

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組 物理與天文學科

第一名

051815

攻角對水漂跳動行為的力學分析

學校名稱：國立臺灣師範大學附屬高級中學

作者： 高二 黃翊峰	指導老師： 黃裕修 李荐軒
-------------------	-----------------------------

關鍵詞：流體力學、最佳攻角、水漂

得獎感言

感恩

還記得高一上學期毅然決然地從地專轉到物專的決心，當時是覺得自己對物理蠻有興趣的（現在依然如此），也謝謝老師當初在物專人幾乎爆滿的情況下選擇多帶我一人做專題研究，謝謝老師！

進物專後，我開始積極的和教授討論題目的方向，並不斷的改進實驗器材，印象中當時拿著無數片壓克力板，帶到臺大應力所嘗試組裝，也跑過附製工坊切割水漂，更是用了物一不少的切割、打磨機器。高二寒假則是花了幾個禮拜的時間埋頭做實驗和寫報告書，對於文書處理一向不擅長的我，也是獨自完成一份完整的作品說明書。

至於一路比賽到現在，最感謝的當然就是兩位指導老師。從校內、北市，再到現在的全國，一路上的作品修改和口說練習使我對於物理科學的表達更為熟悉，老師們都幫助我非常多，也謝謝老師犧牲自己好幾個休假時間，陪我縱橫於科展競賽之中。除此之外，也要感謝一路青睞我的評審們，我自己也覺得挺幸運的。



與指導老師的合照



附中大合照



個人照

摘要

此研究是以實驗方式，驗證理論模擬中指出水漂在不同入水模式下，攻角為 20 度時皆可產生最佳的彈跳效果。因此我以壓克力板作為模擬水漂的模型，設計了以下四組操作變因，分別是入水攻角、水的流速、水漂邊界形狀以及不同粗糙程度的接觸面，透過 Tracker 分析壓克力板的質心彈跳高度及運動軌跡，再利用 Excel、SciDAVis 分析數據，找出其中的運動相關性。最後透過座標轉換，可以利用這些實驗來分析打水漂的運動行為，成功發現攻角在 20 度時有最佳的彈跳效果，並以此結論來優化打水漂的運動行為。

壹、前言

一、研究動機

在我小的時候，常常與家人在河邊打水漂，對於一顆平凡無奇的石頭卻能在水上多次彈跳感到非常奇妙，石頭的重力竟然沒有讓它沉入水底，只要角度抓對，石頭竟然能彈跳起來，同時，石頭的接觸面形狀以及入水速度似乎都是影響水漂彈跳的相關因素，於是我想透過實驗的方法，嘗試解開打水漂的秘密，也希望藉此學習更多流體力學的知識。

二、研究目的

- (一)、探討不同水流流速對於壓克力板彈跳之影響
- (二)、探討不同攻角對於壓克力板彈跳之影響
- (三)、分析壓克力板的最佳彈跳攻角
- (四)、探討不同邊界形狀對於壓克力板彈跳之影響
- (五)、探討不同粗糙程度的接觸面對於壓克力板彈跳之影響

貳、研究設備及器材

一、實驗儀器

		
滑道	水漂 (壓克力片)	沉水馬達
		
分流器	拍攝腳架	集水箱
		
強力磁鐵	鉸鏈	Tracker 軟體

表(一)、實驗儀器

參、研究過程或方法

一、文獻探討

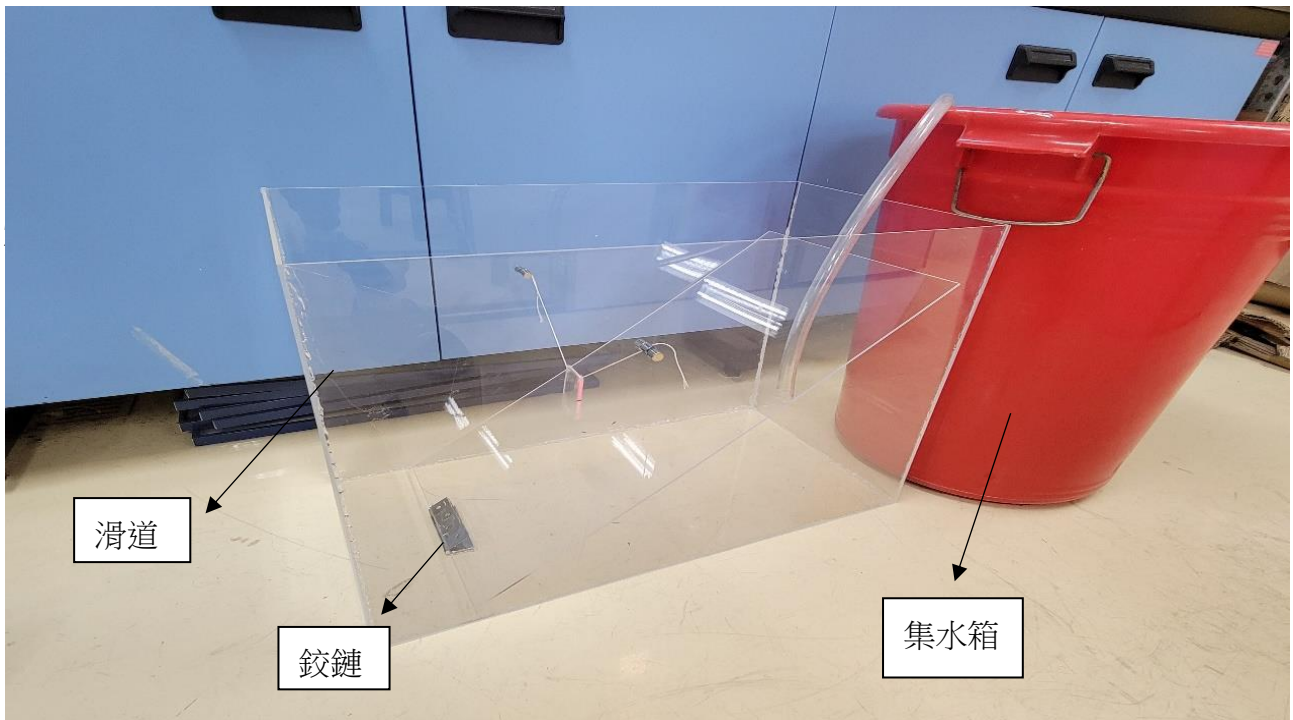
我參考了 2003 年 Lydéric Bocquet 的論文<The physics of stone skipping >，論文中提出相關的力學方程式，並且計算出水漂最低入水速度的方程式。此外，能量耗散以及彈跳次數預測方程也是其重大貢獻。

接著我參考了 2005 年 Nagahiro、Hayakawa 的論文<Theoretical and Numerical Approach to “Magic Angle” of Stone Skipping >，論文中以無因次化的推導搭配電腦模擬，提出了水漂與水面存在一個 Magic Angle，約略為 20 度，此角度又稱作攻角，此攻角能以最低入水速度達到彈跳現象，此外也提出了欲發生彈跳的最小入水速度以及石頭的幾何尺度、密度等關係式。給予我足夠的背景知識來研究。

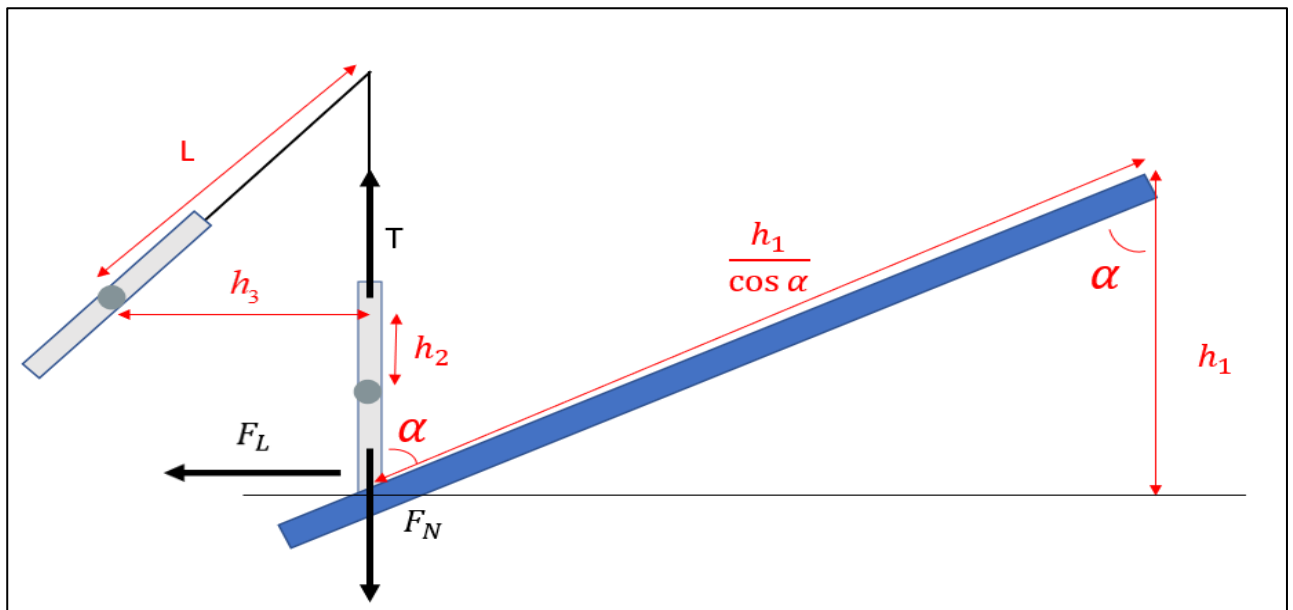
最後我參考了 2019 年 Shih-Ping Lin 碩士的論文<Simulation on fluid-solid coupling phenomenon of an object impacting the water surface>，論文中以模擬的方式說明了水漂在攻角為 20 度時，有最佳的彈跳效果，其中模擬的環境為無剪應力的水與一大氣壓下的理想空氣，並且水漂設定為剛體，但因為沒有具體的實驗佐證，因此我打算以實驗的方式來驗證水漂最佳彈跳攻角，並且我也好奇相同攻角下，不同流速對於彈跳效果的影響，也就是如果我以相同方式丟出同一個水漂，那麼在靜止的河流與快速流動的海浪邊彈跳情形是否相同。

由於歷屆科展作品中的相關實驗會有發射水漂穩定性和動態觀測困難的問題，所以我設計懸吊水漂、放以水流撞擊水漂的方式來分析其力學行為。

二、實驗裝置架設圖



圖(一)、實驗裝置圖



圖(二)、滑道示意圖

圖(二)參數說明：

標號	意義	標號	意義	標號	意義
h_1	流體高度差	α	攻角	h_2	質心高度差
h_3	質心橫向位移差	$\frac{h_1}{\cos \alpha}$	斜面長度	L	擺長
T	繩張力	F_L	流體升力	F_N	流體阻力

三、實驗一：探討不同水流速度對於壓克力板彈跳之影響

(一)、實驗理論

實驗目標是能改變流速，因此在本研究的實驗裝置中，透過改變流體初始高度，就能使初始重力位能改變，再透過重力的作用，使得重力位能轉換成流體動能，就可以調整流體撞擊壓克力板時的速度。

考慮摩擦力作功後總力學能的量值

$$E = E_{ori} + mgh_1 - F_k \frac{h_1}{\cos \alpha} \quad (1)$$

F_k ：斜面摩擦力 E_{ori} ：流體初始動能 m ：流體質量

透過功能定理可以得出流體速度

$$v = \sqrt{\frac{2(E_{ori} + mgh_1 - F_k \frac{h_1}{\cos \alpha})}{m}} \quad (2)$$

v ：流體速度

因為水與壓克力板的接觸時間極小，因此可將受力關係以平均力的方式近似成直線加速

$$S = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2S}{a}} \quad (3)$$

S ：壓克力板加速距離

流體的升力 F_L 與阻力 F_N 分別為

$$F_L = \frac{1}{2} \rho A C_L v^2 = \frac{1}{2} \rho A C_L \times \frac{2(E_{ori} + mgh_1 - F_k \frac{h_1}{\cos \alpha})}{m} \quad (4)$$

$$F_N = \frac{1}{2} \rho A C_N v^2 = \frac{1}{2} \rho A C_N \times \frac{2(E_{ori} + mgh_1 - F_k \frac{h_1}{\cos \alpha})}{m} \quad (5)$$

算式(4)為流體的升力公式、算式(5)為流體的阻力公式

ρ :流體密度 A :流體與壓克力板的接觸面積 C_L :升力係數 C_N :阻力係數

壓克力板與水接觸瞬間，向上的繩張力 T 與向下的流體阻力 F_N 以及水漂所受重力 Mg 抵銷，水平方向上仍受到流體的升力 F_L ，透過計算壓克力板的加速度可以得到如下的關係式

$$F_L = Ma \Rightarrow a = \frac{F_L}{M} = \frac{\frac{1}{2} \rho A C_L \times \frac{2(E_{ori} + mgh_1 - F_k \frac{h_1}{\cos \alpha})}{m}}{M} \quad (6)$$

M : 壓克力板質量

a : 壓克力板加速度

將算式(6)的結論帶入算式(3)得到以下關係

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2S}{\frac{\frac{1}{2} \rho A C_L \times \frac{2(E_{ori} + mgh_1 - F_k \frac{h_1}{\cos \alpha})}{m}}{M}}} \quad (7)$$

接著，要計算壓克力板與流體分離後的速度

$$v_p = \frac{F_L \times t}{M} = \sqrt{\frac{2S \times \frac{1}{2} \rho A C_L \times \frac{2(E_{ori} + mgh_1 - F_k \frac{h_1}{\cos \alpha})}{m}}{M^2}} = \sqrt{\frac{2S \rho A C_L (E_{ori} + mgh_1 - F_k \frac{h_1}{\cos \alpha})}{M^2 m}} \quad (8)$$

v_p : 壓克力板的速度

透過以上推導，並利用力學能守恆得出算式(9)、算式(10)，其中 E_p 是指壓克力板的動能

$$E_p = \frac{1}{2} M v_p^2 = \frac{S \rho A C_L (E_{ori} + mgh_1 - F_k \frac{h_1}{\cos \alpha})}{M m} \quad (9)$$

$$E_p = Mgh_2 \quad (10)$$

將算式(9)、(10)聯立可得算式(12)

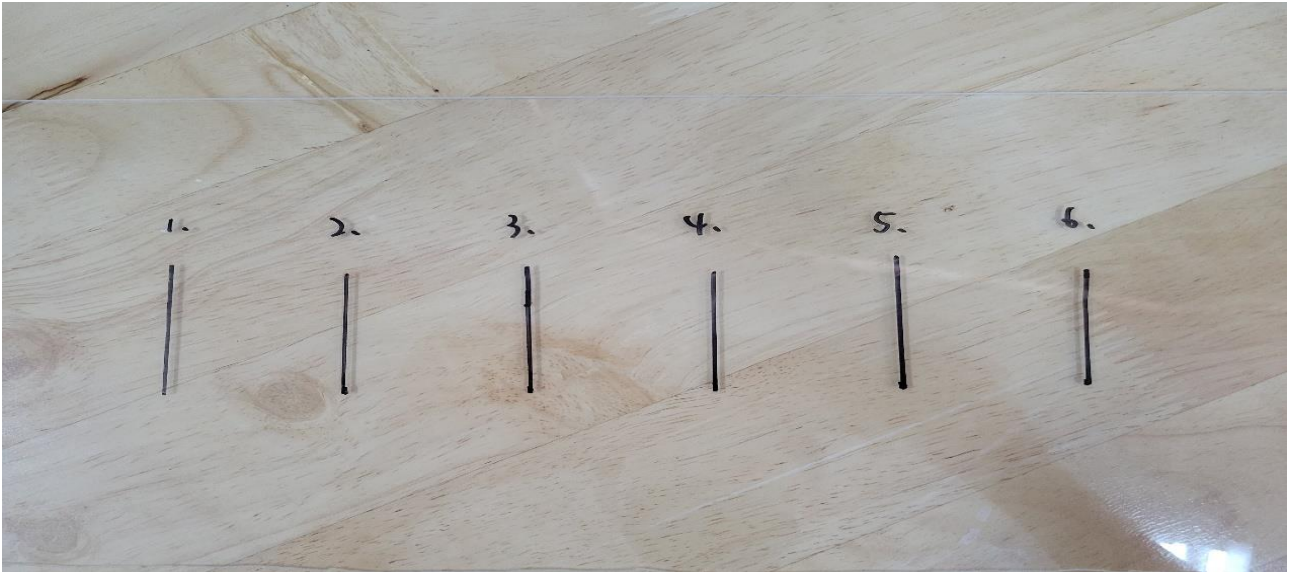
$$E_p = Mgh_2 = \left(\frac{S \rho A C_L}{M m}\right) E_{ori} + \left(\frac{S \rho A C_L}{M m}\right) \left(mg - \frac{F_k}{\cos \alpha}\right) h_1 \quad (11)$$

$$h_2 = \left(\frac{S \rho A C_L}{M^2 mg}\right) E_{ori} + \left(\frac{S \rho A C_L}{M^2 mg}\right) \left(mg - \frac{F_k}{\cos \alpha}\right) h_1 \quad (12)$$

因此，壓克力板的質心彈跳高度和流體初始釋放高度的關係會是一條不通過原點斜直線。

其中 $\left(\frac{S \rho A C_L}{M^2 mg}\right) \left(mg - \frac{F_k}{\cos \alpha}\right)$ 為斜率， $\left(\frac{S \rho A C_L}{M^2 mg}\right) E_{ori}$ 為截距

(二)、實驗設計



圖(三)、實驗一水位高度標示

每次實驗都將出水口往下移動一格，因為圖上的間隔皆為等距(五公分)，因此高度差 h_1 成等差數列，根據算式(12)，可以預期壓克力板的彈跳高度 h_2 也會成等差數列。

(三)、實驗步驟

- 1.將集水箱注滿水，並將沉水馬達放入其中
- 2.架設攝影機，並使其水平面向壓克力板
- 3.將水管出水口放置於圖(三)的標號 1
- 4.開啟沉水馬達，並錄製壓克力板彈跳影片
- 5.重複 3、4 兩步驟，並將水管出水口放置於圖(三)的標號 2、3、4...，並依序擷取畫面

(四)、數據分析

- 1.將影片匯入 Tracker，並手動追蹤數據點
- 2.將時間 t 與壓克力的彈跳高度 h_2 匯入 Excel

3.找出每一組 h_1 對應的平均彈跳高度 h_2

4.將 h_1 與 h_2 繪製成圖

四、實驗二：探討不同攻角對於壓克力板彈跳之影響

(一)、實驗理論

在<Simulation on fluid-solid coupling phenomenon of an object impacting the water surface>這篇論文裡面模擬了不同攻角與彈跳速度的關係，其中模擬的環境為無剪應力的水與一大氣壓下的理想空氣，並且忽略水漂在彈跳過程的形變，可將其視為理想剛體，環境溫度為 20 度，透過此模擬找出了最佳彈跳攻角大約落在 20 度，並與其參考文獻相符。因此本研究透過實驗驗證上述文章中的模擬結果。

並且 2005 年 Nagahiro、Hayakawa 的論文<Theoretical and Numerical Approach to “Magic Angle” of Stone Skipping >提出了以下兩條方程式，並搭配數值解析得到了攻角與最低入水速度 V_{\min} 的關係式

$$V_{\min} = \frac{\sqrt{2gR}}{\cos(\theta+\alpha)} \sqrt{\xi \sin \alpha + \frac{\sigma \cos \alpha}{C_D \lambda \sin^2 \alpha}} \quad (13)$$

$$\theta = \arccos \sqrt{\frac{2gR}{V_{\min}^2} (\xi \sin \alpha + \frac{\sigma \cos \alpha}{C_D \lambda \sin^2 \alpha})} - \alpha \quad (14)$$

R ：水漂半徑 θ ：入水速度與水面夾角(Incident angle) α ：攻角(Attack angle)

σ ：水漂與流體的比重 λ ：水漂半徑與厚度的比值 C_L ：升力係數(Lift coefficient)

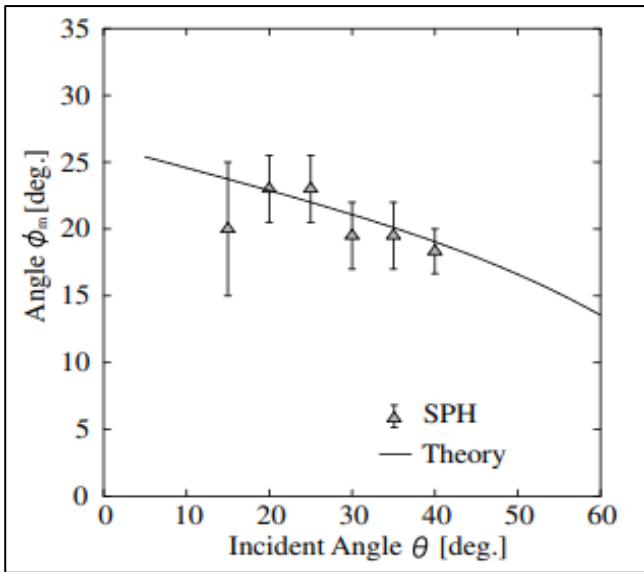
ξ ：水漂的沉水最大深度

接著對算式(13)進行偏微分(θ 、 α 為變數)，得算式(15)

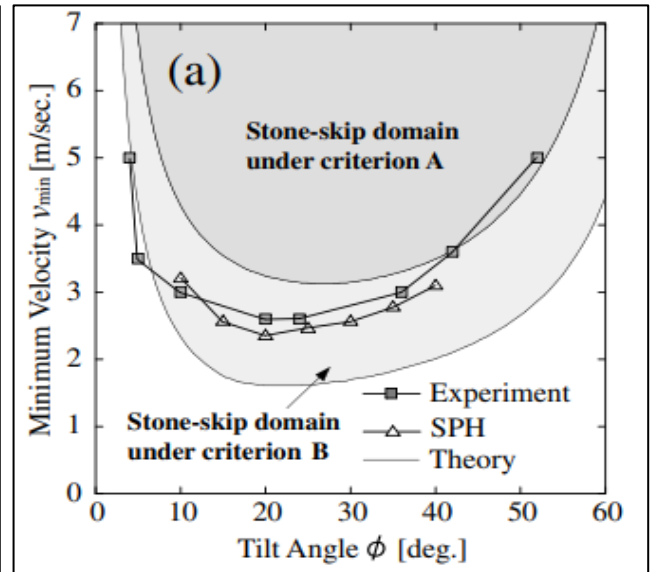
$$\text{當 } \frac{\partial V_{\min}}{\partial \alpha} = 0, \alpha \cong 20^\circ \quad (15)$$

因此水漂攻角在 20 度時能以最低入水速度發生彈跳現象，並定義此攻角為 Magic Angle

1. 下圖參考<Theoretical and Numerical Approach to “Magic Angle” of Stone Skipping >的圖表



圖(四)、入射角和最佳攻角的關係圖



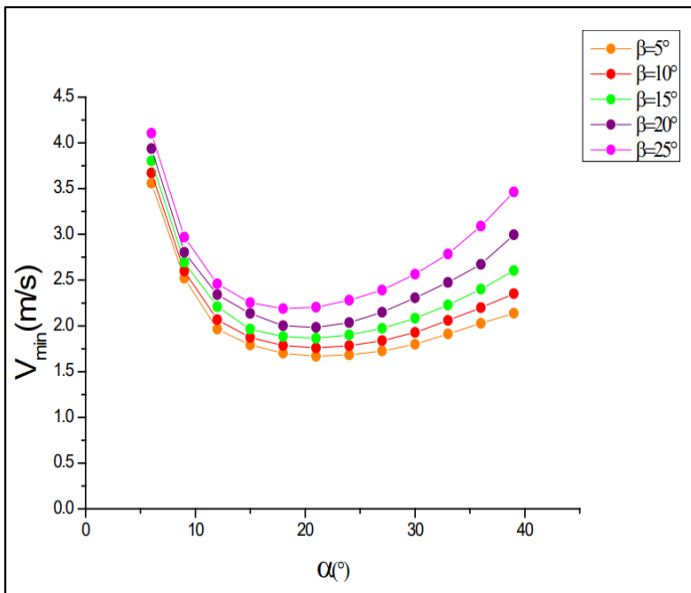
圖(五)、攻角與最低入水速度的關係圖

由圖四可知，不論以無因次化的推導搭配電腦模擬 SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics) 方法，又或是數值解析的理論，都能得到 20 度為最佳攻角。

由圖五可知，實驗、SPH 模擬、數值理論都能得到高度相似的結果，可看出在攻角 $\phi \cong 20^\circ$ 時，具有最低入水速度(Minimum Velocity)。

由以上兩圖可知，不論 θ 、 σ 、 λ 參數如何改變，攻角 ϕ 在 20 度時都能以最低的入水速度發生彈跳，因此 Magic Angle 即為 20 度。

2. 下圖參考<Simulation on fluid-solid coupling phenomenon of an object impacting the water surface> 的圖表



圖(六)、不同攻角與入水速度的關係圖

由左圖可知，不論入射角 θ (Incident Angle) 如何改變，在攻角 20 度時都具有最低的入水速度，此外入射角 θ 越小，所需的最低的入水速度也較低，因此本實驗將入射角 θ 設定為 0 度，以此優化實驗進行。

(二)、實驗設計



圖(七)、鉸鏈

將滑道與底部以鉸鏈連接，因此可以自由改變攻角。本實驗中設計了 10 度、15 度、20 度...等幾種不同的攻角

(三)、實驗步驟

- 1.將集水箱注滿水，並將沉水馬達放入其中
- 2.架設攝影機，並使其水平面向壓克力板
- 3.將滑道與底部的角度調整為 10 度
- 4.開啟沉水馬達，並錄製壓克力板彈跳影片
- 5.重複 3、4 兩步驟(角度依序為 15 度、20 度、25 度…)，並依序擷取畫面

(四)、數據分析

- 1.將影片匯入 Tracker，並手動追蹤數據點
- 2.將時間 t 與壓克力的彈跳高度 h_2 匯入 Excel
- 3.找出每一組攻角對應的平均彈跳高度 h_2
- 4.將攻角與 h_2 繪製成圖

五、實驗三：探討不同邊界形狀對於壓克力板彈跳之影響

影響實驗三結果的主要因素為紊流(Turbulent Flow)的產生與否，若接觸面的形狀阻力(Form drag)越大，則壓克力板的彈跳高度將有所下降，反之，若接觸面的形狀阻力越小，則壓克力板的彈跳高度將顯著上升。因為此研究使用的流體是水，又因為水的雷諾數相當大，因此將可忽略黏滯阻力帶來的些微影響。

(一)、編號 1 水漂的接觸面與流線相去甚遠，考量到在邊界產生的紊流與漩渦，因此彈跳高度將顯著減小。

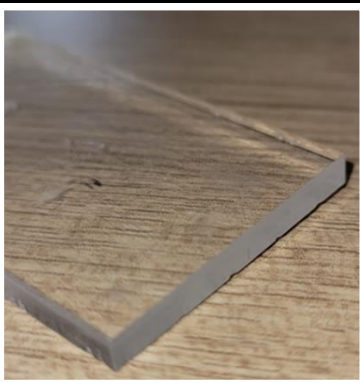
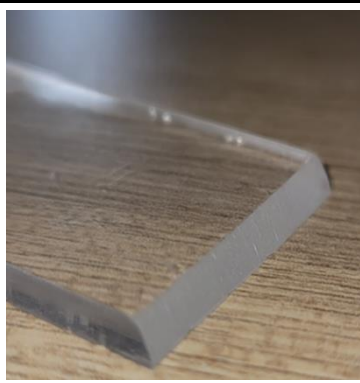
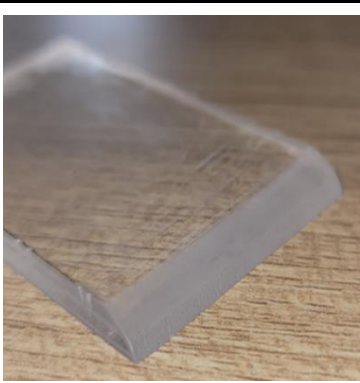
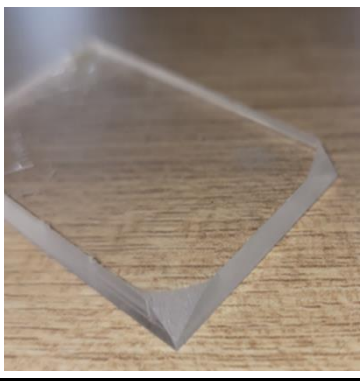

(二)、編號 2 水漂的切面非常平整，與理想流線相似，因此推測其彈跳高度將顯著增加。

(三)、編號 3 水漂的接觸面為圓弧線，與理想流線高度相似，因此推測其擁有最高彈跳高度。

(四)、編號 4 水漂的接觸面中央保有編號 1 水漂的形狀，只在接觸面兩側進行加工，因此雖然接觸面形狀有改變，但推測其對於整體彈跳高度的影響將有限。

(五)、編號 5 水漂的接觸面不對稱，因此兩側受力將不平均，推測其運動過程將伴有旋轉產生，因此部分能量將供給於旋轉，而最大彈跳高度將顯著下降。


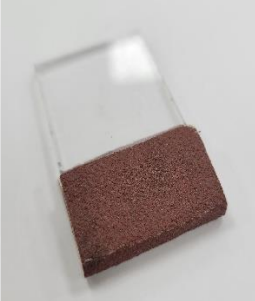


表(二)、不同邊界形狀水漂

水漂照片			
接觸面形狀	未加工	切面平整	圓弧形
編號	1	2	3
水漂照片			
接觸面形狀	兩側磨成圓弧	半邊磨成圓弧	
編號	4	5	

六、實驗四：探討不同粗糙程度的砂紙對於壓克力板彈跳之影響

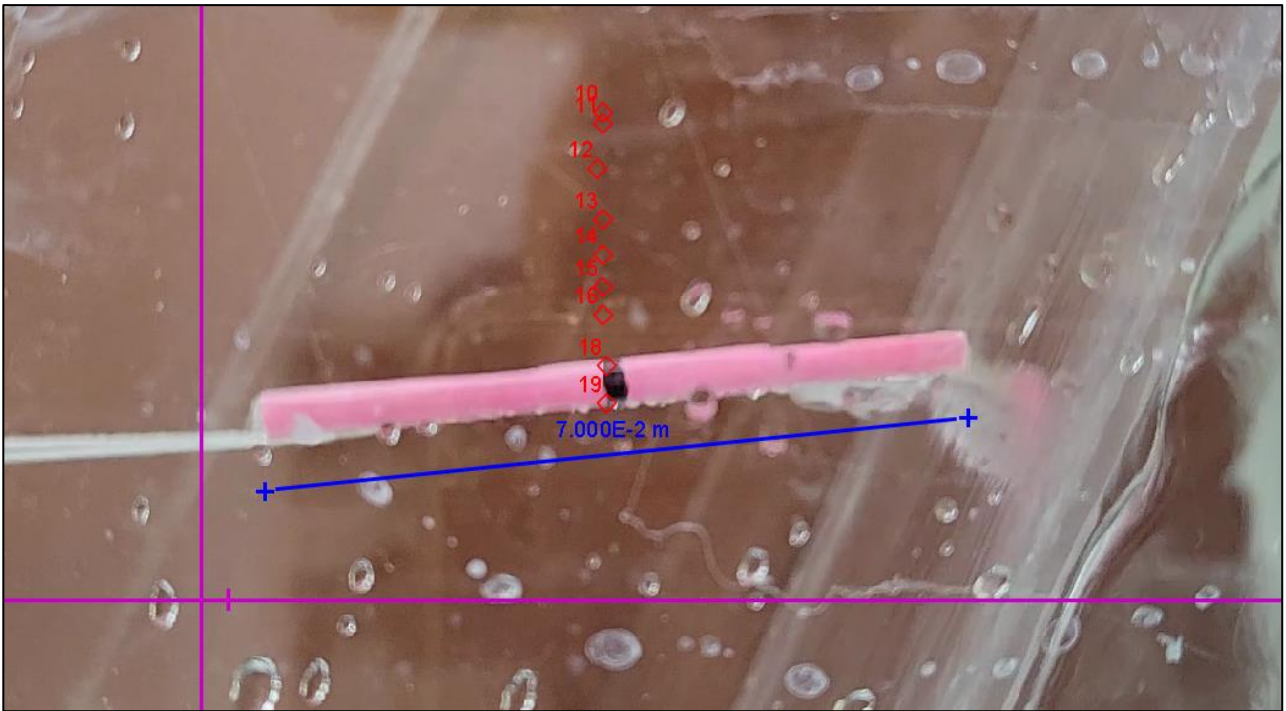
砂紙的號數代表著砂紙的粗糙程度。若號數越大，則砂紙越光滑；若號數越小，則砂紙越粗糙。

表(三)、不同粗糙程度的砂紙

水漂照片				
砂紙號數	100	200	300	400
編號	6	7	8	9

影響實驗四結果的主要因素為紊流(Turbulent Flow)的產生與否，與實驗三不同的是，實驗四的阻力來源為摩擦阻力(Skin friction)，而非實驗三提及的形狀阻力(Form drag)。因此可以預期號數越大的水漂，其彈跳效果越好，反之，號數越小的水漂，其彈跳效果越差。因為此研究使用的流體是水，又因為水的雷諾數相當大，因此將可忽略黏滯阻力帶來的些微影響。

肆、研究結果

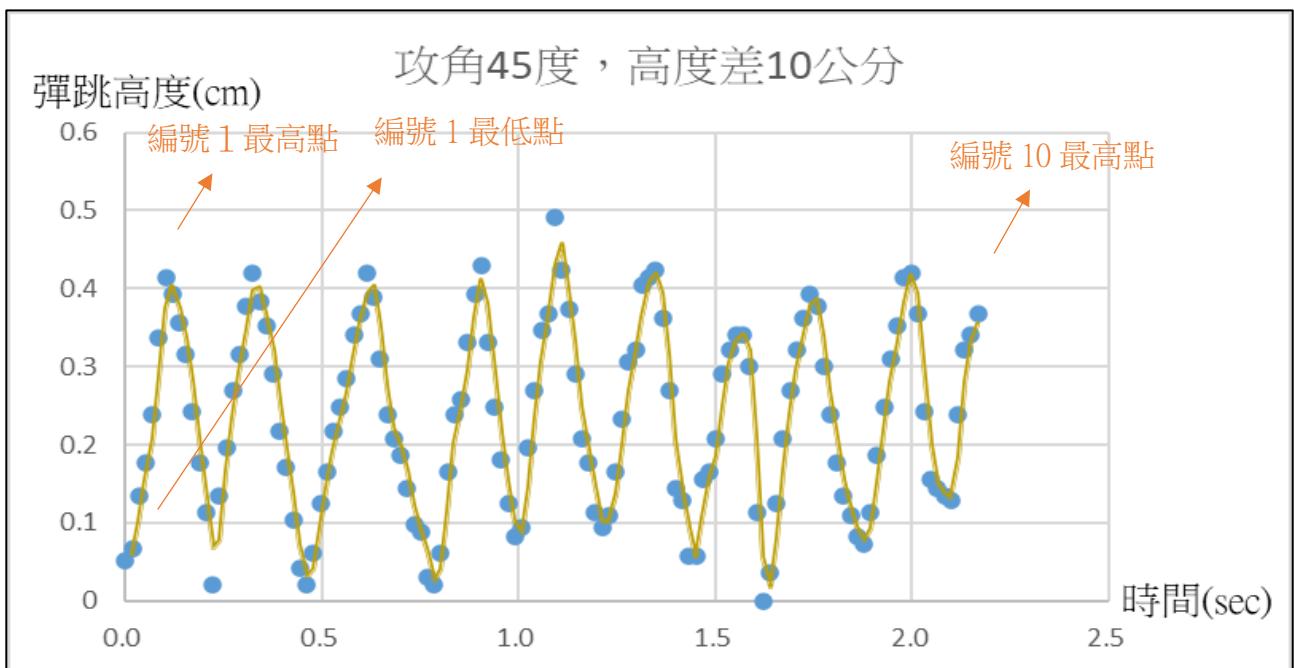


圖(八)、Tracker 追蹤畫面

如圖八所示，透過追蹤水漂的質心位移過程，擷取其彈跳最高點以及彈跳最低點相減得到彈跳高度。

一、實驗一：探討不同水流流速對於壓克力板彈跳之影響

(一)、第一組：攻角 $\alpha = 45$ 度，高度差 $h_1 = 10$ 公分



圖(九)、攻角 $\alpha = 45$ 度，高度差 $h_1 = 10$ 公分下，壓克力板彈跳高度與時間的關係

實驗參數		攻角 $\alpha = 45$ 度，高度差 $h_1 = 10$ 公分			
編號	最高點	最低點	編號	最高點	最低點
1	0.414cm	0.052cm	6	0.424cm	0.076cm
2	0.419cm	0.023cm	7	0.416cm	0.073cm
3	0.425cm	0.022cm	8	0.431cm	0.012cm
4	0.429cm	0.031cm	9	0.414cm	0.022cm
5	0.491cm	0.029cm	10	0.418cm	0.056cm
最高點平均距離			0.428±0.0069cm		
最低點平均距離			0.038±0.0069cm		
平均振幅			0.390±0.0069cm		

(二)、第二組：攻角 $\alpha = 45$ 度，高度差 $h_1 = 15$ 公分

實驗參數		攻角 $\alpha = 45$ 度，高度差 $h_1 = 15$ 公分			
編號	最高點	最低點	編號	最高點	最低點
1	0.559cm	0.209cm	6	0.689cm	0.179cm
2	0.547cm	0.170cm	7	0.671cm	0.143cm
3	0.606cm	0.144cm	8	0.562cm	0.166cm
4	0.665cm	0.091cm	9	0.586cm	0.042cm
5	0.648cm	0.170cm	10	0.571cm	0.067cm
最高點平均距離			0.610±0.016cm		
最低點平均距離			0.138±0.016cm		
平均振幅			0.472±0.016cm		

(三)、第三組：攻角 $\alpha = 45$ 度，高度差 $h_1 = 20$ 公分

實驗參數		攻角 $\alpha = 45$ 度，高度差 $h_1 = 20$ 公分			
編號	最高點	最低點	編號	最高點	最低點
1	0.655cm	0.103cm	6	0.634cm	0.146cm
2	0.615cm	0.048cm	7	0.714cm	0.178cm
3	0.672cm	0.113cm	8	0.516cm	0.135cm
4	0.614cm	0.086cm	9	0.623cm	0.074cm
5	0.648cm	0.033cm	10	0.659cm	0.212cm
最高點平均距離			0.625±0.019cm		
最低點平均距離			0.113±0.019cm		
平均振幅			0.512±0.019cm		

(四)、第四組：攻角 $\alpha = 45$ 度，高度差 $h_1 = 25$ 公分

實驗參數		攻角 $\alpha = 45$ 度，高度差 $h_1 = 25$ 公分			
編號	最高點	最低點	編號	最高點	最低點
1	0.797cm	0.052cm	6	0.718cm	0.176cm
2	0.791cm	0.106cm	7	0.698cm	0.022cm
3	0.671cm	0.132cm	8	0.831cm	0.035cm
4	0.804cm	0.086cm	9	0.883cm	0.119cm
5	0.773cm	0.045cm	10	0.884cm	0.178cm
最高點平均距離			0.785±0.025cm		
最低點平均距離			0.095±0.025m		
平均振幅			0.690±0.025cm		

(五)、第五組：攻角 $\alpha = 45$ 度，高度差 $h_1 = 30$ 公分

實驗參數		攻角 $\alpha = 45$ 度，高度差 $h_1 = 30$ 公分			
編號	最高點	最低點	編號	最高點	最低點
1	0.800cm	0.012cm	6	0.822cm	0.123cm

2	0.763cm	0.052cm	7	0.787cm	0.056cm
3	0.882cm	0.112cm	8	0.772cm	0.037cm
4	0.799cm	0.056cm	9	0.775cm	0.139cm
5	0.773cm	0.078cm	10	0.743cm	0.128cm
最高點平均距離			0.792±0.0054cm		
最低點平均距離			0.079±0.0054m		
平均振幅			0.713±0.0054cm		

(六)、第六組：攻角 $\alpha=45$ 度，高度差 $h_1=35$ 公分

實驗參數		攻角 $\alpha=45$ 度，高度差 $h_1=35$ 公分			
編號	最高點	最低點	編號	最高點	最低點
1	0.948cm	0.067cm	6	1.029cm	0.163cm
2	1.052cm	0.082cm	7	1.015cm	0.026cm
3	1.086cm	0.042cm	8	1.023cm	0.087cm
4	0.941cm	0.156cm	9	1.135cm	0.159cm
5	0.986cm	0.108cm	10	0.760cm	0.088cm
最高點平均距離			1.007±0.0057cm		
最低點平均距離			0.104±0.0057cm		
平均振幅			0.903±0.0057cm		

二、實驗二：探討不同攻角對於壓克力板彈跳之影響

(一)、第一組：攻角 $\alpha=10$ 度，高度差 $h_1=50$ 公分

實驗參數		攻角 $\alpha=10$ 度，高度差 $h_1=50$ 公分			
編號	最高點	最低點	編號	最高點	最低點
1	0.627cm	0.076cm	6	0.644cm	0.032cm
2	0.655cm	0.088cm	7	0.627cm	0.026cm
3	0.603cm	0.023cm	8	0.649cm	0.087cm

4	0.663cm	0.049cm	9	0.679cm	0.053cm
5	0.621cm	0.059cm	10	0.598cm	0.088cm
最高點平均距離			0.636±0.0078cm		
最低點平均距離			0.059±0.0078cm		
平均振幅			0.577±0.0078cm		

(二)、第二組：攻角 $\alpha = 15$ 度，高度差 $h_1 = 50$ 公分

實驗參數		攻角 $\alpha = 15$ 度，高度差 $h_1 = 50$ 公分			
編號	最高點	最低點	編號	最高點	最低點
1	1.472cm	0.036cm	6	1.421cm	0.073cm
2	1.532cm	0.032cm	7	1.412cm	0.062cm
3	1.440cm	0.071cm	8	1.498cm	0.053cm
4	1.377cm	0.056cm	9	1.467cm	0.033cm
5	1.512cm	0.063cm	10	1.439cm	0.088cm
最高點平均距離			1.447±0.0078cm		
最低點平均距離			0.057±0.0078cm		
平均振幅			1.390±0.0078cm		

(三)、第三組：攻角 $\alpha = 20$ 度，高度差 $h_1 = 50$ 公分

實驗參數		攻角 $\alpha = 20$ 度，高度差 $h_1 = 50$ 公分			
編號	最高點	最低點	編號	最高點	最低點
1	2.360cm	0.034cm	6	2.366cm	0.042cm
2	2.259cm	0.065cm	7	2.268cm	0.013cm
3	2.171cm	0.051cm	8	2.246cm	0.014cm

4	2.207cm	0.072cm	9	2.148cm	0.069cm
5	2.311cm	0.038cm	10	2.337cm	0.028cm
最高點平均距離			2.268±0.0047cm		
最低點平均距離			0.043±0.0047cm		
平均振幅			2.225±0.0047cm		

(四)、第四組：攻角 $\alpha=25$ 度，高度差 $h_1=50$ 公分

實驗參數		攻角 $\alpha=25$ 度，高度差 $h_1=50$ 公分			
編號	最高點	最低點	編號	最高點	最低點
1	1.732cm	0.046cm	6	1.779cm	0.013cm
2	1.817cm	0.031cm	7	1.712cm	0.048cm
3	1.679cm	0.084cm	8	1.734cm	0.043cm
4	1.737cm	0.034cm	9	1.792cm	0.086cm
5	1.792cm	0.068cm	10	1.698cm	0.033cm
最高點平均距離			1.747±0.0029cm		
最低點平均距離			0.049±0.0029cm		
平均振幅			1.698±0.0029cm		

(五)、第五組：攻角 $\alpha=30$ 度，高度差 $h_1=50$ 公分

實驗參數		攻角 $\alpha=30$ 度，高度差 $h_1=50$ 公分			
編號	最高點	最低點	編號	最高點	最低點
1	1.562cm	0.099cm	6	1.586cm	0.063cm
2	1.625cm	0.039cm	7	1.585cm	0.066cm
3	1.601cm	0.056cm	8	1.598cm	0.058cm
4	1.511cm	0.012cm	9	1.553cm	0.059cm
5	1.459cm	0.036cm	10	1.584cm	0.067cm
最高點平均距離			1.566±0.0058cm		
最低點平均距離			0.054±0.0058cm		
平均振幅			1.512±0.0058cm		

(六)、第六組：攻角 $\alpha = 40$ 度，高度差 $h_1 = 50$ 公分

實驗參數		攻角 $\alpha = 40$ 度，高度差 $h_1 = 50$ 公分			
編號	最高點	最低點	編號	最高點	最低點
1	1.390cm	0.032cm	6	1.329cm	0.063cm
2	1.388cm	0.052cm	7	1.315cm	0.029cm
3	1.413cm	0.075cm	8	1.323cm	0.047cm
4	1.445cm	0.058cm	9	1.313cm	0.027cm
5	1.396cm	0.014cm	10	1.372cm	0.074cm
最高點平均距離			1.368±0.0017cm		
最低點平均距離			0.047±0.0017cm		
平均振幅			1.321±0.0017cm		

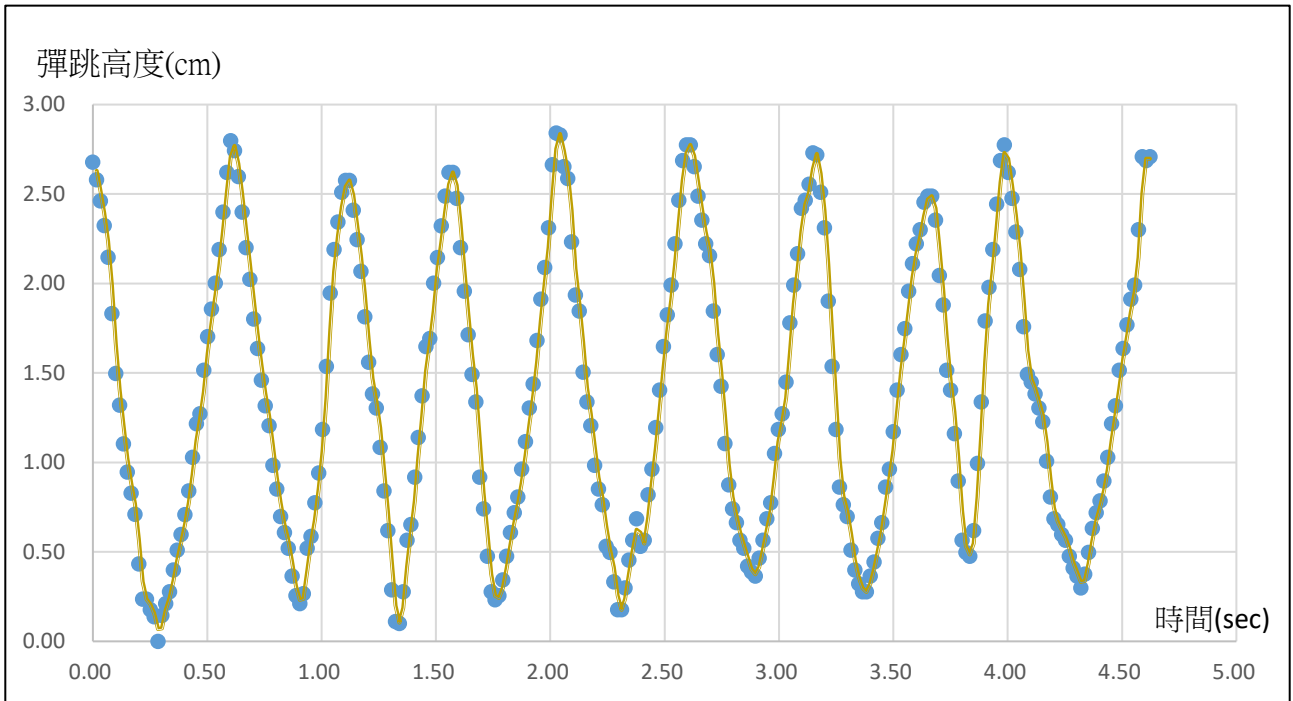
(七)、第七組：攻角 $\alpha = 50$ 度，高度差 $h_1 = 50$ 公分

實驗參數		攻角 $\alpha = 50$ 度，高度差 $h_1 = 50$ 公分			
編號	最高點	最低點	編號	最高點	最低點
1	0.915cm	0.092cm	6	0.963cm	0.016cm
2	0.966cm	0.085cm	7	0.956cm	0.024cm
3	0.952cm	0.062cm	8	0.923cm	0.083cm
4	0.885cm	0.057cm	9	0.946cm	0.059cm
5	0.895cm	0.102cm	10	0.943cm	0.028cm
最高點平均距離			0.934±0.0072cm		
最低點平均距離			0.061±0.0072cm		
平均振幅			0.873±0.0072cm		

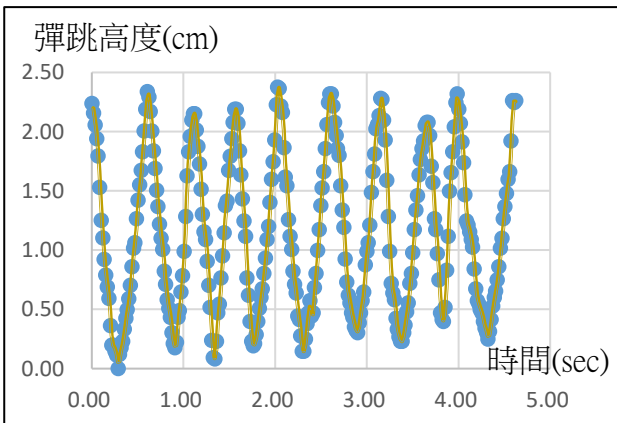
實驗三：探討不同邊界形狀對於壓克力板彈跳之影響

以下五張圖表的橫軸單位皆為秒，縱軸單位皆為公分

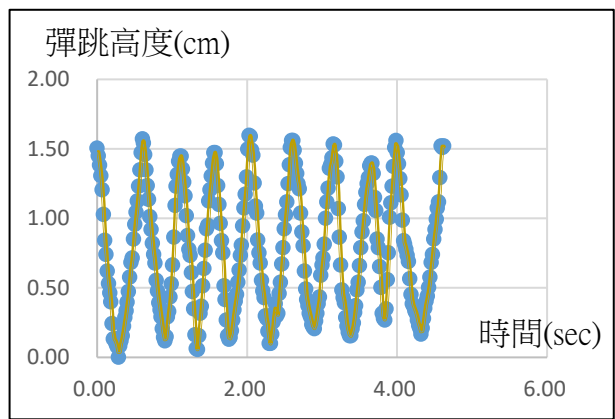
(一)、第一組：攻角 $\alpha = 20$ 度，圓弧形



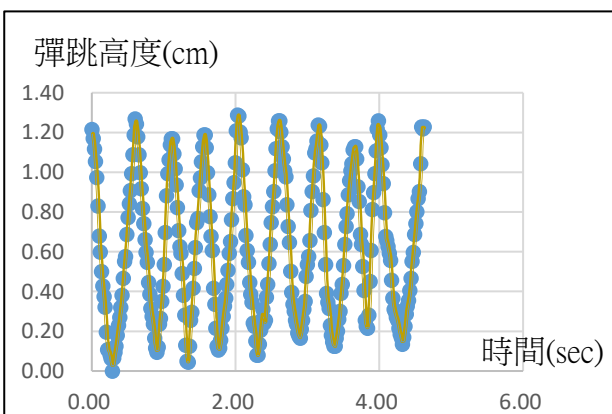
(二)、第二組：攻角 $\alpha = 20$ 度，切面平整



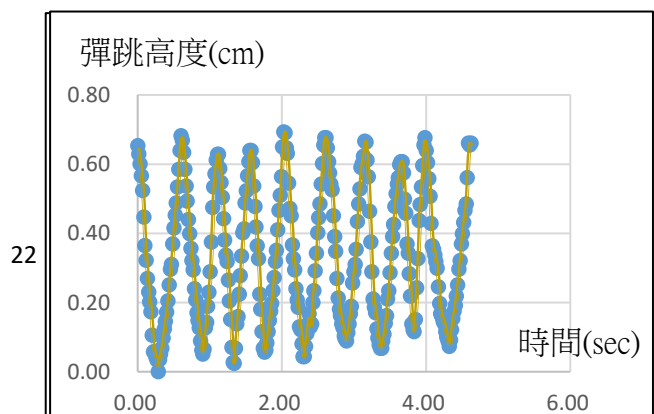
(三)、第三組：攻角 $\alpha = 20$ 度，兩側磨成圓弧



(四)、第四組：攻角 $\alpha = 20$ 度，未加工



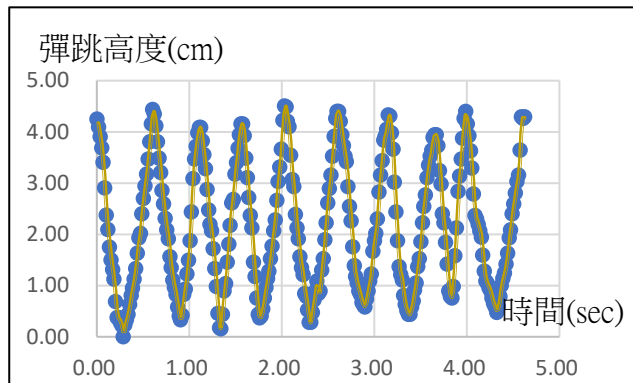
(五)、第五組：攻角 $\alpha = 20$ 度，半邊磨成圓弧



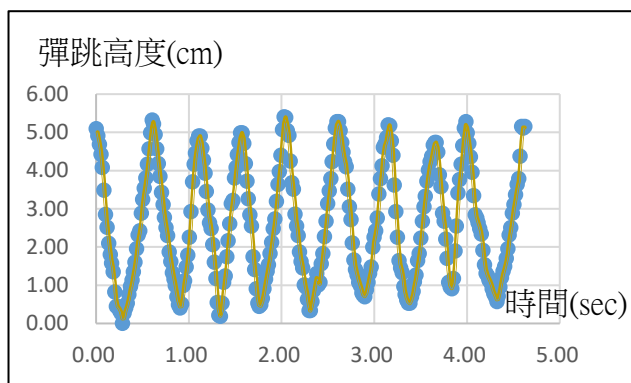
實驗四：探討不同粗糙程度的砂紙對於壓克力板彈跳之影響

以下四張圖表的橫軸單位皆為秒，縱軸單位皆為公分

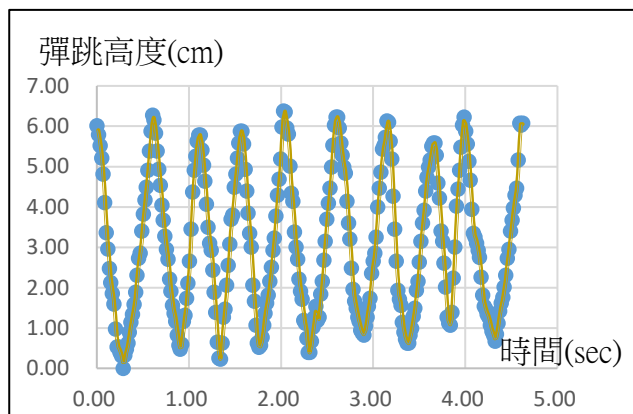
(一)、第一組：號數 100 (表面最粗)



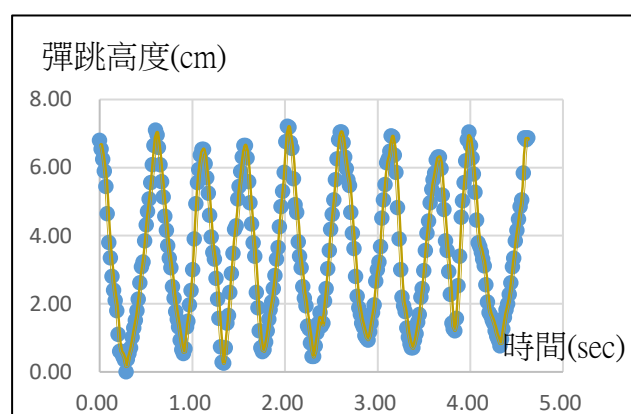
(二)、第二組：號數 200



(三)、第三組：號數 300

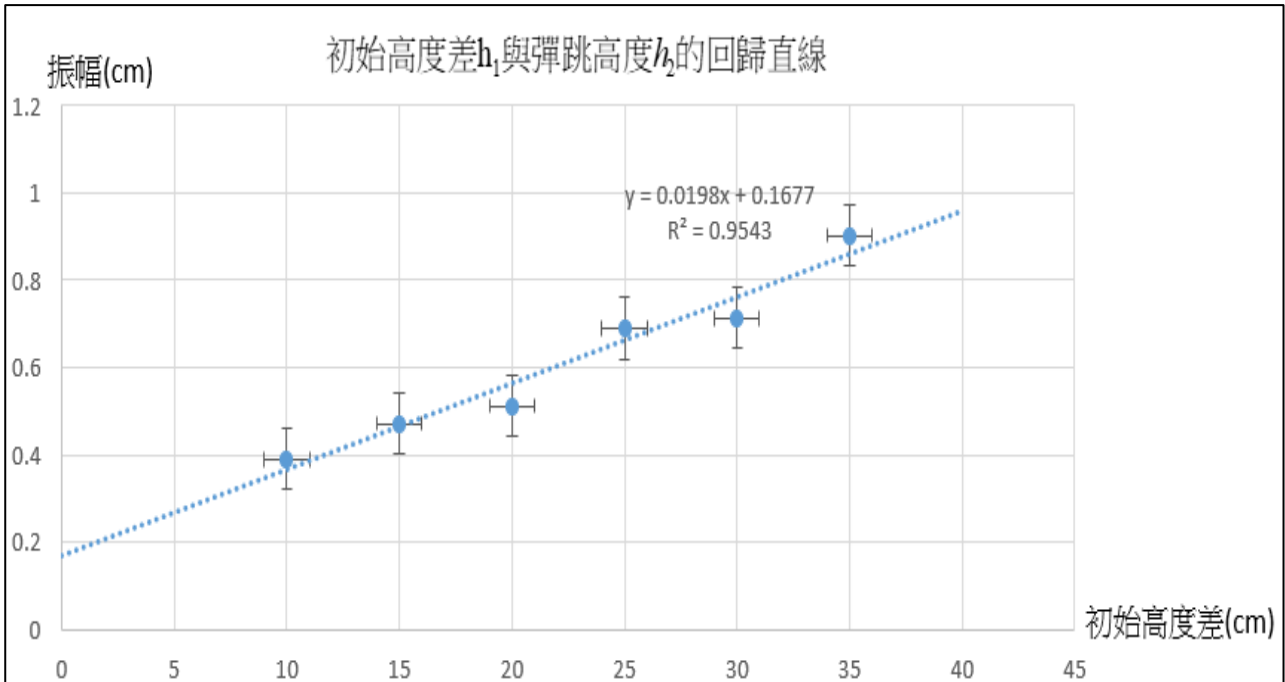


(四)、第四組：號數 400 (表面最細)



伍、討論

一、實驗一：探討不同流速對於壓克力板彈跳之影響



圖(十)、初始高度差與彈跳高度的回歸直線

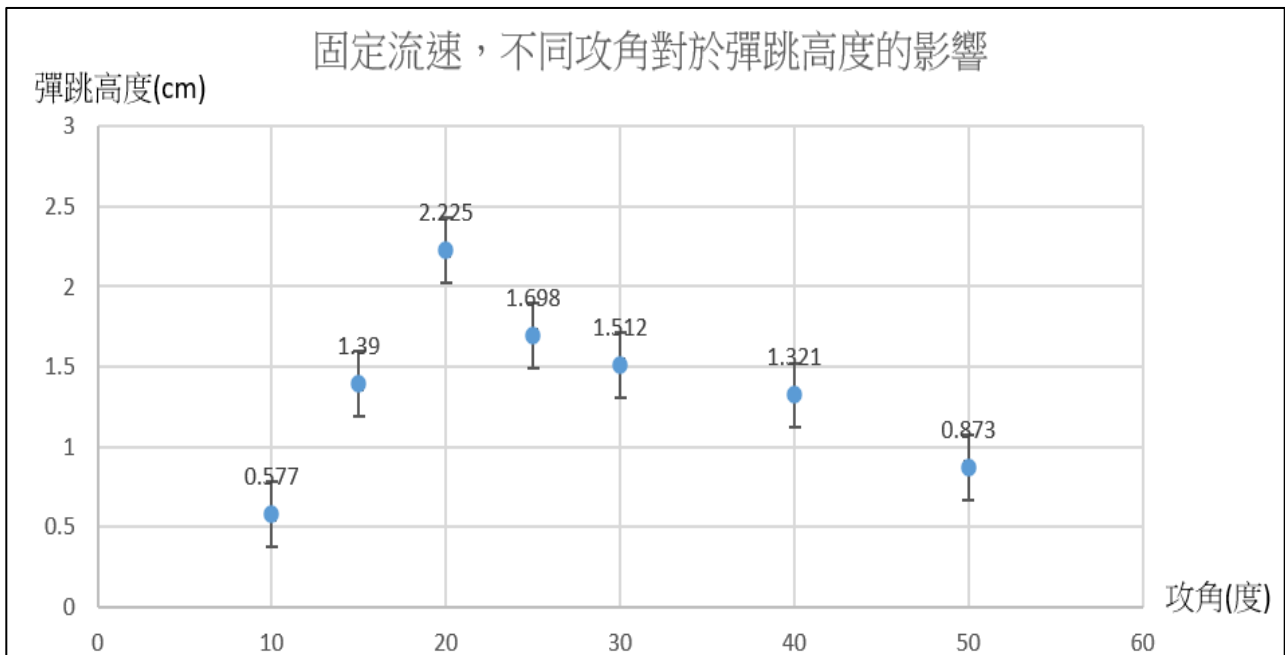
$$h_2 = \left(\frac{S\rho AC_L}{M^2 mg}\right)E_{ori} + \left(\frac{S\rho AC_L}{M^2 mg}\right)\left(mg - \frac{F_k}{\cos \alpha}\right)h_1 \quad \text{算式(12)}$$

承接上述推導出的算式(12)，壓克力板的彈跳高度 h_2 和流體初始高度 h_1 的關係會是一條不通過原點斜直線，此與圖十吻合，且相關係數高達 ($R^2=0.9543$)，可以做為實驗準確度的保證。

同時我在反覆實驗的過程，發現利用此實驗的裝置，可歸納出以下幾個優點：

1. 避免發射水漂的不穩定性
2. 可控制水漂有固定的人水攻角和入射角
3. 優化實驗的重複性，相關係數有 0.95 以上的準確性
4. 能固定拍攝範圍，捕捉水漂入水影像

二、實驗二：探討不同攻角對於壓克力板彈跳之影響



圖(十一)、固定流速，不同攻角對於彈跳高度的影響

$$\frac{\partial V_{\min}}{\partial \alpha} = 0, \alpha \cong 20^\circ \quad \text{算式(15)}$$

承接算式(15)，並由圖十一可知，在攻角 20 度的壓克力板彈跳效果最好，超過或是低於 20 度，振幅都會有明顯的降低，尤其是攻角小於 20 度時，振幅會大幅度地減小，透過實驗二，可以應證<Theoretical and Numerical Approach to “Magic Angle” of Stone Skipping>的 SPH 模擬和 Theory 以及<Simulation on fluid-solid coupling phenomenon of an object impacting the water surface>的有限元素軟體 LS-PrePost 模擬。

除此之外，在眾多文獻中，20 度為最佳攻角的理論都停留在軟體模擬或是數值解析，因此實驗二更加驗證了文獻中的理論基礎。

三、實驗三：探討不同邊界形狀對於壓克力板彈跳之影響

接觸面形狀	未加工	切面平整	圓弧形
編號	1	2	3
彈跳高度	$1.239 \pm 0.029\text{cm}$	$2.327 \pm 0.029\text{cm}$	$2.683 \pm 0.029\text{cm}$
接觸面形狀	兩側磨成圓弧	半邊磨成圓弧	
編號	4	5	
彈跳高度	$1.473 \pm 0.029\text{cm}$	$0.673 \pm 0.029\text{cm}$	

承接上述理論，若接觸面邊緣的形狀阻力(Form drag)越大，則壓克力板的彈跳高度將有所下降，反之，若接觸面的形狀阻力越小，則壓克力板的彈跳高度將顯著上升。

(一)、編號 2 與編號 3 的彈跳高度差距很小，這與前述理論相符合，因為兩者的接觸面形狀都與理想流線相似，但因為圓弧形的形狀阻力略低於切面平整的形狀阻力，因此編號 3 的彈跳高度略高於編號 2。

(二)、編號 4 的彈跳高度略高於編號 1 的彈跳高度，這是因為兩側紊流與漩渦減少的緣故，但因為編號 4 的圓弧占比相較編號 3 低了許多，因此對於彈跳高度增加的幫助有限。

(三)、編號 5 的彈跳高度明顯低於其他四者，這是因為兩側受力不平均，導致水漂彈跳的時候帶有旋轉，因此部分能量被分給轉動動能，因此最大重力位能值將減少，可達到的最大彈跳高度顯著低於其他四組。

在參考的文獻中，多數以固定形狀的水漂進行模擬，此次的實驗發現改變水漂的邊緣形狀，可以優化水漂的彈跳高度，在真實用石頭打水漂時，可作為挑選或改造石頭的參考。

四、實驗四：探討不同粗糙程度的砂紙對於壓克力板彈跳之影響

砂紙號數	100	200	300	400
編號	6	7	8	9
彈跳高度	4.326cm	4.974cm	5.824cm	6.673cm

承接上述理論，實驗四的阻力來源為摩擦阻力(Skin friction)，而非實驗三提及的形狀阻力(Form drag)。由實驗數據可得號數越大的水漂，其彈跳效果越好，反之，號數越小的水漂，其彈跳效果越差。

由於號數越大的砂紙，在單位面積內，擁有越多的顆粒，因此越光滑，水流撞擊水漂時如同鏡面反射，其動量變化方向較為一致，固有較佳的彈跳高度。但是由於實驗難以定量分析，因此採取定性的描述來說明，也希望未來隨著物理程度的提升，能嘗試用定量的方法給出對應的方程。

陸、結論

- 一、在固定攻角下，初始高度差 h_1 與彈跳高度 h_2 的關係為不同過原點的斜直線
- 二、水漂的入水攻角 α 約在 20 度時，有最好的彈跳效果，此攻角被稱為 Magic Angle
- 三、透過座標轉換，可以利用此實驗來模擬打水漂的運動模式
- 四、越接近圓弧形的邊界其彈跳效果越好。
- 五、兩側形狀不對稱的水漂，因運動過程伴有轉動產生，其彈跳高度顯著下降。
- 六、水漂邊界越粗糙，將使得彈跳高度顯著下降，因此邊界越光滑的水漂，將有助於彈跳。

柒、參考文獻資料

壹、中文部分

文獻一、【學位論文】

林世平(2019)。物體碰撞水面之流固耦合現象討論-以打水漂為例(Simulation on fluid-solid coupling phenomenon of an object impacting the water surface)。台北市：台大應力所

貳、英文部分

文獻二、【學位論文】

Lyde´ric Bocquet(2002).The physics of stone skipping.France

文獻三、【學位論文】

Shin-ichiro Nagahiro and Yoshinori Hayakawa(2005). Theoretical and Numerical Approach to Magic Angle of Stone Skipping.Japan

文獻四、【國際科展】

蔡卓忻、林昱安、施中右(2011)。水漂的物理現象之研究。彰化縣：彰化高中

【評語】 051815

本作品懸吊壓克力以水衝擊角衝擊，觀察壓克力板上升高度，用以模擬打水瓢在沒有轉動情況下之最小所需打水瓢最小角度 20 度。發現壓克力在攻擊角 20 度時達最大高度，驗證了打水瓢最小速度之理論。作品更進一步發現越接近圓弧形的邊界其彈跳效果越好。兩側形狀不對稱的水漂，因運動過程伴有轉動產生，其彈跳高度顯著下降。水漂邊界越粗糙，將使得彈跳高度顯著下降，因此邊界越光滑的水漂，將有助於彈跳。實驗設計具有創意且能驗證理論，可說是最佳的作品。

作品海報

The background is a dark blue gradient with faint, light blue technical diagrams. These include circular gauges with numerical scales (e.g., 150, 160, 170, 180, 190, 200, 220, 230, 240, 250, 260) and various circular paths with arrows indicating direction. The overall aesthetic is scientific and technical.

攻角對水漂跳動行為的力學分析

摘要

此研究目的是找出打水漂的最佳入水角度，因此以壓克力板作為模擬水漂的模型，透過Tracker分析壓克力板的質心彈跳高度及運動軌跡，再利用Excel、SciDAVis分析數據，找出其中的運動相關性來驗證理論模擬。透過座標轉換，可以利用這組實驗來模擬打水漂的運動行為，並發現攻角在20度上下時有最佳的彈跳效果，並以此結論來優化打水漂的運動行為。

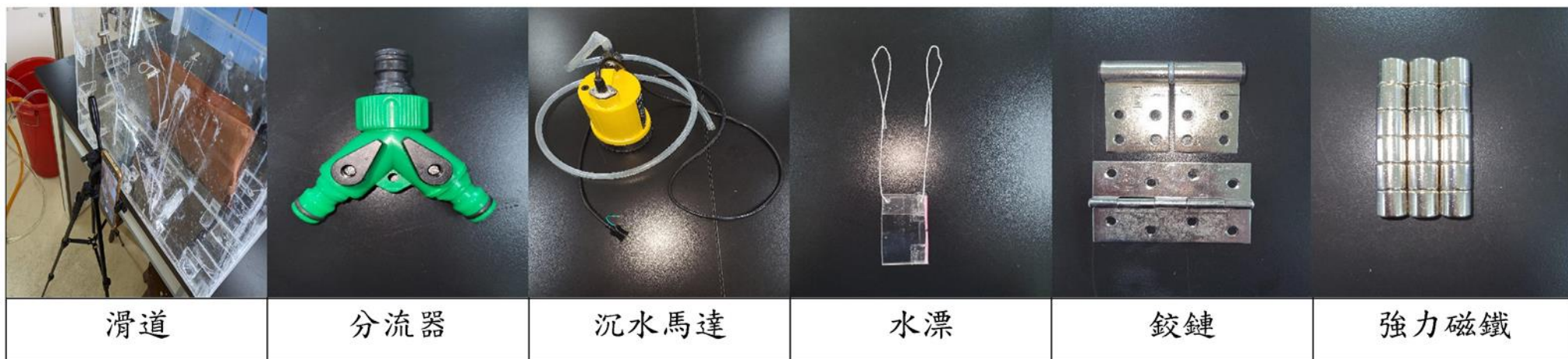
壹、研究動機

在我小的時候，常常與家人在河邊打水漂，對於一顆平平無奇的石頭卻能在水上多次彈跳感到非常奇妙，石頭的重力竟然沒有讓它沉入水底，只要角度抓對，石頭就能彈跳起來，同時，石頭的形狀和旋轉程度似乎都是影響水漂彈跳的相關因素，於是我想透過實驗的方法，嘗試解開打水漂的秘密，也希望藉此學習更多流體力學的知識。

貳、研究目的

- 一、探討不同水流流速對於壓克力板彈跳之影響
- 二、探討不同攻角對於壓克力板彈跳之影響
- 三、分析壓克力板的最佳彈跳攻角
- 四、探討不同邊界形狀對於壓克力板彈跳之影響
- 五、探討不同粗糙程度的接觸面對於壓克力板彈跳之影響

參、研究設備及器材



肆、研究過程及方法

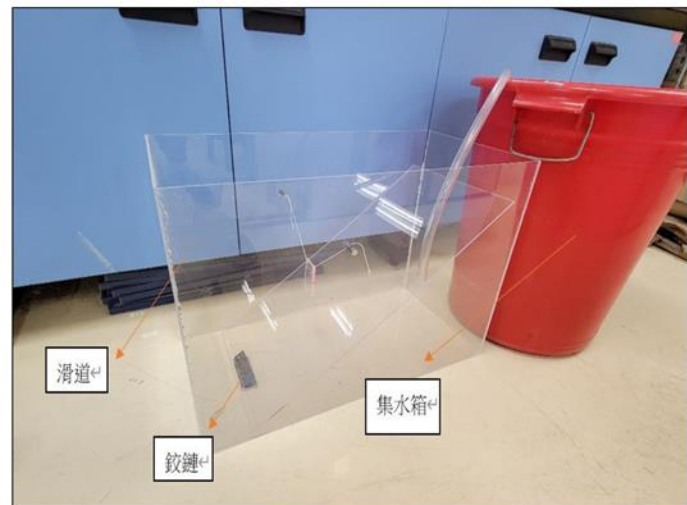
一、文獻探討

我參考了 2003 年 Lyde'ric Bocquet 的論文<The physics of stone skipping>，論文中提出相關的力學方程式，並且計算出水漂最低入水速度的方程式。此外，能量耗散方程以及彈跳次數預測方程也是其重大貢獻。

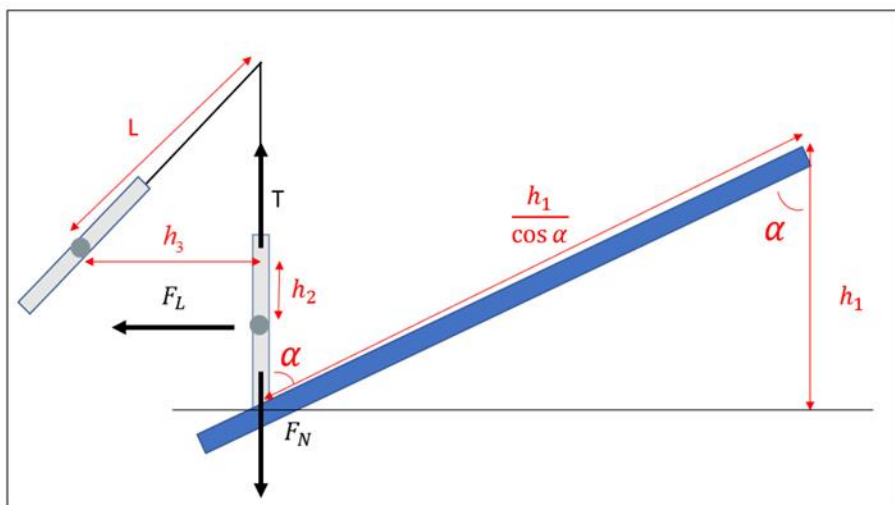
接著我參考了 2005 年 Nagahiro、Hayakawa的論文<Theoretical and Numerical Approach to "Magic Angle" of Stone Skipping>，論文中以無因次化的推導搭配電腦模擬，提出了水漂與水面存在一個 Magic Angle，約略為 20 度，此攻角能以最低入水速度達到彈跳現象，此外也提出了欲發生彈跳的最小入水速度以及石頭的幾何尺度、密度等關係式。給予我足夠的背景知識來研究。

最後我參考了 2019 年 Shih-Ping Lin 碩士論文<Simulation on fluid-solid coupling phenomenon of an object impacting the water surface>，論文中以模擬的方式說明了水漂在攻角為 20 度時，有最佳的彈跳效果，但因為沒有具體的實驗佐證，因此我打算以實驗的方式來驗證水漂最佳彈跳攻角。

二、實驗裝置架設圖



圖一 實驗裝置架設圖

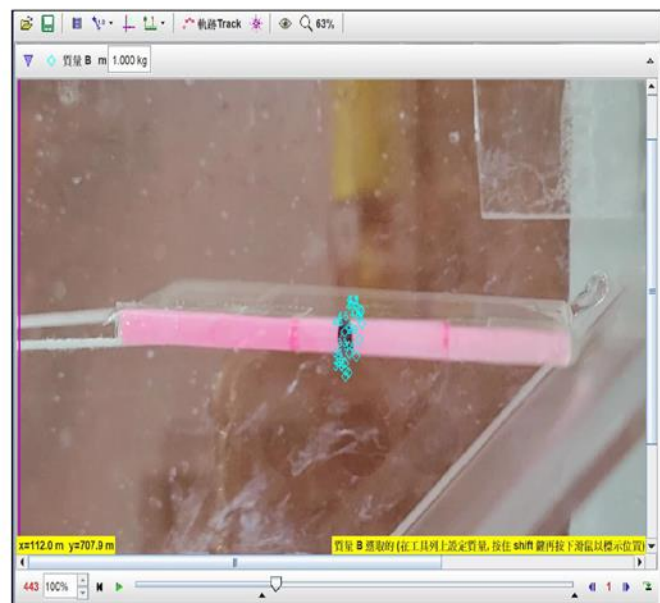


圖二 實驗參數標示圖

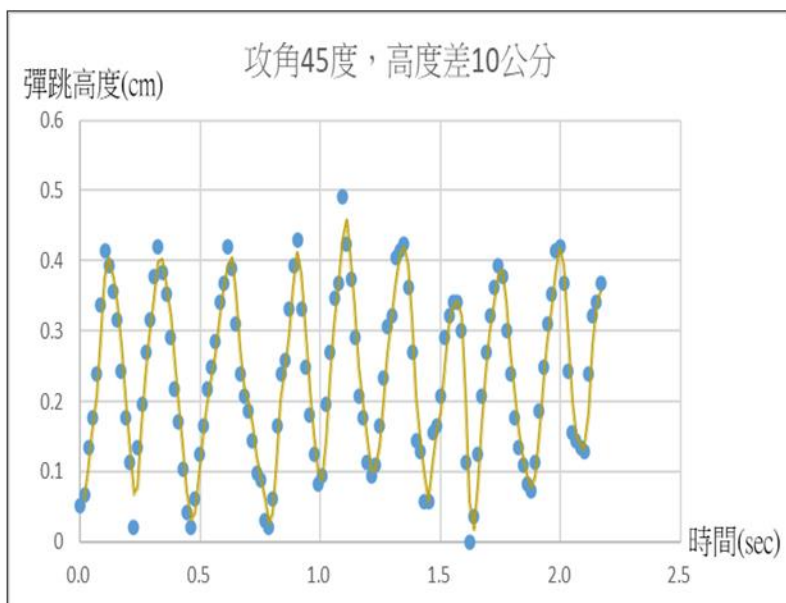
標號	意義
h_1	流體高度差
h_2	質心高度差
α	攻角
F_L	流體升力
F_N	流體阻力

表一 圖二參數

三、實驗分析過程



圖三 利用Tracker軟體追蹤水漂位置



圖四 Excel數據分析

實驗參數		攻角 $\alpha=45$ 度，高度差 $h_1=10$ 公分			
編號	最高點	最低點	編號	最高點	最低點
1	0.414cm	0.052cm	6	0.424cm	0.076cm
2	0.419cm	0.023cm	7	0.416cm	0.073cm
3	0.425cm	0.022cm	8	0.431cm	0.012cm
4	0.429cm	0.031cm	9	0.414cm	0.022cm
5	0.491cm	0.029cm	10	0.418cm	0.056cm
最高點平均距離		0.428 \pm 0.0069cm			
最低點平均距離		0.038 \pm 0.0069cm			
平均振幅		0.390 \pm 0.0069cm			

圖五 實驗數據統整

四、實驗理論推導

➤ 實驗一：探討不同水流流速對於壓克力板彈跳之影響

在實驗一裝置架設中，透過改變流體初始高度，就能使初始重力位能改變，再透過重力的作用，使得重力位能轉換成流體動能，就可以調整流體撞擊壓克力板時的速度

$$E = E_{ori} + mgh_1 - F_k \frac{h_1}{\cos \alpha} \quad (1)$$

透過功能定理可以得出流體速度
$$v = \sqrt{\frac{2(E_{ori} + mgh_1 - F_k \frac{h_1}{\cos \alpha})}{m}} \quad (2)$$

因為水與壓克力板的接觸時間極小，因此可將質心位移以平均力的方式近似成直線等加速度運動
$$S = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2S}{a}} \quad (3)$$

壓克力板與水接觸瞬間，向上的繩張力與向下的流體阻力抵銷，水平方向上仍受到流體的升力，透過計算壓克力板的加速度可以得到如下的關係式
$$F_L = Ma \Rightarrow a = \frac{F_L}{M} = \frac{\frac{1}{2}\rho AC_L \times \frac{2(E_{ori} + mgh_1 - F_k \frac{h_1}{\cos \alpha})}{m}}{M} \quad (4)$$

將算式(4)的結論帶入算式(3)得到以下關係
$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2SMm}{\rho AC_L (E_{ori} + mgh_1 - F_k \frac{h_1}{\cos \alpha})}} \quad (5)$$

接著，要計算壓克力板與流體分離後的速度
$$v_p = \frac{F_L \times t}{M} = \sqrt{\frac{2S\rho AC_L (E_{ori} + mgh_1 - F_k \frac{h_1}{\cos \alpha})}{Mm}} \quad (6)$$

透過以上推導，並利用力學能守恆的動位能轉換得出算式(7)、算式(8)
$$E_p = \frac{1}{2}Mv_p^2 = \frac{S\rho AC_L (E_{ori} + mgh_1 - F_k \frac{h_1}{\cos \alpha})}{m} \quad (7) \quad E_p = Mgh_2 \quad (8)$$

將算式(7)、(8)聯立可得(9)
$$h_2 = (\frac{S\rho AC_L}{Mmg})(mg - \frac{F_k}{\cos \alpha})h_1 + (\frac{S\rho AC_L}{Mmg})E_{ori} \quad (9)$$

因此，壓克力板的質心彈跳高度和流體初始釋放高度的關係會是一條不通過原點斜直線。

➤ 實驗二：探討不同攻角對於壓克力板彈跳之影響

在<Simulation on fluid-solid coupling phenomenon of an object impacting the water surface>這篇論文裡面模擬了不同攻角與彈跳速度的關係，且忽略水漂在彈跳過程的形變，將其視為理想剛體，透過此模擬找出了最佳彈跳攻角大約落在20度，並與其參考文獻相符。因此本研究透過實驗驗證上述論文中的模擬結果。

並且2005年Nagahiro、Hayakawa的論文<Theoretical and Numerical Approach to “Magic Angle” of Stone Skipping>提出了以下兩條方程式，並搭配數值解析得到了攻角與最低入水速度的關係式

$$V_{\min} = \frac{\sqrt{2gR}}{\cos(\theta+\alpha)} \sqrt{\xi \sin \alpha + \frac{\sigma \cos \alpha}{C_D \lambda \sin^2 \alpha}} \quad (13) \quad \theta = \arccos \sqrt{\frac{2gR}{V_{\min}^2} (\xi \sin \alpha + \frac{\sigma \cos \alpha}{C_D \lambda \sin^2 \alpha})} - \alpha \quad (14)$$

接著對算式(13)進行偏微分 (θ 、 ϕ 為變數) 當 $\frac{\partial V_{\min}}{\partial \alpha} = 0$, $\alpha \cong 20^\circ$ (15)

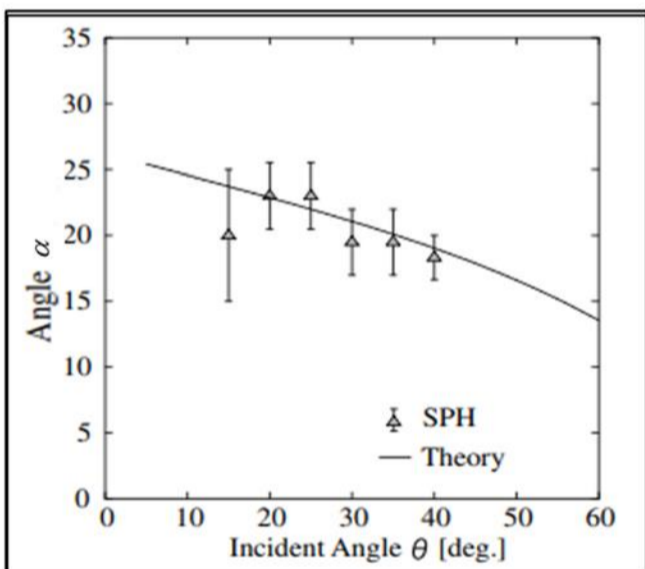
θ : 入水速度與水面夾角 (Incident angle)

α : 攻角 (Attack angle)

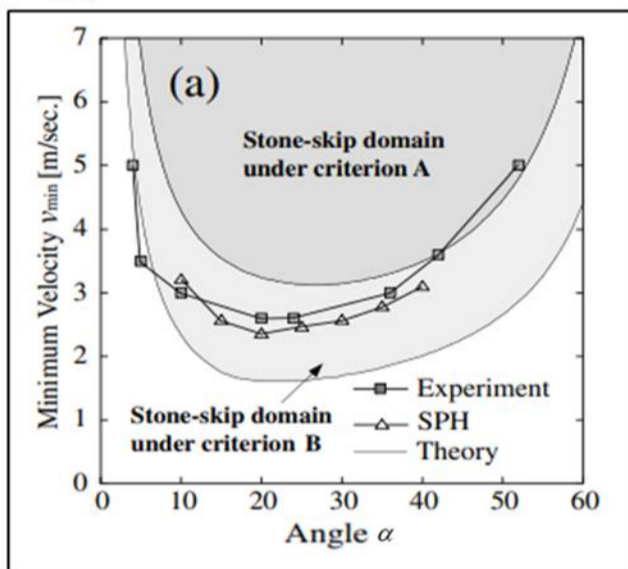
σ : 水漂與流體的比重

ξ : 水漂的沉水最大深度

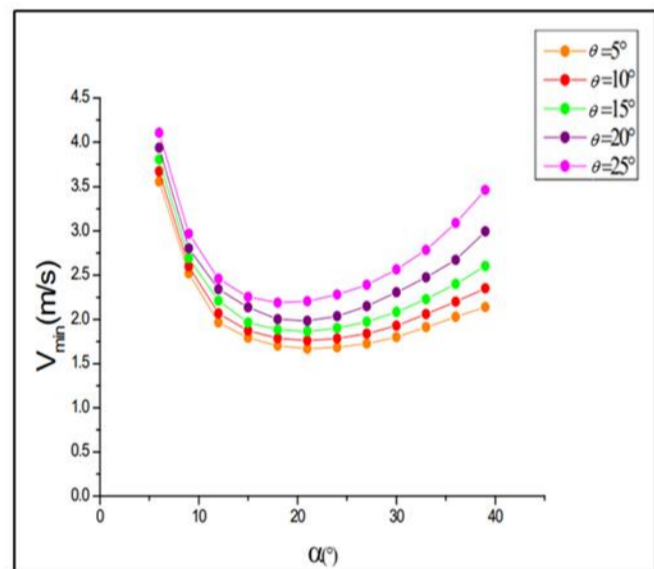
C_D : 阻力係數



圖六 入射角和最佳攻角的關係圖



圖七 攻角與最低入水速度的關係圖



圖八 不同入射角對最佳攻角的影響

➤ 實驗三：探討不同邊界形狀對於壓克力板彈跳之影響

水漂照片					
接觸面形狀	未加工	切面平整	圓弧形	兩側磨成圓弧	半邊磨成圓弧
編號	1	2	3	4	5

影響實驗三結果的主要因素為紊流(Turbulent Flow)的產生與否，若接觸面的形狀阻力(Form drag)越大，則壓克力板的彈跳高度將有所下降，反之，若接觸面的形狀阻力越小，則壓克力板的彈跳高度將顯著上升。因為此研究使用的流體是水，又因為水的雷諾數相當大，因此將可忽略黏滯阻力帶來的些微影響。

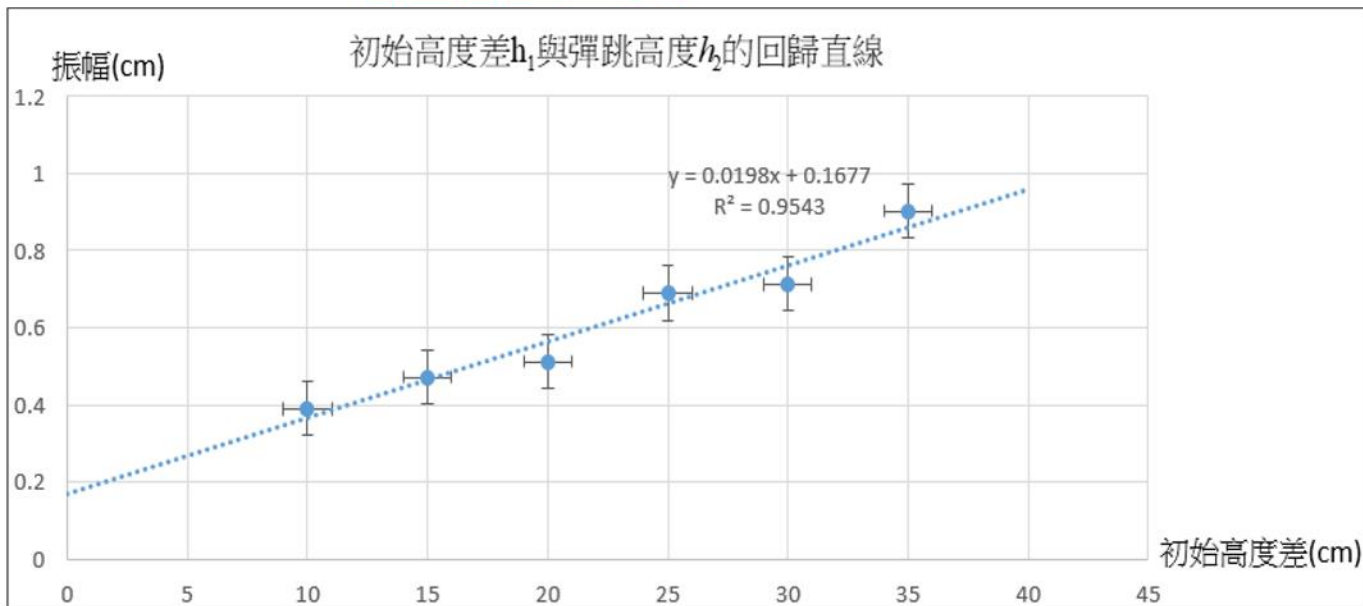
➤ 實驗四：探討不同粗糙程度的接觸面對於壓克力板彈跳之影響

水漂照片				
砂紙號數	100	200	300	400
編號	6	7	8	9

影響實驗四結果的主要因素為紊流(Turbulent Flow)的產生與否，與實驗三不同的是，實驗四的阻力來源為摩擦阻力(Skin friction)，而非實驗三提及的形狀阻力(Form drag)。因此可以預期號數越大的水漂，其彈跳效果越好，反之，號數越小的水漂，其彈跳效果越差。

伍、研究結果與討論

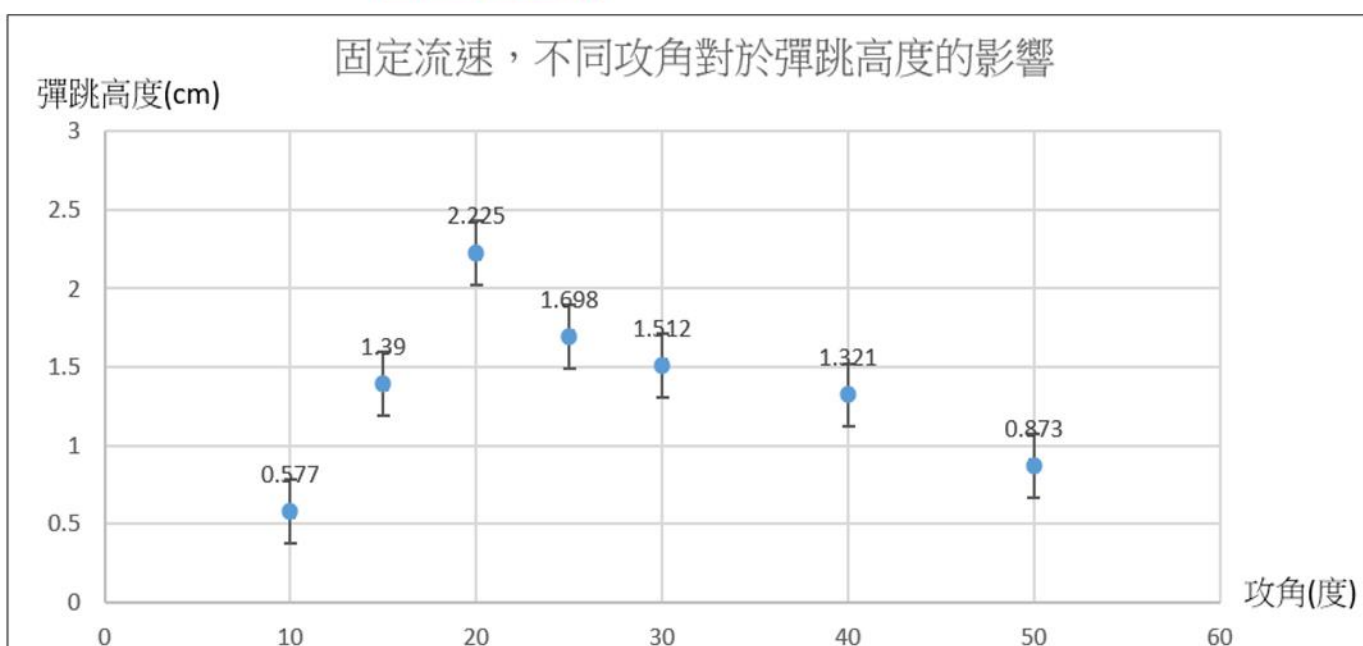
➤ 實驗一：探討不同水流流速對於壓克力板彈跳之影響



圖九 初始高度差與彈跳高度的回歸直線

由圖九可知，在攻角固定的條件下，壓克力板的彈跳高度和流體初始高度的關係會是一條不通過原點斜直線，此與算式(9)吻合，且相關係數高達(R=0.9768)，可以做為實驗準確度的保證。

➤ 實驗二：探討不同攻角對於壓克力板彈跳之影響



圖十 不同攻角對應的彈跳高度

由圖十可知，在攻角20度附近的壓克力板彈跳效果最好，超過或是低於20度，振幅都會有明顯的降低。

透過實驗二，可以應證 <Theoretical and Numerical Approach to "Magic Angle" of Stone Skipping> 的SPH模擬和數值解析理論以及 <物體碰撞水面之流固耦合現象> 的有限元素軟體LS-PrePost模擬。

➤ 實驗三：探討不同接觸面形狀對於壓克力板彈跳之影響

接觸面形狀	未加工	切面平整	圓弧形	兩側磨成圓弧	半邊磨成圓弧
編號	1	2	3	4	5
彈跳高度	1.239cm	2.327cm	2.683cm	1.473cm	0.673cm

表二 不同接觸面形狀對應的彈跳高度

- 由表中數據可知，編號2與編號3的彈跳高度差距很小，這與前述理論相符合，因為兩者的接觸面形狀都與理想流線相似，但因為圓弧形的形狀阻力略低於切面平整的形狀阻力，因此編號3的彈跳高度略高於編號2。
- 由表中數據可知，編號4的彈跳高度略高於編號1的彈跳高度，這是因為兩側紊流與漩渦減少的緣故，但因為編號4的圓弧占比相較編號3低了許多，因此對於彈跳高度增加的幫助有限。
- 編號5的彈跳高度明顯低於其他四者，這是因為兩側受力不平均，導致水漂彈跳的時候帶有旋轉，因此部分能量被分給轉動動能，因此最大重力位能值將減少，可達到的最大彈跳高度顯著低於其他四組。

➤ 實驗四：探討不同粗糙程度的接觸面對於壓克力板彈跳之影響

砂紙號數	100	200	300	400
編號	6	7	8	9
彈跳高度	4.326cm	4.974cm	5.824cm	6.673cm

由實驗數據可知號數越大的水漂，其彈跳效果越好。反之，號數越小的水漂，其彈跳效果越差。

由於號數越大的砂紙，在單位面積內，擁有越多的顆粒，因此越光滑，水流撞擊水漂時如同鏡面反射，其動量變化方向較為一致，固有較佳的彈跳高度。

陸、結論

- 在固定攻角下，初始高度差與彈跳高度的關係為不通過原點的斜直線
- 水漂的入水攻角約在20度時，有最好的彈跳效果，此攻角被稱為Magic Angle
- 透過座標轉換，可以利用此實驗來模擬打水漂的運動模式
- 越接近圓弧形的邊界其彈跳效果越好
- 兩側形狀不對稱的水漂，因運動過程伴有轉動產生，其彈跳高度顯著下降
- 水漂接觸面越粗糙，將使得彈跳高度顯著下降，因此接觸面越光滑的水漂，將有助於彈跳。

柒、參考文獻

文獻一、【學位論文】林世平(2019)。物體碰撞水面之流固耦合現象討論-以打水漂為例。台北市：台大應力所

文獻二、【期刊論文】Lyde´ric Bocquet(2002).The physics of stone skipping.France

文獻三、【期刊論文】Shin-ichiro Nagahiro and Yoshinori Hayakawa(2005). Theoretical and Numerical Approach to Magic Angle of Stone Skipping.Japan

文獻四、【國際科展】蔡卓忻、林昱安、施中右(2011)。水漂的物理現象之研究。彰化縣：彰化高中