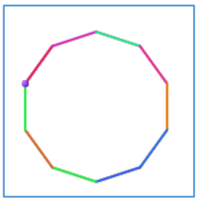
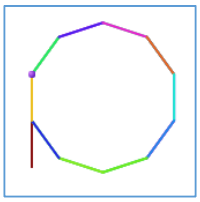
(一)相同圖形

1.分母乘以2的 m 次方或5的 n 次方：

分數	分母因式分解	化成小數	循環節數字排序	圖形
$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{17}$	$0.\overline{0588235294117647}$	0→5→8→8→2→3→5→2→9→4→1→1→7→6→4→7	
$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{17*2}$	$0.0\overline{2941176470588235}$	2→9→4→1→1→7→6→4→7→0→5→8→8→2→3→5	
$\frac{1}{68}$	$\frac{1}{17*4}$	$0.01\overline{4705882352941176}$	4→7→0→5→8→8→2→3→5→2→9→4→1→1→7→6	
$\frac{1}{85}$	$\frac{1}{17*5}$	$0.0\overline{1176470588235294}$	1→1→7→6→4→7→0→5→8→8→2→3→5→2→9→4	

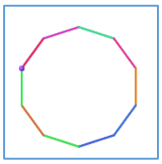
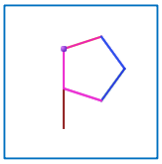
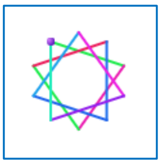
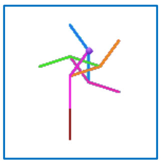
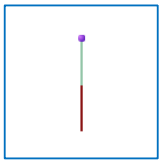
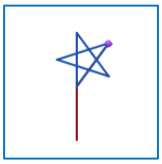
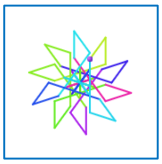
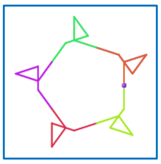
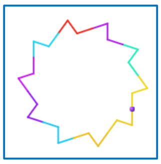
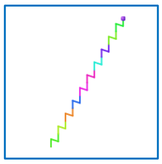
分數	分母因式分解	化成小數	循環節數字排序	圖形
$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{19}$	$0.\overline{052631578947368421}$	0→5→2→6→3→1 →5→7→8→9→4 →7→3→6→8→4 →2→1	
$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{17*2}$	$0.\overline{263157894736842105}$	2→6→3→1→5→7 →8→9→4→7→3 →6→8→4→2→1 →0→5	
$\frac{1}{76}$	$\frac{1}{19*4}$	$0.\overline{315789473684210526}$	3→1→5→7→8→9 →4→7→3→6→8 →4→2→1→0→5 →2→6	
$\frac{1}{95}$	$\frac{1}{19*5}$	$0.\overline{105263157894736842}$	1→0→5→2→6→3 →1→5→7→8→9 →4→7→3→6→8 →4→2	

2.分母乘以10：★如果出現數字0，朝原方向畫一單位長度★

原分數	化成小數	圖形	分數	化成小數	圖形
$\frac{1}{3}$	$0.\overline{3}$		$\frac{1}{3*10}$	$0.0\overline{3}$	
$\frac{1}{6}$	$0.1\overline{6}$		$\frac{1}{6*10}$	$0.01\overline{6}$	
$\frac{1}{7}$	$0.\overline{142857}$		$\frac{1}{7*10}$	$0.0\overline{142857}$	
$\frac{1}{9}$	$0.\overline{1}$		$\frac{1}{9*10}$	$0.0\overline{1}$	

(二)同邊形圖形

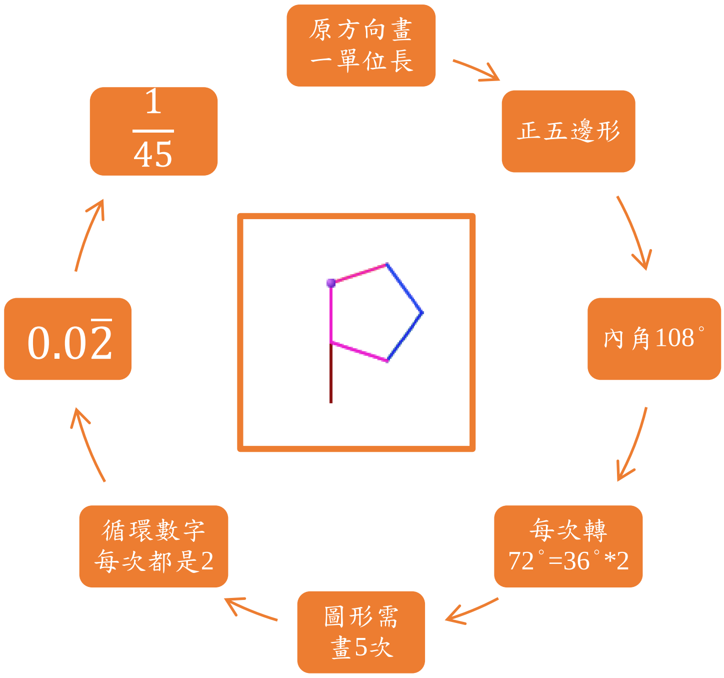
圖形的邊形與循環節的數字和的個位數值有關，整理規則後可以得到──如果循環節數字和的個位數是「1、3、7、9」和10沒有共同的因數，就只能乖乖畫10次，才能回到原點；如果是偶數2、4、6、8，只要畫5次就能回到原點；而個位數為5時，則只要2次即可；如果個位數是0，因為每個循環節畫完，它的方向就朝向0°方向，所以永遠不可能回頭，只能一路走下去，形成一個長條圖。

圖形					
邊數	10	5	10	5	單一直線
循環小數	$\frac{1}{9}=0.\overline{1}$	$\frac{1}{45}=0.0\overline{2}$	$\frac{1}{3}=0.\overline{3}$	$\frac{1}{54}=0.01\overline{851}$	$\frac{1}{18}=0.\overline{05}$
循環節數字和	1	2	3	14	5
圖形					
邊數	5	10	5	10	長條圖
循環小數	$\frac{1}{6}=0.1\overline{6}$	$\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$	$\frac{1}{41}=0.\overline{02439}$	$\frac{1}{37}=0.\overline{027}$	$\frac{1}{27}=0.0\overline{37}$
循環節數字和	6	7	18	9	10

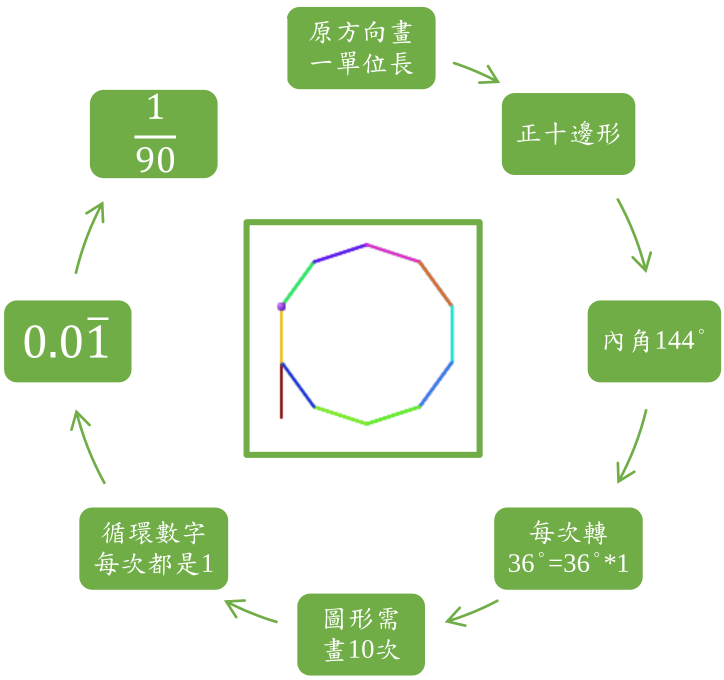
四、透過圖形反推循環小數

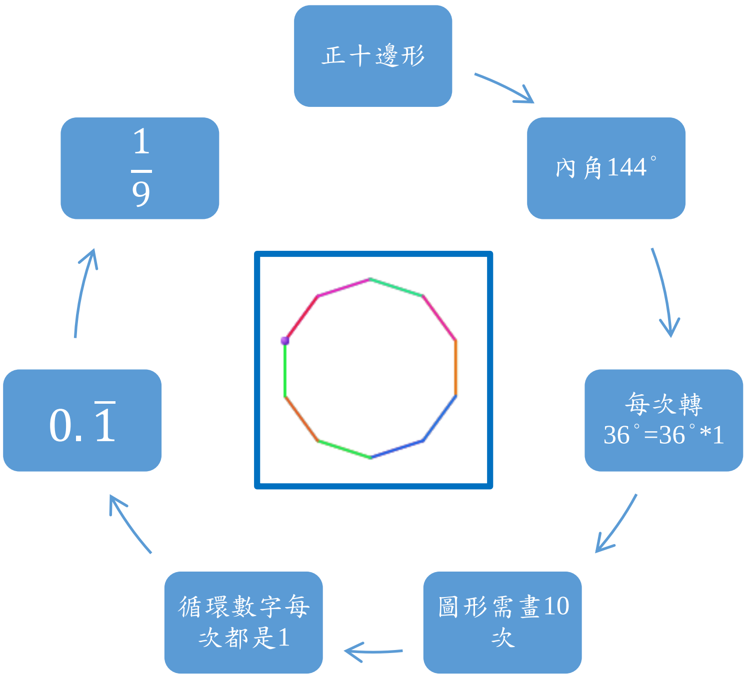
在知道了轉化成圖形的規則後，試著反過來想想看，如果一個循環小數朝原方向畫一個單位長，代表小數點後第一位數字是0，接著再畫出正五邊形，而正五邊形的每一個內角都是108°，代表每次固定轉36°×2=72°，要繞回360°就要轉5次，根據研究結果這個循環小數是$0.0\overline{2}$，即$\frac{1}{45}$。運用同樣的規則，我們也能推出正十邊形對應的循環小數。

(一)正五邊形


原方向畫
一單位長
正五邊形
內角108°
每次轉
72°=36°*2
圖形需
畫5次
循環數字
每次都是2
0.0$\overline{2}$
$\frac{1}{45}$

(二)正十邊形


原方向畫
一單位長
正十邊形
內角144°
每次轉
36°=36°*1
圖形需
畫10次
循環數字
每次都是1
0.0$\overline{1}$
$\frac{1}{90}$



陸、討論

一、要如何將分數轉化成小數?

利用計算機的結果會發現除了可化成有限小數的分數，剩下的分數計算出來的小數位數不會超11位小數，這個小數也有可能是四捨五入法取到第11位的結果，因此，我們放棄使用計算機做運算，請老師引導如何使用傳統紙筆方式將分數轉化成循環小數，四個人分工合作完成。

一開始，分母數字比較小時，計算到商的數字一直不斷重複時就可以停止，但當進入分母數字比較大的時，發現不能以「商的數字重複」作為標準，必須在計算到餘數是1時，才可以停止計算。如果遇到算不出來的狀況，我們會先倆倆互相幫對方重新檢查，還是算不出來，才會尋求老師的協助。

二、這些分數要如何分類?

（一）二分法：利用自然課學過的「二分法」，有相同特徵的分數放在同一類，不相同的分數放在另一類，可以用以下兩種方式進行分類。

1.「可以除盡」和「不可以除盡」的分數。

2.「從小數點以下第一位開始循環」和「不從小數點以下第一位開始循環」的循環小數。

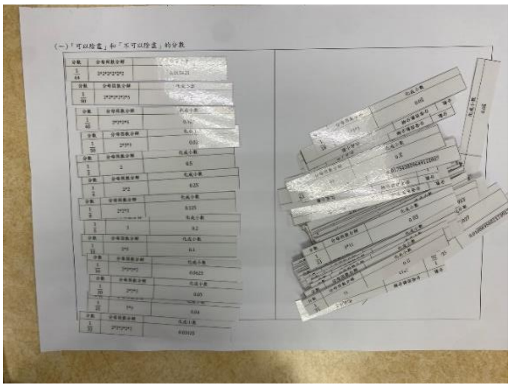
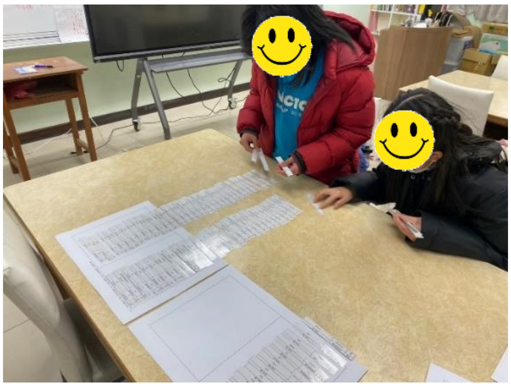
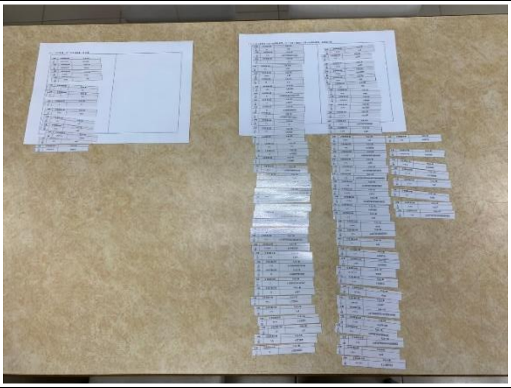
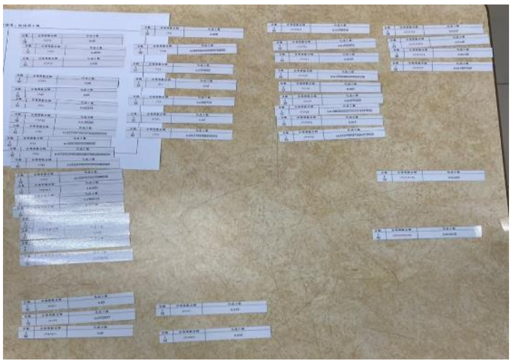
（二）混循環小數未循環的位數：根據「因數分解中2和5出現的次數」進行分類。

1.從小數點以下第二位開始循環。

2.從小數點以下第三位開始循環。

3.從小數點以下第四位開始循環。

4.從小數點以下第五位開始循環。

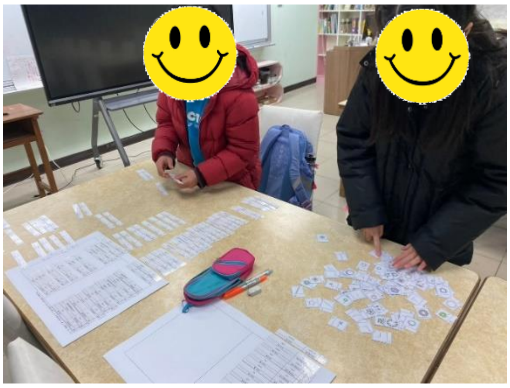
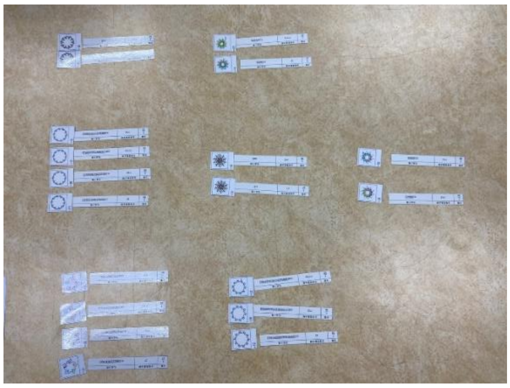
三、將程式軟體 Scratch 畫出的圖形與循環小數做對應?

（一）根據圖形來做分類：可以分出「相同圖形」和「同邊形圖形」兩大類。

（二）圖形分類對應循環小數：只看圖形分類比較容易，要再加入循環小數進行分類，我們發現「同邊形圖形」不容易看出規律，「相同圖形」可以明顯找到規律。這些相同圖形

對應到的循環小數差別只有循環的數字排列順序不同，而且同一組分母的公因數會是2或5的次方。



四、能不能利用圖形反推回去循環小數?

利用紙筆畫出十邊形，對應我們的研究結果「循環節數字和的個位數是1、3、7、9，形成十邊形」，表示圖形需要畫10次。「出現數字1，就順時針旋轉36°後，畫一單位長度」，表示每次要轉$360° \div 10 = 36°$，循環數字每次都是1。根據「所有分數轉化成小數」的計算結果，這個循環小數會是$\frac{1}{9} = 0.\overline{1}$，$\frac{1}{90} = 0.0\overline{1}$(出現數字0，要先朝原方向畫一單位長度)。

柒、結論

一、所有的分數都可以轉化成小數：對任何一個整數，當它被正整數 a 除時，它的餘數可能為0、1、2、3...、(a - 1)，可以知道一個分數化作的小數一定會是有限小數或循環小數。

二、分數化成有限小數、純循環小數、混循環小數的差別：

（一）有限小數：如果分母 a 除了2和5的因數外，沒有其他的因數，會化成有限小數。

（二）純循環小數：如果分母 b 與2和5沒有共同的因數，則會化成純循環小數 。

（三）混循環小數：如果分母 k 除了2或5，還有其他的因數時，則會化成混循環小數。

三、循環小數的循環節：如果分數$\frac{1}{k}$可化為循環小數，則分數 $\frac{1}{2^m*5^n*k}$ 與 $\frac{1}{k}$ 的循環節長度一定會一樣，如：$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{14}$，$\frac{1}{28}$，$\frac{1}{35}$，$\frac{1}{56}$，$\frac{1}{70}$，循環節位數都是6。

四、混循環小數未循環的位數:如果分數$\frac{1}{k}$可化為循環小數，則分數$\frac{1}{2^m*5^n*k}$轉換成小數時，$\max(m,n)$的數量就是混循環小數中未循環的位數。

（一）當$m>n$時，就是分母因數分解後，2的數量比5的數量多，未循環位數為m位，循環小數從小數點以下第$m+1$位開始循環，如:$\frac{1}{72}=\frac{1}{2*2*2*3*3}=0.013\overline{8}$，從小數點以下第4位開始循環;$\frac{1}{60}=\frac{1}{2*2*3*5}=0.01\overline{6}$，從小數點以下第3位開始循環。

（二）當$m<n$時，就是分母因數分解後，5的數量比2的數量多，未循環位數為n位，循環小數從小數點以下第$n+1$位開始循環，如:$\frac{1}{15}=\frac{1}{3*5}=0.0\overline{6}$，從小數點以下第2位開始循環;$\frac{1}{75}=\frac{1}{3*5*5}=0.01\overline{3}$從小數點以下第3位開始循環。

（三）當$m=n$時，就是分母因數分解後，2和5的數量相同，會出現m組10，未循環的小數

位數就為增加m位，如:$\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$為純循環小數，$\frac{1}{70}=\frac{1}{2*5*7}=0.0\overline{142857}$，從小數點以下第2位開始循環，$\frac{1}{700}=\frac{1}{2*2*5*5*7}=0.00\overline{142857}$，從小數點以下第3位開始循環，依此類推。

五、循環小數轉化成圖形：利用程式軟體 Scratch 來畫圖形，將360°依照數字0~9，順時針分成十等份，規則如下表。

數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
角度	0°	36°	72°	108°	144°	180°	216°	252°	288°	324°

（一）相同圖形：循環節數字首碼不同，但排序相同時，所產生的圖形仍會一樣。

（二）同邊形圖形：圖形的邊形與循環節數字和的個位數值有關。

1.循環節數字和的個位數是「1、3、7、9」，形成十邊形，圖形會畫10次。

2.循環節數字和的個位數是「2、4、6、8」，形成五邊形，圖形會轉5次。

3.循環節數字和的個位數是「5」，形成單一直線，圖形會轉2次。

4.循環節數字和的個位數是「0」，形成一個長條圖。

捌、參考資料及其他

一、康明昌,循環小數,數學傳播,25卷3期(民90年9月),55-62。

二、葉均承、蘇麗敏,循環小數的迴響,數學傳播,27卷2期(民92年6月),51-54。

三、王湘君,有趣的循環小數,數學傳播〔討論類〕,90-93。

四、數感實驗室 Numeracy Lab,數感生活循環小數的獨特花紋。

五、閱讀數學／視覺化的小數(上)。

六、閱讀數學／視覺化的小數(下)。

【評語】080401

1. 本作品分析循環小數，結合既有的「數字轉換成圖像」，配合線段及角度，將一圈 360 度分成 10 等份，分別對應數字 0～9，運用 Scratch 程式將循環小數圖像化、並觀察圖形及數字的對應關係，同時找出其中的規律，值得肯定。

2. 作者從有限的資料中所觀察到的結論，若能給予較為嚴謹的說明，將更具說服力、亦能更強化本研究的數學性。

3. 嘗試「將循環小數利用對應關係轉化成美麗的圖形、並利用循環小數的特質將這些美麗的圖形進行歸類」是本研究的亮點。

作品海報

循環小數萬花筒

研究動機

記得一開始在學分數時，在課堂中常聽到老師用「一半」來舉例，代表一個PIZZA分成兩份，就是「二分之一」，也可以說是「0.5」，因此，對於小數有了基本的認識。這學期開始學了分數和小數的乘法運算，也在第五單元「整數、小數除以整數」中，老師告訴我們「有些分數是可以換成小數的，但有些分數卻無法用小數表示」，讓我們心中產生疑問「為什麼所有的分數不能全部都換成小數?」。原來老師說無法用小數表示的分數，利用除法運算會產生「循環小數」，在小學階段我們還不會學到，所以決定挑戰自己計算出「循環小數」。

偶然在臉書上看到一篇文章，數學家馬特·亨德森發明一種方式，可以將數字轉換成圖像。他將每個數字，化成特定角度的線條，一連串的數字就會產生一些特殊圖形，這讓我們想到資訊課時，老師在教授Scratch的迴圈功能時，結合畫筆功能可以畫出一幅幅對稱圖形，在與老師討論後，老師說數學中數字有規律性的，就是循環小數，建議我們可以針對循環小數做個研究，看看如果將循環小數運用馬特・亨德森的方式，可以產生什麼樣的圖形。

研究目的

一、所有分數轉化成循環小數。
二、分數轉化成循環小數後的規律性。
三、循環小數轉化成圖形後的對應關係。
四、透過圖形反推循環小數。

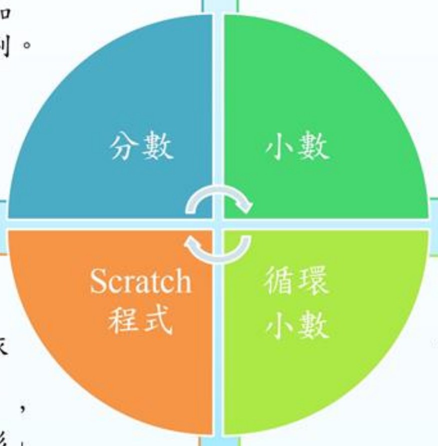
研究設備與器材

一、計算紙。
二、電腦與Scratch程式軟體。

研究過程與方法

• 所有的分數皆能轉化成小數，可以分為「除得盡的分數」和「除不盡的分數」等兩大類別。

• 除得盡的分數可以轉化成「有限小數」，除不盡的分數可以轉化成「純循環小數」、「混循環小數」等三大類別。



• 將數字轉換成圖像，將360˚依照數字0~9，分成十等份，順時針旋轉「36˚×對應的數字」，這些圖像可以分為「相同圖形」和「同邊形圖形」等兩大類別。

• 循環小數包含「未循環數字」和「循環節」，分母因數分解後，2和5出現的次數會決定這個循環小數的類別。

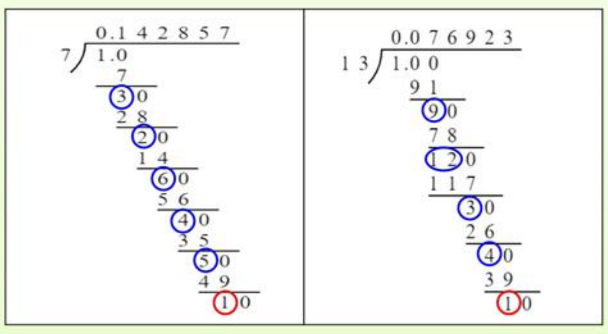
一、所有分數轉化成循環小數

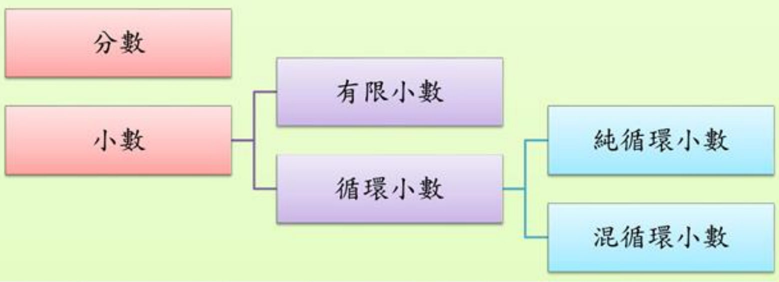
因為計算機在計算時的小數位數有限，我們透過傳統紙筆計算的方式，運用分數的定義$\frac{b}{a}$=b÷a，分別計算$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$…、$\frac{1}{99}$。計算時遇到無法整除，則計算至第二個循環節開始產生時。

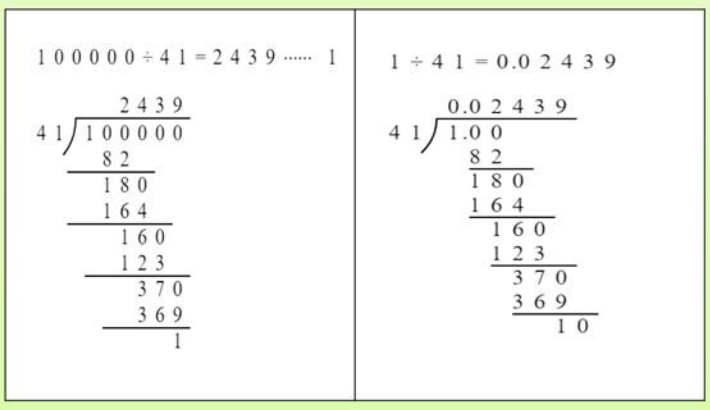
(一)有限小數：一個分數$\frac{1}{a}$，a為界於2~100的正整數。分母a除了2和5的因數外，沒有其他的質因數。a=2,4,5,8,10,16,20,25,32,40,50,64,80時，就可以化成有限小數。

(二)循環小數：一個分數$\frac{1}{a}$除了化成有限小數外，其餘分數$\frac{1}{b}$，b為界於1~100的正整數。當分母b不是2,4,5,8,10,16,20,25,32,40,50,64,80時，皆能化成循環小數。
1.純循環小數：從小數部分第一位開始的循環小數，稱為純循環小數。
2.混循環小數：循環小數與非循環小數混合而成的小數，稱為混循環小數。

(三)在計算分數$\frac{1}{c}$化成小數時，c不含2或5的因數時，當除到餘數剩1時，便開始進入循環，因此，若c是10^n-1的因數，則$\frac{1}{c}$的循環節有n位，以$\frac{1}{41}$為例，
$10^5-1=99999=3*3*41*271$，所以41是10^5-1的因數，
而$\frac{10^5-1}{41}=2439$，則$\frac{1}{41}=2439*\frac{1}{10^5-1}=2439*0.\overline{00001}=0.\overline{02439}$。







分數	分母因數分解	化成小數	分數	分母因數分解	化成小數
$\frac{1}{3}$	3	$0.\overline{3}$	$\frac{1}{66}$	2*3*11	$0.0\overline{15}$
$\frac{1}{7}$	7	$0.\overline{142857}$	$\frac{1}{68}$	2*2*17	$0.01\overline{4705882352941176}$
$\frac{1}{9}$	3*3	$0.\overline{1}$	$\frac{1}{70}$	2*5*7	$0.0\overline{142857}$
$\frac{1}{11}$	11	$0.\overline{09}$	$\frac{1}{72}$	2*2*2*3*3	$0.013\overline{8}$
$\frac{1}{13}$	13	$0.\overline{076923}$	$\frac{1}{74}$	2*37	$0.0\overline{135}$

二、分數轉化成循環小數的規律性

(一)循環小數的循環節數

如果分數$\frac{1}{k}$可化為循環小數，則分數$\frac{1}{2^m*5^n*k}$與$\frac{1}{k}$的循環節長度一定會一樣，即將分母乘以2的m次方或是5的n次方，其對應的循環節位數不變。以$\frac{1}{17}$為例，$\frac{1}{17}=0.\overline{0588235294117647}$，循環節的長度為16，我們可以知道：

	分母乘以2^m*5^n	分母因式分解	化成小數	循環節長度
$\frac{1}{34}$	乘以2的一次方	$\frac{1}{17*2}$	$0.0\overline{2941176470588235}$	循環節的長度為16
$\frac{1}{68}$	乘以2的二次方	$\frac{1}{17*4}$	$0.01\overline{4705882352941176}$	循環節的長度為16
$\frac{1}{85}$	乘以5的一次方	$\frac{1}{17*5}$	$0.0\overline{1176470588235294}$	循環節的長度為16

(二)混循環小數中未循環的位數

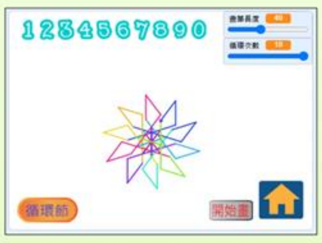
如果分數$\frac{1}{k}$可化為循環小數，則分數$\frac{1}{2^m*5^n*k}$轉換成小數時，$\max(m,n)$的數量就是混循環小數中未循環的位數。
1.當分母出現2^m*5^n，未循環的小數位數就為增加$\max(m,n)$位，依此類推。
2.當分母2^m*5^n出現一組10，未循環的小數位數就為增加1位，依此類推。

分數	分母因數分解	化成小數	m	n	未循環位數
$\frac{1}{24}$	2*2*2*3	$0.041\overline{6}$	3	0	3
$\frac{1}{60}$	2*2*3*5	$0.01\overline{6}$	2	1	2
$\frac{1}{75}$	3*5*5	$0.01\overline{3}$	0	2	2
$\frac{1}{96}$	2*2*2*2*2*3	$0.01041\overline{6}$	5	0	5

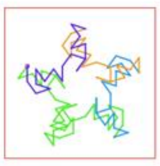
分數	化成小數	未循環位數	分數	化成小數	未循環位數
$\frac{1}{3}$	$0.\overline{3}$	0	$\frac{1}{3*10}$	$0.0\overline{3}$	1
$\frac{1}{6}$	$0.1\overline{6}$	1	$\frac{1}{6*10}$	$0.01\overline{6}$	2
$\frac{1}{7}$	$0.\overline{142857}$	0	$\frac{1}{7*10}$	$0.0\overline{142857}$	1
$\frac{1}{9}$	$0.\overline{1}$	0	$\frac{1}{9*10}$	$0.0\overline{1}$	1

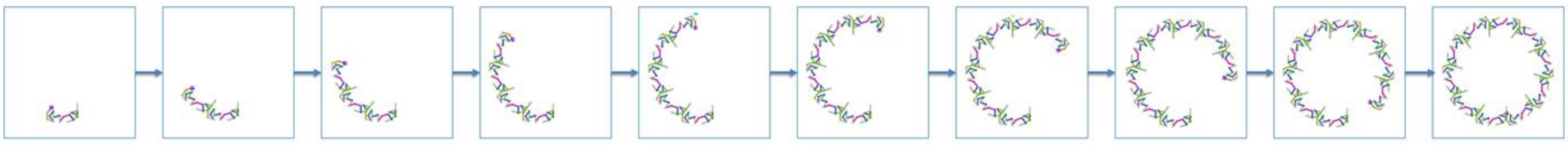
三、循環小數轉換成圖形後的對應關係

我們參考數學家馬特·亨德森的方法，將數字轉換成圖像，將360°，依照數字0~9，順時針分成十等份，如果出現數字0，朝原方向畫一單位長度，如果出現數字1，就順時針旋轉36°後，畫一單位長度，以此類推。
不過，如果用手畫曠日廢時，精準度也有待商榷，畫筆顏色也無法多樣性，因此我們決定利用這學期學到的程式軟體Scratch來畫圖形。我們運用畫筆功能，並將數字圖形植入程式，讓程式收到0~9數字指令時，依照指定角度畫出一定長度線段；在畫循環節部分，我們運用迴圈程式積木，只要輸入循環節數字，並設定好重複次數後，程式就很快幫我們畫出相對應圖形。



過程中，發生一個超出預期的情況，當循環節的位數超過16位時，所產生圖形不如我們想像中複雜，於是我們用循環節有18位的$\frac{1}{19}$做實驗，分別用迴圈方式及手動輸入方式進行測試，結果圖形果然不相同。經過討論，應該和用電腦計算機程式一樣，最多只能計算16位數，所以後續循環節位數超過16位的，我們都採用手動輸入方式。

	$\frac{1}{19}$循環節超過16位(18位)，圖形錯誤，發現原因是因為循環節的和為81，正常應該是十邊形。		$\frac{1}{17}$的循環節是16位數，圖形沒跑掉，推論應該是計算機最多計算到16位元。



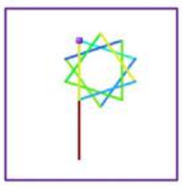
$\frac{1}{19}$的手動輸入分解圖

(一)相同圖形

1.分母乘以2的m次方或5的n次方：

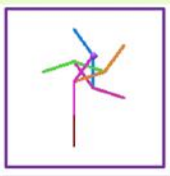
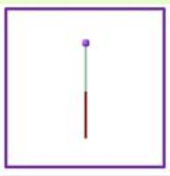
分數	分母因式分解	化成小數	循環節數字排序	圖形
$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{17}$	$0.\overline{0588235294117647}$	0→5→8→8→2→3→5→2→9→4→1→1→7→6→4→7	
$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{17*2}$	$0.0\overline{2941176470588235}$	2→9→4→1→1→7→6→4→7→0→5→8→8→2→3→5	
$\frac{1}{68}$	$\frac{1}{17*4}$	$0.01\overline{4705882352941176}$	4→7→0→5→8→8→2→3→5→2→9→4→1→1→7→6	
$\frac{1}{85}$	$\frac{1}{17*5}$	$0.0\overline{1176470588235294}$	1→1→7→6→4→7→0→5→8→8→2→3→5→2→9→4	

2.分母乘以10：★如果出現數字0，朝原方向畫一單位長度★

原分數	化成小數	圖形	分數	化成小數	圖形
$\frac{1}{3}$	$0.\overline{3}$		$\frac{1}{3*10}$	$0.0\overline{3}$	
$\frac{1}{6}$	$0.1\overline{6}$		$\frac{1}{6*10}$	$0.01\overline{6}$	
$\frac{1}{7}$	$0.\overline{142857}$		$\frac{1}{7*10}$	$0.0\overline{142857}$	
$\frac{1}{9}$	$0.\overline{1}$		$\frac{1}{9*10}$	$0.0\overline{1}$	

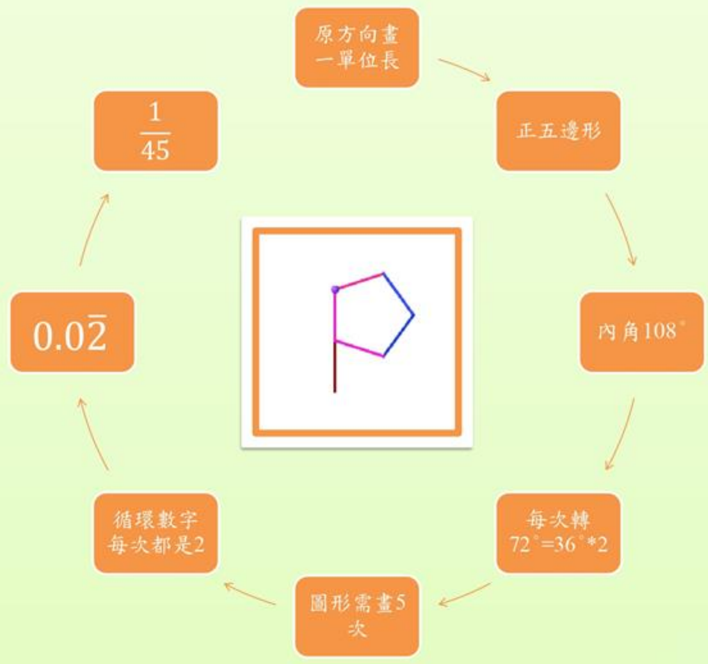
(二)同邊形圖形

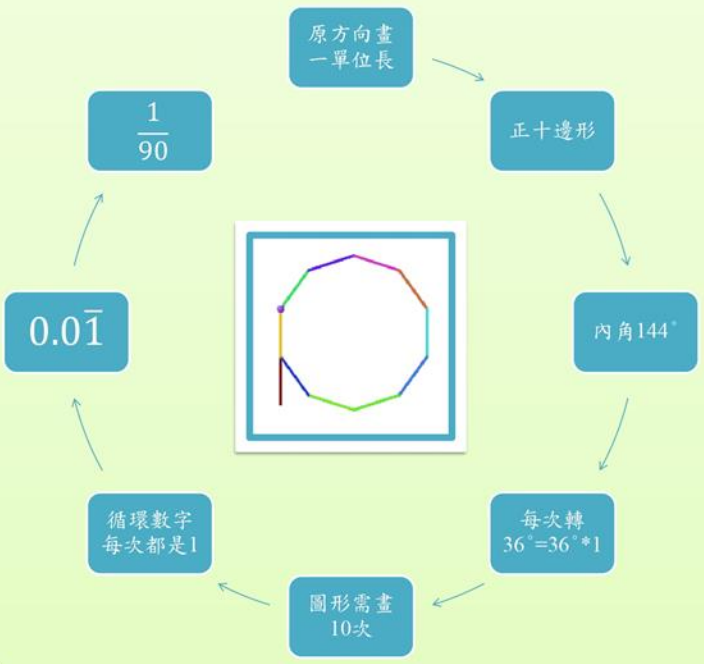
分類後，我們除了觀察到圖形複雜程度，是因為循環節的位數多寡所造成外，我們選擇了五種類型的圖形作比較，試著找出會產生五種類型圖形的原因。可以發現循環節的數字和的個位數為1,3,7,9等數字時，是十邊形；循環節的數字和的個位數為2,4,6,8等數字時，是五邊形；循環節的數字和的個位數為5時，是對稱圖形；循環節的數字和的個位數為0時，是長條形。
整理規則後可以得到──如果循環節數字和的個位數是「1、3、7、9」和10沒有共同的因數，就只能乖乖畫10次，才能回到原點；如果是偶數2、4、6、8，只要畫5次就能回到原點；而個位數為5時，則只要2次即可；如果個位數是0，因為每個循環節畫完，它的方向就朝向0°方向，所以永遠不可能回頭，只能一路走下去，形成一個長條圖。

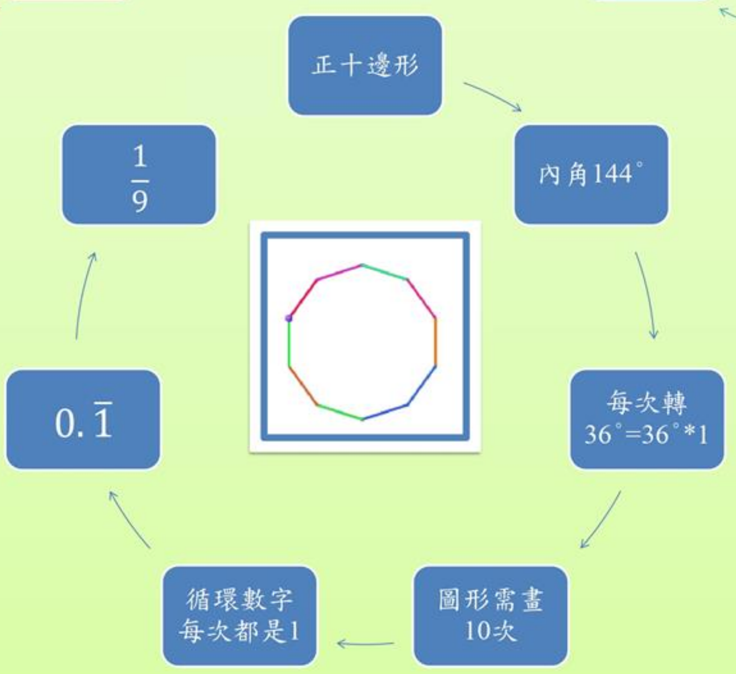
圖形										
邊數	10	5	10	5	單一直線	5	10	5	10	長條圖
循環小數	$\frac{1}{9}=0.\overline{1}$	$\frac{1}{45}=0.0\overline{2}$	$\frac{1}{3}=0.\overline{3}$	$\frac{1}{54}=0.01\overline{851}$	$\frac{1}{18}=0.\overline{05}$	$\frac{1}{6}=0.1\overline{6}$	$\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$	$\frac{1}{41}=0.\overline{02439}$	$\frac{1}{37}=0.\overline{027}$	$\frac{1}{27}=0.\overline{037}$
循環節數字和	1	2	3	14	5	6	27	18	9	10

四、透過圖形反推成循環小數

在知道了轉化成圖形的規則後，試著反過來想想看，如果一個循環小數朝原方向畫一個單位長，代表小數點後第一位數字是0，接著再畫出正五邊形，而正五邊形的每一個內角都是108°，代表每次固定轉36°x2=72°，要繞回360°就要轉5次，根據研究結果這個循環小數是$0.0\overline{2}$，即$\frac{1}{45}$。運用同樣的規則，我們也能推出正十邊形對應的循環小數。







結論

一、所有的分數都可以轉化成小數：對任何一個整數，當它被正整數a除時，它的餘數可能為0、1、2、3...、(a - 1)，可以知道一個分數化作的小數一定會是有限小數或循環小數。

二、分數化成有限小數、純循環小數、混循環小數的差別：

（一）有限小數：如果分母a除了2和5的因數外，沒有其他的因數，會化成有限小數。

（二）純循環小數：如果分母b與2和5沒有共同的因數，則會化成純循環小數 。

（三）混循環小數：如果分母k除了2或5，還有其他的因數時，則會化成混循環小數。

三、循環小數的循環節：如果分數$\frac{1}{k}$可化為循環小數，則分數$\frac{1}{2^m*5^n*k}$與$\frac{1}{k}$的循環節長度一定會一樣，如$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{14}$，$\frac{1}{28}$，$\frac{1}{53}$，$\frac{1}{56}$，$\frac{1}{70}$，循環節位數都是6。

四、混循環小數未循環的位數:如果分數$\frac{1}{k}$可化為循環小數，則分數$\frac{1}{2^m*5^n*k}$轉換成小數時，$\max(m,n)$的數量就是混循環小數中未循環的位數。

（一）當m>n時，就是分母因數分解後，2的數量比5的數量多，未循環位數為m位，循環小數從小數點以下第m+1位開始循環，

如:$\frac{1}{72}=\frac{1}{2*2*2*3*3}=0.013\overline{8}$，從小數點以下第4位開始循環; $\frac{1}{60}=\frac{1}{2*2*3*5}=0.01\overline{6}$，從小數點以下第3位開始循環。

（二）當m<n時，就是分母因數分解後，5的數量比2的數量多，未循環位數為n位，循環小數從小數點以下第n+1位開始循環，

如: $\frac{1}{15}=\frac{1}{3*5}=0.0\overline{6}$，從小數點以下第2位開始循環;$\frac{1}{75}=\frac{1}{3*5*5}=0.01\overline{3}$從小數點以下第3位開始循環。

（三）當m=n時，就是分母因數分解後，2和5的數量相同，會出現m組10，未循環的小數位數就為增加m位，如$\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$為純循環小數，

$\frac{1}{70}=\frac{1}{2*5*7}=0.0\overline{142857}$，從小數點以下第2位開始循環，$\frac{1}{700}=\frac{1}{2*2*5*5*7}=0.00\overline{142857}$，從小數點以下第3位開始循環，依此類推。

五、循環小數轉化成圖形：利用程式軟體Scratch來畫圖形，將360°依照數字0~9，順時針分成十等份，規則如下表。

數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
角度	0°	36°	72°	108°	144°	180°	216°	252°	288°	324°

（一）相同圖形：循環節數字首碼不同，但排序相同時，所產生的圖形仍會一樣。

（二）同邊形圖形：圖形的邊形與循環節數字和的個位數值有關。

1.循環節數字和的個位數是「1、3、7、9」，形成十邊形，圖形會畫10次。

2.循環節數字和的個位數是「2、4、6、8」，形成五邊形，圖形會轉5次。

3.循環節數字和的個位數是「5」，形成單一直線，圖形會轉2次。

4.循環節數字和的個位數是「0」，形成一個長條圖。

參考資料

一、康明昌,循環小數,數學傳播,25卷3期(民90年9月),55-62

二、葉均承、蘇麗敏,循環小數的迴響,數學傳播,27卷2期(民92年6月),51-54

三、王湘君,有趣的循環小數,數學傳播〔討論類〕,90-93

四、數感實驗室Numeracy Lab,數感生活循環小數的獨特花紋,取自https://www.facebook.com/numeracylab/photos/a.1113622675325424/5977203808967262/