

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高中組 地球與行星科學科

佳作

051906

百「折」不屈 - 大氣折射對日照時長影響

學校名稱：嘉義縣私立協同高級中學

作者： 高二 鍾佳恩 高二 黃維俐 高二 魏毓庭	指導老師： 郭建載 黃明真
---	-----------------------------

關鍵詞：大氣折射、日照時長

摘要

本研究加入各種考量計算，以得出最接近實際白天時長的數據。首先假設地球為正球型，計算出未考慮大氣的理論白天時長，並考慮太陽視角導致的誤差，可進一步得出蒙氣差數值；第二步考量大氣偏折，將大氣拆分成密度不同的大氣層，討論由太陽射向地球的光，利用 Google 試算表計算出日光和地表的相切處，再將此數值代入日照時長公式，即可縮小和實際情況差距；最後和各國真實白天時間比較，繪製理論與實際情況關聯的散佈圖，可知實際與理論日照時長僅存在些微差距。結果中的些微誤差，推測為未考慮地球之橢圓形狀以及大氣中不同層的複雜變化所造成，可作為未來改進方向。

壹、研究動機

日照總時長會因著地球自轉軸的傾斜，和太陽光線照射位置的不同而隨季節更迭。高中曾學過：在春秋分時，太陽光線直射赤道，此時理論白天總時長為 12 小時。然而，光線也會在大氣中的產生偏折，此時實際的春秋分白天時間還會是 12 小時嗎？

於是本篇研究中，我們以系統性的方法計算大氣對日出日落時間差的影響，並以實際情況做比對，希望能確認本篇方法的正確性。

貳、研究目的

- 一、視地球為正圓形球體，僅考量太陽視角，計算出白天理論時長。
- 二、考量大氣氣體密度差異所導致日光偏折現象，將大氣分層，計算出更精確日照數據。
- 三、比對各國實際與理論日照時長差距，確認其精準性。

參、研究設備及器材

- 一、日出日落時間查詢網站
- 二、Google 試算表
- 三、SUNRISE AND SUNSET, 1992: UNIVERSAL TIME FOR MERIDIAN OF GREENWICH
- 四、NOAA Solar Calculator 網站

肆、研究過程與方法

一、僅考慮地球為球形且無大氣影響，計算白天的理論時長：

- (一) 此圖為球形地球且無大氣偏折的示意圖(圖一)。
- (二) 以北半球為例，令地球半徑為 R ，傾斜角為 θ ，取緯度 φ 的薄圓片，示意圖如(圖二)所示。其中，(圖一)的黃色線條與(圖二)的黃色線條等長。
- (三) 由(圖一)和(圖二)計算 α 值，也就是白天地球自轉軸旋轉的角度：

By(圖一)

$$\frac{\text{length of yellow}}{\text{length of purple + yellow}} = \frac{R(\cos \varphi + \sin \varphi \tan \theta)}{2R \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi + \sin \varphi \tan \theta}{2 \cos \varphi} \dots(1)$$

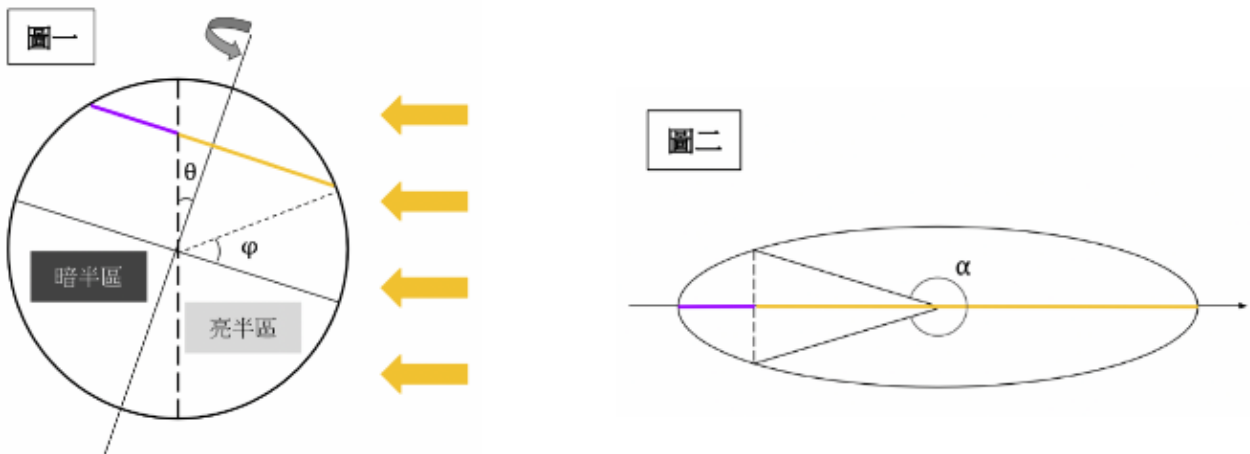
By(圖二)

$$\frac{\text{length of yellow}}{\text{length of purple + yellow}} = \frac{R(1 - \cos(\alpha/2))}{2R} = \frac{1 - \cos(\alpha/2)}{2} \dots(2)$$

$$\text{By (1)(2)} \frac{\cos \varphi + \sin \varphi \tan \theta}{2 \cos \varphi} = \frac{1 - \cos(\alpha/2)}{2} \dots(3)$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = -\tan \varphi \tan \theta \dots(4)$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \cos^{-1}(-\tan \varphi \tan \theta) \dots(5)$$



(四) 故理論白天總時長為：白天自轉角度(α) \times 地球自轉 1° 所需時間

$$\text{白天總時長} = \alpha \times \frac{\text{各地真太陽時}}{2\pi} = \frac{\cos^{-1}(-\tan \varphi \tan \theta)}{\pi} \times \text{各地真太陽時}$$

(五) 取 2022 年肯亞(經度：37.906193，緯度：-0.023559)春分點的日照時間，代入(四)之公式，且肯亞 2022 春分時的真太陽時為 23.995h，可計算出白天時長為 11h 59.768m，而資料中的實際日照時間為 12h 6.8m。

(六) 可以發現理論與實際數據相差 7.032m，其中有部分誤差是因為太陽視角造成的(圖一)，由蒐集來的網路資料可知，太陽最大視角為 0.542°(近日點)、最小視角為 0.532°(遠日點)，所以春分點的視角大約為 0.537°。

(七) 在春分點僅考慮太陽視角的情況下，會增加約 2.1475m。(考慮肯亞 2022 春分時的真太陽時 $23.995h \times 60 = 1439.7m$)

$$\therefore \frac{0.537^\circ}{360^\circ} \times 1439.7m = 2.1475m$$

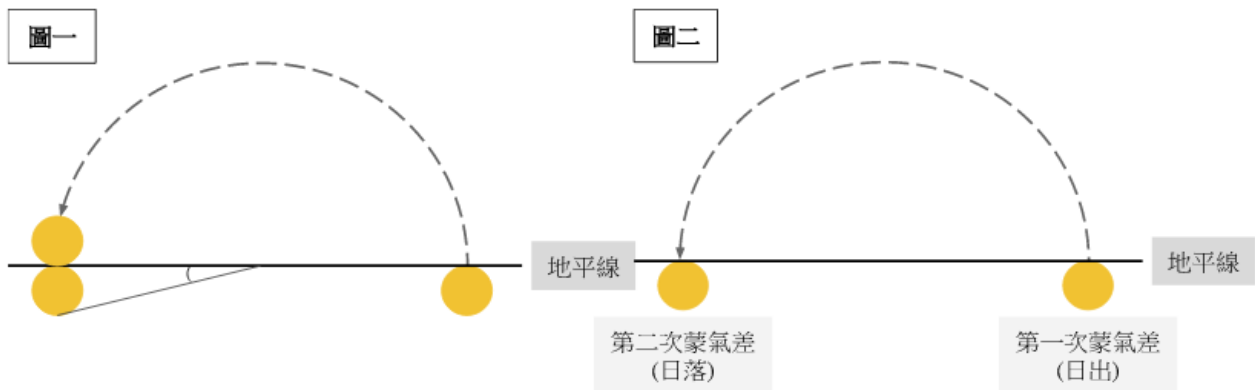
(八) 所以加入太陽視角後的理論白天總時長約為 12h 1.9156m，與實際總時長 12h6.8m 仍相差約 4.88m，剩下為大氣折射所造成的誤差。

$$\therefore \frac{4.88m}{1439.7m} \times 360^\circ = 1.2214^\circ$$

又因一天地球會受太陽日出、日落時各一次折射影響(圖二)，蒙氣差數值應為：

$$\frac{1.2214^\circ}{2} = 0.6107^\circ = 36.642'$$

與網路上大氣蒙氣差理論值 34'相近。



二、考慮地球的大氣偏折，計算白天的理論時長：

(一) 參數設定：

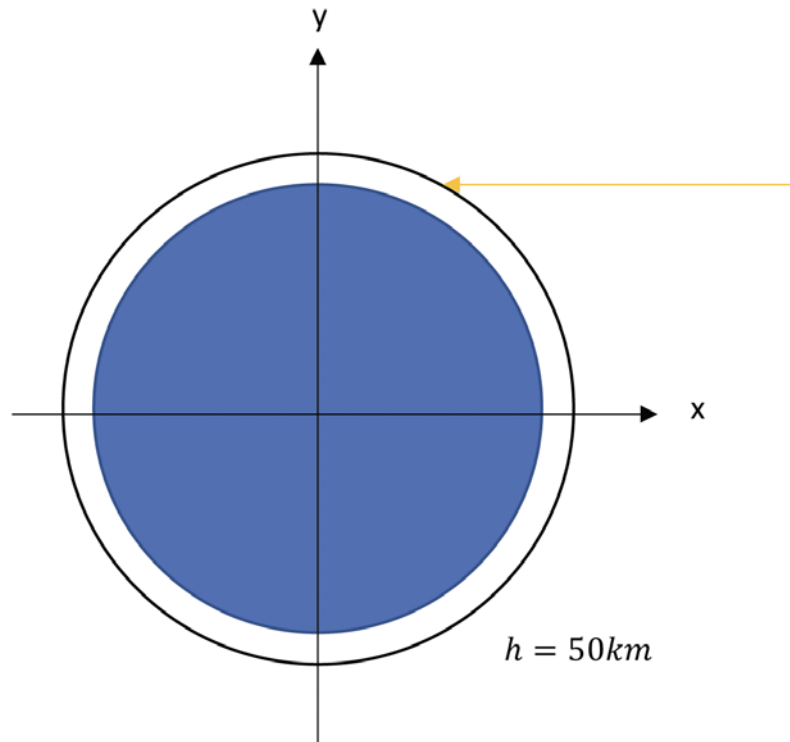
1. 假設地球為一個完美球形，其半徑為 $R_E = 6371km$ 。
2. 由文獻可知，大氣的折射率函數 n 可以以海拔高度表示：

$$n(h) = 1 + 29674 \times 10^{-8} e^{-0.146h} \quad (h \leq 50km)$$

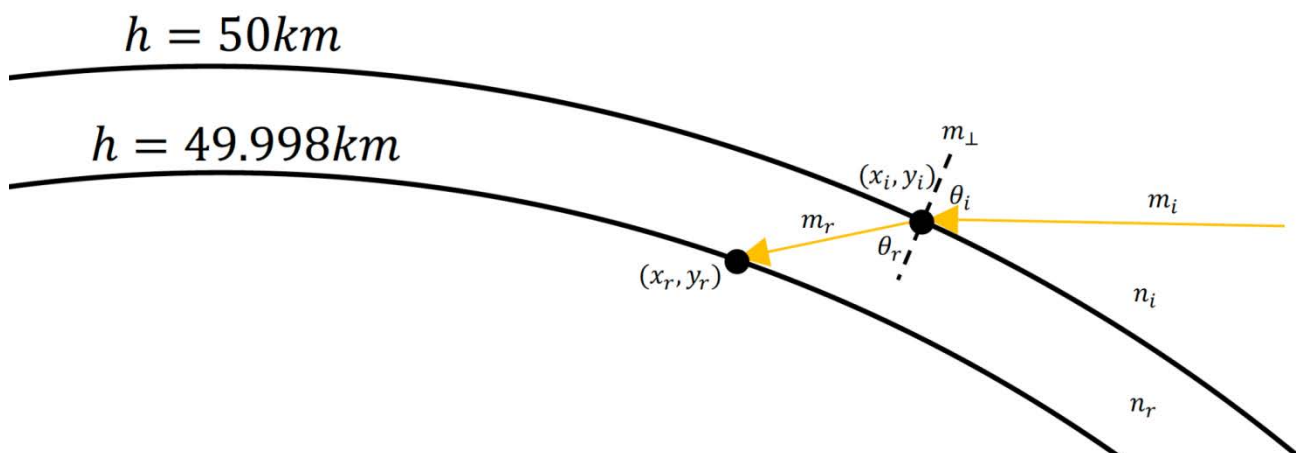
3. 令大氣為球形環繞在地球上，大氣邊界海拔高度 $H_{max} = 50km$ 。
4. 將大氣切成無數海拔為 0.002km 的薄球殼，用以計算折射後光的偏折路徑。

(二) 光線折射路徑計算：

1. 首先，考慮一顆球心置於(0,0,0)的理想地球，僅觀測xy平面，討論無數太陽光的其中一條沿(-1,0,0)的方向向地球最外圍的大氣($h = 50km$)射來，示意圖如下：



2. 因為在大氣層外即為真空狀態，折射率皆為 1，故直到碰到大氣層才開始發生折射現象。若聚焦於光線經過的區域，可以得到以下圖形。 (x_i, y_i) 為光線和最外層大氣($h = 50km$)的交點，入射光的斜率為 m_i 、折射角為 θ_r 、入射介質折射率為 n_i 、折射光的斜率為 m_r 、折射光與下一層薄球殼($h = 49.998km$)的交點為 (x_r, y_r) 。



3. 在剛進入大氣時， $m_i = 0$ ，交點為 (x_i, y_i) ，且滿足 $x_i^2 + y_i^2 = (R_E + 50)^2$ ，

其法線斜率 m_{\perp} 可表示為： $m_{\perp} = \frac{y_i}{x_i}$

故入射角 θ_i 可表示為： $\theta_i = \tan^{-1}\left(\frac{m_{\perp} - m_i}{1 + m_{\perp} m_i}\right)$

又此時 $n_i = 1$ ， $n_r = 1 + 29674 \times 10^{-8} e^{-0.146 \times 50}$

所以折射角 θ_r 由司乃耳定律可以表示為： $\theta_r = \sin^{-1}\left(\frac{n_i \sin \theta_i}{n_r}\right)$

4. 由 3. 可以得到折射線的斜率 m_r 為： $m_r = \frac{m_{\perp} - \tan \theta_r}{1 + m_{\perp} \tan \theta_r}$

進一步可以得到折射線的方程式： $y - y_i = m_r(x - x_i)$

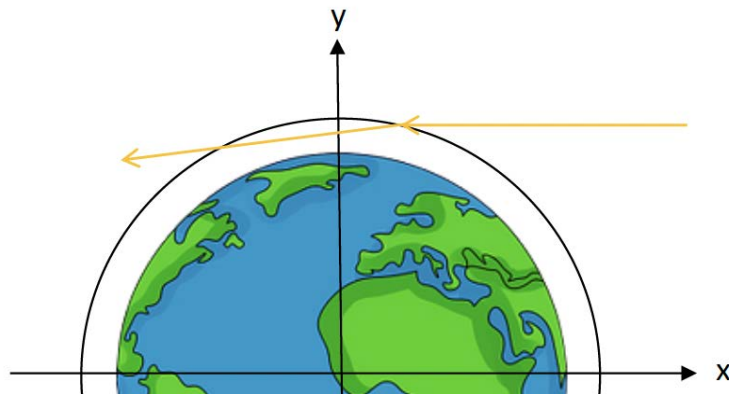
5. 得到折射線的方程式後，可以和下一層薄球殼($h = 49.998\text{km}$)的圓方程式聯立求得交點 (x_r, y_r) 。

6. 由 4. 5. 可以求得 (x_r, y_r) 和 m_r ，可以重返第 2.，將原本的 (x_i, y_i) 替換為 (x_r, y_r) 、 m_i 替換成 m_r 。以此模式反覆求得 (x_r, y_r) 和 m_r ，直到 (x_r, y_r) 滿足： $x_r^2 + y_r^2 = R_E^2$ ，並記錄下最後的 (x_r, y_r) 和 m_r ，來到第 7.。

7. 仔細討論第 6. 後會發現，隨著光始進入大氣層的 y_i 值的不同，會出現以下三種情形：

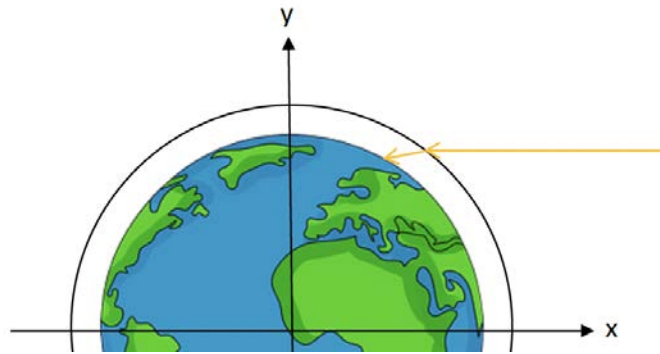
a. y_i 值過高：

此情況下，光線即使偏折還是無法射入地表，無法得到亮區範圍。



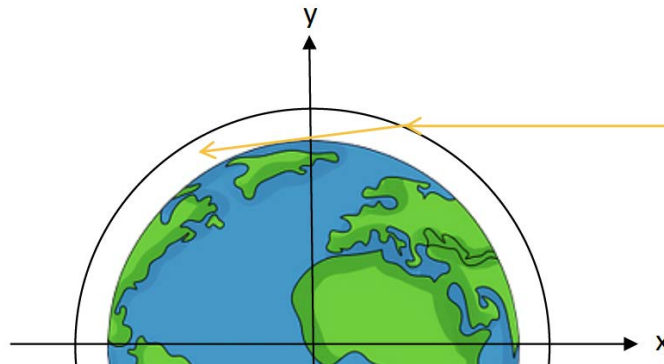
b. y_i 值過低：

此情況下，光線會偏折射入地表，地表能接受到太陽光即為白天，但是無法求得日照臨界位置，算出亮區。

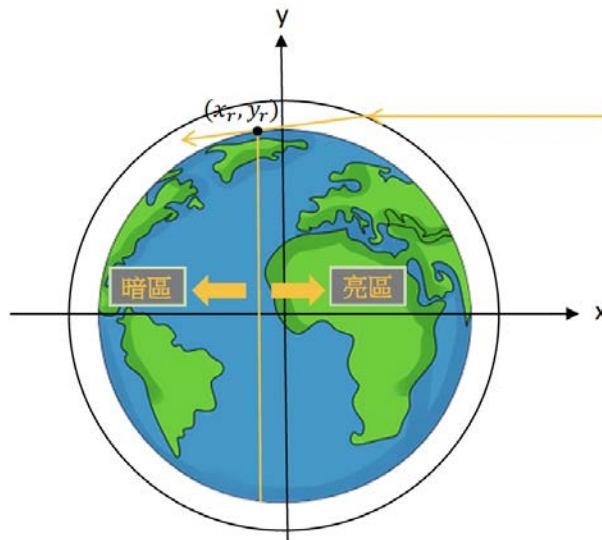


c. y_i 值恰好：

此情況下，光線射入後會剛好相切於地表，即為亮區與暗區的分界。若找到恰好的 y_i 值，即可得到考慮大氣後的亮區範圍。



8. 由於 1. 提到，假設地球為球形模型且 xyz 軸固定，所以不論地球沿任意軸向的自轉軸旋轉，亮暗區的分界恆為 $x = x_r$ 。



(三) 實際計算

上述(二)的計算雖複雜卻有規律性。由於大氣折射率的值非常小，計算上需要較高的精確度，於是我們利用 Google 試算表來求出光線的路徑。但缺點是要手動調整光線和最外層大氣的交點(y_i)，且要計算到 25000 多行才能求出光線與地表的切點。

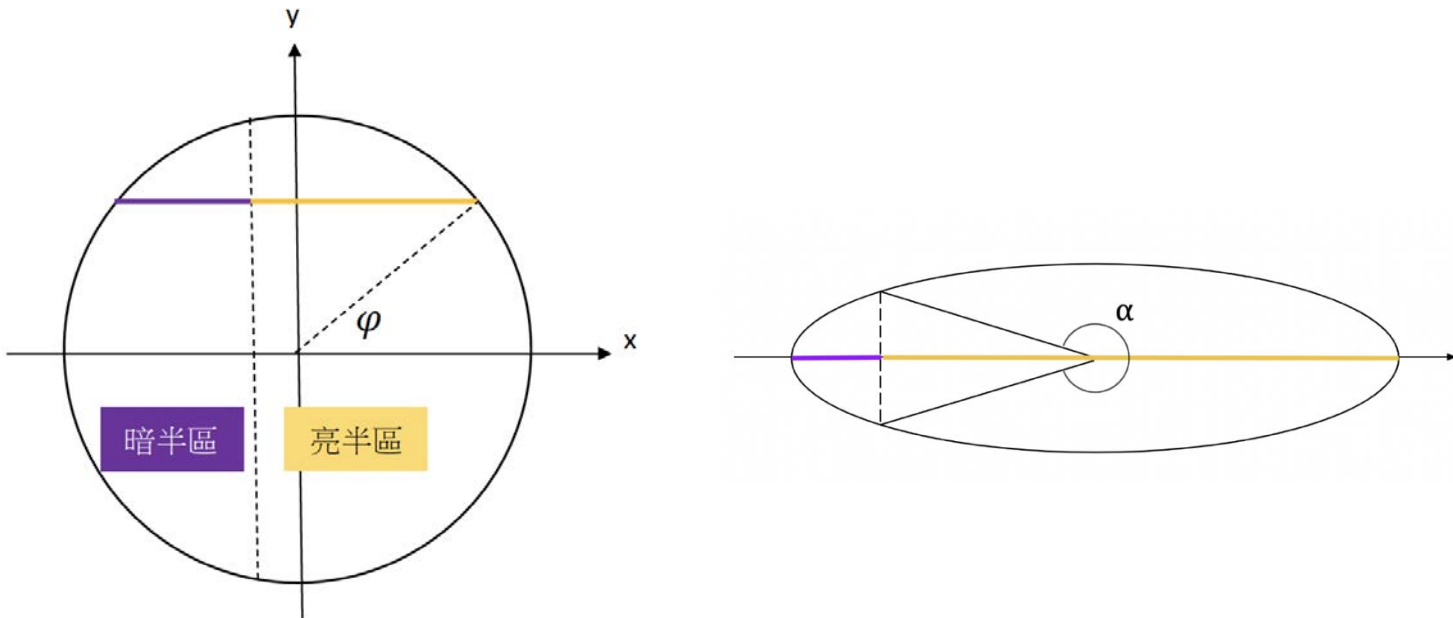
下圖為 google 試算表計算狀況，邏輯與(二)相同：

		畫光線：								一元二次方程式			
		x	y	高度h (km)	法線m	入射光m	入射角θ(弧度)	折射率n	折射角θ'(弧度)	折射光m	a	b	c
地球半徑	6371	784.547207	6372.88997859000	50.000	8.1230166	0	1.448305666	1.000000200	1.448304038	1.63E-06	1	2.08E-02	-615504.91948319
height_max	50	784.530839	6372.88997856335	49.998	8.1231861	1.63E-06	1.448306568	1.000000201	1.448306567	1.63E-06	1	2.08E-02	-615479.24025040
x0	784.547207	784.514470	6372.88997853668	49.996	8.1233556	1.63E-06	1.448309097	1.000000201	1.448309097	1.63E-06	1	2.08E-02	-615453.56102697
y0	6372.889979	784.498101	6372.88997851001	49.994	8.1235251	1.63E-06	1.448311627	1.000000201	1.448311627	1.63E-06	1	2.08E-02	-615427.88181295
m_light_i	0	784.481731	6372.88997848334	49.992	8.1236946	1.63E-06	1.448314157	1.000000201	1.448314157	1.63E-06	1	2.08E-02	-615402.20260832
n(h)	$1+29874*10^{-8}EXP(-0.148*h)$	784.465361	6372.88997845665	49.990	8.1238641	1.63E-06	1.448316687	1.000000201	1.448316686	1.63E-06	1	2.08E-02	-615376.52341308
n_initial	1	784.448991	6372.88997842996	49.988	8.1240336	1.63E-06	1.448319217	1.000000201	1.448319216	1.63E-06	1	2.08E-02	-615350.84422723
delta_h	0.002	784.432620	6372.88997840325	49.986	8.1242032	1.63E-06	1.448321747	1.000000201	1.448321746	1.63E-06	1	2.08E-02	-615325.16505077
		784.416249	6372.88997837654	49.984	8.1243727	1.63E-06	1.448324277	1.000000201	1.448324276	1.63E-06	1	2.08E-02	-615299.48588370
		784.399878	6372.88997834982	49.982	8.1245423	1.63E-06	1.448326807	1.000000201	1.448326806	1.63E-06	1	2.08E-02	-615273.80672603
		784.383506	6372.88997832309	49.980	8.1247119	1.63E-06	1.448329337	1.000000201	1.448329337	1.63E-06	1	2.08E-02	-615248.12757774
		784.367134	6372.88997829635	49.978	8.1248815	1.63E-06	1.448331867	1.000000201	1.448331867	1.63E-06	1	2.08E-02	-615222.44843885
		784.350762	6372.88997826961	49.976	8.1250510	1.63E-06	1.448334398	1.000000201	1.448334397	1.63E-06	1	2.08E-02	-615196.76930934
		784.334389	6372.88997824285	49.974	8.1252207	1.63E-06	1.448336928	1.000000201	1.448336927	1.63E-06	1	2.08E-02	-615171.09018924
		784.318016	6372.88997821609	49.972	8.1253903	1.63E-06	1.448339458	1.000000201	1.448339458	1.63E-06	1	2.08E-02	-615145.41107852
		784.301643	6372.88997818932	49.970	8.1255599	1.63E-06	1.448341989	1.000000201	1.448341988	1.64E-06	1	2.08E-02	-615119.73197720
		784.285269	6372.88997816254	49.968	8.1257295	1.64E-06	1.448344519	1.000000201	1.448344519	1.64E-06	1	2.09E-02	-615094.05288528
		784.268895	6372.88997813576	49.966	8.1258992	1.64E-06	1.44834705	1.000000201	1.448347049	1.64E-06	1	2.09E-02	-615068.37380276
		784.252521	6372.88997810896	49.964	8.1260688	1.64E-06	1.44834958	1.000000202	1.44834958	1.64E-06	1	2.09E-02	-615042.69472960
		784.236146	6372.88997808216	49.962	8.1262385	1.64E-06	1.448352111	1.000000202	1.44835211	1.64E-06	1	2.09E-02	-615017.01566587
		784.219771	6372.88997805534	49.960	8.1264082	1.64E-06	1.448354641	1.000000202	1.448354641	1.64E-06	1	2.09E-02	-614991.33661152
		784.203396	6372.88997802852	49.958	8.1265779	1.64E-06	1.448357172	1.000000202	1.448357172	1.64E-06	1	2.09E-02	-614965.65756658

由 Google 試算表可計算出亮暗區分界為 $x = -80.97514499\text{km}$ 。

(四) 以春分為例：

以春分為例，示意圖如下：



與肆、一的討論方式類似：

$$\frac{\text{length of yellow}}{\text{length of purple} + \text{yellow}} = \frac{6371 \cos \varphi + 80.97514499}{2 \times 6371 \cos \varphi}$$

$$= \frac{1 - \cos(\alpha/2)}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha/2) = -\frac{0.012709958403704}{\cos \varphi}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2\cos^{-1}\left(-\frac{0.012709958403704}{\cos \varphi}\right)$$

考慮大氣層後的理論日照總時長 (粗略考慮太陽視角)：

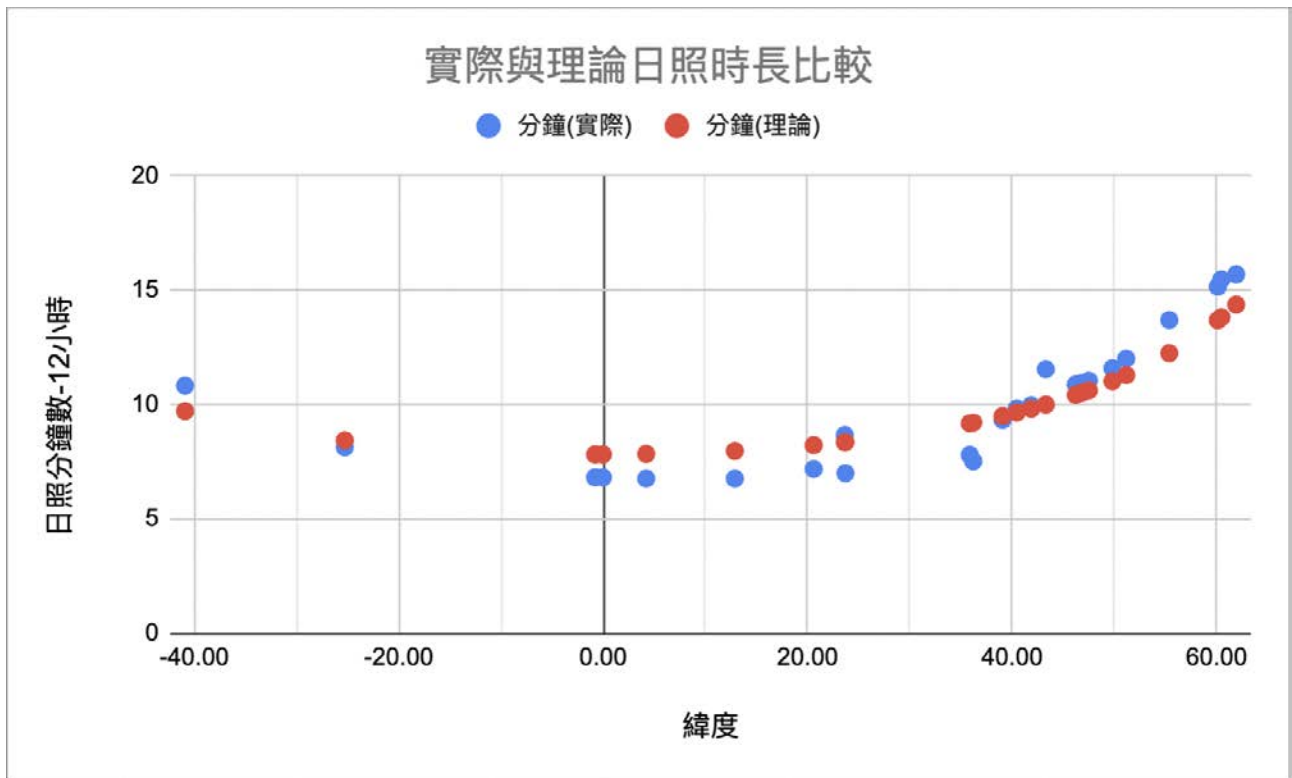
$$\frac{\alpha}{2\pi} \times \text{各地真太陽時} + 2.1475\text{m} = \frac{\cos^{-1}\left(-\frac{0.012709958403704}{\cos \varphi}\right)}{\pi} \times \text{各地真太陽時} + 2.1475\text{m}$$

伍、研究結果

為了確認理論的正確性，我們將理論白天時長的公式與 24 個國家在 2022 年春分(3/20)的實際白天時間做比較。結果如下：

國家	日出	日落	實際日照時長	min	sec	分鐘(實際)	理論日照時長	分鐘(理論)	相差分鐘數	緯度	經度	太陽時
紐西蘭	上午 7:22:39	下午 7:33:29	12:10:50	10	50	10.83333	12.16187241	9.712344	1.120989	-40.90	174.885971000	23.99527778
澳洲	上午 6:38:22	下午 6:46:30	12:08:08	8	8	8.13333	12.14064846	8.438908	-0.305574	-25.27	133.775136000	23.99500000
印尼	上午 5:28:24	下午 5:35:13	12:06:49	6	49	6.81667	12.13038019	7.822812	-1.006145	-0.79	113.921327000	23.99500000
肯亞	上午 6:32:21	下午 6:39:10	12:06:49	6	49	6.81667	12.13037099	7.822259	-1.005593	-0.02	37.906193000	23.99500000
馬來西亞	上午 7:16:12	下午 7:22:58	12:06:46	6	46	6.76667	12.13077373	7.846424	-1.079757	4.21	101.975766000	23.99527778
菲律賓	上午 5:57:02	下午 6:03:48	12:06:46	6	46	6.76667	12.13287666	7.972600	-1.205933	12.88	121.774017000	23.99500000
印度	上午 6:18:00	下午 6:25:11	12:07:11	7	11	7.18333	12.13713847	8.228308	-1.044975	20.59	78.962880000	23.99527778
墨西哥	上午 6:53:02	下午 7:01:42	12:08:40	8	40	8.66667	12.13925994	8.355597	0.311070	23.63	-102.552783900	23.99500000
台灣	上午 6:00:10	下午 6:07:10	12:07:00	7	0	7.00000	12.13931128	8.358677	-1.358677	23.70	120.960515000	23.99500000
中國	上午 7:06:49	下午 7:14:37	12:07:48	7	48	7.80000	12.1530802	9.184812	-1.384812	35.86	104.195397000	23.99500000
日本	上午 5:50:46	下午 5:58:17	12:07:31	7	31	7.51667	12.15360328	9.216197	-1.699530	36.20	138.252924000	23.99500000
希臘	上午 6:35:23	下午 6:44:43	12:09:20	9	20	9.33333	12.15834288	9.500573	-0.167240	39.07	21.824312000	23.99500000
西班牙	上午 7:17:24	下午 7:27:14	12:09:50	9	50	9.83333	12.16089283	9.653570	0.179764	40.46	-3.749220000	23.99500000
義大利	上午 6:12:05	下午 6:22:03	12:09:58	9	58	9.96667	12.16366555	9.819933	0.146734	41.87	12.567379999	23.99500000
美國	上午 6:58:18	下午 7:09:51	12:11:33	11	33	11.55000	12.16668595	10.001157	1.548843	43.30	-74.217932600	23.99500000
法國	上午 6:53:02	下午 7:03:55	12:10:53	10	53	10.88333	12.17376591	10.425955	0.457379	46.23	2.213749000	23.99527778
瑞士	上午 6:28:57	下午 6:39:54	12:10:57	10	57	10.95000	12.17529989	10.517993	0.432007	46.82	8.227512000	23.99527778
奧地利	上午 6:03:37	下午 6:14:40	12:11:03	11	3	11.05000	12.17703629	10.622177	0.427823	47.52	14.550072000	23.99500000
捷克共和國	上午 5:59:39	下午 6:11:15	12:11:36	11	36	11.60000	12.18375555	11.025333	0.574667	49.82	15.472962000	23.99500000
德國	上午 6:19:31	下午 6:31:32	12:12:01	12	1	12.01667	12.18811217	11.286730	0.729937	51.17	10.451526000	23.99500000
英國	上午 6:14:12	下午 6:27:54	12:13:42	13	42	13.70000	12.20416777	12.250066	1.449934	55.38	-3.435972999	23.99500000
瑞典	上午 5:45:11	下午 6:00:21	12:15:10	15	10	15.16667	12.22822185	13.693311	1.473355	60.13	18.643501000	23.99500000
挪威	上午 6:25:43	下午 6:41:12	12:15:29	15	29	15.48333	12.23042536	13.825522	1.657812	60.47	8.468946000	23.99527778
芬蘭	上午 6:16:31	下午 6:32:13	12:15:42	15	42	15.70000	12.23958177	14.374906	1.325094	61.92	25.748151000	23.99500000

此圖為實際日照時長與理論日照時長的關係圖：



陸、討論

一、影響日照時長的條件，除了已納入計算的太陽視角與大氣折射外，還可能包含：

1. 地球實際形狀

由於地球實際形狀為橢圓形而非圓形，可能因此造成白天時間的誤差。

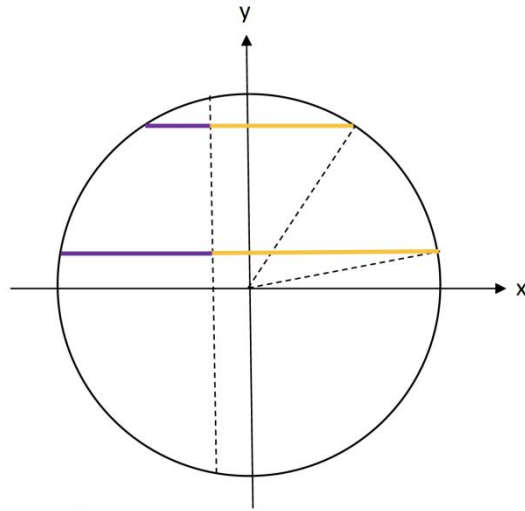
2. 大氣變化複雜

實際上大氣中的壓力、溫度、水氣分布複雜，故大氣折射率的假設可能有誤。且真實地球大氣還有區分對流層、平流層、中氣層、增溫層，而我們考量大氣層中 99% 的空氣均存在於對流層與平流層中，所以大氣層厚度則是考慮至 50 公里(平流層頂端)。

二、由實際與理論日照時長比較的圖表可知：

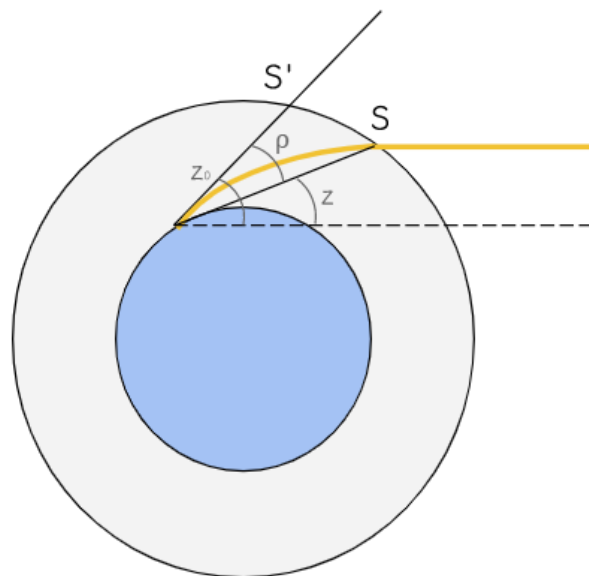
愈往高緯度，日照時長愈長。

由下圖可知，高緯度地區的 $\frac{\text{length } h \text{ of yellow}}{\text{length } h \text{ of purple + yellow}}$ 較低緯度地區大，所以高緯度地區的日照時長較低緯度地區的長。



三、藉由考量大氣分層的日照情形，得出日光平行進入大氣層，到最後與地表相切，受影響的蒙氣差數值為： $\angle p = z_0 - z$ 。

利用理論數據，得出蒙氣差理論值為 $0.562396789^\circ = 33.74380734'$ ，與來源資料中蒙氣差數據 34' 相近。



柒、結論

一、不考慮光線射入大氣層時產生的折射時，理論日照時長為：

$$\text{日照總時長} = \frac{\alpha}{2\pi} \times \text{各地真太陽時} = \frac{\cos^{-1}(-\tan\phi\tan\theta)}{\pi} \times \text{各地真太陽時}$$

二、太陽最大視角為 0.542° (近日點)、最小視角為 0.532° (遠日點)，所以春分點的太陽視角約為 0.537° 。而太陽視角影響的時間約為 2.1475m ：

$$\frac{0.537^\circ}{360^\circ} \times 1439.7\text{m} = 2.1475\text{m}$$

三、考慮光線進入大氣層的偏折，可得亮暗區臨界位置為：

$$x = -80.97514499\text{km}$$

四、得知亮暗區分界後，可以得出理論日照時長(考慮粗略的太陽視角)為：

$$\frac{\alpha}{2\pi} \times \text{各地真太陽時} + 2.1475\text{m} = \frac{\cos^{-1}\left(-\frac{0.012709958403704}{\cos\phi}\right)}{\pi} \times \text{各地真太陽時} + 2.1475\text{m}$$

五、將考慮大氣的理論日照時長與 24 個國家在 2022 年春分(3/20)時的實際日照時長做比對，可以發現兩者只有些微差距，而趨勢皆是愈高緯度，日照時長愈長。

六、影響日照時長的條件，除了已納入計算的太陽視角與大氣折射外，還可能包含：

1. 地球實際形狀為橢圓而非正圓。
2. 並未將實際上大氣中的壓力、溫度、水氣的複雜分布納入計算，且只考慮至 50 公里處的平流層頂端（因考量大氣層中 99% 的空氣均存在於對流層與平流層中）。

捌、參考資料

一、日出日落時間表 <https://sunrise.maplogs.com/zh-TW/>

二、由紅月亮談蒙氣差

三、地球科學概論(張惠民)

四、NOAA Solar Calculator <https://reurl.cc/qkrWbp>

五、地球的大氣層 (Atmosphere) <https://reurl.cc/V8QkqZ>

【評語】 051906

探討大氣折射對日照時間長短之影響，雖非很具創新之研究，但理論推導與計算流程邏輯清晰，有具體之研究結果。建議加強相關研究之文獻收集與探討，並可加強說明研究結果可能之應用。另外宜加強文中圖表之標示與說明。

作品海報



百「折」不屈

—大氣折射對日照時長影響

前言

地球自轉軸的傾斜以及太陽光線的照射位置會影響日照總時長，且隨著季節變化。在春秋分時，太陽光線直射赤道，理論上白天總時長為12小時。然而，大氣偏折會影響日出日落時間差，實際白天時長會如何變化呢？為探討此問題，本研究系統性地計算大氣對日出日落時間差的影響，並以實際情況進行比對，確認方法的正確性。

研究目的

- 一、視地球為正球體，僅考量太陽視角，計算未考慮大氣的白天理論時長
- 二、考量大氣氣體密度差異所導致日光偏折現象，將大氣分層，計算考慮大氣的白天理論時長
- 三、比對各國實際與理論日照時長差距，確認其精準性

研究方法

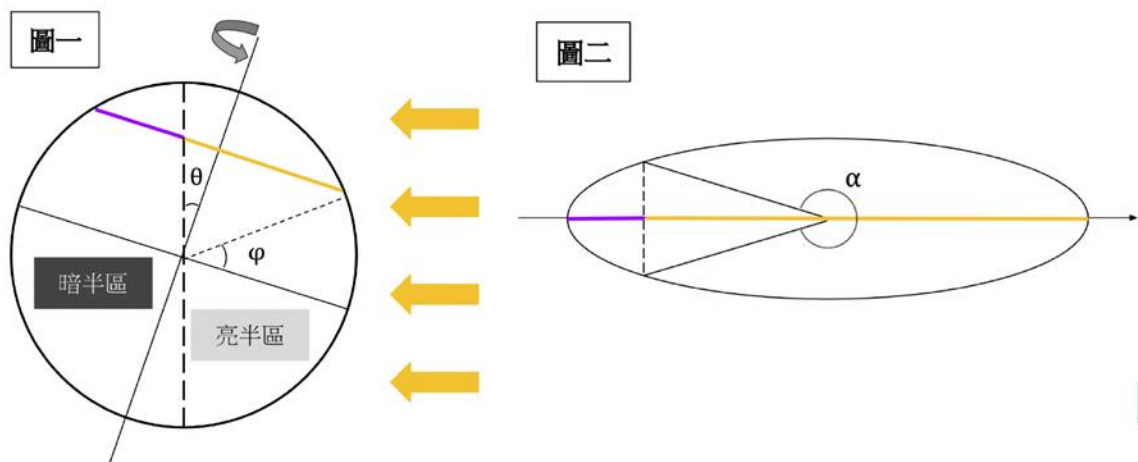
未考慮大氣，計算理論日照時長：

(圖一) 僅考慮二維圖形，假設太陽光從地球右方射來，日照時長即為 $\frac{\text{length of yellow}}{\text{length of purple+yellow}} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi \tan\theta}{2\cos\varphi} \dots(1)$

(圖二) 取緯度 φ 的圓薄片，設地球白天旋轉的角度為 α ，日照時長即為 $\frac{\text{length of yellow}}{\text{length of purple+yellow}} = \frac{1 - \cos(\alpha/2)}{2} \dots(2)$

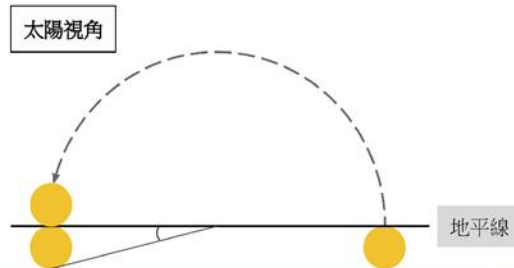
由(1)(2)可得 $\alpha = 2\cos^{-1}(-\tan\varphi \tan\theta)$

故理論日照時長為： $\alpha \times \frac{\text{各地真太陽時}}{2\pi} = \frac{\cos^{-1}(-\tan\varphi \tan\theta)}{\pi} \times \text{各地真太陽時}$

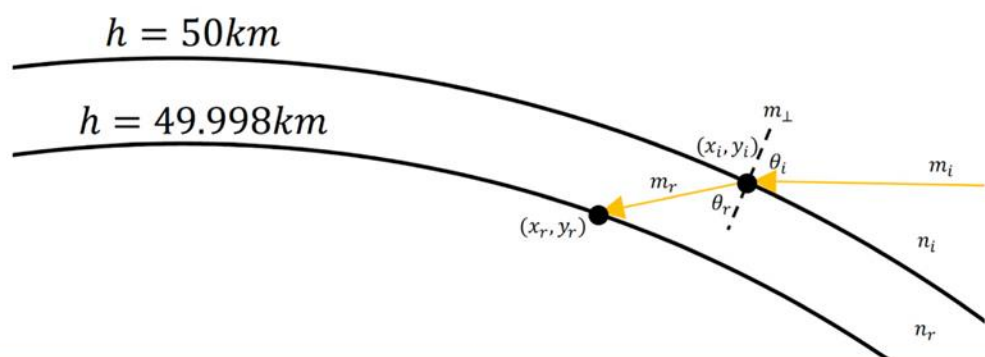


以2022肯亞春分時為例：

- 一、真太陽時23.995h帶入日照時長公式
 - ⇒ 理論白天時長為11h 59.768m
 - ⇒ 與實際相差7.032m
- 二、考慮春分點太陽視角為0.537°
 - ⇒ 白天時長增加2.1475m
 - ⇒ 與實際相差4.88m
- 三、假設4.88m為大氣折射造成的誤差，
 - $\frac{4.88m}{1439.7m} \times 360^\circ \times \frac{1}{2} = 0.6107^\circ = 36.642'$
 - ⇒ 蒙氣差為36.642'，與網路上理論值34'相近
 - ⇒ 太陽視角0.537°的假設合理



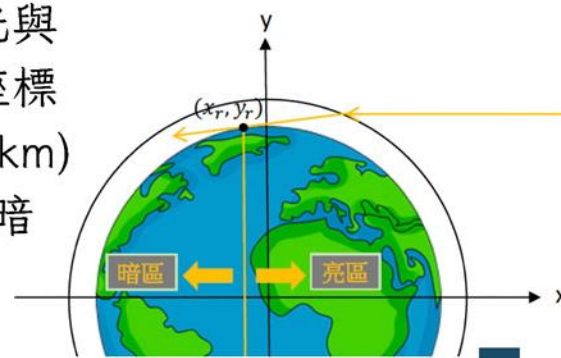
- 步驟一：初交點為 (x_i, y_i) ，計算法線斜率 $m_{\perp} = \frac{y_i}{x_i}$
- 步驟二：計算入射角 $\theta_i = \tan^{-1}(\frac{m_{\perp} - m_i}{1 + m_{\perp} m_i})$ ，並由公式可得入射折射率 n_i 與折射率 n_r
- 步驟三：由司乃耳定律可得折射角 $\theta_r = \sin^{-1}(\frac{n_i \sin\theta_i}{n_r})$
- 步驟四：計算折射線斜率 $m_r = \frac{m_{\perp} - \tan\theta_r}{1 + m_{\perp} \tan\theta_r}$
- 步驟五：由前述計算可得折射線方程式 $y - y_i = m_r(x - x_i)$
- 步驟六：與下層大氣圓方程式解聯立計算得下層交點 (x_r, y_r) ，回到步驟一



考慮大氣，計算光線偏折路徑：

- 一、假設地球為完美球形，半徑為6371km
- 二、由文獻可知大氣的折射率函數 n ：
 $n(h) = 1 + 29674 \times 10^{-8} e^{-0.146h}$
- 三、令大氣邊界海拔高度 $H_{max} = 50km$
- 四、將大氣切成無數厚度為0.002km的薄球殼
- 五、僅觀測xy平面，地球球心置於(0,0)，光線由(-1,0,0)方向射向地球

取y值恰好時入射光與地表的切點，過x座標 $(x = -80.97514499km)$ 處的鉛直線即為亮暗區交界。



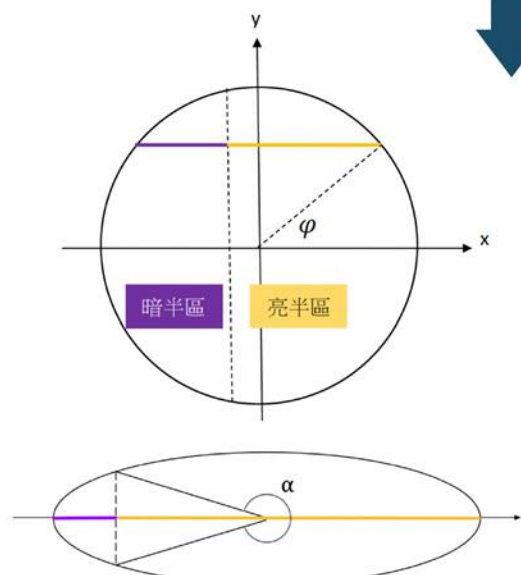
考慮大氣，計算理論日照時長（圖示以春分為例）：

$$\frac{\text{length of yellow}}{\text{length of purple + yellow}} = \frac{6371\cos\varphi + 80.97514499}{2 \times 6371\cos\varphi} = \frac{1 - \cos(\alpha/2)}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2\cos^{-1}\left(-\frac{0.012709958403704}{\cos\varphi}\right)$$

故考慮大氣後的理論日照時長：

$$\frac{\alpha}{2\pi} \times \text{各地真太陽時} + 2.1475m = \frac{\cos^{-1}\left(-\frac{0.012709958403704}{\cos\varphi}\right)}{\pi} \times \text{各地真太陽時} + 2.1475m$$



研究結果

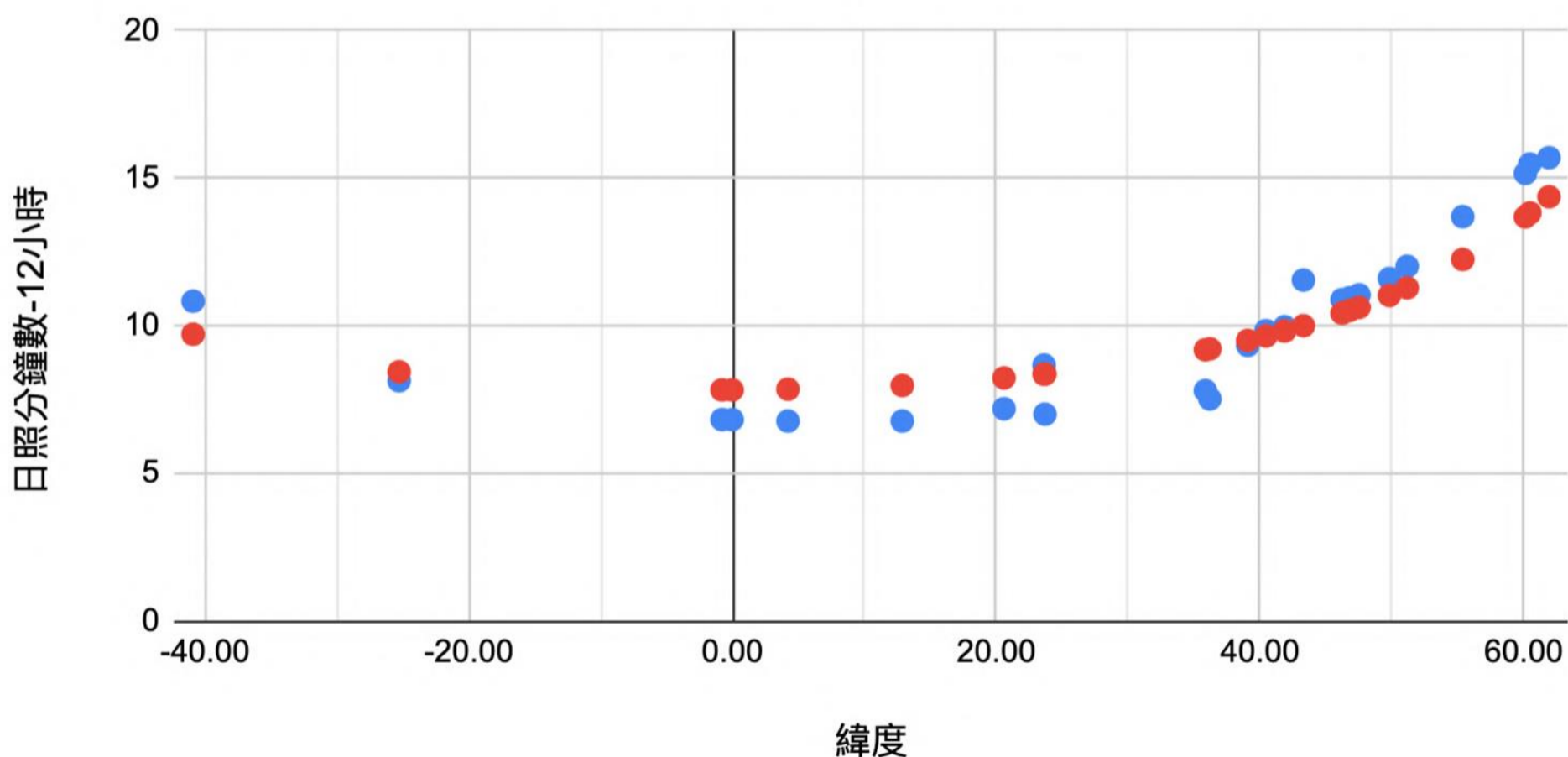
為確認理論的正確性，我們將理論白天時長的計算與24個國家在2022年春分(3/20)的實際白天時間做比較，結果如下：

國家	實際日照時長	理論日照時長	相差分鐘數	緯度	經度	太陽時
紐西蘭	12:10:50	12.16187241	1.120989	-40.90	174.885971	23.99527778
澳洲	12:08:08	12.14064846	-0.305574	-25.27	133.775136	23.99500000
印尼	12:06:49	12.13038019	-1.006145	-0.79	113.921327	23.99500000
肯亞	12:06:49	12.13037099	-1.005593	-0.02	37.906193	23.99500000
馬來西亞	12:06:46	12.13077373	-1.079757	4.21	101.975766	23.99527778
菲律賓	12:06:46	12.13287666	-1.205933	12.88	121.774017	23.99500000
印度	12:07:11	12.13713847	-1.044975	20.59	78.962880	23.99527778
墨西哥	12:08:40	12.13925994	0.311070	23.63	-102.552783	23.99500000
台灣	12:07:00	12.13931128	-1.358677	23.70	120.960515	23.99500000
中國	12:07:48	12.15308020	-1.384812	35.86	104.195397	23.99500000
日本	12:07:31	12.15360328	-1.699530	36.20	138.252924	23.99500000
希臘	12:09:20	12.15834288	-0.167240	39.07	21.824312	23.99500000
西班牙	12:09:50	12.16089283	0.179764	40.46	-3.749220	23.99500000
義大利	12:09:58	12.16366555	0.146734	41.87	12.567380	23.99500000
美國	12:11:33	12.16668595	1.548843	43.30	-74.2179326	23.99500000
法國	12:10:53	12.17376591	0.457379	46.23	2.213749	23.99527778
瑞士	12:10:57	12.17529989	0.432007	46.82	8.227512	23.99527778
奧地利	12:11:03	12.17703629	0.427823	47.52	14.550072	23.99500000
捷克共和國	12:11:36	12.18375555	0.574667	49.82	15.472962	23.99500000
德國	12:12:01	12.18811217	0.729937	51.17	10.451526	23.99500000
英國	12:13:42	12.20416777	1.449934	55.38	-3.435972	23.99500000
瑞典	12:15:10	12.22822185	1.473355	60.13	18.643501	23.99500000
挪威	12:15:29	12.23042536	1.657812	60.47	8.468946	23.99527778
芬蘭	12:15:42	12.23958177	1.325094	61.92	25.748151	23.99500000

將上述表格繪製成以下圖表，比較實際日照時長與理論日照時長間的差異：

實際與理論日照時長比較

● 分鐘(實際) ● 分鐘(理論)



由上圖可知，理論與實際日照時長的差距都在2分鐘以內，且兩者趨勢皆是愈往高緯度，日照時長愈長。

討論

一、影響日照時長的條件，除了已納入計算的太陽視角與大氣折射外，還可能包含：

1. 地球實際形狀

由於地球實際形狀為橢球體而非正球體，可能因此造成白天時間的誤差。

2. 大氣變化複雜

實際大氣的壓力、溫度、水氣分布複雜，故大氣折射率的假設可能失準。且真實地球大氣還有區分對流層、平流層、中氣層、增溫層，因考量大氣層99%的空氣存在於對流層與平流層，故大氣層厚度只考慮至50公里處(平流層頂)。

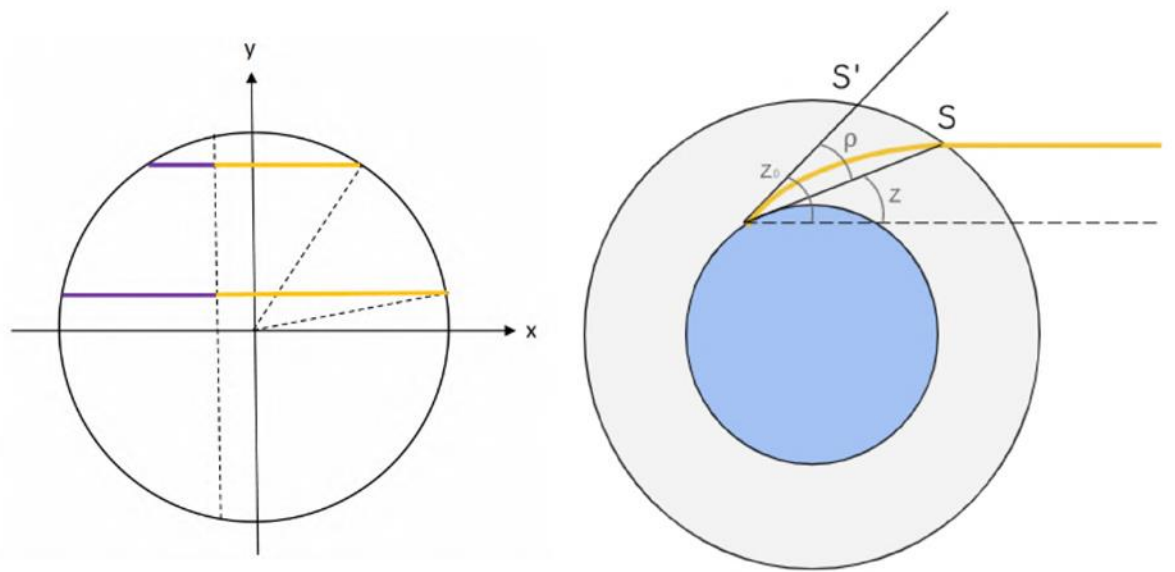
二、由實際與理論日照時長比較的圖表可知：

愈往高緯度，日照時長愈長。

由下圖可知，高緯度地區的 $\frac{\text{length of yellow}}{\text{length of purple+yellow}}$ 較低緯度地區大，所以高緯度地區的日照時長較低緯度地區的長。

三、藉由考量大氣分層的日照情形，得出日光平行進入大氣層，到最後與地表相切，受影響的蒙氣差數值為： $\angle p = \angle z_0 - \angle z$ 。

利用理論數據，得出蒙氣差理論值為 $0.60460547^\circ = 36.27632845'$ ，與來源資料中蒙氣差數據34'相近。



結論

一、不考慮光線射入大氣層時產生的折射時，理論日照時長為：

$$\text{日照總時長} = \frac{\alpha}{2\pi} \times \text{各地真太陽時} = \frac{\cos^{-1}(-\tan\phi \tan\theta)}{\pi} \times \text{各地真太陽時}$$

二、太陽最大視角為 0.542° (近日點)、最小視角為 0.532° (遠日點)，故春分點的太陽視角可假設為 0.537° 。而以肯亞為例，太陽視角影響的時間約為2.1475m：

$$\frac{0.537^\circ}{360^\circ} \times 1439.7m = 2.1475m$$

三、考慮光線進入大氣層的偏折，可得亮暗區臨界位置為： $x = -80.97514499km$

四、得知亮暗區分界後，可以得出理論日照時長(考慮粗略的太陽視角)為：

$$\frac{\alpha}{2\pi} \times \text{各地真太陽時} + 2.1475m = \frac{\cos^{-1}\left(-\frac{0.012709958403704}{\cos\phi}\right)}{\pi} \times \text{各地真太陽時} + 2.1475m$$

五、將考慮大氣的理論日照時長與24個國家在2022年春分(3/20)時的實際日照時長做比對，可以發現兩者只有些微差距，而趨勢皆是愈高緯度，日照時長愈長。

六、影響日照時長的條件，除了已納入計算的太陽視角與大氣折射外，還可能包含：

1. 地球實際形狀為橢球體而非正球體。

2. 並未將實際上大氣中的壓力、溫度、水氣的複雜分布納入計算，且只考慮至50公里處的平流層頂端(因考量大氣層中99%的空氣存在於對流層與平流層中)。

參考文獻

一、日出日落時間查詢 - MAPLOGS

二、由紅月亮談蒙氣差

三、地球科學概論(張惠民)-明文書局(p.110、p.113)

四、NOAA Solar Calculator (ESRL Global Monitoring Laboratory)

五、地球的大氣層(地球科學概論-第五章)