

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組 工程學(一)科

佳作

052301

結合費氏數列應用於腳踏車平面拼圖塑膠模型
之共用模座與頂出設計

學校名稱：新北市立三重高級商工職業學校

| | |
|---|------------------|
| 作者： 職三 劉柏呈 職三 王奕翔 職三 許建彰 | 指導老師： 陳彥廷 |
|---|------------------|

關鍵詞：共用模座設計、費氏數列、黃金角

摘要

塑膠射出是塑膠製品中最基本的製造方法，塑膠原料經過融化以後進入模具內等產品冷卻以後再由頂出板與頂出銷頂出產品，然而在頂出的過程中頂出銷需要擺放的位置需要由產品的形狀和排列方式而定，造成每一組塑膠產品都需設計不同頂出位置，所以進而嘗試使用費氏數列的方法來排列出頂出位置。

參考市面上的塑膠模具發現，大部分塑膠模具都有不同的頂出位置，為了因應不同的產品而設計，故本次利用腳踏車平面拼圖塑膠模型設計頂出費氏列設計裝置製作腳踏車拼圖，所以在設計塑膠模具中可以降低頂出排佈困難，減省時間也節省材料的花費。

壹、前言

模具是大量生產所必需的製造過程。模具是以一個固定的型腔決定形狀，而後將所需材質灌入其中形成與型腔相應之成形品，而此製造過程由於多數的設計與材料性質皆固定，因此在利用模具量產時僅需控制設備相關作動參數即可高速成形。常見的模具可大致分為沖壓模具以及塑膠模具，其中塑膠模具又是在所有大量成形品中佔絕大多數，因其塑膠材料成本低廉，成形條件較低，僅需加溫就能擠入模具中產生相應的形狀，因此已大量應用於任何價格低廉的量產成品上。

而塑膠模具中，最廣泛應用的方式即為塑膠射出製程，其包括塑膠射出機以及塑膠射出模具。塑膠射出機控制塑料混煉溫度、速度以及控制塑膠料進入模具內的相關條件，而塑膠射出模具則是配合塑膠射出機的座動控制所設計的模具，包含上下模座、頂出銷、頂出板以及模角等，並配合塑膠射出機的自動化行程，可以實現塑膠料在模具內成形後，經由頂出機構使成品自動落下，並再進行下次的成形循環，實現量產目的。

本次使用費氏數列設計頂出就是為了可以改變傳統的頂出設計。利用費氏數列與黃金角的設計排列組合，使得放置頂出孔達到最高的密集度。在傳統頂出設計中，不但要根據產品的大小以及排列佈局，才能設計模仁大小以及頂出位置，不僅僅是這樣，以傳統的塑膠模具而是要整組重新設計，並且是從模仁到模座在到頂出都必須經過精密的計算以及測試，從而改良傳統排佈設計，解決傳統頂出陣列型腔和流道之間固定的排列關係，所形成的設計限制。

一、動機

由於塑膠射出模具中，使成品落下的頂出過程會與成形品設計有所關連，所以頂出位置、頂出機構等等，皆會和成形品模穴的形狀尺寸、位置等等會相互影響，使得頂出位置在設計過程中必須有所取捨。

然而，在設計產品的時候，需要考慮固定的頂出機構或者需要重新設計頂出機構上述兩者都需要與模穴互相取捨，避免兩者之間在射出時互相干涉，所以必須取得之間平衡既能順

利射出又可以不被干涉，在之間必須花費許多時間測試模仁、塑膠料成形條件以及成形品數量之間來回調整。因此，進而嘗試改進頂出設計，結合費氏數列之數學模式，使模穴設計與頂出設計之間，能夠更有彈性，密集且非規則的排列能夠提供更多可能的調整空間，進而降低來回調整的次數以及時間。

二、文獻探討

在生物世界如何用數學來理解及解釋生命？(Stewart, 2010)花朵、莖枝觀察到碎形的現象。費氏數列是每個數都是前兩個數相加。而花瓣、種子的數目可以用費氏數列描寫，其植物原基特別的生長模式，所以原基與原基間隔相當開，並排成一條捲繞非常緊密的螺線。

Leonardo Fibonacci 在某一次觀察兔子生長數量的情形時，比如每個月兔子數量分析，可以得到數列 1、1、2、3、5、8、13，其中每一項的值為前兩項的相加，也就是說 $1+1=2$ 、 $1+2=3$ 、 $2+3=5$ 以此類推。發現兔子生長久了，繁殖完的數量是繁殖前數量的約 1.6 倍，即費氏數列。(吳作樂, 2018)此外，玫瑰花瓣、鸚鵡螺外殼、鳳梨都具備相同的黃金比例規律並可透過觀察植物、花蕊來觀察黃金角。(Livio, 2004)

向日葵頭部的花蕊排列方式可由費氏數列近似 (Wikipedia contributors., 2023) (Segerman, 2010) (Ridley, 1982) (Vogel, 1979)，假設為種子所佔的圓盤面積相同以及任意相鄰的每個種子與原點之間都具有相同的角度，並在文獻中提供了三種數值做測試，第一種數值結果為中心被均勻分佈，但在遠離原點後發現種子被集中到一條線上。第二種數值得出結果為螺線排列，而第二種螺線排列比第一種更密集，但第三種數值得出結果為雙螺線排列，第三種雙螺線排列比前兩種更密集，由此可知第三種為最佳排列。而本次利用第三種排列方式的理念以及已證實的兩種假設與模具融合，運用在模座以及上頂出板頂出設計排列達到最高密集度，達到預期成果。

模具包括沖壓模具以及塑膠模具兩大部分，其中塑膠模具討論包括塑膠成型機以及成形品各部位構造以及講解不同成型法模具的運作方式。(詩議訓、邱士哲, 2020) (張文華, 2016) (許浦章, 1979)而模具結構包括上下模座、模仁以及頂出板等。而頂出裝置與方法，可由既有之產品規格、形狀以及大小來訂定頂出方式，本塑膠成品以及共用模座的特性採用圓形頂出

銷。此外，射出成型用模具的設計裡有塑膠模具的設計與流道系統的設計其修正對策，而這些對策提供我們在製作過程中處理問題的方針。(陳介聰, 2001)

三、預期成果





本設計預期成果為

- 設計並製作應用費氏數列頂出設計之共用模座
- 設計腳踏車平面拼圖塑膠模型
- 以腳踏車平面拼圖塑膠模型結合本模座進行頂出設計

利用費氏數列排出雙螺旋的形狀，使模座相對於規則排列之傳統彈性模座，能夠取得更為密集的排列方式，並且提供不規則平面拼圖模型更多的頂出可能性，從而解決來回調整拼圖模形排列所花費的複雜手續及時間，亦同時降低出錯的可能性。

貳、研究設備及器材

表 1 研究設備與器材

| 名稱 | 敘述 | 使用範圍 |
|------|---|--|
| 電腦 | CPU AMD Ryzen 7 PRO 3700U w/Radeon Vega Mobile Gfx | 繪製零件、產生 NC 檔、 撰寫報告 |
| 工具母機 |  | 切料 備料 PIN 加工、豎澆道附件 |
| 軟體 |  | 繪製零件 3D 圖 產生 NC 檔 |
| |  | 撰寫報告 |
| 工具 |  | 模仁加工 間隔塊加工 上固定板加工 下固定板加工 模座加工 上模板加工 上頂出板加工 |

參、研究方法與過程

1. 從課程中遇到的困難作為動機，訂定方向後蒐集預期成果所需之資料。
2. 透過蒐集資料發現目前都是依照塑膠產品形狀與構造來設計頂出板與頂出銷。
3. 設計塑膠產品來測試是否可以不用因為圖形或者產品的限制而設計單獨的頂出位置，實現不管是在哪個位置都可以頂出，達到省時省材料的目的。
4. 產生費氏數列相關之座標數值，並且在 Creo 軟體中進行模型建立。
5. 在確認產品設計後開始利用各種工作母機(銑床、磨床、銑床 CNC)，製作模座，並且將其工件組立至機台上進行射出頂出，隨後進行測試，如有狀況不符合預期，應立即更改，直到完成。

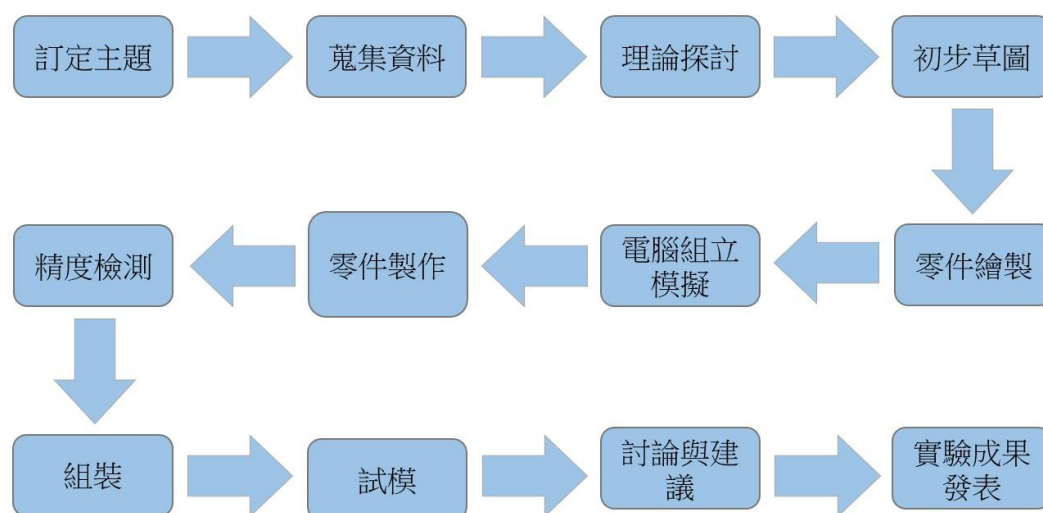


圖 1 研究流程

一、費氏數列簡介 – 費氏數列生成與性質

費氏數列在大自然中非常常見，屬於等比級數成長的一種規律；仔細觀察雛菊花蕊的排列，如圖 2(a)，會發現它們也是成等角螺線形。這種排列可以有兩種看法：左旋的和右旋的。大部份雛菊的左旋數和右旋數是 21 和 34，正是費氏數列的相鄰兩項。松果、鳳梨的鱗片也有類似的排列，而排列數各為 5 和 8 以及 8 和 13，也是費氏數列的相鄰兩項。向日葵也是

一樣，如圖 2(b)，通常左旋數和右旋數各為 34 和 55，更大的向日葵則有 89 和 144，甚至 144 和 233 的排列數，都是費氏數列中相鄰的兩項。(毛爾, 2014)



(a)



(b)

圖 2 自然世界中的費氏數列 (a)雛菊花蕊示意圖 (b)向日葵示意圖

費氏數列以數學公式表示，可以表示如公式(1)所示

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad (1)$$

滿足 $F_1 = F_2 = 1$ 且對任意 $n \in \mathbb{N}$ 稱為費氏數列。經過簡易計算可得出它的前幾項為 {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...}。與已熟知的等比、等差、階差數列相比，有趣的是它的一般項 F_n ，而其可表示為公式(2)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (2)$$

廣義費氏數列只需要滿足公式(2)即可，並且以 F 表示所有費氏數列中數字所形成集合。而有趣的是，費氏數列有以下性質

$$\begin{aligned} F_{n+2} + G_{n+2} &= (F_n + F_{n+1}) + (G_n + G_{n+1}) \\ &= (F_n + G_n) + (F_{n+1} + G_{n+1}) \end{aligned} \quad (3)$$

公式(3)中 $F_{n+2} + G_{n+2}$ 可以表示為前兩項分別相加 $(F_n + G_n)$ 以及前一項 $(F_{n+1} + G_{n+1})$ 分別相加後再加總，此外還有如公式(4)之性質

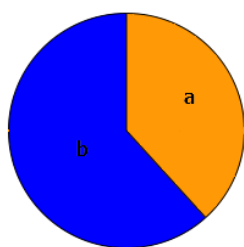
$$\begin{aligned} \alpha F_{n+2} &= \alpha(F_n + F_{n+1}) \\ &= \alpha F_n + \alpha F_{n+1} \end{aligned} \quad (4)$$

公式(4)表示的是乘法分配律，在 F_{n+2} 項放大 α 倍等同前兩項 F_n 以及前一項 F_{n+1} 分別放大 α 倍後加總。

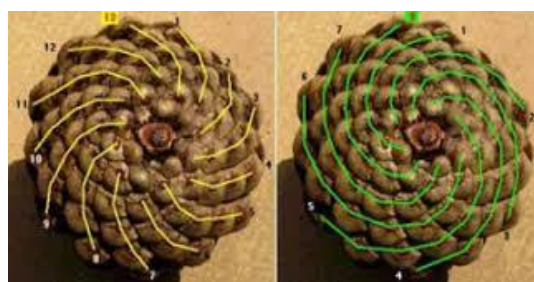
二、黃金角與黃金比例簡介 – 黃金角條件

在幾何學中有一個角稱黃金角，如圖 3(a)，而這個黃金角在生活中都很常見，最經典的例子就是松果，不但很常看見而且也很特殊，如圖 3(b)，從俯視看法可以看出松果有兩個雙螺旋的形狀，而兩相鄰的點所組成的角度就是黃金角。

黃金表的構造如下：把長度 c 的圓周分成兩個部分為 a 和 b ，也就是 $c = a + b$ ，而它們的比例剛好符合長度為 b 的弧與圓心所組成的角，而大的圓心角的角度為 222.49° ，而小弧長的角度約為 137.51° 稱為黃金角，以弧度表示為 $\frac{2\pi}{\phi^2}$ 。其中約為 **1.618** 為黃金分割。(Livio, 2004)



(a)



(b)

圖 3 黃金角示意 (a)圓心角舉例 (b)對數螺旋示意

黃金表的構造如下：把長度 c 的圓周分成兩個部分為 a 和 b ，如圖 3(a)所示，也就是 $c = a + b$ ，而它們的比例剛好符合 $\frac{c}{a} = \frac{a}{b}$ 長度為 b 的弧與圓心所組成的角，而大的圓心角的角度為 222.49° ，而小弧長的角度約為 137.51° 稱為黃金角，以弧度表示為 $\frac{2\pi}{\phi^2}$ 。其中 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 約為 1.618 為黃金分割。

三、費氏數列與黃金分割之關聯性 – 費氏數列收斂特性

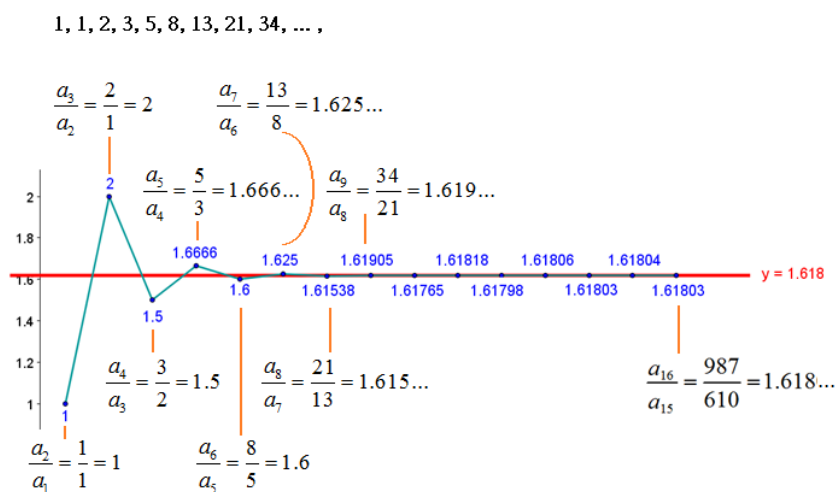


圖 4 費氏數列與黃金分割 (吳作樂, 2018)

圖 4 為費氏數列中相鄰兩數字相除所得之比例值表現，我們觀察其數字變化會發現其不斷朝一固定的比例變化，意思是費氏數列在越靠近後面的數字相鄰之間放大倍數越靠近依固定數值，

可設 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = r$ ，得公式

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \quad (5)$$

$$\frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \quad (6)$$

$$1 + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \quad (7)$$

$$1 + \frac{1}{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}, \text{ 已設 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = r \quad (8)$$

$$1 + \frac{1}{r} = r \quad (9)$$

$$r^2 - r - 1 = 0 \quad (10)$$

由一元二次方程式公式解公式(10)得 $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 負數不合理，取正數 $r \doteq 1.618$ 而 1.618 正是黃金比例的數值。

四、費馬螺旋與費氏數列、黃金角之關聯性 – 等面積填充條件

費馬螺旋是阿基米德螺線的一種，而其利用黃金角與費氏數列特性形成如同向日葵中心花蕊的螺旋線，如公式(11)

$$r = \pm\theta^{1/2} \quad (11)$$

而極座標表示如公式(12)

$$r^2 = a^2\theta \quad (12)$$

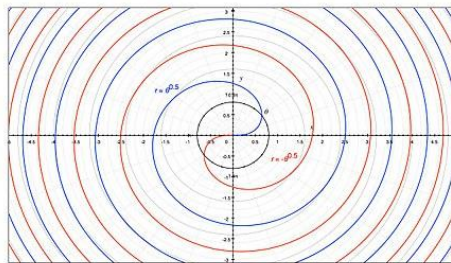


圖 5 費馬螺線示意圖，藍線數學式： $r = \sqrt{\theta}$ ，紅線數學式： $r = -\sqrt{\theta}$ (Wikipedia contributors. , 2023)

費馬螺旋為對數螺線的一種，而我們所設計的費氏數列裡的螺旋線是由對數螺旋線上幾何裡遞增半徑的切線圓盤所形成的圖案，下列為等角螺線的公式，我們利用等角螺線的公式來求出種子之間佔有面積是否相同，在經過以下的推導過程中可以看到種子之間所佔有的面積是一樣的。

$$r = a\sqrt{\varphi} \quad (13)$$

$$\varphi = k \times 137.5^\circ, k \in \mathbb{N}$$

其中 φ 為黃金角的倍數， r 為螺線半徑， a 為任意數。若關心特定半徑下以圓點為圓心之圓盤面積則有公式

$$r^2\pi = a^2\pi\varphi \quad (14)$$

若代入 φ 展開則得到

$$r^2\pi = a^2\pi(k \times 137.5^\circ)$$

$$\text{令 } \delta = 137.5^\circ = \frac{137.5^\circ}{180^\circ}\pi \text{ 及 } a^2\delta = c$$

$$r^2\pi = c\pi k \quad (15)$$

若將其展開觀察可得到

$$(r^2\pi)_1 = c\pi \times 1 = n_1$$

$$(r^2\pi)_2 = c\pi \times 2 = n_2$$

...

則

$$n_2 - n_1 = (c\pi \times 2) - (c\pi \times 1) = c\pi$$

由此可知，由黃金角倍數產生之半徑 r ，其相對於原點所圍面積，依據其倍數以 $c\pi$ 等倍數增大，符合文獻中假設。如圖 6 所示

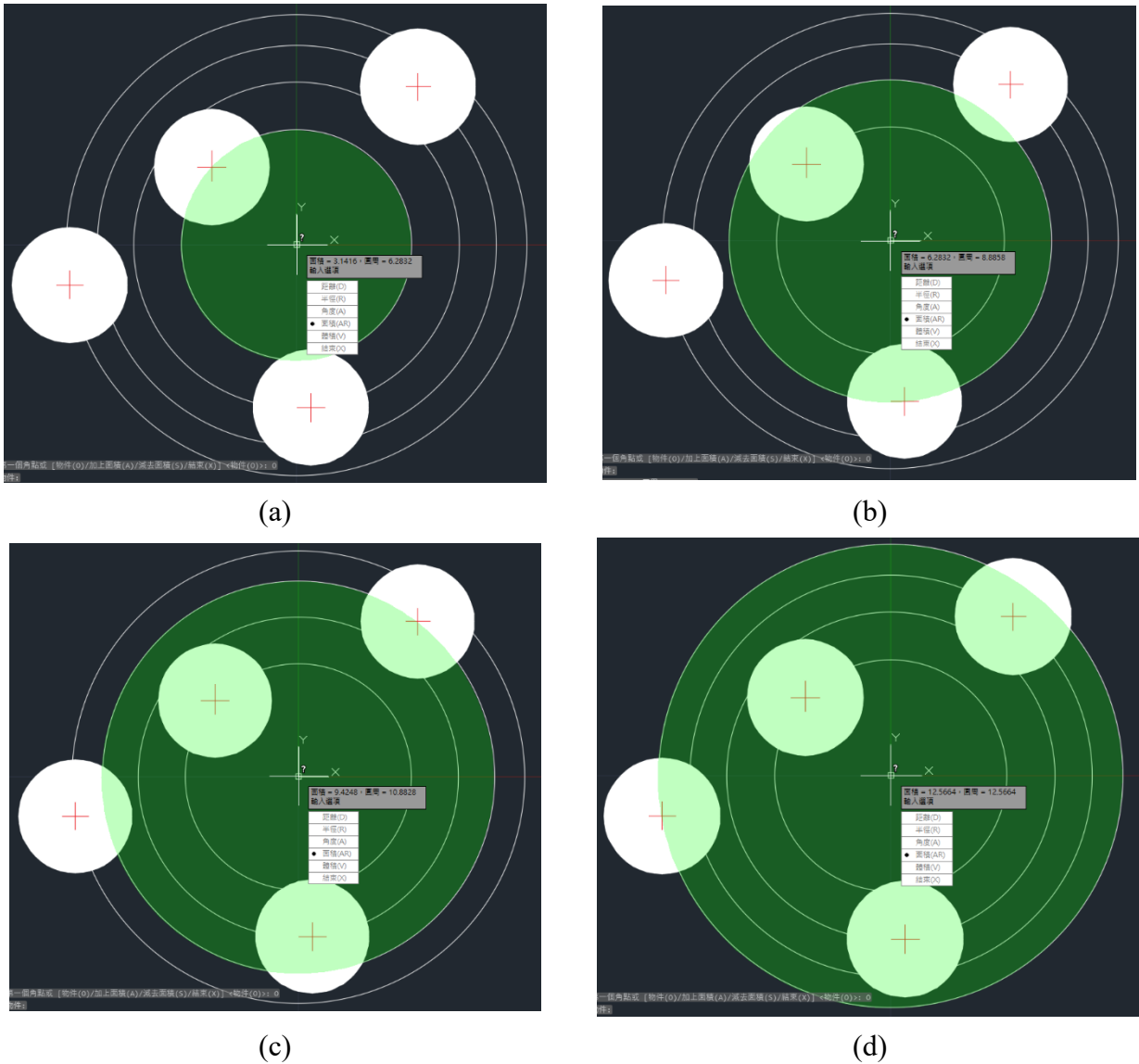


圖 6 以費馬螺線公式產生得到之極座標位置所圍之面積。(a) $k=1$ 時所圍面積。(b) $k=2$ 時所圍面積。(c) $k=3$ 時所圍面積。(d) $k=4$ 時所圍面積。

其中圖 6(a)為公式(15)代 $k=1$ 時所得之面積，令 $c=1$ ，得到面積為 3.14 mm^2 。而圖 6(b)為 $k=2$ 時所得之面積，得到面積為 6.28 mm^2 。圖 6(c)為 $k=3$ 時所得之面積，得到面積為 9.42 mm^2 。圖 6(d)為 $k=4$ 時所得之面積，得到面積為 12.56 mm^2 。而若取其面積之差值，則可得到相差之圓環面積皆為 3.14 mm^2 。

五、模座共用設計

模座共用設計在小型塑膠成品模具中經常使用，在盡可能不變動模座的情況下，更換其內部模仁，使單一模座可以相容不同的成形品，並僅需替換其內部的模仁塊，即可調整射出之成形品，同時不必重新製備另一高強度模座，從而節省空間。而共用模座設計，特別是在學校的學習場合，可以讓同學僅設計模仁，而不需要考慮複雜的模座整備，而在短時間內可以使模具聚焦在成形品設計。

六、應用黃金角與費氏數列於頂出孔設計

在成品頂出時，需配合頂出銷及頂出機構設計選用；通常最常見的頂出銷分為圓形及方形頂出銷。圓形頂出銷以及模仁本身的製造都很容易，所以絕大部分頂出設計都採用圓形頂出銷 (張文華, 2016)。僅有部分塑膠模射出時形狀較複雜或較注重外觀的透明件成品，如窄而長的肋，或側面肉厚較薄的成品，使用圓形就沒辦法頂出，也防止頂出時因力量太過集中而損壞成品，因此上述的成品使用方形頂出銷就較為優良。考慮一般情形及加工難易，使用圓形頂出銷在加工時會比方形頂出銷較為優良。因此，本設計以圓形頂出銷作為設計之基礎組件。

此外，由於頂出孔設計時必須考慮塑膠成形品於模仁擺放位置 (許浦章, 1979)。而模仁的大小由於共用模座設計而有大小限制，使得塑膠成形品於模仁內部的擺放位置同時受限，而在此情形下，塑膠成形品擺放位置若考慮不周全時，可能造成既有共用模座之頂出陣列無法落於其上，使得成形品無法頂出，或必須在有限之模仁空間內重複修改成形品排佈位置，造成設計困擾。

費氏數列可以讓頂出孔在模板上盡可能的填滿，就可以讓模仁設計時可以較方便的設計，以免後續加工遇到頂不到的問題，導致事後必須調整塑膠件的尺寸。

黃金角能有效率的密排，其原因在於發散角 360 度乘上無理數即不能寫成剛好是分數的數，舉例而言，若圓周為的 5 圓心角等分 5 等分，而另一個取每段 $\pi/5$ 等分，將會使 5 等分每條線跟 $\pi/5$ 等分的每條線不會重疊，**黃金比例 $\phi \approx 1.618$ 可以有理數構成之費氏數列進行逼近**。數列之差為黃金比例 ϕ 在逼近時收斂速度，然而通過費氏數列逼近時，其收斂速度緩慢，若取費氏數列前三項 $\{2/3, 3/5, 5/8\}$ 化為小數 $\{0.666, 0.6, 0.625\}$ 其間之差分別為 0.066 以及 0.025 以此類推，當此差值歸零時收斂速度為 0 而同時意味著**相鄰兩項次已達黃金比例**。

然而**收斂至黃金比例時所需的數列項次較其他無理數來的多**，因此黃金比例不容易用有理數來逼近，在密排時相對於其他的無理數進行排列時，**更不易得到相同或近似的位置點**，而應用於**頂出位置設計亦不會與設計之尺寸產生公因數關係**導致一整區段預設之頂出位置無法使用。本設計利用黃金角的特性，並且配合公式(13)獲得有效率的空間填充的模式，並應用於頂出位置的設計。

肆、研究結果

以塑膠拼圖為載體，測試傳統頂出與結合費氏數列頂出是否符合原本預期。而本次設計的目的除了省材料省錢以外最大的效益是在設計上省下頂出設計的時間，從產品設計到模具設計再到最後的產品射出測試，不但省材料也省時間，製造上更簡潔有力除去不必要的浪費，為了就是可以讓之後大家在設計模具的時候可以更輕鬆並且有更多時間可以去改良產品。

腳踏車是日常就會接觸到的交通工具之一，既不燃油燃煤，又不費電，更不會排放廢氣或製造噪音，被公認是既節能又不會汙染環境的最環保交通工具，剛好腳踏車的零件多且多數的零件是屬於細長的，就更能發揮出共用模座的用意，所以我們選擇用腳踏車拼圖來當作頂出件。

一、腳踏車拼圖設計過程

首先畫出腳踏車大致的外觀，再用 Creo Parametric 把每一個零件畫出，在繪畫過程中我們發現了不能少於 3mm 否則頂出銷頂不到，並確認零件不會相互干涉，確認無干涉後進行 3D 列印後進行組裝，如圖 7 所示



(a)



(b)

圖 7 腳踏車拼圖設計 (a)手繪草圖 (b)Creo 腳踏車組合圖

而由草圖設計到 Creo 設計後，進行 3D 列印後得到如圖 8(a)所示之結果，並依據設計方式進行組裝得到如圖 8(b)所示之結果。



(a)



(b)

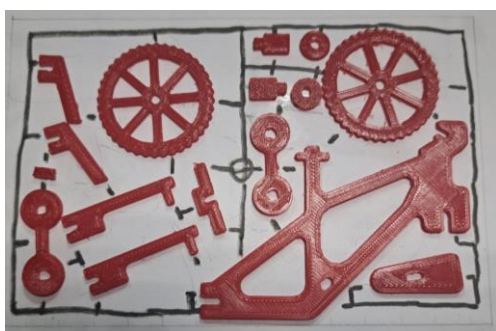
圖 8 腳踏車拼圖 3D 列印結果 (a)腳踏車零件 (b)組立結果

由圖 8(b)組裝完成的腳踏車模型，確認本次腳踏車拼圖模型之設計無誤，可以完成組裝。

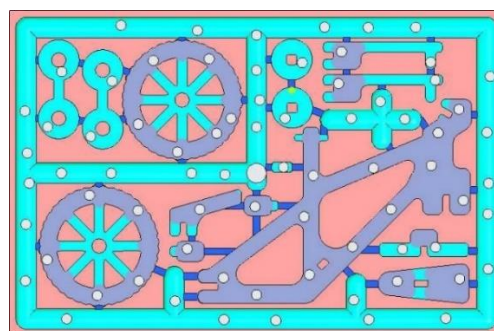
二、腳踏車拼圖模具設計

成形品因為大小結構所以無法隨意擺放，必須在容易細小斷裂或者容易變形處進行頂出，導致傳統無法隨意擺放頂出銷而影響產品排列。從設計節省了時間成本，還可以降低設計頂出到製造頂出的金錢成本。

由於塑膠成品進行射出時，必須考慮其在模具中的空間以及位置；首先必須將所有設計好的腳踏車零件排入適當的範圍當中，並且必須考慮流道走向使得腳踏車模型的每一個分項零件都能確保有流路可以使塑膠材料填充製模具中，使其能夠充型完成。在 3D 列印完成後，利用 3D 列印零件任意在白紙上大致排佈流路的結果如圖 9(a)所示，而於 Creo 軟體中進行更精確地排佈則如圖 9(b)所示。



(a)



(b)

圖 9 流道排佈 (a)利用 3D 列印件與紙本草稿排佈 (b)利用 Creo 模型與模板排佈零件及頂出

圖 9(b)中，白色圓點為頂出位置，其是利用費氏數列所設計之共用模座及頂出位置，可提供分散均勻的頂出。

三、模具裝載與射出機操作

模具在執行射出作業之前，必須先將模具裝載至射出機台之上，而裝載過程有許多注意事項，以確保模具裝載後能夠正常射出，並進行本實驗。首先必須先組裝模具，按照下頂出板、間隔塊、頂出板、頂出銷、共用模座(母模座)、模仁、公模座以及上固定板，按照順序排列，並且根據設計之共用模座的頂出設計，將模仁內的頂出位置與共用模座對齊組裝。而後，將模具利用天車移動至射出機上鎖固，調整射出機台基座位置以適應模厚，並確認鎖模壓力是否達到必要之數值。最後，控制射出機之射出機構，先將射出機構之殘料射膠清除，其後重新加料，將射出管座進置於模具豎澆道後射出並進行保壓，而後開模頂出，即可完成共用模座設計之射出驗證。如圖 10 所示。

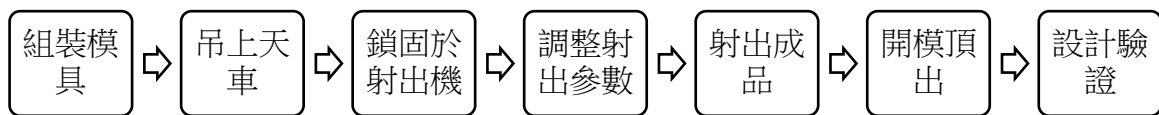


圖 10 模具裝載過程

四、應用費氏數列產生之密排位置

由前述公式(13)所使用之既有模座進行設計，並將其轉換為 x-y 坐標，進行鑽孔。頂出位置孔總共為 708 孔，而其部分頂出位置如表 2 所示

表 2 費氏數列密排位置

| x | y |
|--------------|--------------|
| 7.965043817 | -1.765807751 |
| -4.856129904 | 6.935272336 |
| -1.143874296 | -8.688587435 |
| 6.933442864 | 5.817849265 |
| -9.320643391 | 0.40694815 |
| 6.788225045 | -6.788225155 |
| -0.430220655 | 9.853674959 |

....

伍、討論

一、費氏數列頂出排佈之通用模座與腳踏車拼圖模具設計、製作與分析

本設計製作二板式塑膠模具，製作之結果如圖 11 所示。

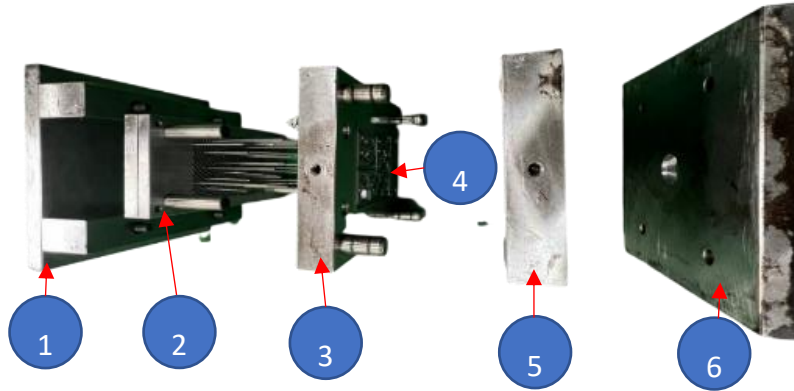


圖 11 實際模具組立

圖 11 為本設計之二板式塑膠模具其中分別有上模座、母模座、下固定板、上固定板、模座、模仁、頂出板，其中 1 號標籤為下固定板以及間隔塊， 2 號標籤為應用費氏數列頂出設計之頂出板如圖 13(a)所示； 3 號標籤為應用費氏數列頂出設計之模座如圖 13(b)所示， 4 號標籤為應用費氏數列頂出設計於腳踏車拼圖之模仁，如圖 12 所示； 5 號標籤為上模座， 6 號標籤為上固定板。

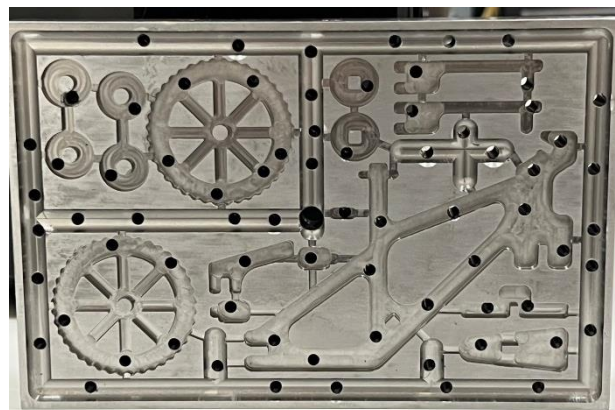
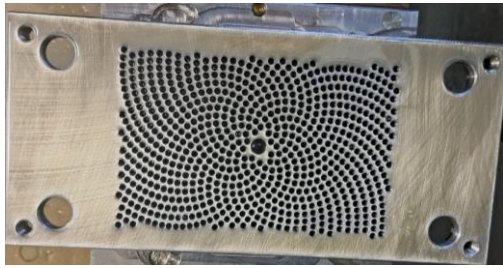
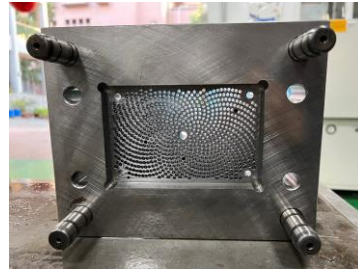


圖 12 應用費氏數列頂出設計於腳踏車拼圖之模仁設計

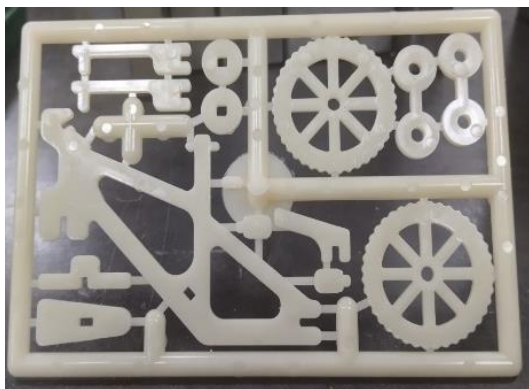


(a)

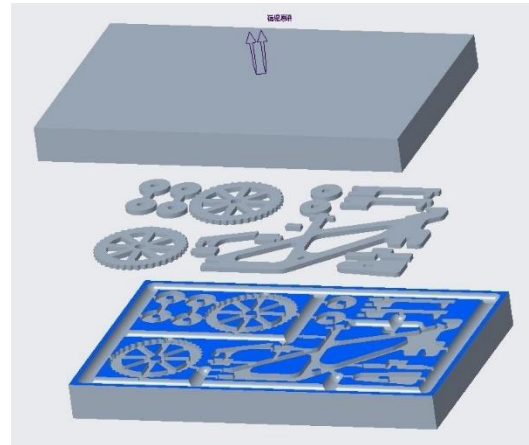


(b)

圖 13 模座設計之結果 (a)運用費氏數列頂出設計之頂出板設計 (b)運用費氏數列頂出設計之共用模座設計



(a)



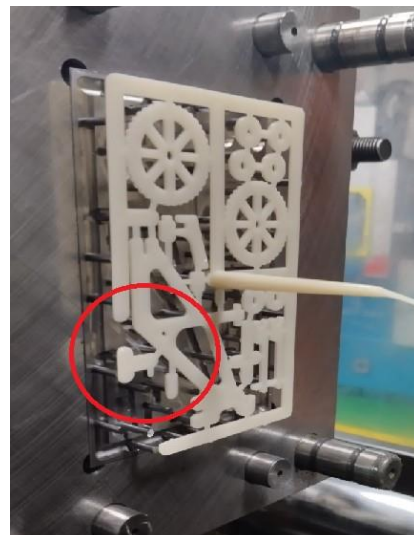
(b)

圖 14 頂出結果對比 (a)頂出成果 (b)預估頂出成果圖

圖 14(b)為預期頂出成果，而圖 14(a)為實際的射出並且成功頂出的成果。而射出及頂出的過程則如圖 15 所示



(a)



(b)

圖 15 腳踏車模型射出後頂出過程 (a)完整塑膠填充結果 (b)不完整塑膠填充結果

圖 15 為腳踏車模型射出後頂出過程，從圖中可以看到塑膠成形品經由本次目標費氏數列頂出設計，可以提供其均勻的頂出過程，並且將成形品成功頂出，而沒有破損 (陳介聰, 2001)。此外，當塑膠材料填充條件不適當時，如圖 15(b)，在圖中可以看到有兩塊小零件並無支撐，由於本設計之頂出設計之密集填充特性，在其中小零件無支撐的時候，都可以提供頂出銷，並且可以將無支撐的小零件順利頂出。頂出與組裝的成品如圖 16。

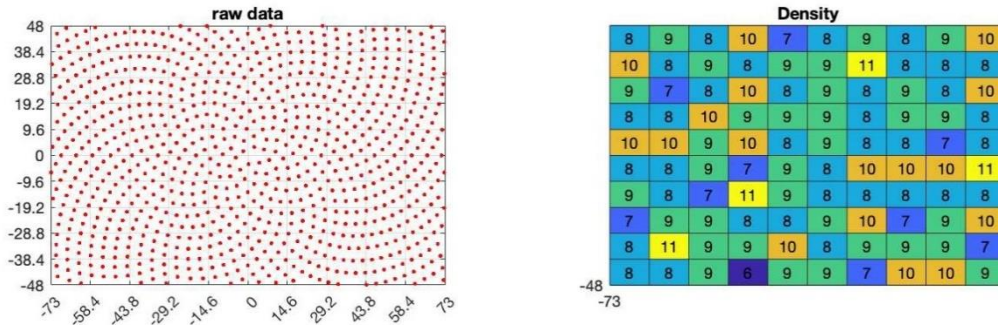


圖 16 腳踏車拼圖組裝結果

由圖 16 腳踏車拼圖組裝結果確認本次腳踏車拼圖之模具設計，包含流道排佈頂出排佈，能使腳踏車拼圖正確射出，並且完成組裝。

二、本設計之費氏數列頂出排佈與傳統方形排佈之比較

在傳統塑膠模具中，產品設計還有流道路徑的擺放，都須經過固定的頂出位置，才能確定的擺放，所以在設計產品以後必須進行擺放測試，其測試內容包括是否可以完整的頂出，保證產品不發生翹曲以及變形的情況下頂出。若產品發生上述情況或者是因頂出位置不對而造成產品產生斷裂造成產品的不完整，但若使用傳統頂出排佈，因頂出位置固定所以只能透過修改流道或者是產品尺寸來改善，這也就造成了要花更多的時間修改以及設計。頂出經過設計過以後，產品經過傳統與費氏數列頂出的對比發現兩者有非常大的差別。而本設計所使用的費氏數列孔位分佈如圖 20(a)所示，並且將其尺寸範圍 $x = [-73,73]$ 及 $y = [-48,48]$ 之面積切分為 100 等分，並且平均切分其矩形邊長，得到單一小矩形尺寸為 9.6×14.6 ，並以小矩形面積確認費氏數列之孔位分布密度如圖 20(b)所示



(a) (b)
圖 17 頂出結果對比 (a)費氏數列頂出孔位置 (b)面積分割之落點數量

其中圖 20(b)由於費氏數列的非規則特性，使得小矩形面積中的孔位點數不均勻分布，約介於 6~11 之間，其 100 格內的點數平均為 8.68 孔。本設計將對比費氏數列之頂出設計與傳統的方形頂出設計之優劣，因此將以 100 格內的點數平均為 8.68 孔模擬理想之方形頂出設計排佈。由於小矩形內的孔位數量為 8.68 孔，而小矩形面積為 $9.6 \times 14.6 = 140.16 \text{mm}^2$ 而均勻分配給 8.68 孔得到單一孔平均支配約 16.147mm^2 之面積。若以方形進行頂出孔排佈，單一孔位支配之面積則亦為方形，因此利用幾何平均計算，如公式(16)所示

$$l = \sqrt{A} \tag{16}$$

其中 l 代表單一孔位支配之方形面積邊長，而 A 為單一孔位支配之方形面積。透過公式 (16) 計算，可以得到單一孔位支配之方形面積邊長為 $\sqrt{16.147} = 4.0183 \text{mm}$ ，如圖 18 所示

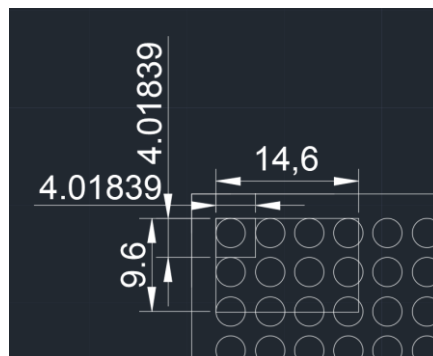


圖 18 方形點出之邊長計算

因此，將以間距 4.0183mm 模擬方形頂出排列，模擬結果如圖 19(a) 所示。

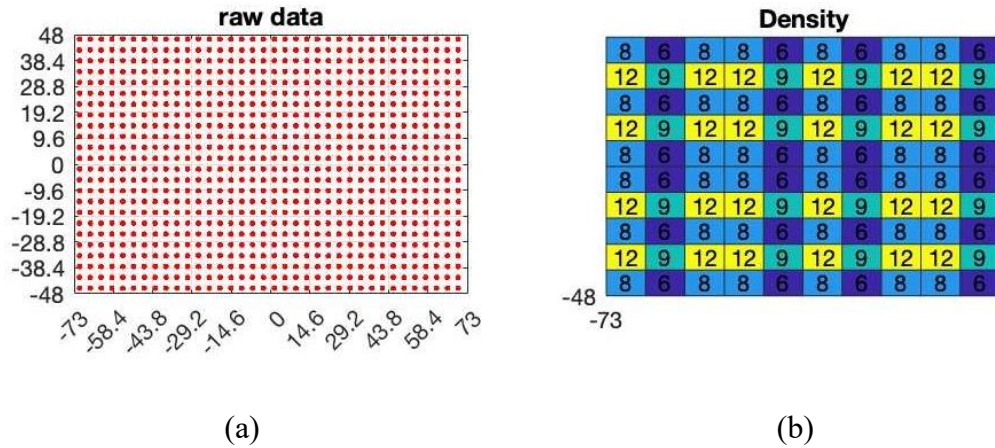


圖 19 頂出結果對比 (a)方形頂出孔位置 (b)面積分割之落點數量

其中圖 19(b)則為將頂出面積均分為 100 等份時，所得到的孔位數量為140.16mm²時，分別小面積中得到的頂出孔位數量，觀察可知其小面積面積所囊括的孔位數量規則的介於 6~12 孔，其平均孔位數量則為 8.64 孔。此外，其規則的變化可能肇因於在面積切分時，部分的孔位尺寸因為與小矩形邊長尺寸 $x = 14.6$ 及 $y = 9.6$ 呈倍數關係，因而落在下一個面積，使得相鄰面積呈現較大的孔位數量變化，但仍然保持其矩形排列的規則特性。而將此兩種孔位牌佈設計，配合腳踏車拼圖模型排佈於其頂出位置之上，可以得到如圖 20 所示之頂出孔位圖

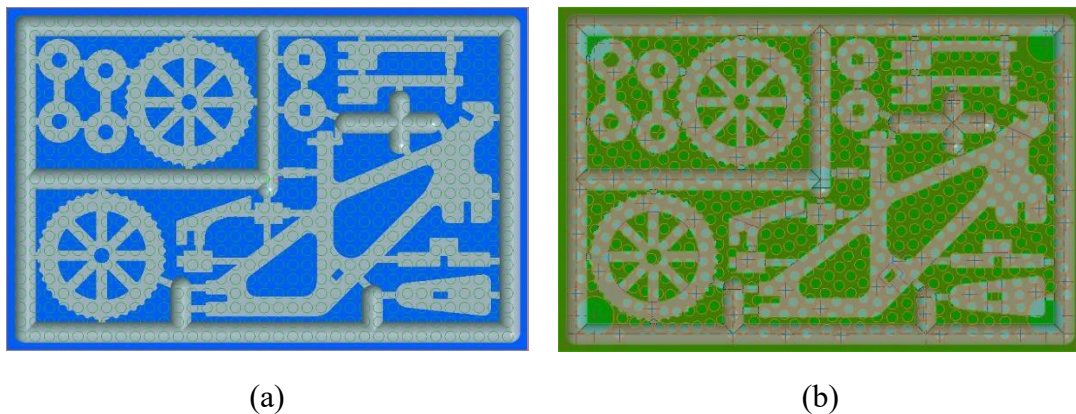


圖 20 頂出結果對比 (a)傳統方形頂出 (b)費氏數列頂出

圖 20(a)為方形頂出時在腳踏車拼圖的頂出孔位落點，而圖 20(b)則為費氏數列頂出時的頂出孔位落點。在相同密度時，塑膠件排列仍受限制，從流道以及零件可以發現矩形排列方式會因為公因數與公倍數的關係，而造成整條流道沒有一個孔頂的到，如圖 21(a)所示，相對的使用費氏數列的頂出設計則不需要調整腳踏車拼圖的位置，就能有足夠的頂出位置能夠將腳踏車拼圖均勻的頂出。

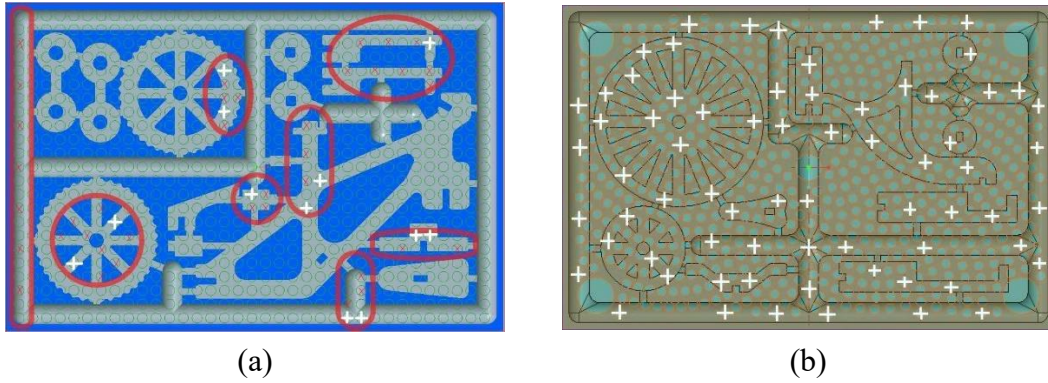


圖 21 選用點出點之結果對比 (a)傳統方形頂出 (b)費氏數列頂出

根據上圖傳統與費氏數列的頂出比較可以發現，兩者的優缺點非常的明顯，傳統因為頂出位置因為與腳踏車拼圖設計的尺寸有倍數關係，使得頂出設計失效，如圖 21(a)中白色十字架可頂出位置，而紅色叉記號為擦邊無法加工頂出孔的位置；在費氏數列頂出上，則在圈選區域中都能夠在不更改設計的情形下，提供頂出位置供塑膠射出之腳踏車拼圖頂出。

節省了塑膠成品頂出位置的設計時間，不只是節省了時間還節省了材料從模座、上頂出板、下頂出板都是可以共用，只需設計塑膠模仁與選擇頂出位置。本次設計重點為了省材料省時間所以特別看重頂出的排列密集度與是否可以模具共用，因而證明本次的設計是成功的。

陸、結論

一、結論

在設計過程中因有許多的小零件所以預估是可能發生斷裂或者是變形，所以我們在過程中討論如何在有限的位置中，要如何讓大零件與小零件以及流道順利的頂出防止發生以上問題，在加工並且組裝完以後，調模、試模以後順利頂出，因為頂出設計密集與排列的關係，使得最後成品如想像的預期成果一樣。

- 完成設計並製作應用費氏數列頂出設計之共用模座
- 完成設計腳踏車平面拼圖塑膠模型
- 完成以腳踏車平面拼圖塑膠模型結合本設計模座進行頂出設計

在跟傳統二板式塑膠模具比較後確實發現了本次引用的費氏數列，確實可以讓設計者在設計產品與產品排佈上，較不容易因頂出銷位置頂不到成品，造成了設計者浪費許多的時間與精力，除了可以將塑膠件排佈的更密集，並且達到因不用特別設計整副模具，而達到節省材料之目的。

二、建議

目前我們設計的二板式塑膠模具只適合使用圓頂針頂出，再設計外型上也有很大的限制，導致產品只能設計平面成品，無法設計其它種產品設計。以目前的萬能頂出為設計出發點，不該只限制在平面圖形而是以 3D 圖形或者成品更加複雜變化來當作以後的設計研究方向。而本次設計的不足除了只能選用圓頂針以外還有一點不足就是模仁大小有些許小，造成可能在設計成品時必須要為了要放入費氏數列頂出，而縮小成品尺寸或者是找尋更大的頂出模具，或者是設計使用複合式頂出也可以使產品有更多的造型變化。

柒、參考文獻資料

- LivioMario. (2004). 黃金比例 1.61803.....的秘密. (邱宏義, 譯者) 王榮文.
- RidleyJN. (1982). Packing efficiency in sunflower heads. *Mathematical Biosciences - MATH BIOSCI*, 58, 129-139. doi:10.1016/0025-5564(82)90056-6
- SegermanHenry. (2010). The Sunflower Spiral and the Fibonacci Metric. *Proceedings of Bridges 2010: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, 483 – 486.
- StewartLan. (2010). 生物世界的數學遊戲 (第 第二版 版). (蔡信行, 譯者) 天下遠見出版股份有限公司.
- VogelHelmut. (1979). A better way to construct the sunflower head. *Mathematical Biosciences*, 44(3), 179-189. 擷 取 自 <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0025556479900804>
- Wikipedia contributors. . (2023 年 February 月 4 日). Fermat's spiral In Wikipedia, The Free Encyclopedia. 2023 年 March 月 5 日 擷 取 自 https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fermat%27s_spiral&oldid=1137470411
- 毛爾. (2014). 毛起來說 e (第 第二版 版). (鄭惟厚, 譯者) 遠見天下文化出版股份有限公司.
- 吳作樂. (2018 年 7 月 25 日). 〈黃金比例 5〉：費氏數列與黃金比例. 擷取自 <https://www.taiwannews.com.tw/ch/news/3487309>
- 張文華. (2016). 塑膠模具-結構與製造 (第 第三版 版). (張文華, 編者) 陳本源.
- 許浦章. (1979). 塑膠射出成形用形模設計基準. 許浦章.
- 陳介聰. (2001). 實用射出模具設計 (第 第一版 版). (陳介聰, 編者) 沈岳林.
- 詩議訓、邱士哲. (2020). 模具學 (第 第三版八刷 版). (詩議訓、邱士哲, 編者) 陳本源.

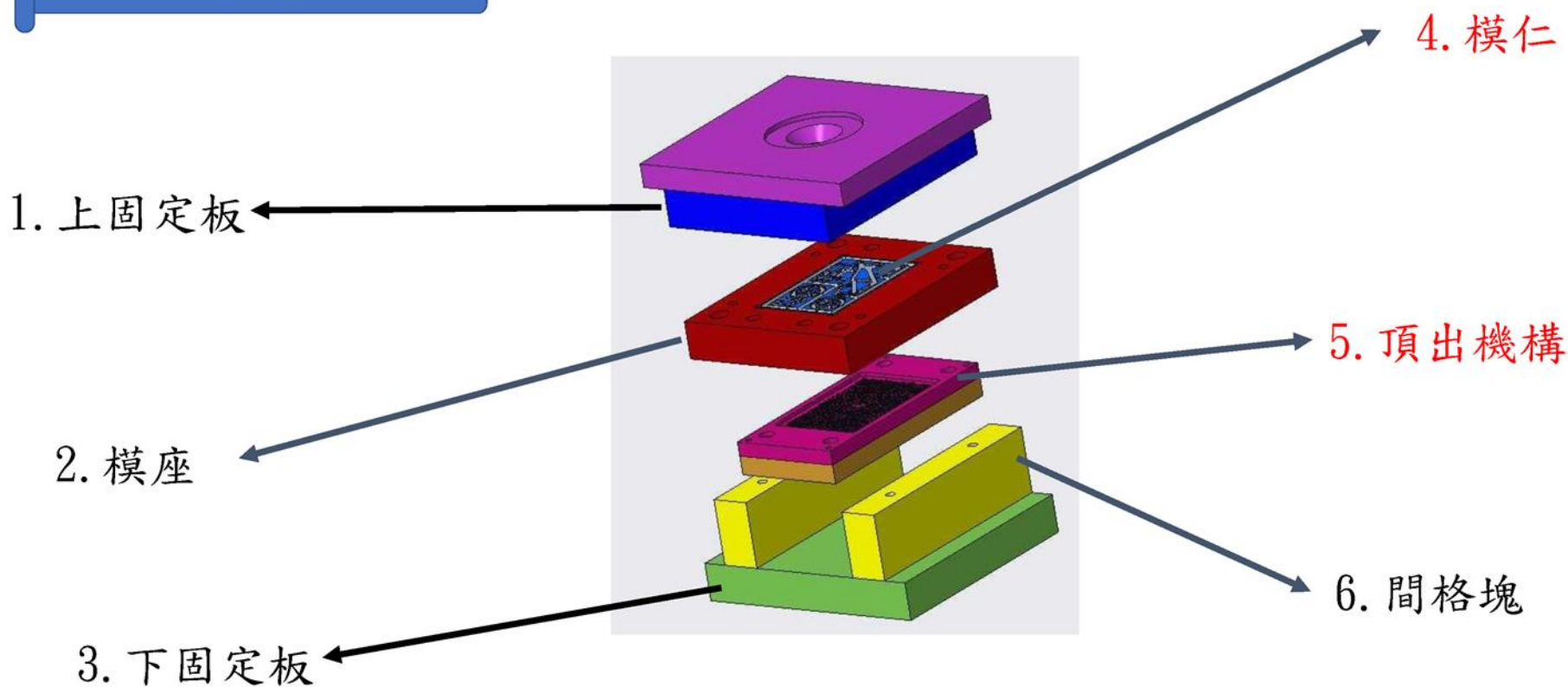
【評語】 052301

1. 作品是使用費氏數列設計塑膠模具頂出孔，可以降低頂出口排佈困難，可減省時間也節省材料的花費，所以作品具實用價值，值得鼓勵。
2. 作品結構完整，無論動機、文獻探討、研究方法與過程、研究結果、討論..等均說明詳細清楚。
3. 費氏數列目前只適用平面圖形，而大部分射出成形是 3D 圖形，這將限制作品實用範圍，建議進一步探討不同射出樣品之適用性。

作品海報

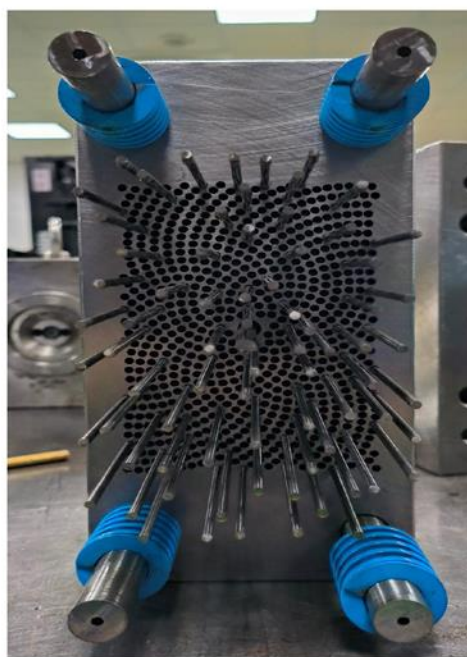
結合費氏數列應用於腳踏車平面拼圖塑膠模型
之
共用模座與頂出設計

模具零件介紹

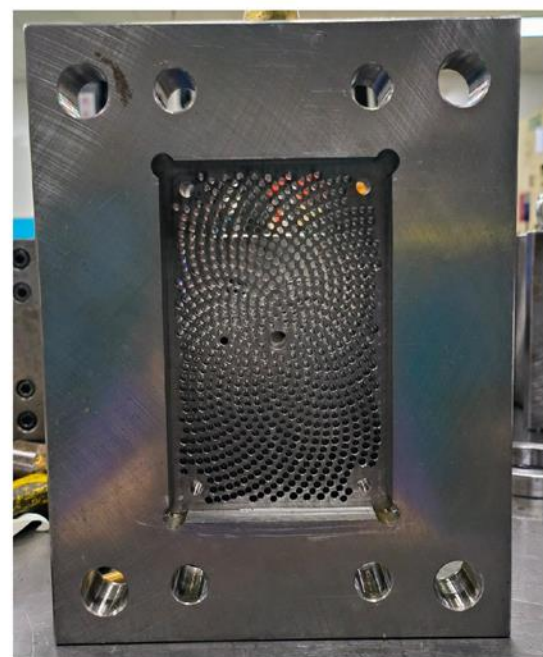


創新共用頂出機構

頂出機構在塑膠模具中扮演很重要的角色，當塑膠料灌入至模仁中等待凝固冷卻以後，頂出機構再使我們的塑膠成形品從模仁中脫落。一般的頂出機構都是根據成品的圖形以及位置來設計獨立的頂出機構，而我們創新以後的頂出機構則是可以直接將設計好的塑膠成品放在我們費氏數列頂出機構上，觀察成品所覆蓋的頂出圓點選取適當的頂出位置即可。



頂出機構



模座

傳統與創新頂出機構比較

兩者差異性非常的大，右邊以矩形排列而成，而左邊就是本次科展改善的重點，可以看到的是相同密度下不同排列方式，矩形會有公因數與公倍數的問題導致會有零件剛好與頂出點閃過，而在經過成品的測試以後的結果是，各部位零件都可以順利的將成品頂出。



費氏數列模座



矩形排列共用模座示意圖

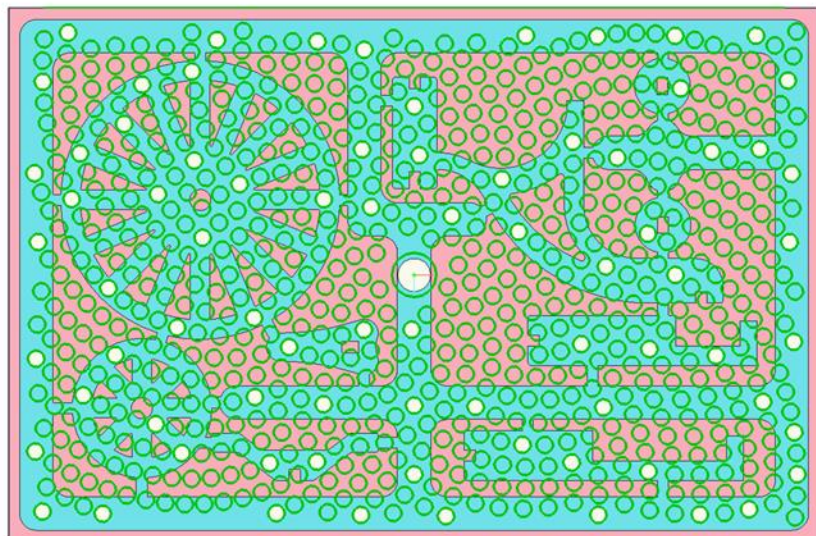


圖1 費氏數列頂出

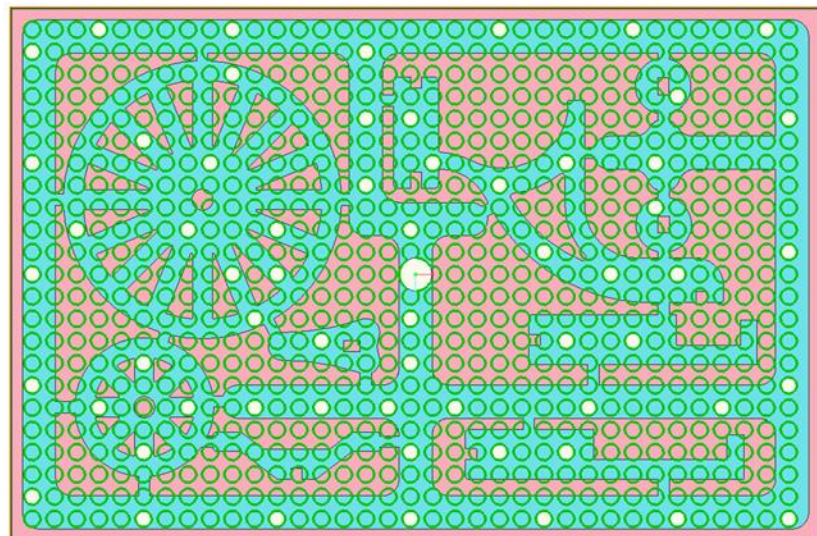


圖2 方形頂出

使用相同的塑膠產品下利用兩種不同的頂出排列可以發現，矩形排列部分零件剛剛好的完美避開了頂出位置，而相對的費氏數列則是每一個零件都頂的到。

費馬螺旋黃金角

費馬螺旋是阿基米德螺線的一種，而其利用黃金角與費氏數列特性形成如同向日葵中心花蕊的螺旋線，如下列公式

$$r = \pm\theta^{1/2}$$

而極座標表示如下列公式

$$r^2 = a^2\theta$$

費馬螺旋為對數螺線的一種，而我們所設計的費氏數列裡的螺旋線是由對數螺旋線上幾何裡遞增半徑的切線圓盤所形成的圖案，下列為等角螺線的公式，我們利用等角螺線的公式來求出種子之間佔有面積是否相同，在經過以下的推導過程中可以看到種子之間所佔有的面積是一樣的。

$$r = a\sqrt{\varphi}$$

$$\phi = k \times 137.5^\circ, k \in \mathbb{N}$$

其中 φ 為黃金角的倍數， r 為螺線半徑， a 為任意數。若關心特定半徑下以圓點為圓心之圓盤面積則有公式

$$r^2\pi = a^2\pi\varphi$$

若代入 φ 展開則得到

$$r^2\pi = a^2\pi(k \times 137.5^\circ)$$

$$\text{令 } \delta = 137.5^\circ = \frac{137.5^\circ}{180^\circ}\pi \text{ 及 } a^2\delta = c$$

$$r^2\pi = c\pi k$$

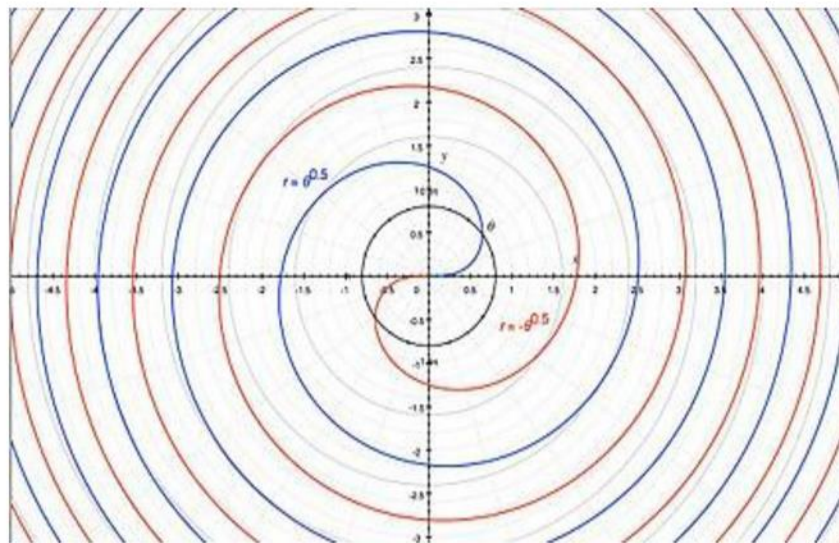
若將其展開觀察可得到

$$(r^2\pi)_1 = c\pi \times 1 = n_1$$

$$(r^2\pi)_2 = c\pi \times 2 = n_2$$

則

$$n_2 - n_1 = (c\pi \times 2) - (c\pi \times 1) = c\pi$$



費馬螺線示意圖

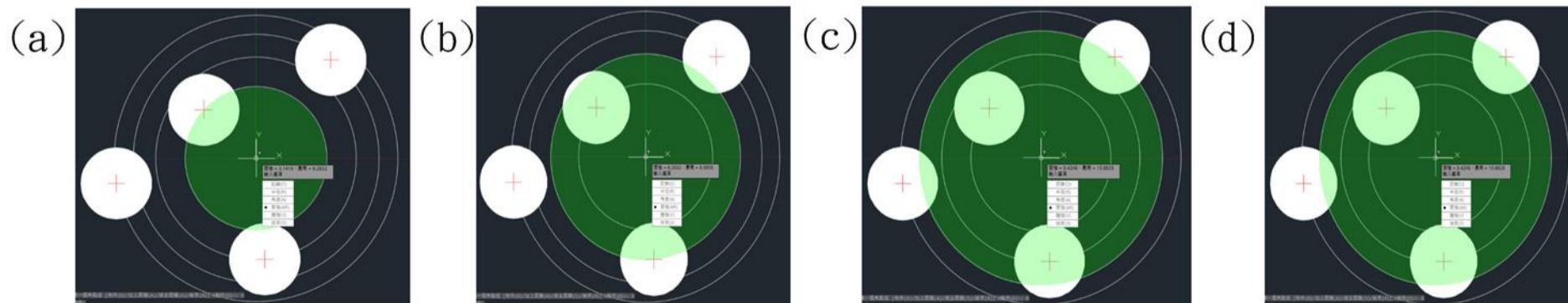
藍線數學式： $r = \sqrt{\theta}$

紅線數學式： $r = -\sqrt{\theta}$

由前述公式所使用之既有模座進行設計，並將其轉換為x-y坐標，進行鑽孔。頂出位置孔總共為708孔，而其部分頂出位置如下表

| x | y |
|--------------|--------------|
| 7.965043817 | -1.765807751 |
| -4.856129904 | 6.935272336 |
| -1.143874296 | -8.688587435 |
| 6.933442864 | 5.817849265 |
| -9.320643391 | 0.40694815 |
| 6.788225045 | -6.788225155 |
| -0.430220655 | 9.853674959 |

由此可知，由黃金角倍數產生之半徑 r ，其相對於原點所圍面積，依據其倍數以 $c\pi$ 等倍數增大，符合文獻中假設。如下圖所示



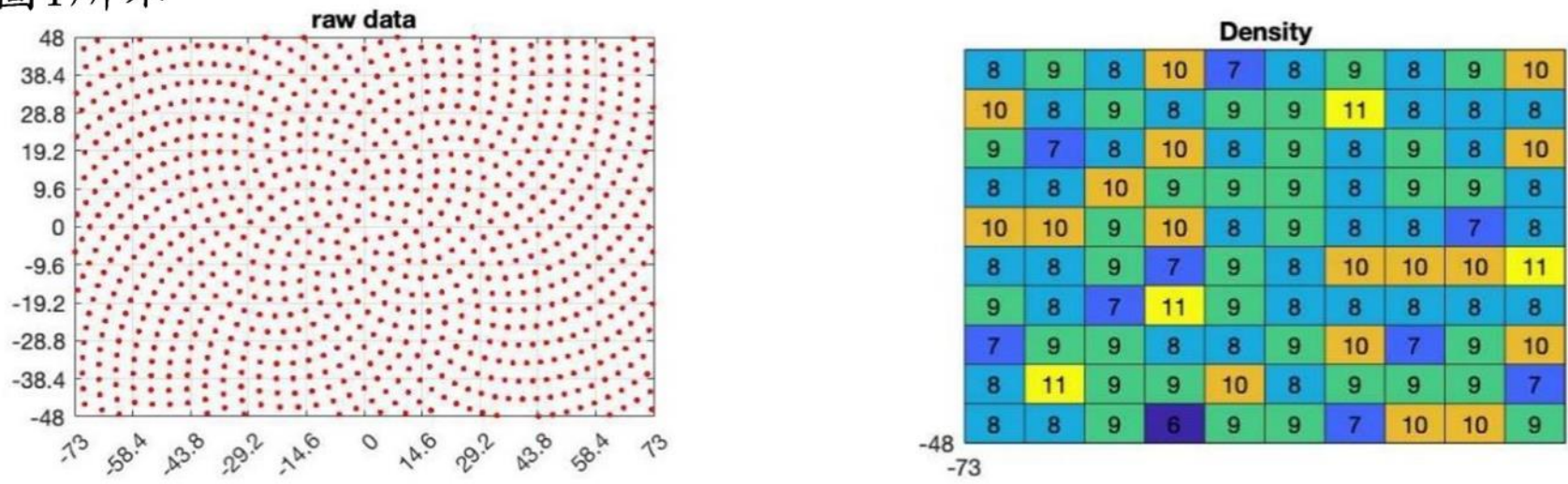
以費馬螺線公式產生得到之極座標位置所圍之面積

(a) $k=1$ 時所圍面積。(b) $k=2$ 時所圍面積。(c) $k=3$ 時所圍面積。(d) $k=4$ 時所圍面積

其中上圖(a)為公式(15)代 $k=1$ 時所得之面積，令 $c=1$ ，得到面積為 3.14 mm^2 。而上圖(b)為 $k=2$ 時所得之面積，得到面積為 6.28 mm^2 。上圖(c)為 $k=3$ 時所得之面積，得到面積為 9.42 mm^2 。上圖(d)為 $k=4$ 時所得之面積，得到面積為 12.56 mm^2 。而若取其面積之差值，則可得到相差之圓環面積皆為 3.14 mm^2 。

費氏數列排佈與傳統方形排佈之比較

本設計所使用的費氏數列孔位分佈如圖2所示，並且將其尺寸範圍 $x=[-73, 73]$ 及 $y=[-48, 48]$ 之面積切分為100等分，並且平均切分其矩形邊長，得到單一小矩形尺寸為 9.6×14.6 ，並以小矩形面積確認費氏數列之孔位分布密度如圖1所示。



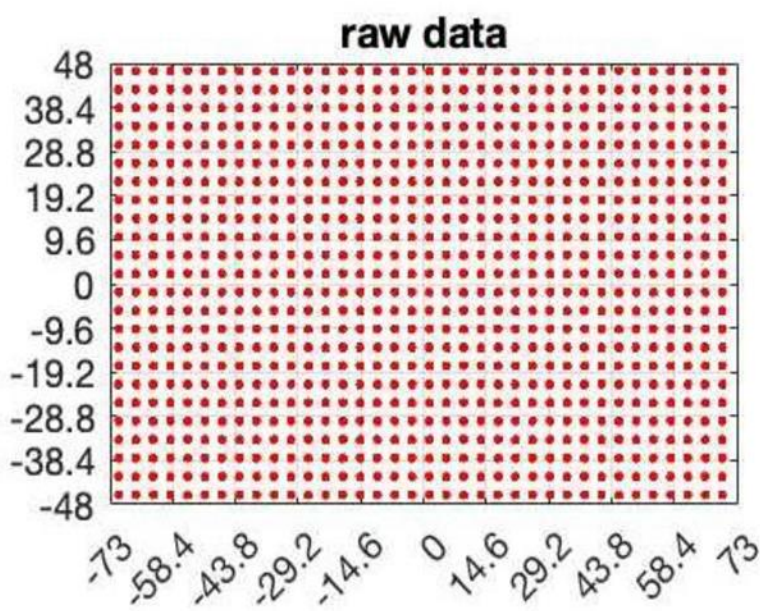
其中圖1由於費氏數列的非規則特性，使得小矩形面積中的孔位點數不均勻分布，約介於6~11之間，其100格內的點數平均為8.68孔。本設計將與傳統的方形頂出設計之優劣，因此將以100格內的點數平均為8.68孔模擬理想之方形頂出設計排佈。由於小矩形內的孔位數量為8.68孔，而小矩形面積為 140.16 mm^2 而均勻分配給8.68孔得到單一孔平均支配約 16.147 mm^2 之面積。若以方形進行頂出孔排佈，單一孔位支配之面積則亦為方形，因此利用幾何平均計算，如下列公式所示

$$l = \sqrt{A}$$

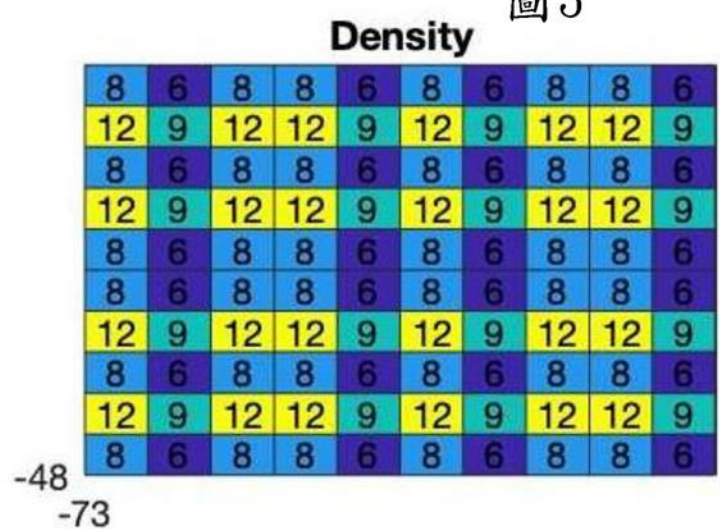
l 代表單一孔位支配之方形面積邊長，而 A 為單一孔位支配之方形面積。透過上述公式計算，可以得到單一孔位支配之方形面積邊長為 $\sqrt{16.147} = 4.0183 \text{ mm}$ ，如圖3所示



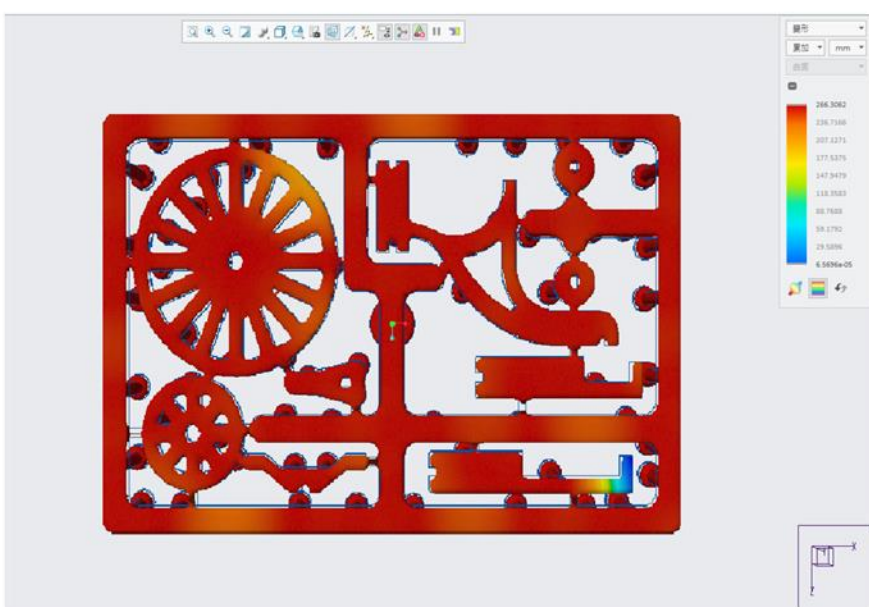
圖3



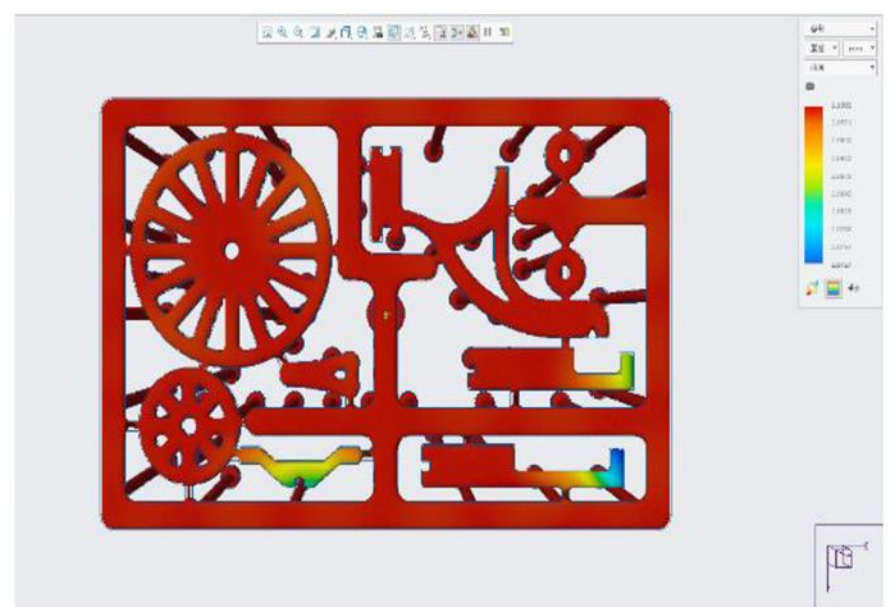
方形頂出位置



方形頂出位置面積分割之落點數量



費氏數列應力結果



矩形排列應力結果

結論

在設計過程中因有許多的小零件所以預估是可能發生斷裂或者是變形，所以我們在過程中討論如何在有限的位置中，如何讓大零件與小零件以及流道順利的頂出防止發生以上問題。

- 完成設計並製作應用費氏數列頂出設計之共用模座
- 完成設計腳踏車平面拼圖塑膠模型
- 完成以腳踏車平面拼圖塑膠模型結合本設計模座進行頂出設計