

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高中組 工程學(二)科

團隊合作獎

052406

動態球與膜的交互震盪

學校名稱：國立嘉義女子高級中學

作者： 高二 劉昫昕 高二 謝采凌 高二 蔡昫蓁	指導老師： 吳孟修 黃志仁
---	-----------------------------

關鍵詞：交互震盪、激發、「躍遷」

摘要

本研究探究動態球與剛性、彈性、超彈性膜的交互作用，研究球與膜連續碰撞後「球的彈跳」與「膜震盪、產聲」兩面向。我們分析球的彈跳，發現僅由前五次的趨勢可估算彈跳次數，預測值與數據接近。

另發現「球在彈性面上有後次彈跳高於前次」的情形，且「產聲強度有後次超越前次」的現象。這兩種不定性現象，我們以能量交換大致解釋。

再建立膜震動動力理論，用貝索函數預測撞擊時膜產生的多組頻率，對比數據誤差小於 5%。此外膜震動時若再次被敲擊，膜將激發出另一組頻率，且仍在理論預測之內，我們稱之膜頻率的「躍遷」。

透過研究「動態物（球）與彈性膜的交互震盪」的能量交換與「躍遷」現象，以期未來在薄膜震盪工程或聲學失真問題中有更多應用。

壹、前言

一、研究動機

有次在室內遊樂場的彈床設施遊玩時，我們不斷嘗試讓自己向上跳，卻偶然發現彈床表面看似規則的震盪，卻不一定能使自己越跳越高。造成此現象的原因引發我們的好奇，再加上此特殊現象無法單純用簡單的物理現象解釋，因此，我們決定針對彈性材質的震盪做深入一步研究。

不能用室內遊樂場的彈床設施做實驗，我們用塑膠氣球包在容器上代替，探討剛性金屬球在彈性膜上的交互作用(圖 1)。我們使用開口適中的容器，將塑膠氣球剪開，並拉開套在容器的開口端，形成封閉的彈性膜。當球落下引起彈性橡皮膜產生向上的彈力，小球便向上彈。球撞擊膜的那一刻，各種頻率的聲音會產生，等同能量的變化與轉移。我們好奇，在每一次反彈中，高度如何變化？彈跳高度為何會忽高忽低？各個頻率何者音量最強？是否能找到其變化的模式呢？我們將測量其強度範圍及數值。



圖 1、膜上球及其組成器材。

二、研究目的

一、球與膜交互作用之「球」的震盪分析

- 1.球與剛性面交互作用之震盪
- 2.球與彈性膜交互作用之震盪
- 3.球與超彈性膜交互作用之震盪

二、球與膜交互作用之「膜」的震盪分析

- 1.使用傅立葉分析膜的震盪強度與頻率
- 2.比較連續五次球與彈性膜作用所激發最大強度的膜震盪與對應的頻率
- 3.比較連續五次球與超彈性膜作用所激發最大強度的膜震盪與對應的頻率

三、球與膜交互作用之「球與膜」的震盪分析

四、建構膜震盪理論及比較頻率的躍遷

- 1.預測膜震盪的頻率
- 2.連續動態球激發膜震盪頻率的躍遷

(註：以上四項「研究目的」的標號，本作品說明書全文一致使用「一、二、三、四」)

三、文獻回顧

(一)研究物理的中學生小論文

- 1.颶風球研究。吳予文、劉子恩、劉雨牧(2020)焊接或黏合兩顆相同大小的鋼球，即颶風球。實驗發現，颶風球雙球直徑在 1.66 至 5.46cm 之間，「進動角速度平方的倒數 $1/\Omega^2$ 」與「颶風球與鉛直所夾角度的餘弦值 $\cos \theta$ 」呈顯著負相關 ($P < 0.001^{***}$, $R^2 = 1$)。四個颶風球實驗所得方程式的斜率和截距，與理論建模方程式的誤差都不超過 5%。
- 2.循環擺研究。張宇庭、梁媛棋、林宜儒(2020)研究循環擺，由兩個不同質量的擺錘，即輕負載和重負載，兩者以細繩連接所構成的擺。依照理論建模推導出的理論關係式設計實驗，獲取實驗數據。最後比較實驗數據與理論值，「理論值」皆位於「實驗平均值±標準差」的範圍內。
- 3.颶風球和循環擺兩篇小論文對本研究的啟發：兩篇小論文架構皆為「建模」、「設計實驗及取得數據」、「比較實驗值與理論值」，本研究也循此架構。仿照兩篇文獻，本研究比較「實驗值」與「我們理論建模的數值」，方法有二：一、「實驗平均值±標準差的範圍」是否涵蓋理論值。二、計算出實驗值與理論值差異的百分比，計算方式：










$$\left| \frac{\text{實驗值}-\text{理論值}}{\text{理論值}} \right| \times 100\%$$

(二)膜上球的相關文獻

- 1.林秀豪（2010）介紹牛頓力學、碰撞，論述彈性碰撞相關知識。與本研究球和膜的碰撞有關。
- 2.我們參照文獻 Eichwald et al.(2010)的方法，略為修改進行實驗設計。使用開口適中的容器，將塑膠氣球剪開，並拉開套在容器的開口端，形成封閉的彈性膜（圖 1）。球是產生聲音的主體，當球落下便引起橡皮膜因彈性產生向上的彈力，小球因此而向上彈，彈性膜的震動是產生聲音的最直接來源。
- 3.Russell(2010)使用傅立葉分析籃球共振腔的強度與頻率關係，與本實驗所求相似，因此本實驗亦採用傅立葉分析數據，並繪製強度頻率關係圖。
- 4.Boas(2006)以二維波動方程式，推導並描述波在膜上傳遞的「位置」與「空間、時間」的關係，本實驗參考此文獻推導出理論值。
- 5.Herman(2023)指出二維波動方程式對於波在膜上傳遞的「位置」與「空間、時間」的關係之結論，列出各個條件之間的關聯性，有助於本實驗對貝索函數的認識。
- 6.膜上球的相關文獻對本研究的啟發：我們師生討論，並參考文獻林秀豪（2010）、Herman (2023)、Boas (2006)，我們推導、建模膜上球的理論。參照 Eichwald et al.(2010)的方法，修改設計實驗。與 Russell(2010)一樣，使用傅立葉分析數據、繪製強度頻率關係圖。見後文「肆、研究結果」。

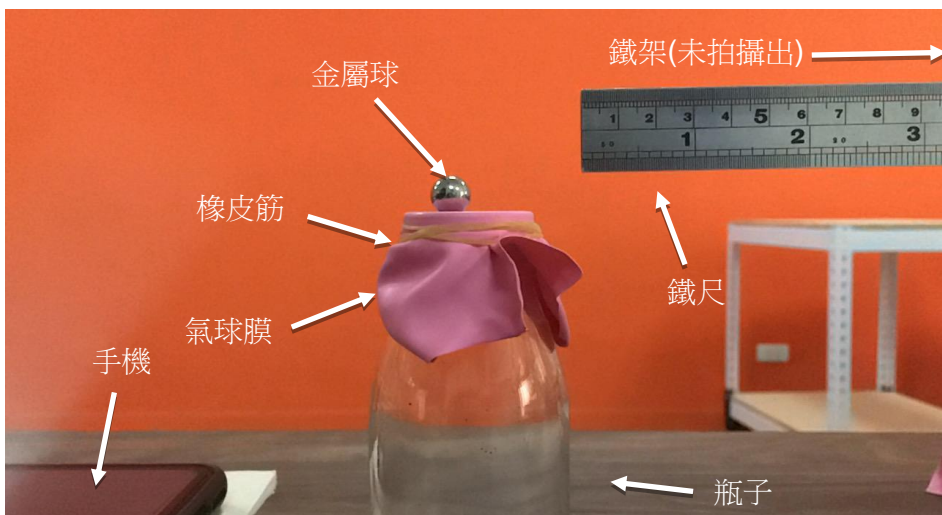
貳、研究設備及器材

一、研究設備與器材

氣球	尺	金屬球
		
瓶子(套著氣球膜)	剪刀	橡皮筋
		
夾鏈袋	水	膠帶
		

鐵架	錄影設備(手機)	Excel
		
	錄音設備(手機)	Audacity
		
電子秤	Tracker	Phyphox
		

二、器材架設



參、研究過程及方法

一、實驗流程

1

將塑膠氣球剪開，並拉開套在開口適中容器的開口端，形成封閉的彈性膜，以橡皮筋將氣球膜固定住。

2

將鐵尺固定在鐵架上，作為Tracker所需的比例尺及球落下的高度基準。

3

架設兩台手機錄影、錄音，放置於靠近瓶子的地方。

4

使用金屬球，固定距離彈性膜1.2公分的高度落下，用手機錄影拍攝球和膜交互作用過程，直至金屬球靜止於膜上。

5

使用Tracker、Audacity、Phyphox、Excel進行音檔分析。

6

以「SPSS統計軟體」統計，「球膜接觸次數」與「球滯空高度、產聲強度」是否有顯著相關。

二、追蹤球的彈跳高度變化

1

將手機影片匯入Tracker進行金屬球的軌跡分析。

2

以0.01秒為單位逐一定位，追蹤球的彈跳位置、球的回彈高度、每次彈跳膜的凹陷程度及球滯空時間，繪製球的彈跳軌跡。

三、測量聲音組成

1

先只測量音檔和測量環境的背景噪音，發現背景強度幾乎為零（圖2），因此，我們可以排除考慮背景干擾。

2

將錄音檔匯入Audacity，取每次彈跳的前0.086秒，用Phyphox的手機軟體，將聲音轉換成時變率的數據並匯入Excel。

3

利用Excel的傅立葉分析功能，繪製膜的頻率和強度關係圖。

4

下一次彈跳的前0.086秒的資料畫出另一張圖，以此類推。



圖 2、背景聲音之頻率相對強度關係圖。

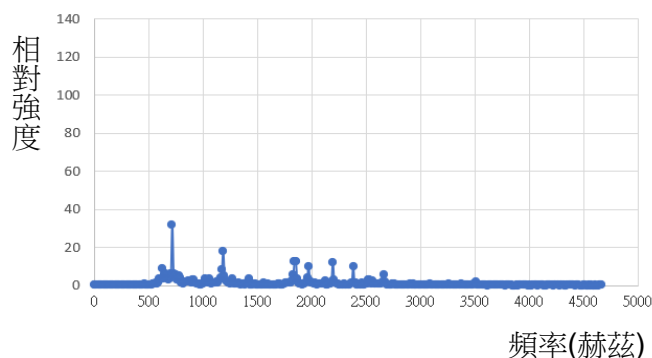


圖 3、膜的頻率和強度關係圖。

四、測量膜的張力和面密度

1

在氣球膜上做長方形記號，長2.5公分，寬0.5公分，再將其取下剪開。

2

利用電子秤測量膜的重量。

3

將膜夾在鐵架上，下方懸掛不同重量的水袋。

4

繪製膜的伸長量與懸掛重量關係圖。

5

以斜率求得伸長2.5公分所需的重量，並計算出張力。

五、改變彈跳界面材質

1

將木製桌面作為剛性面，金屬球在固定距離落下，重複進行多次實驗。實驗數據將與兩種彈性膜進行比較。

2

使用較鬆弛的氣球膜，作為彈性膜，套在容器瓶口依照實驗流程，重複進行多次實驗。

3

再使用另一個拉得更緊的膜，作為超彈性膜套在容器瓶口。金屬球在固定距離高度落下，依實驗流程，重複進行多次實驗。

六、應用程式介紹

- (一) Tracker：為追蹤物體運動軌跡的軟體。提供將運動物體的空間位置與對應時間數位化的功能，並可以從事運動學的分析。還能進一步透過解析出來的運動函數，來建立對應的粒子運動模擬軌跡。我們將實驗影片匯入，軟體會自動放慢影片撥放速度，再以時間間隔為 0.01 秒開始對金屬球定位，得到有關位置與時間的數據。
- (二) Audacity：音訊編輯軟體，可將錄製好的音檔輸入，除了可以看出音軌的波形外，也可以利用功能將音檔切割並循環撥放。在實驗中，因為作圖時沒有時間的變數(僅有頻率對強度)，因此為了確保實驗準確度，我們使用此軟體將音檔切割為每段 0.086 秒並重複撥放，以利測量與分析更準確。
- (三) Phyphox：測量聲音的時變率的軟體。通過匯出的時變率數據，可以換算出頻率和強度的關係。因為測量長度有限，因此我們擷取約 4096 筆資料，也就是約 0.086 秒為固定時長進行測量。如此將 Audacity 和 Phyphox 的時間長短進行統一，可以確保實驗的準確度。
- (四) Excel 及傅立葉分析功能：將 Tracker 數據匯入 Excel 繪圖，橫軸為時間，縱軸為高度畫圖，透過數據分析可得到球彈跳的位置時間關係圖。將 Phyphox 數據匯入 Excel，經過傅立葉轉換後，可將時變率轉變為頻率對強度的關係，並繪製出頻率對強度的關係圖。如此便可看出求每次落下時的頻率和相對強度的相對關係。

肆、研究結果

一、球與膜交互作用之「球」的震盪分析

(一) 球與剛性面交互作用之震盪：圖 4 顯示金屬球的彈跳高度隨著時間降低。

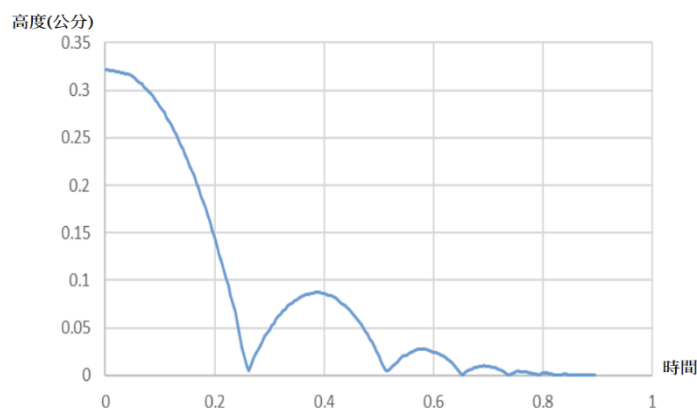


圖 4
時間與高度關係圖

(二) 球與彈性膜交互作用之震盪

1. 由球滯空高度，預測膜球接觸次數

- (1) 本研究「後期」實驗操作，都能「讓球多次彈跳後停止於膜上」。「早期」我們一直困擾於「彈跳的球未靜止之前就跳出膜外」。因此，我們一直好奇最多可以跳幾下？
- (2) 「早期」我們多次實驗「彈性膜」，固定距離彈性膜 1.2 公分的高度落下，取得五次「彈跳七次」的實驗，見圖 5。圖 5 顯示「膜球接觸次數」與「球滯空高度」呈顯著指數相關 ($P < 0.001^{***}$, $R^2 = 0.995$)。即隨時間，球滯空高度愈來愈低。
- (3) 我們的觀察距離為 45cm，考慮一般正常肉眼視力的角分辨率為 0.00147 rad，根據 Rayleigh criterion 瑞立判別標準 (Rayleigh, 1879)，所以當球滯空高度 $< 0.06\text{cm}$ 左右，我們人眼會判斷球在膜上為靜止。 $y=0$ 代入， $x=28.89$ 次；即我們預測，「球可以彈跳 28.89 次後停止於膜上」。

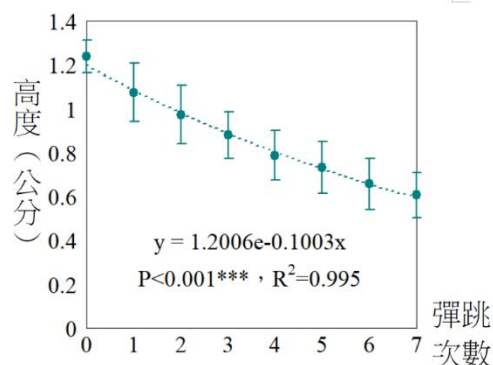


圖 5、接觸次數與滯空高度關係圖。

2.圖 6 為本研究「後期」操作「彈性膜」五次實驗之一，球距離彈性膜 1.2 公分的高度落下，共彈跳 25 次後停止於膜上。圖 6 另可見該次實驗的第 19 次和第 23 次彈跳，高於前一次。因版面有限，其他四次實驗的圖未呈現。

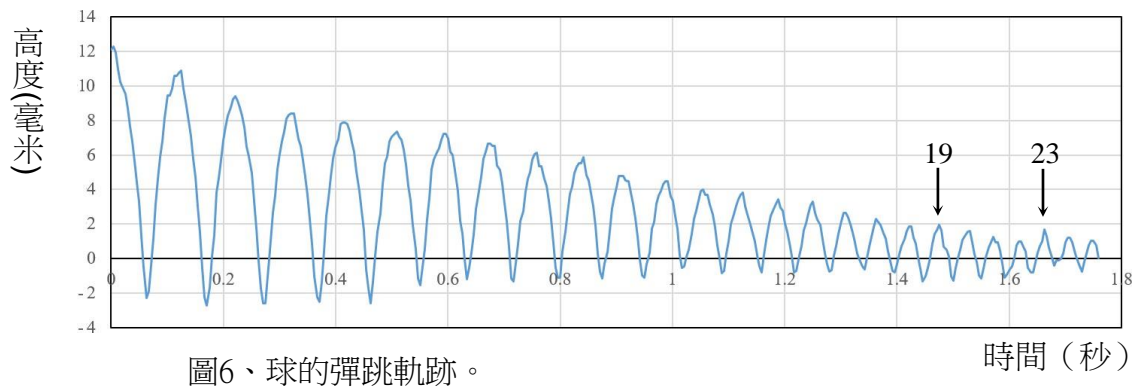


圖6、球的彈跳軌跡。

(三) 球與超彈性膜交互作用之震盪

1.圖 7 為本研究「超彈性膜」實驗操作之一例，球距離超彈性膜 2.5 公分的高度落下，總彈跳次數遠大於「彈性膜」實驗，約 200 多次後停止於膜上。其中可發現「後次彈跳高度」不一定小於「前次彈跳高度」，例如圖中箭頭指出其中三處。

2.因距超彈性膜為 2.5 公分、距彈性膜為 1.2 公分，所以圖 5 只能預測彈性膜總次數。我們沒有預測超彈性膜的總次數，因為我們「後期」實驗都能讓「讓球多次彈跳後停止於超彈性膜上」。

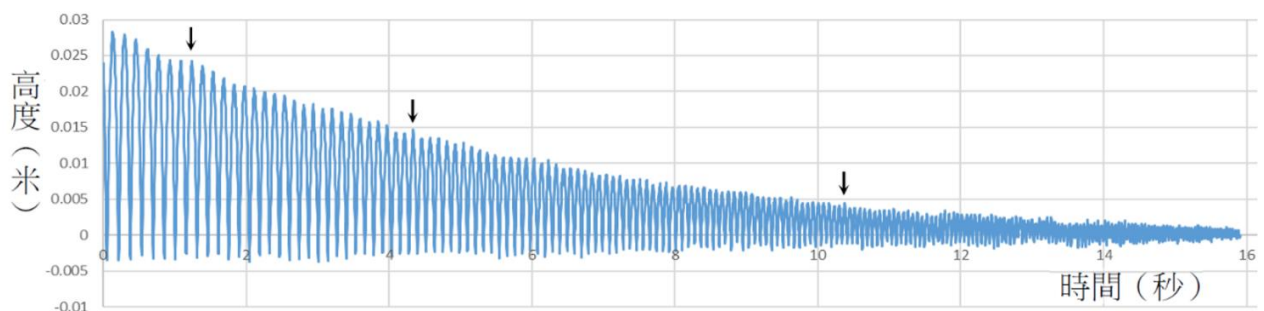


圖 7、球的彈跳軌跡。

二、球與膜交互作用之「膜」的震盪分析

- 1.我們分析膜的震盪強度與頻率。將球和膜的「前五次接觸」產聲，轉為「橫軸為頻率，縱軸為強度」的傅立葉分析圖。
- 2.因版面有限，本文只呈現「球膜第一次接觸」的傅立葉分析圖（圖 8 和圖 9），第二次至第五次接觸的傅立葉分析圖未呈現。強度最大五處以紅點表示。
- 3.彈性膜(圖 8)：聲音頻率範圍涵蓋極廣，其中以 398.6、469.0、773.8、1617.9、1664.8 赫茲為強度最大的五個頻率（圖 8 的五個紅點）。
- 4.超彈性膜(圖 9)：聲音頻率範圍涵蓋極廣，其中以 562.6、621.2、703.3、867.4、1558.9 赫茲為強度最大的五個頻率（圖 9 的五個紅點），且相對強度的最大峰值（頻率為 703.3 赫茲）遠高於彈性膜實驗。

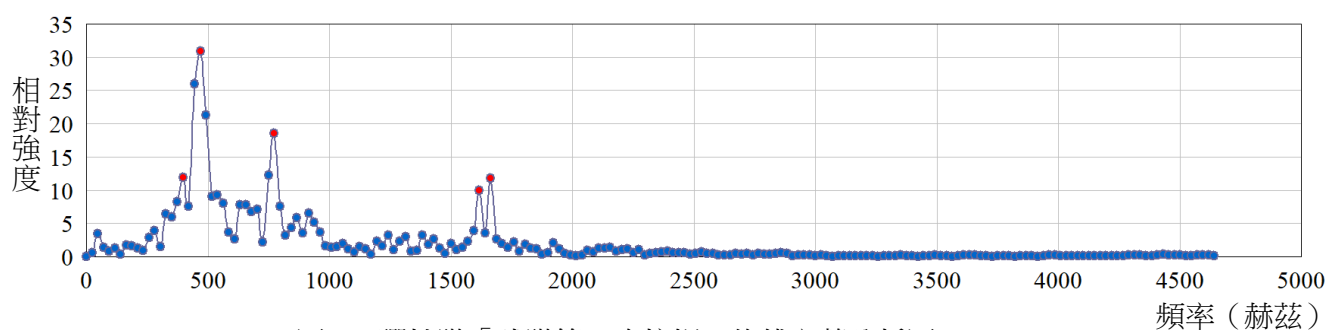


圖 8、彈性膜「球膜第一次接觸」的傅立葉分析圖。

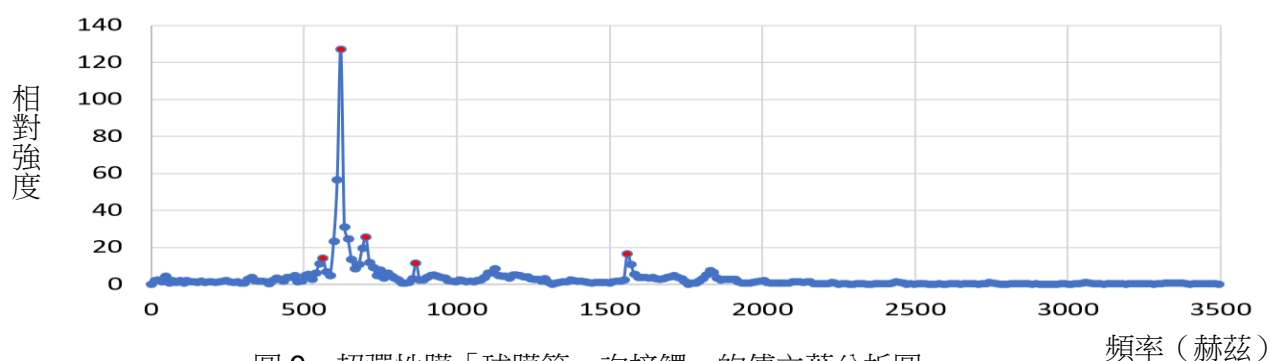


圖 9、超彈性膜「球膜第一次接觸」的傅立葉分析圖。

三、球與膜交互作用之「球與膜」的震盪分析

(一) 擇一「彈性膜」實驗操作，時間為橫軸，球膜交互作用產聲為縱軸，得圖 10，顯示膜上球產聲模式。

- 1.說明：我們「彈性膜」每次實驗都錄影以計數其彈跳次數，並同步錄音。所以我們知道每個錄音檔的截圖，球膜接觸幾次。圖 10 為球膜接觸 29 次的錄音檔截圖。
- 2.整體趨勢：由大聲漸小聲。直至球停聲無。
- 3.細部分析：產聲忽大忽小，「後次產聲」不一定小於「前次產聲」。例如圖 10 箭頭所指三例，強度乙>甲，丁>丙，己>戊；而且，己>丙。

(二) 擇一「超彈性膜」實驗操作，時間為橫軸，球膜交互作用產聲為縱軸，得圖 11

- 1.說明：我們「超彈性膜」每次實驗都錄影，並同步錄音。圖 11 為球膜接觸次數 201 次(第 16 頁表 2 的實驗四)的錄音檔截圖。
- 2.整體趨勢：由大聲漸小聲。直至球停聲無。
- 3.細部分析：產聲忽大忽小，「後次產聲」不一定小於「前次產聲」。如圖 11 箭頭所指三例，強度乙>甲，丁>丙，己>戊；而且，己>丙。

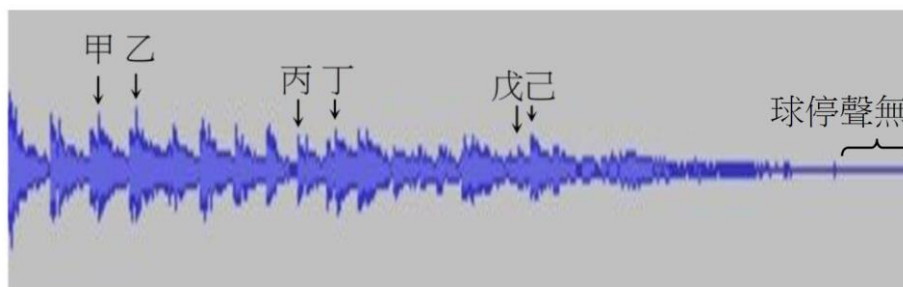


圖 10、球與膜的交互作用，隨時間產聲強度變化。
(球與彈性膜接觸 29 次)

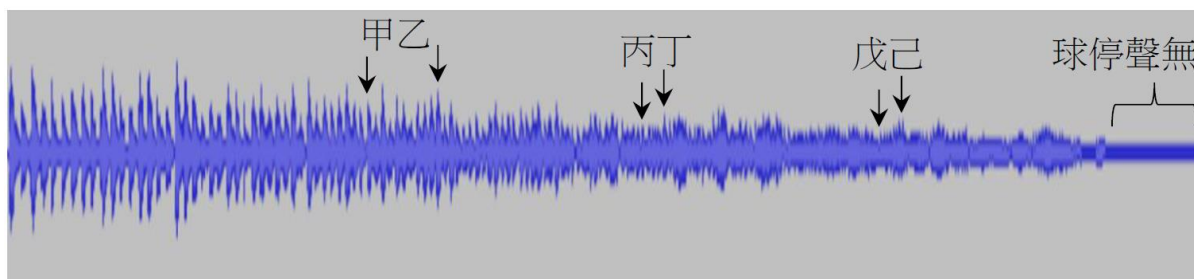


圖 11、球與膜的交互作用，隨時間產聲變化。
(球與超彈性膜接觸 201 次)

(三) 由圖 6 和圖 7 可知，球滯空高度會忽高忽低，會出現後次高於前次的情況。圖 10 和圖 11 則顯示，「後次產聲」有時也大於「前次產聲」。但經對照後，「球滯空高度」與「產聲大小」兩者並沒有直接的相關性。膜的產聲忽大忽小，「球低處落下觸膜產聲」不一定小於「球高處落下觸膜產聲」。

(四) 探究「球滯空高度」與「膜震盪發聲強度」關係

1. 本研究「原本想要」細部測量「傅立葉分析圖」中，最高五峰（即圖 8 和圖 9 的五紅點）的 X 值（頻率）和 Y 值（強度），要追蹤至球膜前五次接觸產聲，共進行四次實驗。後來發現數據混沌無趨勢，於是轉為分析「四次實驗」的「前五次球滯空高度」及「前五次膜球接觸造成膜震盪產聲」的關係。
2. 圖 12 顯示「球滯空高度」與「發聲強度」關係不顯著 ($P=0.603^{ns}$)。即球由愈高處落下，產聲不顯著愈大聲。圖 13 將四次實驗以不同顏色符號「◇、■、▲、●」表示。只有符號「▲」的實驗呈現高度愈高，聲音愈大的趨勢；符號「◇、■、●」實驗，皆顯示球從愈高處落下觸膜，產聲不一定愈大聲。
3. 經由討論，我們對於「球低處落下觸膜產聲」不一定小於「球高處落下觸膜產聲」的膜上球現象提出假說。球下落撞擊膜後反彈，球和膜又分開，膜的震動可簡單分成「向上凸」或「向下凹」兩種狀態。當球再次落下，若膜正在向上凸，球膜撞擊產聲較大。反之，若球落下時膜也正在向下凹，則球膜撞擊產聲較小。因此造成「球低處落下觸膜產聲」不一定小於「球高處落下觸膜產聲」的現象。
4. 圖 12 是「四次實驗」的「前五次球高度和球膜接觸產聲的關係」。我們認為，應該擇一實驗，仔細整理出從頭到尾「每一次球膜接觸產聲強度」，進一步分析「單一次實驗」「從頭到尾球高度和球膜接觸產聲的關係」，後文「伍、討論」詳述。

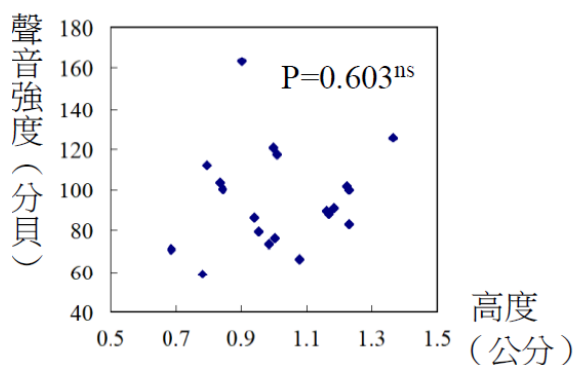


圖 12、球滯空高度與產聲強度關係圖。

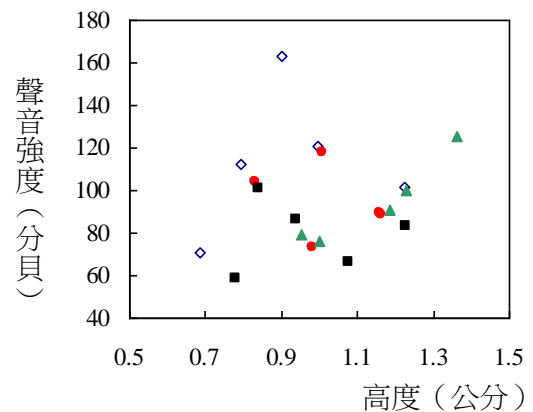


圖 13、將圖 12 四次實驗用不同顏色符號表示。

四、建構膜震盪理論

第一部分：頻率建模

膜的振動遵守波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ ， u 為膜在 z 方向上的振動位置，且為 (x,y,z) 的函數，在邊界 $\partial\Omega$ 上 $u = 0$ 。將其轉換至極座標上，可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)$$
， u 則為 (r,θ,t) 的函數，且在邊界 $r=a$ 時， $u=0$

式中 c 為波動在膜上傳播的速度，其中 $c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$ ，

而 T 為膜的表面張力、 σ 為膜的面密度。

(一) 使用分離變數法求以上波動方程式的解 $u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ 代入上式，再同除 $R\Theta T$

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R'(r)}{rR(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{r^2 \Theta(\theta)} = K = -\lambda^2 \dots \text{式一}$$

可得 $T(t) = A \cos(c\lambda t) + B \sin(c\lambda t) \dots \text{式二}$ (A, B 由膜的初始條件決定)

(二) 重寫式一 $\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R'(r)}{rR(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{r^2 \Theta(\theta)} = -\lambda^2$

$$\text{同乘 } r^2 \Rightarrow \lambda^2 r^2 + \frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \frac{r R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = L = m^2 \dots \text{式三}$$

可得 $\Theta(\theta) = C \cos(m\theta) + D \sin(m\theta) \dots \text{式四}$ (C, D 由膜的邊界條件決定)

回到式三，並同乘 $R(r)$

$$\rightarrow r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda^2 r^2 - m^2) R(r) = 0 \dots \text{式五}$$

(式五) 為 Bessel's equation，其解為 $J_m(\lambda r)$ 和 $N_m(\lambda r)$

$$\therefore R(r) = E J_m(\lambda r) + F N_m(\lambda r)$$

又 E、F 可由膜的邊界條件決定，此邊界條件為 $R(a)=0$

$$\rightarrow 0 = EJ_m(\lambda a) + FN_m(\lambda a) \quad \text{而} \quad J_m(\lambda a) = 0$$

由此繪出 Bessel J function 找出使 $J_m=0$ 的根，這樣的根有許多解，我們命名為 α_{mn}

$$\therefore \lambda a = \alpha_{mn} \quad \text{則} \quad \lambda = \frac{\alpha_{mn}}{a} \quad \leftarrow \text{再回到式二}$$

$$T(t) = A \cos(c\lambda t) + B \sin(c\lambda t)$$

$$\therefore 2\pi f = c\lambda = c * \frac{\alpha_{mn}}{a}$$

故偵測到單純「膜」的理論震盪頻率 $f_{膜} = \frac{c * \alpha_{mn}}{2\pi a}$

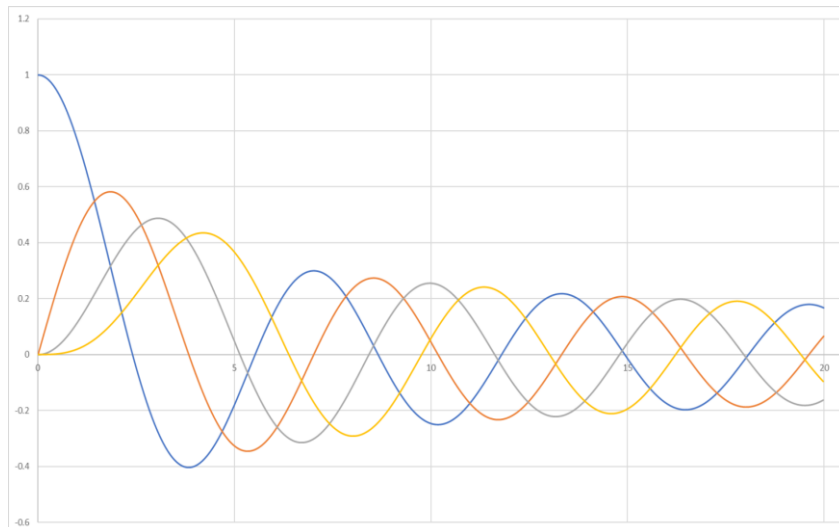


圖 14、貝索函數圖。

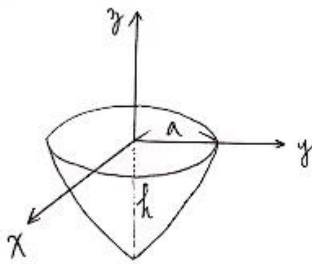
藉由此方程式可以得到不同 m 值的第 n 個根，因此我們可以得知當敲擊膜時，膜會產生很多不同的頻率。

由此，我們只需要測量出膜的表面張力 T 和面密度 σ ，之後便可得出理論頻率。

第二部分：強度建模

膜震動遵守波動方程式，在極座標上的膜 z 座標
為 $z = R(r)\Theta(\theta)T(t)$

$$= EJ_m(\lambda r) \cdot e^{im\theta} \cdot e^{i\frac{c \cdot \alpha_{mn}}{a} \cdot t}$$



當球撞擊膜至最低點時，設此時 $t=0$ ，

膜應該為圓錐狀，此時膜隨空間變化的函數關係

$$\text{為 } z = \sqrt{\frac{h^2 r^2}{a^2}} - h$$

意思就是

$$z = \sqrt{\frac{h^2 r^2}{a^2}} - h = R(r)\Theta(\theta)T(t) = EJ_m(\lambda r) \cdot e^{im\theta} \cdot 1$$

$$= E_{mn} J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} \cdot r\right) e^{im\theta}$$

$$= E_{01} J_0\left(\frac{\alpha_{01}}{a} \cdot r\right) + E_{02} J_0\left(\frac{\alpha_{02}}{a} \cdot r\right) + \dots + E_{11} J_1\left(\frac{\alpha_{11}}{a} \cdot r\right) e^{i\theta}$$

$$+ E_{12} J_1\left(\frac{\alpha_{12}}{a} \cdot r\right) e^{i\theta} + \dots$$

$$\text{而 } E_{mn} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} \cdot r\right) \left(\sqrt{\frac{h^2 r^2}{a^2}} - h\right) \cdot J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} \cdot \alpha r\right) \cdot e^{im\theta} \cdot d\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} \cdot r\right) \cdot d\theta}{\frac{1}{2} J_{m+1}^2(\alpha)}$$

此處的 α 為使 $J_m(\alpha) = 0$ 的那個 α 值。

最後，再將 E_{mn}^2 即可比較各頻率對應的相對強度值。

伍、討論

一、球與膜交互作用之「球」的震盪分析

(一) 球與剛性面交互作用之震盪

與「球與彈性膜交互作用」比較。「球與剛性面交互作用」的球彈跳高度愈來愈低，不會出現「後次高於前次的情形」；「球與彈性面交互作用」才會出現「後次高於前次的情形」。後文再詳細討論。

(二) 球與彈性膜交互作用之震盪

- 1.我們「早期」實驗困擾於「彈跳的球未靜止之前就跳出膜外」。因此想由球滯空高度，預測膜球接觸次數(第 8 頁圖 5)。圖 5 預測彈跳 28.89 次。
- 2.«後期»五次«彈性膜»實驗，見表 1，五次實驗平均彈跳 28.40 ± 2.61 次。我們原先圖 5 理論預測 28.89 次；本研究的「實驗平均值 \pm 標準差的範圍」涵蓋理論值。
- 3.五次實驗膜球接觸次數總和 142 次，其中出現 26 次「球高於前次»情形，佔 18.3%(表 1)。第幾次高於前次的詳細資料，我們彙整為表 1。

表 1、膜上球實驗數據。

	實驗一	實驗二	實驗三	實驗四	實驗五	總和
球膜接觸總次數	29	27	32	29	25	142
球高於前次次數	5	8	8	3	2	26 (佔 18.3%)
第幾次高於前次	8,15,19,23,27	13,15,17,20,24,25,26,27	1,16,17,18,20,22,25,27	14,21,25	19,23	

(三) 球與超彈性膜交互作用之震盪

將五次「超彈性膜」實驗，彙整為表 2。五次實驗平均彈跳 214.60 ± 31.88 次。五次實驗膜球接觸總和 1073 次，其中出現 384 次「球高於前次»情形，佔 35.7%。

表 2、超彈性膜實驗數據

	實驗一	實驗二	實驗三	實驗四	實驗五	總和
球膜接觸總次數	166	241	223	201	242	1073
球高於前次次數	53	103	89	64	75	384 (佔 35.7%)

二、球與膜交互作用之「膜」的震盪分析

(一) 球與「彈性膜」作用之「膜震盪的強度與對應頻率」

1. 選取第一次接觸的「前五大強度」，見第 10 頁圖 8 的五紅點，轉繪於圖 15 的五紅點。同理，後四次接觸的傅立葉分析圖，亦選取「前五大強度」，呈現為圖 15 的黃、淺綠、深綠、藍點。

2. 由圖 15 可以發現，每次反彈的頻率大致分為 470 赫茲、750 赫茲兩種區塊，其中又以 470 赫茲為大部分的高強度聲頻。

3. 另外，3 觸反彈產聲最大強度（圖 15 的最高淺綠點）大於 1 觸反彈最大強度（紅點），4 觸反彈最大強度（深綠點）又大於 3 觸反彈最大強度（淺綠點）。顯示聲音不一定會愈來愈小聲。也回應了圖 12「球滯空高度」與「發聲強度」關係不顯著 ($P=0.603^{ns}$)。

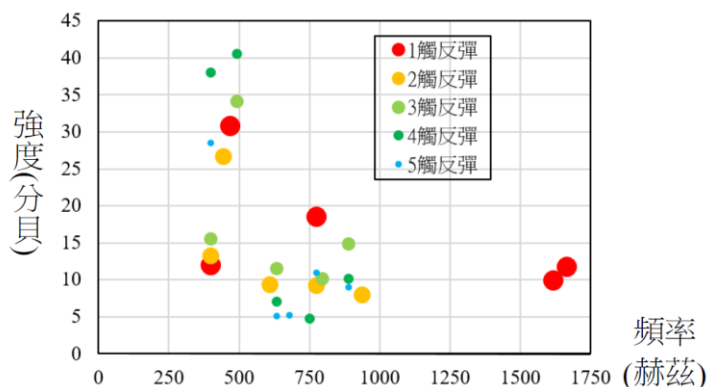


圖 15、五次接觸的「前五大強度」傅立葉分析圖。

(二) 球與「超彈性膜」作用之「膜震盪的強度與對應頻率」

1. 選取第一次接觸的「前五大強度」，見圖 9 的五紅點，轉繪於圖 16 的五紅點。同理，後四次接觸的傅立葉分析圖，亦選取「前五大強度」，呈現為圖 16 的黃、淺綠、深綠、藍點。

2. 由圖 16 可以發現，每次反彈的頻率大致分為 550 至 750 赫茲、1558.9 赫茲兩種區塊，其中又以 620 赫茲為大部分的高強度聲頻。

3. 另外，3 觸反彈產聲最大強度（圖 16 的最高淺綠點）大於 2 觸反彈最大強度（黃點），顯示聲音不一定會愈來愈小聲。

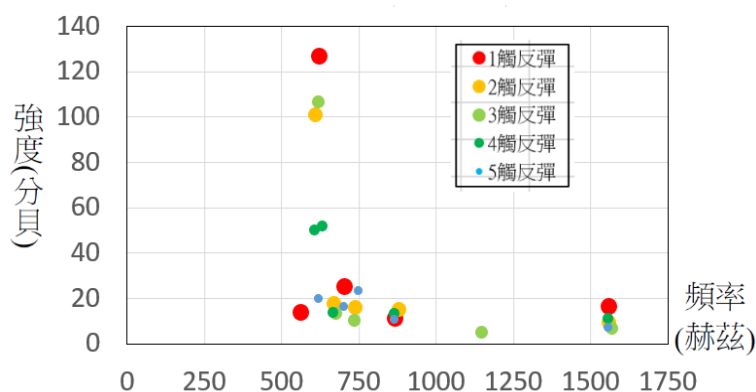


圖 16、五次接觸的「前五大強度」傅立葉分析圖。

三、球與膜交互作用之「球與膜」的震盪分析

(一)我們選擇「第 16 頁表 1 彈性膜的實驗四」進行分析。仔細整理從頭到尾「每一次球膜接觸產聲強度」。

- 1.我們仔細分辨並將每個頻率的強度加總在一起。
- 2.困難的是，隨著球膜接觸次數愈多，聲音愈小，愈難分辨是一次或兩次以上的膜球接觸產聲。
- 3.因此，雖然表 1 可知實驗四的球膜接觸 29 次，理論上可產聲 29 次主要聲音，但是我們只能釐清至第 22 聲，之後的聲音難以確認。

(二)探究「球滯空高度」與「球壓膜凹陷深度」的關係

- 1.球落下壓膜，膜凹陷；球反彈滯空，再次落下壓膜凹陷。將彈性膜實驗四的全部彈跳數據繪製成球滯空高度與球壓膜的凹陷深度關係圖。
- 2.由圖 17 可知，球滯空高度與球壓膜凹陷深度呈顯著正相關 ($P<0.001^{***}$ ， $R^2=0.8221$)，可知「整體趨勢」，球從越高點落下，球壓膜的深度越深。
- 3.「細部分析」小尺度各點比較，有時球自較高處落下，但膜凹陷卻較淺。其中能量的轉移，待分析。

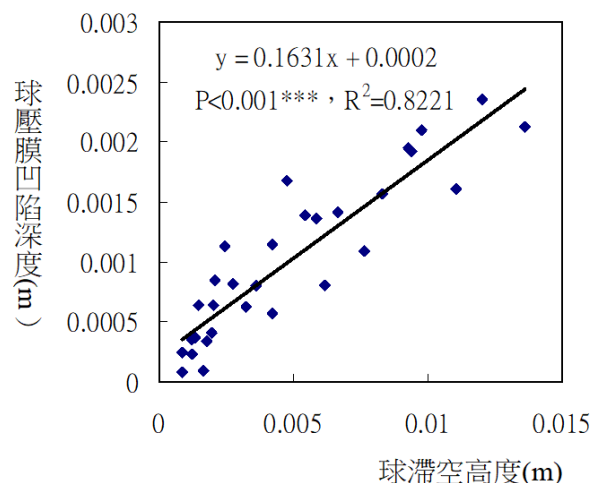


圖 17、球滯空高度與球壓膜凹陷深度關係圖。

(三)探究「球滯空高度」與「膜震盪發聲強度」的關係

- 1.分析比對彈性膜實驗四中每次彈跳高度及產聲強度，可得球滯空高度與膜震盪產聲強度的關係圖。
- 2.由圖 18 顯示球滯空高度及膜震盪產聲強度呈顯著正相關($P<0.001^{***}$ ， $R^2=0.8632$)，可知「整體趨勢」球從越高點落下，產聲越大。
- 3.圖 18 顯示球從越高點落下，產聲越大。但是，前文圖 12 和圖 13 顯示，球高度與產聲關係不顯著($P=0.603^{ns}$)。前後似乎矛盾？自圖 18 轉繪圖 19 分析、論述如下。

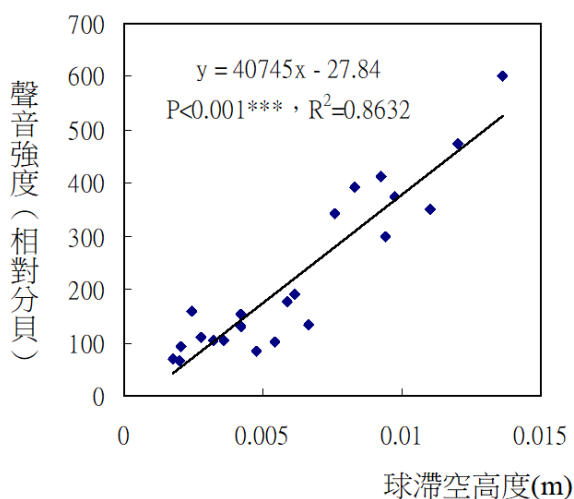


圖 18、球滯空高度與產聲強度關係圖。

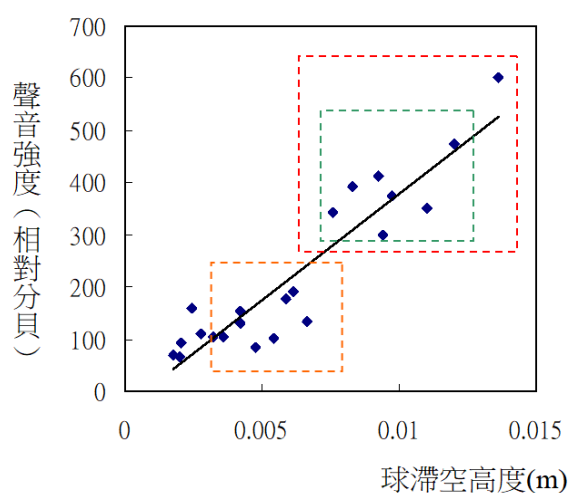


圖 19、球滯空高度與產聲強度關係圖。

(四)以「尺度(整體或細部)」解釋，連結前文論述

- 1.若擷取小尺度「細部分析」，圖 19 紅框為第一至第八筆數據，球滯空高度與膜震盪產聲強度仍呈顯著正相關($P=0.023^*$ ， $R^2=0.607$)，但判定係數由 0.8632 降為 0.607。若擷取綠框，為第二至第八筆數據，則球高度與產聲強度關係不顯著($P=0.272^{ns}$)。只觀察黃框第九至第十二筆數據，高度與聲音強度關係亦不顯著($P=0.152^{ns}$)。
- 2.與前文圖 6、圖 7、圖 10、圖 11、圖 12、圖 13 的論述相呼應，「整體趨勢」球高度愈來愈低，球觸膜產聲愈來愈小；「細部分析」偶有球滯空高度後次高於前次、聲音後次大於前次的現象。因此，圖 18 和圖 19 「整體趨勢」高度與聲音呈顯著正相關，但「細部分析」綠框或黃框，關係不顯著。
- 3.採能量學的角度來看圖 18、圖 19。「整體趨勢」中，動態球與膜逐次撞擊，球對膜大趨勢上以輸入能量的方式進行，膜獲得能量後振動產聲。「細部分析」來看，球對膜交換能量的形態會有球從膜中回收能量的歧異情況，因此若涵蓋此狀況而作「球高度」與「產聲強度」關係分析時，就易得到不顯著關係。

(四)進一步探究膜上球高度與聲音的關係

1.基於能量守恆，我們假說如前文圖 12 的論述，膜的震動可簡單分成「向上凸」或「向下凹」兩種狀態。當球再次落下，若膜正在向上凸，則球膜撞擊產聲較大，球壓模凹陷的深度應較淺。

2.我們取彈性膜第四次實驗進行分析，檢視是否「大聲，凹不下去」？將實驗中每次彈跳的聲音強度及球彈跳的最高點與最低點取出，以「第 6、7、8 次」和「第 13、14、15 次」做比較。

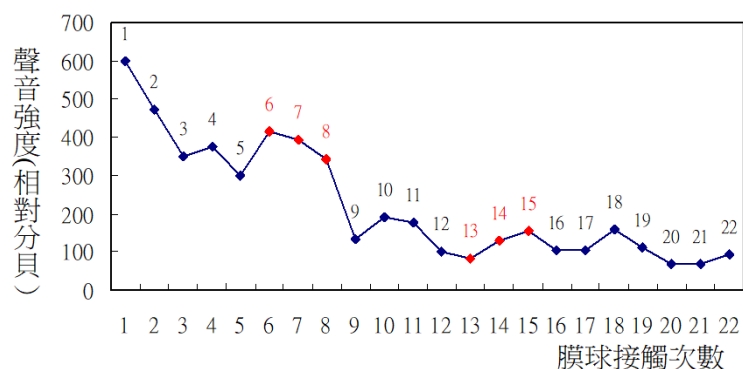


圖 20、球膜歷次接觸音量。

3.先列出球膜歷次接觸音量。由圖 20 可觀察到，第 6、7、8 次反彈音量強度逐次減弱，第 13、14、15 次反彈音量強度逐次增加。

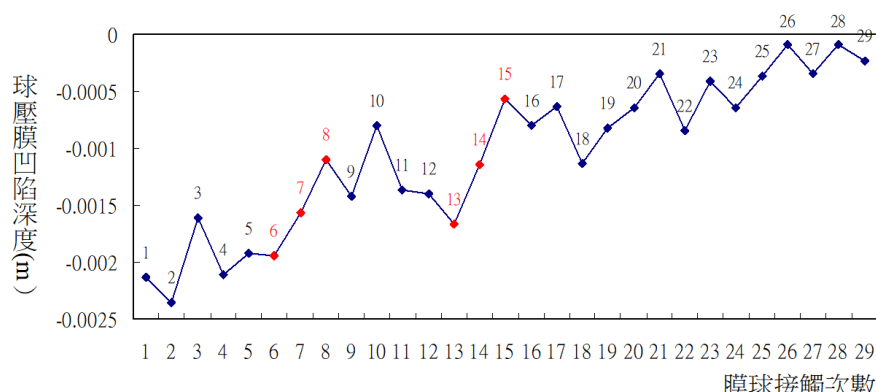


圖 21、球壓膜歷次凹陷深度。

4.由圖 21 可觀察球壓膜歷次凹陷深度，「第 6、7、8 次」和「第 13、14、15 次」球壓膜的凹陷深度皆逐次變淺。比對圖 20 和圖 21，圖形上沒有一致性。依照我們「大聲，凹不下去」的假說，「13、14、15」符合，但「6、7、8」不符。

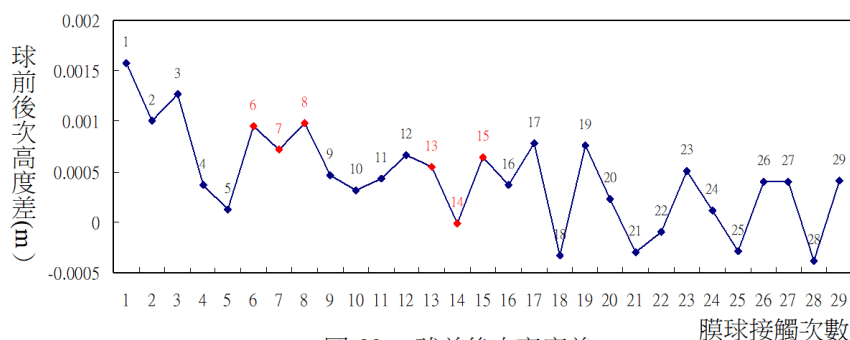


圖 22、球前後次高度差。

5.我們另外由圖 22 觀察歷次前後高度差。假說愈大聲，球反彈不高，前後高度差值大；愈小聲，球彈高，前後高度差值小甚至為負值。比對圖 20 和圖 22，圖形上也沒有一致性。

6.圖 20 比對圖 21 和圖 22，圖形上無法對應高度、深度與聲音的關係，讓我們陷入苦思。經師生思索、討論後，我們找到新的研究方向，是否能夠以能量學的角度來重新詮釋，見下頁討論。

(五)解釋「相鄰次球滯空高度差」的關係

1.理論：

如圖 23，設

- (1) $E_{0球U}$ 為初始狀態時球儲存的重力位能
- (2) $E_{n球U}$ 為球從 $(n - 1)'$ 落至 n 時釋放的重力位能
- (3) $E_{n'球U}$ 為球從 n 彈至 n' 時回存的重力位能
- (4) $E_{n膜}$ 為球在 n 時，膜的能量
- (5) $E_{n'膜}$ 為球在 n' 時，膜的能量
- (6) $E_{n \rightarrow n'聲}$ 為球在 n 至 n' 期間產生的聲能
- (7) $E_{n' \rightarrow (n+1)聲}$ 為球在 n' 至 $(n + 1)$ 期間產生的聲能

則依能量守恆的概念

$$\begin{aligned}
 E_{0球U} &= E_{1球U} + E_{1膜} \\
 &= E_{1 \rightarrow 1'聲} + E_{1球U} + E_{1'膜} \\
 &= E_{1 \rightarrow 1'聲} + E_{1' \rightarrow 2聲} + E_{2球U} + E_{2膜} \\
 &= E_{1 \rightarrow 1'聲} + E_{1' \rightarrow 2聲} + E_{2 \rightarrow 2'聲} + E_{2'球U} + E_{2'膜} \\
 &= E_{1 \rightarrow 1'聲} + E_{1' \rightarrow 2聲} + E_{2 \rightarrow 2'聲} + E_{2' \rightarrow 3聲} + E_{3球U} + E_{3膜} \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

若取狀態 2 為基準，可用 $(E_{2'U} - E_{2U})$ 及 $(E_{1'U} - E_{2U})$ 來表示相鄰次球滯空高度差

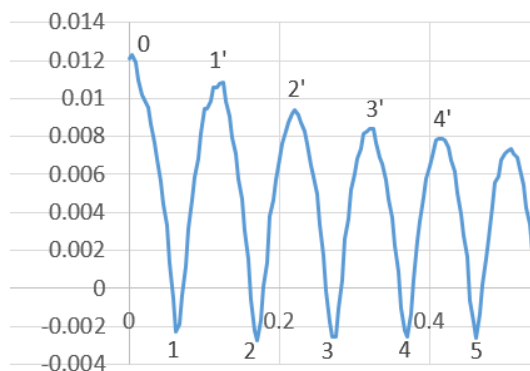


圖 23、膜上球起始高度代號 0、第一次球壓膜凹陷深度代號 1、球反彈高度代號 1'，以此類推。

2. 「第(n+1)次球最高度-第 n 次球壓膜深度」與「第 n 次球最高度-第 n 次球壓膜深度」的關係

(1)圖 24 「第 n 次球最高度-第 n 次球壓膜深度」為球從高處落下的高度差，可視為「球所釋放的能量」；「第(n+1)次球最高度-第 n 次球壓膜深度」為球反彈的高度差，可視為「球從膜回存得到的能量」。紅線為「 $y=x$ 的直線」。

(2)若點落在圖 24 紅線上方(斜率大於 1)，代表此次動態球釋放給膜的能量大於膜回存給動態球的能量，球所減少的位能，將被膜用來增加發聲；若點在紅線之中，前後次能量抵銷，沒有增加發出聲音；若點落在紅線下方(斜率小於 1)，代表此次動態球回存到本身位能的能量反而超過稍早釋放給膜的能量，球的位能增加，不但沒有增加發聲，反而是將前一次待發出的震盪餘音回收。

(3)點在線之上，代表動態球釋放給膜的能量大於膜回存給動態球的能量。如果將動態球比喻成訊號源，此情況表示訊號源可以有效的將能量傳遞給膜，使膜振動而增加有效總發聲量。

(4)點在線之上，代表該次動態球有效將能量傳給膜，我們稱此為「增聲」，而該點稱為「增聲點」。

(5)反之，點在線之下，代表該次動態球回存了膜的能量，我們稱此為「消聲」，即本次動態球因回存能量而消掉了膜待發出的餘音，而該點稱為「消聲點」。

(6)在聲學工程中，若希望增加發聲，則追求增聲點，相反的，若希望降低前次的餘音，則追求消聲點。

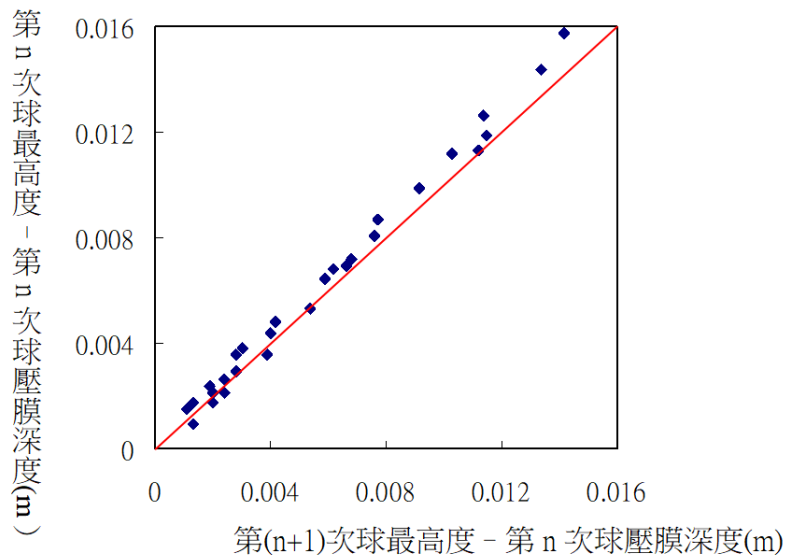


圖 24、「第(n+1)次球最高度 - 第 n 次球壓膜深度」與「第 n 次球最高度 - 第 n 次球壓膜深度」的關係。

(7)若訊號源發聲，但產生的音量卻不如預期(可能太大聲或太小聲)，我們稱此為「失真」。有效避免失真的現象，採行的方法，例如可先測定膜的振盪模式，當需要增加發聲時，則選取圖 24 中增聲點的工作範圍，反之若不想要有多餘的餘音振盪時，則選取圖 24 中消聲點的工作範圍。當然若希望全部的工作範圍皆可達成預期增(消)聲的目標，我們認為可以利用材料改良發聲的穩定性，或使用電子機體設計回饋機制。例如遇到消聲點時，就強化訊號源、遇到增聲點時就抑制訊號源，進行反向的變動，修正失真的問題。

四、建構膜震盪理論及比較頻率的躍遷

$$\left| \frac{\text{實驗值}-\text{理論值}}{\text{理論值}} \right| \times 100\%$$

(一) 預測膜震盪的頻率

本研究比較「實驗數值」與「我們理論建模的數值」，計算方式如上，計算出實驗值與理論值差異的百分比，並作圖比較誤差，觀察理論值與實驗值是否吻合。

1. 連續動態球與彈性膜

單純「膜」的理論震盪頻率 $f_{膜} = \frac{c \cdot \alpha_{mn}}{2\pi a}$

式中 c 為波動在膜上傳播的速度，其中 $c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$ ，而 T 為膜的表面張力、 σ 為膜的面密度。

(1) 為了得到理論值的相關參數，必須測出膜的表面張力和面密度。經實驗得到膜重量、膜承受重量及膜被拉長長度的關係，圖 25 顯示彈性膜承受重量與被拉長長度呈顯著正相關 ($P=0.001^{***}$, $R^2=0.9863$)，並計算出膜的表面張力 T 。

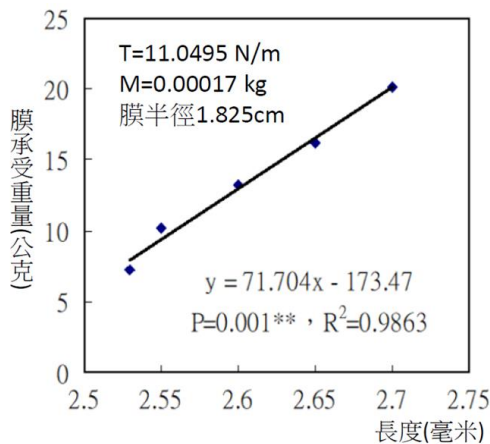


圖 25、彈性膜長度與承受動量的關係。

表 3、彈性膜理論頻率值

		理論頻率
11.0495	0.00017 f	172.60492
11.0495	0.00017	396.99131 O
11.0495	0.00017	622.09689
11.0495	0.00017	847.92165
11.0495	0.00017	1073.7464
11.0495	0.00017	275.44868
11.0495	0.00017	504.86938
11.0495	0.00017	731.41333
11.0495	0.00017	957.95729
11.0495	0.00017	1184.5012

(2) 將膜表面張力與測得的面密度後帶入公式中，可得到理論頻率值(表 3)

(3) 將其中實驗中每次回彈之強度最強的五個頻率依序列出，由於有解析度之誤差，因此將相近之頻率取平均值，得到了最明顯的六個頻率(表 4)。

(4) 將實際值和理論值進行比對，可以找到頻率極為相近的數值，經過換算，誤差值皆小於 3% (表 4)，因此可以證明理論推導的正確。圖 26 顯示理論頻率與實驗頻率呈顯著正相關 ($P<0.001^{***}$, $R^2=0.9988$)，亦證明理論推導正確。

表 4、理論頻率與實驗值之誤差。

實際	理論 Bessel J (m,n)	誤差	
398	(0,2)	396.9913	0.25%
468	(3,1)	458.8414	1.96%
640	(5,1)	630.7271	1.45%
773	(4,2)	795.421	2.90%
891	(5,2)	887.4769	0.40%
1640	(5,5)	1598.034	2.56%

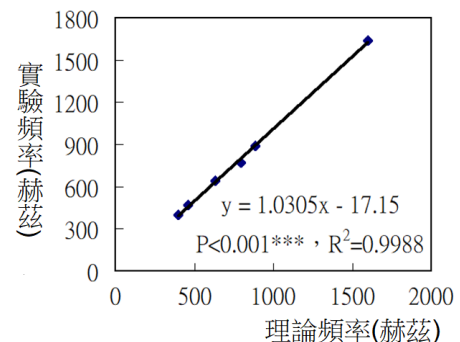


圖 26、彈性膜理論頻率與實驗頻率的關係。

2.連續動態球與超彈性膜

(1)理論計算與對照方法與彈性膜相同，先繪出膜的承受重量與膜長度的關係圖，圖 27 呈顯著正相關($P=0.076†$ ， $R^2=0.8541$)，並計算出膜的表面張力 T 。

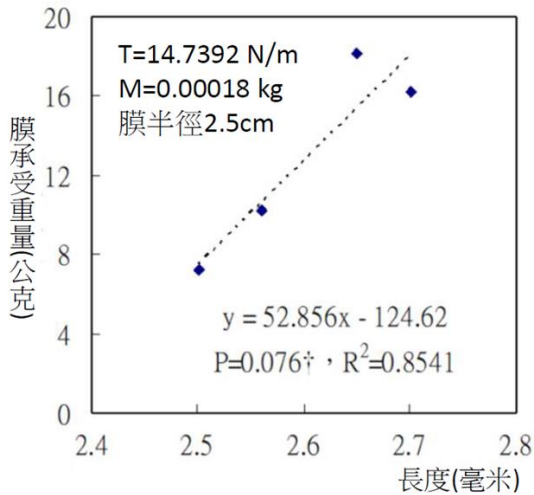


圖 27、超彈性膜長度與承受動量的關係。

表 5、超彈性膜理論頻率值

bessel(n,x)				理論頻率
0,1	2.4	14.7392	0.00018	f
0,2	5.52	14.7392	0.00018	445.5894 O
0,3	8.65	14.7392	0.00018	698.2515
0,4	11.79	14.7392	0.00018	951.72083
0,5	14.93	14.7392	0.00018	1205.1902
1,1	3.83	14.7392	0.00018	309.16801
1,2	7.02	14.7392	0.00018	566.67347 O
1,3	10.17	14.7392	0.00018	820.95003
1,4	13.32	14.7392	0.00018	1075.2266
1,5	16.47	14.7392	0.00018	1329.5031

(2)將膜表面張力與測得的面密度後帶入公式中，可得到理論頻率值(表 5)

(3)接著找出每次回彈之強度最強的五個頻率，並和理論進行對比，誤差皆同樣小於 5% (表 6)，理論得證。圖 28 顯示理論頻率與實驗頻率呈顯著正相關 ($P<0.001***$ ， $R^2=0.9934$)，亦證明理論推導正確。

表6、理論頻率與實驗值之誤差。

實際	理論BesselJ (m,n)		誤差
415.5	(2,1)	414.915	0.14%
462.5	(0,2)	445.589	3.66%
582.5	(1,2)	566.673	2.72%
644	(4,1)	612.685	4.86%
785	(3,2)	787.854	0.36%
873	(4,2)	892.793	2.27%

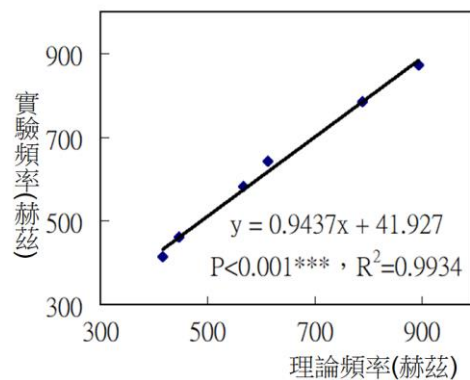


圖 28、超彈性膜理論頻率與實驗頻率的關係。

(二) 連續動態球激發膜震盪頻率的躍遷

- 1.我們找出某次實驗的「前五次反彈」之「最大聲的五個頻率」，共 25 筆數據，和理論進行對比，可以得出這 25 筆數據所對應的理論頻率。再列出相吻合理論頻率的(m,n)值（表 7），經觀察可以發現每次反彈的前五大頻率是沒有一定規律的，且每次反彈都會激發不同的頻率，就算是第一、二次反彈最大聲的頻率(如 468 赫茲)，此頻率也可能會因為下次球和彈性膜的交互作用而被抑制，其他原本較弱的頻率反而變得相對強。
- 2.由於此現象十分特殊且複雜，我們將其命名為膜頻率之「躍遷」，主要是在描述當連續彈跳的球敲擊到正在震動之膜，膜會激發出截然不同之諧音的現象。且經過比對我們發現，躍遷過後之頻率同樣和理論頻率接近，是可以預測的。

表 7、彈性膜前五次反彈最大聲的五種頻率

彈性膜	一反彈	二反彈	三反彈	四反彈	五反彈
	468 (3,1)	468 (3,1)	492 (1,2)	492 (1,2)	398 (0,2)
	773 (7,1)	398 (0,2)	398 (0,2)	398 (0,2)	773 (7,1)
	1664 (6,5)	609 (2,2)	891 (5,2)	891 (5,2)	891 (5,2)
	398 (0,2)	773 (7,1)	633 (5,1)	633 (5,1)	679 (3,2)
	1617 (5,5)	937 (3,3)	797 (4,2)	1289 (2,5)	633 (5,1)

表 8、超彈性膜前五次反彈最大聲的五種頻率

超彈性膜	一反彈	二反彈	三反彈	四反彈	五反彈
	468 (0,2)	468 (0,2)	632 (4,1)	457 (0,2)	468 (0,2)
	632 (4,1)	539 (3,1)	609 (4,1)	609 (4,1)	574 (1,2)
	550 (1,2)	586 (1,2)	656 (2,2)	879 (4,2)	550 (1,2)
	445 (0,2)	656 (2,2)	457 (0,2)	773 (3,2)	668 (2,2)
	867 (4,2)	1136 (4,3)	468 (0,2)	668 (2,2)	890 (4,2)

陸、結論

一、球與膜交互作用之「球」的震盪分析

(一)剛性面：金屬球的彈跳高度隨著時間降低，終靜止於剛性面。（圖 4）

(二)彈性膜和超彈性膜

1.整體趨勢：兩種膜的實驗，球反彈高度整體趨勢皆愈來愈低，最後靜止。（圖 6 和圖 7）

2.細部分析：兩種膜皆有「後次彈跳高度」不一定低於「前次彈跳高度」的現象（圖 6 和圖 7）。

(1)彈性膜五次實驗平均彈跳 28.40 ± 2.61 次，「實驗平均值 \pm 標準差的範圍」涵蓋理論值 28.89 次（圖 5）。膜球接觸次數總和 142 次，其中出現 26 次「球高於前次」情形，佔 18.3%（表 1）。

(2)超彈性膜五次實驗平均彈跳 214.60 ± 31.88 次。五次實驗膜球接觸總和 1073 次，其中出現 384 次「球高於前次」情形，佔 35.7%（表 2）。

二、球與膜交互作用之「膜」的震盪分析

(一)剛性面：產聲漸小，終球停聲無。

(二)彈性膜和超彈性膜

1.整體趨勢：兩種膜整體趨勢皆產聲漸小，直至球停聲無。（圖 10 和圖 11）

2.細部分析：兩種膜皆有「後次產聲不一定小於前次產聲」的現象。（圖 10 和圖 11）

3.球與膜作用之「膜震盪的強度與對應頻率」

(1)彈性膜（圖 15）：每次反彈的頻率大致分為 460 赫茲、750 赫茲兩種區塊，其中又以 460 赫茲左右為大部分的高強度聲頻。此外，聲音不一定會愈來愈小聲，例如：「3 觸反彈產聲最大強度」大於「1 觸反彈產聲最大強度」。

(2)超彈性膜（圖 16）：每次反彈的頻率大致分為 550 至 750 赫茲、1558.9 赫茲兩種區塊，其中又以 620 赫茲為大部分的高強度聲頻。聲音不一定會愈來愈小聲。

三、球與膜交互作用之「球與膜」的震盪分析

- (一)「整體趨勢，彈跳次數越多，球的總能量漸漸消耗，彈跳高度越來越低（圖 6、圖 7），聲音越來越小（圖 10、圖 11）。」但「細部分析」，圖 10 及圖 11 顯示聲音強度可能高於前次，表 1 和表 2 顯示球反彈有 18.3%和 35.7%後次高於前次。
- (二)圖 18 顯示球滯空高度及膜震盪產聲強度呈顯著正相關（ $P<0.001^{***}$ ， $R^2=0.8632$ ），可知「整體趨勢」球從越高點落下，產聲越大。但「細部分析」，圖 12、圖 13、圖 19 的綠框和黃框，高度與產聲強度關係不顯著（ $P>0.05^{ns}$ ）。
- (三)研究過程中，我們曾經解析，膜的震動可簡單分成「向上凸」或「向下凹」兩種狀態。認為當球落下時若膜正向上凸，球膜撞擊產聲大，力量抵消，球反彈高度會減低。反之，球落下時膜也正向下凹，則球膜撞擊產聲較小，球膜力量相加，球反彈高度增加（圖 12）。然而，經過圖 20、圖 21、圖 22 的比對，無法對應上述論述。我們苦思，轉由「能量學的角度」提出新的詮釋。
- (四)透過能量守恆，我們可以細細描繪出主要的能量項「動態球能量」、「膜能量」、「產聲能量」三者的關係，如圖 23 中的關係式。

$$\begin{aligned} E_{0 \text{ 球}U} &= E_{1 \text{ 球}U} + E_{1 \text{ 膜}} \\ &= E_{1 \rightarrow 1' \text{ 聲}} + E_{1 \text{ 球}U} + E_{1' \text{ 膜}} \\ &= E_{1 \rightarrow 1' \text{ 聲}} + E_{1' \rightarrow 2 \text{ 聲}} + E_{2 \text{ 球}U} + E_{2 \text{ 膜}} \\ &= E_{1 \rightarrow 1' \text{ 聲}} + E_{1' \rightarrow 2 \text{ 聲}} + E_{2 \rightarrow 2' \text{ 聲}} + E_{2' \text{ 球}U} + E_{2' \text{ 膜}} \\ &= E_{1 \rightarrow 1' \text{ 聲}} + E_{1' \rightarrow 2 \text{ 聲}} + E_{2 \rightarrow 2' \text{ 聲}} + E_{2' \rightarrow 3 \text{ 聲}} + E_{3 \text{ 球}U} + E_{3 \text{ 膜}} \\ &= \dots \end{aligned}$$

- (五)我們藉由此物理關係式模型得知，實驗中「相鄰次球滯空高度差」代表動態球能量的釋放與回存概念，指出膜的「增聲點」及「消聲點」（圖 24）。而在聲學工程中，我們可以藉由選取某特定的工作範圍，或是適時在「消聲點施予強化」或「增聲點施予弱化」的回饋機制，或是選擇不同的材膜對應的振盪模式，達成我們在聲學處理上的目標。

四、建構膜震盪理論及比較頻率的躍遷

(一)預測膜震盪的頻率

測量膜表面張力與面密度後帶入公式中，可得到理論頻率值。我們將實際值和理論值進行比對，經過換算，彈性膜誤差皆小於 3%（表 4），超彈性膜誤差皆小於 5%（表 6）；另外，實際值和理論值皆呈顯著正相關（圖 26 和圖 28， $P < 0.001^{***}$ ， $R^2 = 0.9988$ 和 0.9934 ）。皆證明理論推導正確。

(二)連續動態球激發膜震盪頻率的躍遷（表 7 和表 8）

透過比對我們可以發現頻率「躍遷」的現象。因為球連續敲擊正在震盪中的膜，而激發出了新的頻率，便出現了頻率躍遷的現象。而此躍遷過後的頻率同樣與理論值接近。

柒、未來展望

- 一、我們認為利用彈性膜的特點，能設計出更進階的遊樂器材。在不同區塊利用不一樣的彈性材質，組成有不同彈性的彈床，讓使用者有更豐富更不一樣的感受。
- 二、若經過特殊處理與調整後，讓膜在震盪的同時發出不同頻率的聲音，則能擁有聽覺上的效果，例如彈奏出一段旋律等。
- 三、喇叭聲源如果固定，經過膜震盪之後，因為膜震盪會產生多重頻率，因此會有失真的問題，這也是我們研究中，可以在工程這部份的應用。期望未來能對連續聲音激發膜震盪時導致的頻率的變化，能有更進一步的發現，未來聲源的訊號以可以不失真的方式自然被播出。
- 四、若我們能預測球彈跳中高度的變化，並進一步利用軟體等工具修正其不穩定性，我們認為可以利用材料改良膜發聲的穩定性，並使用電子機體設計回饋機制，先預測聲音的強度變化、頻率躍遷情形，進行回饋的變動，修正失真的問題。如此一來，就能有效在工程學上排除失真或消聲問題，從而使聲音訊號的傳遞更加達成我們要的目標。

捌、參考文獻資料

- 吳予文、劉子恩、劉雨牧（2020）。颶風球。中學生小論文，第 1091015 梯次。
- 張宇庭、梁媛棋、林宜儒（2020）。循環擺。中學生小論文，第 1091015 梯次。
- 鄭穎祺（2022）。膜音傳腦—金屬球彈跳聲。中小學科學展覽會，051810
- 邱皓政（2005）。量化研究與統計分析。五南圖書出版股份有限公司。
- 林秀豪（主編）（2010）。選修物理 II(全)力學二與熱學。龍騰文化。
- Eichwald, B., Argentina, M., Noblin, X., & Celestini, F. (2010). Dynamics of a ball bouncing on a vibrated elastic membrane. *PHYSICAL REVIEW E*, 82(016203),1-5.
- Russell, D. A. (2010). Basketballs as spherical acoustic cavities. *American Journal of Physics*, 78(6),549-554.
- Boas, M. L. (2006). *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (3rd ed). John Wiley & Sons, Inc.
- Herman, R. (2023.2.17). 6.2:Vibrations of a Kettle Drum - Mathematics LibreTexts.
[https://math.libretexts.org/Bookshelves/Differential_Equations/Introduction_to_Partial_Differential_Equations_\(Herman\)/06%3A_Problems_in_Higher_Dimensions/6.02%3A_Vibrations_of_a_Kettle_Drum](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Differential_Equations/Introduction_to_Partial_Differential_Equations_(Herman)/06%3A_Problems_in_Higher_Dimensions/6.02%3A_Vibrations_of_a_Kettle_Drum)
- <https://www.google.com/url?sa=i&url=http%3A%2F%2Fdemonstrations.wolfram.com%2FVibrationOfARectangularMembrane%2F&psig=AOvVaw1xl6u8-WCVHp51WQyJyNh1&ust=1678587503271000&source=images&cd=vfe&ved=0CBAQjRxqFwoTCMisuPDn0v0CFQAAAAAdAAAAABAg>

【評語】 052406

本作品針對金屬球與氣球膜之碰撞，探討非彈性碰撞及所產生之聲波特性和，包括金屬球彈跳次數與高度、氣球膜凹陷深度、球與膜相互作用及產生聲波頻率與強度等，發現球後次彈跳高於前次情形，以及產聲強度後次超越前次現象。本研究將塑膠氣球剪開後，以橡皮筋套於容器瓶子開口端，使用木製桌面、較鬆弛氣球膜及拉得更緊氣球膜，分別代表剛性、彈性、超彈性膜，應科學驗證其適當性，是否因改變氣球膜之拉緊鬆弛程度，進而影響試驗量測結果之正確性，另外，撰寫內容稍嫌分散，不易閱讀了解。

作品海報

動態球與膜的交互震盪

摘要

本研究旨在探究動態球與剛性、彈性、超彈性膜的交互作用，研究球與膜連續碰撞後「球的彈跳」與「膜震盪、產聲」兩種面向。我們分析球的彈跳，發現僅由前七次的趨勢可估算彈跳次數，預測值與數據接近。

另發現球在彈性面上有「後次彈跳高於前次」的情形，且「產聲強度有後次超越前次」的現象。這兩種不定性現象，我們以能量交換大致解釋。

再建立膜震動動力理論，用貝索函數預測撞擊時膜產生的多組頻率，對比數據後誤差小於5%。此外膜震動時若再次被敲擊，膜將激發出另一組頻率，且仍在理論預測之內，我們稱之為膜頻率的「躍遷」。

透過研究「動態物（球）與彈性膜的交互震盪」的能量交換與「躍遷」現象，以期未來在薄膜震盪工程或聲學失真問題中作更多應用。

研究動機

遊玩室內遊樂場的彈床設施時，我們不斷嘗試讓自己向上跳，卻偶然發現彈床表面看似規則的震盪，卻不一定能使自己越跳越高。造成此現象的原因引發我們的好奇，再加上此特殊現象無法單純用簡單的物理現象解釋，因此，我們決定針對彈性材質的震盪做深入一步研究。

研究過程及方法

1. 將塑膠氣球剪開，並拉開套在開口適中容器的開口端，形成封閉的彈性膜，以橡皮筋將氣球膜固定住。
2. 使用金屬球從固定距離落下，用手機錄影拍攝、錄製球和膜交互作用過程，直至金屬球靜止於膜上。
3. 使用 Tracker、Audacity、Phyphox、Excel 進行音檔分析。
4. 以「SPSS 統計軟體」統計，「球膜接觸次數」與「球滯空高度、產聲強度」是否有顯著關。

1. 先使用木製桌面作為剛性面，重複進行多次實驗。實驗數據將與後面兩種彈性膜進行比較。
2. 再使用較鬆弛的氣球膜，作為彈性膜，套在容器瓶口依照實驗流程，重複進行多次實驗。
3. 最後使用另一個拉得更緊的膜，作為超彈性膜，套在容器瓶口依照實驗流程，重複進行多次實驗。

研究目的

- 一、追蹤球的彈跳高度變化
(球與膜交互作用下之「球」的震盪分析)
- 二、測量聲音組成
(球與膜交互作用下之「膜」的震盪分析)
- 三、球與膜交互作用下之「球與膜」的震盪分析
- 四、建構膜震盪理論及比較頻率的躍遷



研究結果

一、追蹤球的彈跳高度變化（球與膜交互作用下之「球」的震盪分析）

1. 分別使用剛性面、彈性膜、及另一個拉得更緊的超彈性膜，後二者套在容器瓶口。金屬球在固定距離彈性膜的高度落下，重複多次實驗。
2. 將影片匯入Tracker進行金屬球的軌跡分析。

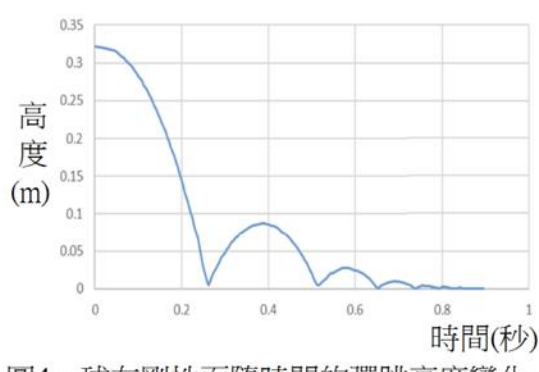


圖4、球在剛性面隨時間的彈跳高度變化。

我們觀察距離為45公分，考慮一般正常肉眼視力的角分辨率為0.00147 rad，依據Rayleigh criterion 瑞立判別標準(Rayleigh, 1879)，並將肉眼不可分辨的高度 $y=0.06615(\text{cm})$ 代入，得 $x=28.89$ 我們預測「球可以彈跳28.89次後停止於膜上」。

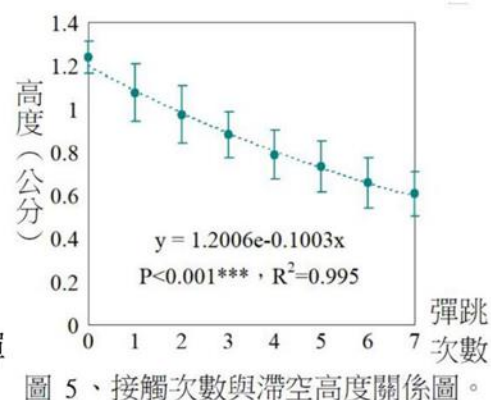


圖5、接觸次數與滯空高度關係圖。

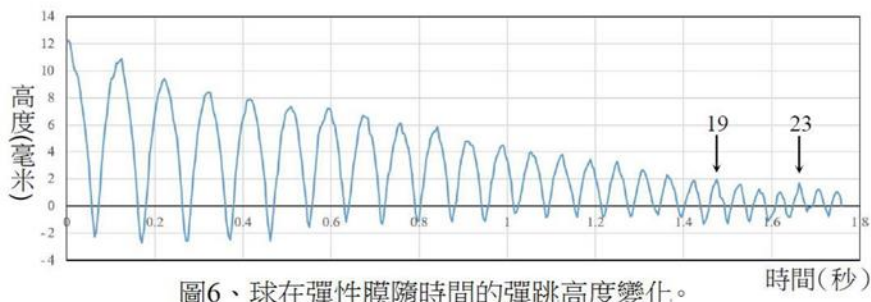


圖6、球在彈性膜隨時間的彈跳高度變化。

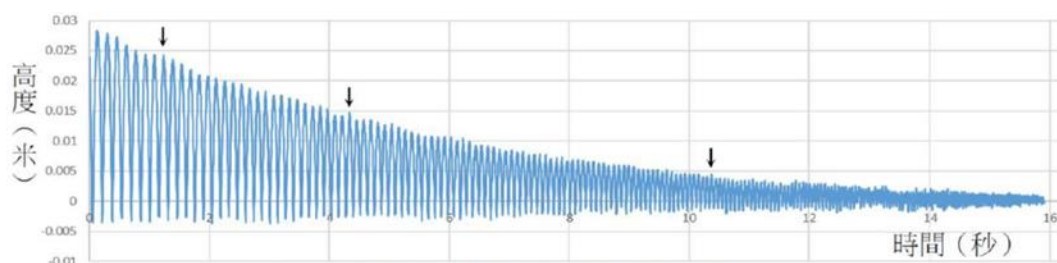


圖7、球在超彈性膜隨時間的彈跳高度變化。

表1、彈性膜實驗數據。

	實驗一	實驗二	實驗三	實驗四	實驗五	平均	總和
球膜接觸總次數	29	27	32	29	25	28.40±2.61	142
球高於前次次數	5	8	8	3	2	5.20±2.77	26 (佔18.3%)
第幾次高於前次	8,15,19,23,27	13,15,17,20,24,25,26,27	1,16,17,18,20,22,25,27	14,21,25	19,23		

表2、超彈性膜實驗數據。

	實驗一	實驗二	實驗三	實驗四	實驗五	平均	總和
球膜接觸總次數	166	241	223	201	242	214.60±31.88	1073
球高於前次次數	53	103	89	64	75	76.80±19.80	384 (佔35.7%)

二、測量聲音組成（球與膜交互作用下之「膜」的震盪分析）

1. 先只測量音檔和測量環境的背景噪音，發現背景強度幾乎為零，因此，我們可以排除考慮背景干擾。
2. 將錄音檔匯入Audacity，取每次彈跳的前0.086秒，用Phyphox手機軟體，將聲音轉成時變率數據匯入Excel。
3. 以Excel傅立葉分析功能，繪製膜的頻率和強度關係圖。
4. 下一次彈跳的前0.086秒的資料畫另一張圖，以此類推。

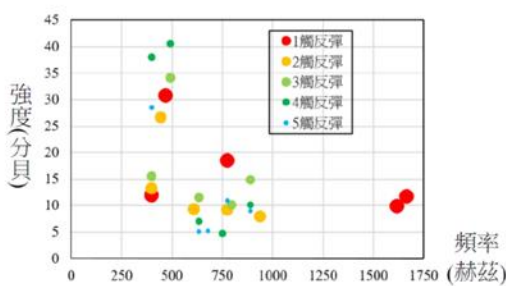


圖15、五次接觸的「前五大強度」傅立葉分析圖。

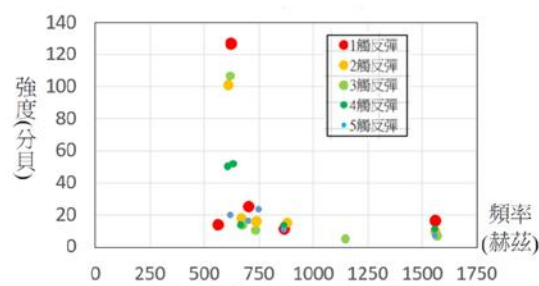


圖16、五次接觸的「前五大強度」傅立葉分析圖。

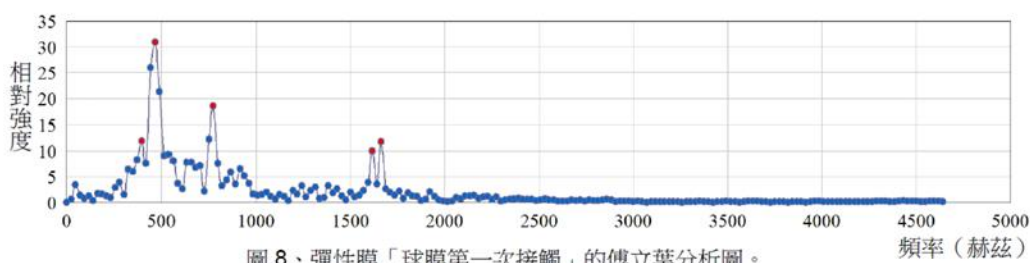


圖8、彈性膜「球膜第一次接觸」的傅立葉分析圖。

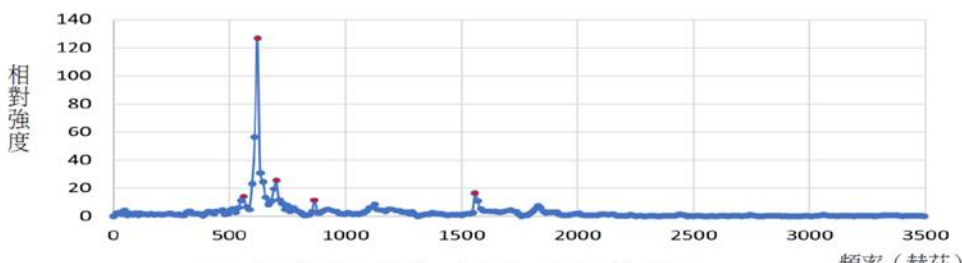


圖9、超彈性膜「球膜第一次接觸」的傅立葉分析圖。

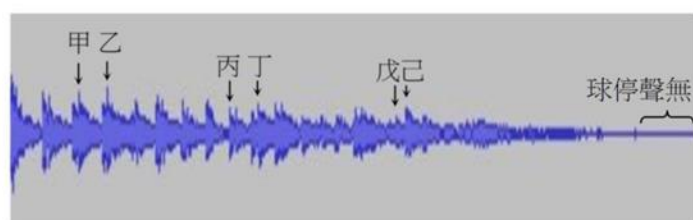


圖10、球與膜的交互作用，隨時間產聲強度變化。
(球與彈性膜接觸29次)

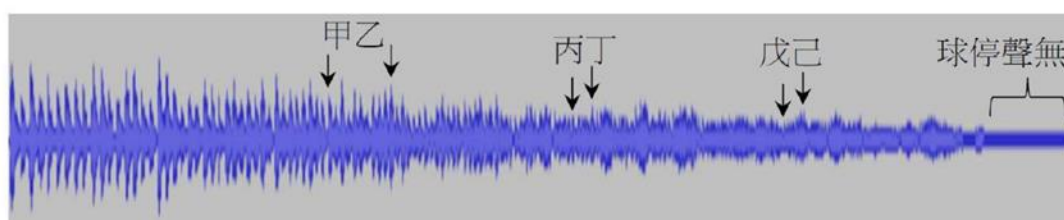


圖11、球與膜的交互作用，隨時間產聲變化。(球與超彈性膜接觸201次)

三、球與膜交互作用下之「球與膜」的震盪分析

- 圖6、圖7、圖10、圖11顯示，「整體趨勢」彈跳次數越多，球的總能量漸漸消耗，彈跳高度越來越低，聲音越來越小；但「細部分析」，球的反彈高度可能後次高於前次，聲音強度可能後次高於前次。
- 圖17顯示球滯空高度與球壓膜凹陷深度呈顯著正相關 ($P < 0.001^{***}$, $R^2 = 0.8221$)，可知「整體趨勢」，球從越高點落下，球壓膜深度越深。
- 圖18顯示球滯空高度及膜震盪產聲強度呈顯著正相關 ($P < 0.001^{***}$, $R^2 = 0.8632$)，可知「整體趨勢」球從越高點落下，產聲越大。但「細部分析」，圖12、圖19的綠框和黃框，高度與產聲強度關係不顯著 ($P > 0.05^{ns}$)。

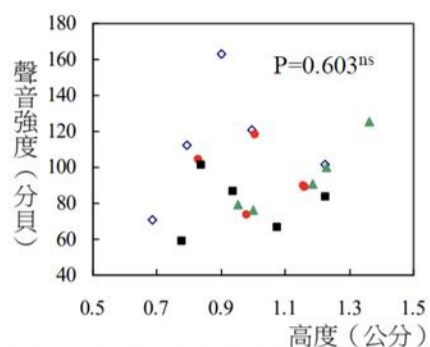


圖12、球滯空高度與產聲強度關係圖。四次實驗用不同顏色符號表示。

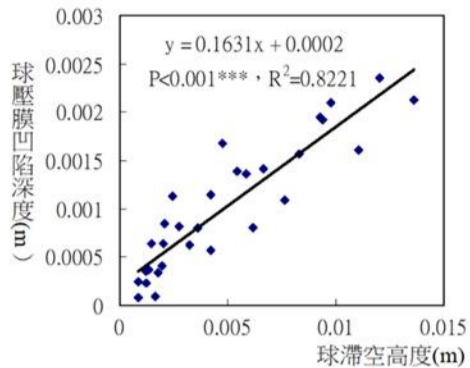


圖17、球滯空高度與球壓膜凹陷深度關係圖。

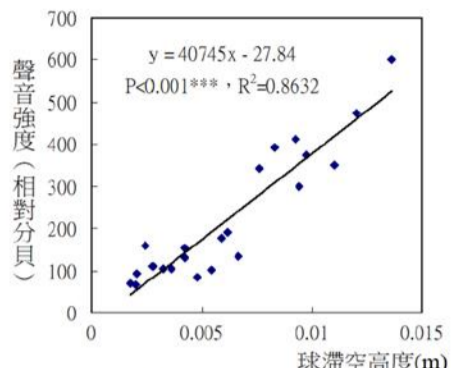


圖18、球滯空高度與產聲強度關係圖。

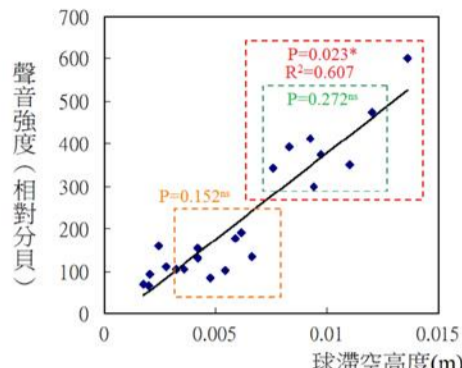


圖19、球滯空高度與產聲強度關係圖。

- 研究過程中，我們曾經解析，膜的震盪可簡單分成「向上凸」或「向下凹」兩種狀態。認為當球落下時若膜正向上凸，球膜撞擊產聲大，力量抵消，球反彈高度會減低。反之同理。然而，經過圖20、圖21、圖22的比對，無法對應上述論述。因此我們轉由「能量學的角度」提出新的詮釋。

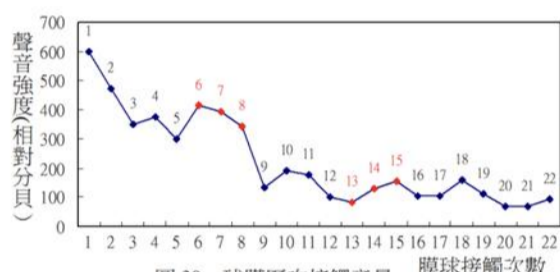


圖20、球膜歷次接觸音量。膜球接觸次數

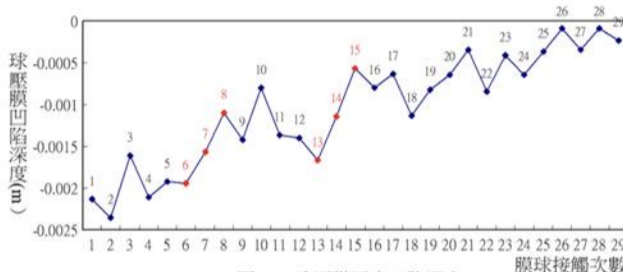


圖21、球壓膜歷次凹陷深度。膜球接觸次數

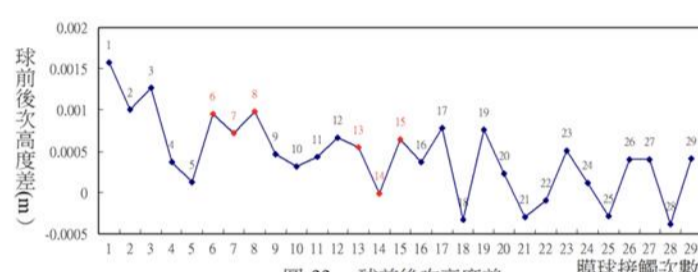


圖22、球前後次高度差。膜球接觸次數

- 透過能量守恆，我們可以細細描繪出主要的能量項「動態球能量」、「膜能量」、「產聲能量」三者的關係，如圖23中的關係式。

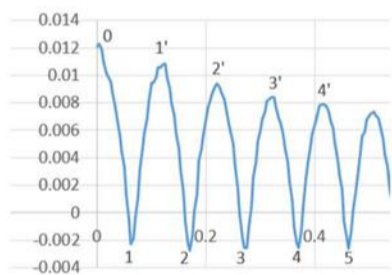


圖23、膜上球起始高度代號0、第一次球壓膜凹陷深度代號1、球反彈高度代號1'，以此類推。

如圖23，設

- (1) $E_{0球U}$ 為初始狀態時球儲存的重力位能
- (2) $E_{n球U}$ 為球從 $(n-1)'$ 落至 n 時的重力位能
- (3) $E_{n'球U}$ 為球從 n 彈至 n' 時的重力位能
- (4) $E_{n膜}$ 為球在 n 時，膜的能量
- (5) $E_{n'膜}$ 為球在 n' 時，膜的能量
- (6) $E_{n \rightarrow n' 聲}$ 為球在 n 至 n' 期間產生的聲能
- (7) $E_{n' \rightarrow (n+1) 聲}$ 為球在 n' 至 $(n+1)$ 期間產生的聲能

則依能量守恆的概念

$$\begin{aligned}
 E_{0球U} &= E_{1球U} + E_{1膜} \\
 &= E_{1 \rightarrow 1' 聲} + E_{1'球U} + E_{1'膜} \\
 &= E_{1 \rightarrow 1' 聲} + E_{1' \rightarrow 2 聲} + E_{2球U} + E_{2膜} \\
 &= E_{1 \rightarrow 1' 聲} + E_{1' \rightarrow 2 聲} + E_{2 \rightarrow 2' 聲} + E_{2'球U} + E_{2'膜} \\
 &= E_{1 \rightarrow 1' 聲} + E_{1' \rightarrow 2 聲} + E_{2 \rightarrow 2' 聲} + E_{2' \rightarrow 3 聲} + E_{3球U} + E_{3膜} \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

若取狀態2為基準，可用 $(E_{1'U} - E_{2U})$ 及 $(E_{2'U} - E_{2U})$ 來表示相鄰次球滯空高度差

- 我們藉由此物理關係式模型得知，動態球能量的釋放與回存概念，指出膜的「增聲點」及「消聲點」(圖24)。在聲學工程中，我們可藉由選取某特定的工作範圍，適時在「消聲點施予強化」或「增聲點施予弱化」的回饋機制，或是選擇不同的材膜對應的振盪模式，達成我們在聲學處理的目標。

四、建構膜震盪理論及比較頻率的躍遷

第一部分：頻率建模

1. 理論建模

膜的振動遵守波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ ， u 為膜在 z 方向上的振動位置，且為 (x, y, t) 的函數，在邊界 $\partial\Omega$ 上 $u = 0$ 。將其轉換至極座標上，可得 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)$ ， u 則為 (r, θ, t) 的函數，且在邊界 $r=a$ 時， $u=0$ 式中 c 為波動在膜上傳播的速度，其中 $c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$ ，而 T 為膜的表面張力、 σ 為膜的面密度。

- (一) 使用分離變數法求以上波動方程式的解 $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$

代入上式，再同除 $R\Theta T$

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R'(r)}{rR(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{r^2 \Theta(\theta)} = K = -\lambda^2 \dots \text{式一}$$

可得 $T(t) = A \cos(c\lambda t) + B \sin(c\lambda t) \dots \text{式二}$ (A, B 由膜的初始條件決定)

- (二) 重寫式一 $\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R'(r)}{rR(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{r^2 \Theta(\theta)} = -\lambda^2$

$$\text{同乘 } r^2 \Rightarrow \lambda^2 r^2 + \frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \frac{r R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = L = m^2 \dots \text{式三}$$

可得 $\Theta(\theta) = C \cos(m\theta) + D \sin(m\theta) \dots \text{式四}$ (C, D 由膜的邊界條件決定)

回到式三，並同乘 $R(r)$

$$\rightarrow r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda^2 r^2 - m^2) R(r) = 0 \dots \text{式五}$$

(式五) 為 Bessel's equation，其解為 $J_m(\lambda r)$ 和 $N_m(\lambda r)$

$$\therefore R(r) = E J_m(\lambda r) + F N_m(\lambda r)$$

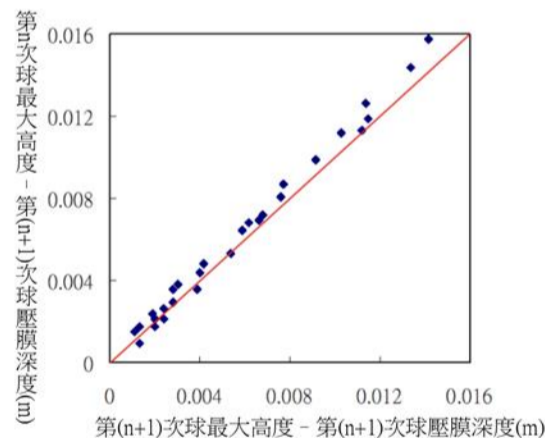


圖24、「第(n+1)次球最大高度 - 第(n+1)次球壓膜深度」與「第n次球最大高度 - 第(n+1)次球壓膜深度(m)」的關係。

又 E 、 F 可由膜的邊界條件決定，此邊界條件為 $R(a)=0 \rightarrow 0 = E J_m(\lambda a) + F N_m(\lambda a)$ 而 $J_m(\lambda a) = 0$

由此繪出 Bessel J function 找出使 $J_m=0$ 的根，這樣的根有許多解，我們命名為 α_{mn}

$$\therefore \lambda a = \alpha_{mn} \quad \text{則 } \lambda = \frac{\alpha_{mn}}{a} \leftarrow \text{再回到式二}$$

$$T(t) = A \cos(c\lambda t) + B \sin(c\lambda t)$$

$$\therefore 2\pi f = c\lambda = c * \frac{\alpha_{mn}}{a}$$

故偵測到單純「膜」的理論震盪頻率 $f_{膜} = \frac{c * \alpha_{mn}}{2\pi a}$

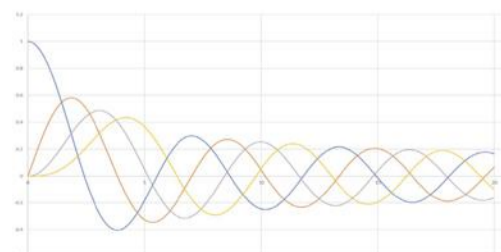


圖14、Bessel J 函數圖形

2. 測量膜的張力和面密度

$$f_{膜} = \frac{c \cdot \alpha_{mn}}{2\pi a} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

1. 在氣球膜上做長方形記號，長 2.5 公分、寬 0.5 公分，再將其取下剪開。
2. 利用電子秤測量膜的重量。
3. 將膜夾在鐵架上，下方懸掛不同重量的水袋。
4. 繪製膜的伸長量與懸掛重量關係圖。
5. 以斜率求得伸長 2.5 公分所需的重量，並計算出張力。

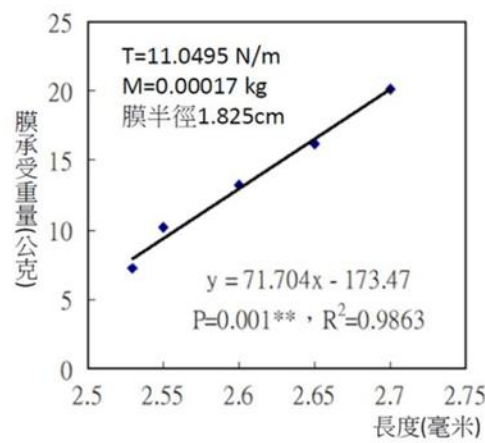


圖 25、彈性膜長度與承受重量的關係。

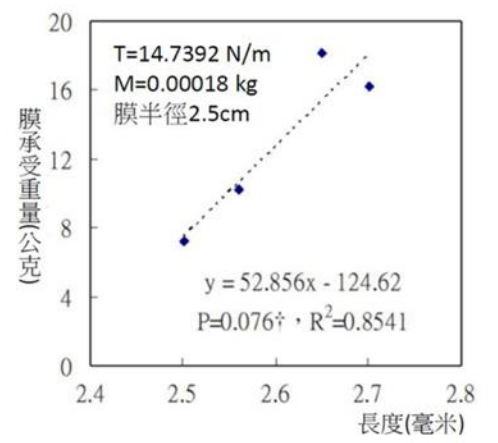


圖 27、超彈性膜長度與承受重量的關係。

3. 預測膜震盪的頻率：將實際值和理論值進行比對，誤差值皆小於5%（表4和表6），可以證明理論推導的正確。

(1) 連續動態球與彈性膜

表4、理論頻率與實驗值之誤差。

實際	理論BesselJ (m,n)	誤差
398	(0,2)	396.9913 0.25%
468	(3,1)	458.8414 1.96%
640	(5,1)	630.7271 1.45%
773	(4,2)	795.421 2.90%
891	(5,2)	887.4769 0.40%
1640	(5,5)	1598.034 2.56%

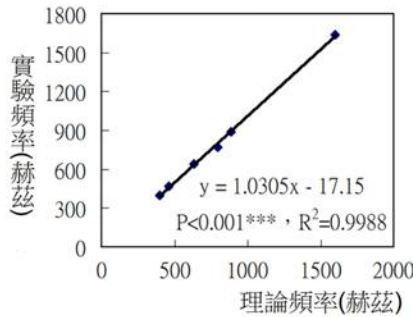


圖 26、彈性膜理論頻率與實驗頻率的關係。

(2) 連續動態球與超彈性膜

表6、理論頻率與實驗值之誤差。

實際	理論BesselJ (m,n)	誤差
415.5	(2,1)	414.915 0.14%
462.5	(0,2)	445.589 3.66%
582.5	(1,2)	566.673 2.72%
644	(4,1)	612.685 4.86%
785	(3,2)	787.854 0.36%
873	(4,2)	892.793 2.27%

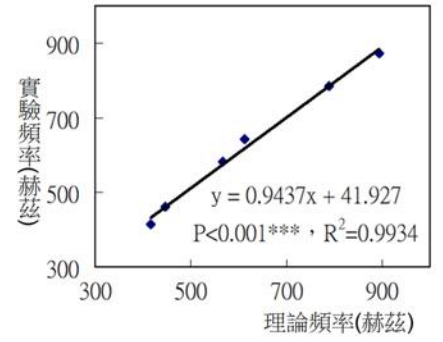


圖 28、超彈性膜理論頻率與實驗頻率的關係。

4. 連續動態球激發膜震盪頻率的躍遷：由比對可發現頻率「躍遷」現象，而此躍遷過後的頻率同樣與理論值接近。

表 7、彈性膜前五次反彈最大聲的五種頻率

一反彈	二反彈	三反彈	四反彈	五反彈
468 (3,1)	468 (3,1)	492 (1,2)	492 (1,2)	398 (0,2)
773 (7,1)	398 (0,2)	398 (0,2)	398 (0,2)	773 (7,1)
1664 (6,5)	609 (2,2)	891 (5,2)	891 (5,2)	891 (5,2)
398 (0,2)	773 (7,1)	633 (5,1)	633 (5,1)	679 (3,2)
1617 (5,5)	937 (3,3)	797 (4,2)	1289 (2,5)	633 (5,1)

表 8、超彈性膜前五次反彈最大聲的五種頻率

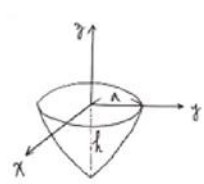
一反彈	二反彈	三反彈	四反彈	五反彈
468 (0,2)	468 (0,2)	632 (4,1)	457 (0,2)	468 (0,2)
632 (4,1)	539 (3,1)	609 (4,1)	609 (4,1)	574 (1,2)
550 (1,2)	586 (1,2)	656 (2,2)	879 (4,2)	550 (1,2)
445 (0,2)	656 (2,2)	457 (0,2)	773 (3,2)	668 (2,2)
867 (4,2)	1136 (4,3)	468 (0,2)	668 (2,2)	890 (4,2)

第二部分：強度建模

膜震動遵守波動方程式，在極座標上，膜的振動位移為 $u(r, \theta, t)$

$$\therefore u = R(r)\Theta(\theta)T(t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{mn} J_m(\lambda r) \cdot e^{im\theta} \cdot e^{i \frac{c \cdot \alpha_{mn}}{a} t}$$



當球撞擊膜至最低點時，設此時 $t=0$ ，膜應該呈高度對稱圓錐狀，此時膜隨空間變化的

$$\text{函數關係為 } u = \sqrt{\frac{h^2 r^2}{a^2} - h}$$

意思就是

$$z = \sqrt{\frac{h^2 r^2}{a^2} - h} = R(r)\Theta(\theta)T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{mn} J_m(\lambda r) \cdot e^{im\theta} \cdot 1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{mn} J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} \cdot r\right) e^{im\theta} \quad (n, m \text{ 為整數})$$

$$= E_{01} J_0\left(\frac{\alpha_{01}}{a} \cdot r\right) + E_{02} J_0\left(\frac{\alpha_{02}}{a} \cdot r\right) + \dots + E_{11} J_1\left(\frac{\alpha_{11}}{a} \cdot r\right) e^{i\theta}$$

$$+ E_{12} J_1\left(\frac{\alpha_{12}}{a} \cdot r\right) e^{i\theta} + \dots + E_{-1,1} J_{-1}\left(\frac{\alpha_{-1,1}}{a} \cdot r\right) e^{-i\theta} + E_{-1,2} J_{-1}\left(\frac{\alpha_{-1,2}}{a} \cdot r\right) e^{-i\theta}$$

+ ...

$$\text{而 } E_{mn} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a r \left(\sqrt{\frac{h^2 r^2}{a^2} - h}\right) \cdot J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{a} \cdot r\right) \cdot e^{-im\theta} \cdot dr \cdot d\theta}{\frac{a^2}{2} J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}$$

(註：此處的 α_{mn} 為第 n 個使 $J_m = 0$ 的根)

最後，各頻率對應的平均強度正比於 $E_{mn} \cdot E_{mn}^*$ 。

令 $t=0$ 時，球撞擊膜至最低點、膜呈高度對稱圓錐狀。

當 $m = \pm 1, \pm 2 \dots$ 時，其中 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} d\theta$ 處理後積分值為 0。

表示當球撞擊到膜，使膜變成圓錐狀時，不存在 $m = \pm 1, \pm 2 \dots$ 的解。

而原先 m 的解為 $m \in \mathbb{Z}$ ，因此排除掉 $m = \pm 1, \pm 2 \dots$ 後，在初始條件 $t = 0$ 時，只存在 $m = 0$ 的解。

即動態球只激發 E_{0n} (n 為正整數) 的振盪模式。

所以 $m = 0$ 代入，則 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot d\theta = 2\pi$

$$\text{帶回原式：得 } E_{0n} = \frac{\int_0^a r \left(\sqrt{\frac{h^2 r^2}{a^2} - h}\right) \cdot J_0\left(\frac{\alpha_{0n}}{a} \cdot r\right) \cdot dr}{\frac{a^2}{2} J_1^2(\alpha_{0n})}$$

其中存在一個疑問，為何實驗測到的 m 並非全為 0？

我們推測是當 $t = 0$ 時，

膜並非且對稱的圓錐狀開始震盪，

因此在 $t = 0$ 時，膜的空間及時間函數需再改寫，

便可存在 $m = \pm 1, \pm 2 \dots$ 的解。

未來展望

1. 利用彈性膜的特點，用不一樣的彈性材質，組成不同彈性的彈床，讓遊樂器材更多樣性。

2. 若經過特殊處理與調整後，讓膜在震盪的同時發出不同頻率的聲音，則能擁有聽覺上的效果，例如彈奏出一段旋律等。

3. 固定喇叭聲源，由於膜震盪後會產生多重頻率，會有失真的問題。這也是我們研究中，可以在工程上的應用。期望未來能對連續聲音激發膜震盪時導致的頻率變化，能有更進一步的發現，使未來聲源的訊號可由不失真的方式被自然播出。

4. 若我們能預測球彈跳中高度的變化，並進一步利用軟體等工具修正其不穩定性，我們認為可以利用材料改良膜發聲的穩定性，並使用電子機體設計回饋機制，先預測聲音的強度變化、頻率躍遷情形，進行回饋的變動，修正失真的問題。如此一來，就能有效在工程學上排除失真或消聲問題，從而使聲音訊號的傳遞更加達成我們要的目標。