

# 中華民國第 63 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高中組 物理與天文學科

佳作

051812

尋找最佳跳豆！

學校名稱：新北市立板橋高級中學

作者：  高二 張芸瑄	指導老師：  李瑋舒  蘇郁茜
-------------------	-----------------------------

關鍵詞：跳豆、翻滾、轉動慣量

# 尋找最佳跳豆！

## 摘要

跳豆為輕殼與重球組合而成，輕推能重複翻滾。本實驗分析其運動過程與模式。實驗中可發現跳豆不斷重複「殼平行斜面」與「殼翻轉」的運動模式。隨跳豆長度增加，「殼平行斜面」的鋼珠加速區變長，但翻轉時間也變長，導致飽和速度明顯較低，在有限斜坡長度下有最佳跳豆長度。本研究利用移動和轉動方程式得到翻轉期間鋼珠理論加速度，搭配實驗數據得出速度理論值與速度實驗值有相似的趨勢。隨著跳豆寬度越寬，跳豆翻轉期間鋼珠速度對時間由「V」型轉變成「W」型，出現二次加速段，且在有限斜坡距離下，跳豆有理想寬度。可翻滾的情況中，內球質量越小越快達飽和且加速減速變化量值較大。

## 壹、前言

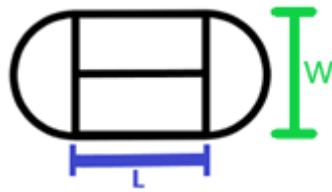
### 一、研究動機

有一天在夜市賣的戳戳樂中抽到跳豆，當跳豆放在斜坡上時，它會一直翻滾。這顆小小卻精力旺盛的跳豆在我眼前一直活碰亂跳，手握住它還會感覺到裡面的鋼珠在跳動，只需要一顆，就可以消磨一個下午的時間。

打開後發現裡面只有一顆小鋼珠，很想知道翻滾的過程中裡面究竟發生了什麼事？要怎麼樣才能改變跳豆的翻滾速度？什麼樣的結構可以形成一顆好跳豆？滿滿的疑惑充斥在我的內心。

### 二、研究目的

- (一)觀察並理解跳豆翻滾時，外殼與鋼珠的運動關聯性。
- (二)改變斜面的傾斜角  $\theta$ ，確認跳豆是否在斜面上滑動。
- (三)改變跳豆殼長度(如圖一側板長度  $L$ )，觀察與分析跳豆翻滾情形。
- (四)改變跳豆殼寬度(如圖一側板寬度  $W$ )，觀察與分析跳豆翻滾情形。
- (五)改變跳豆內球質量，觀察與分析跳豆翻滾情形。



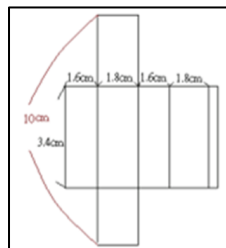
圖一、側板

### 三、文獻回顧

查閱文獻後發現大多為科學實驗，而在中華民國第四十七屆中小學科學展覽會出現過有關跳豆的題目「翻滾吧！跳豆」，從他們的實驗可知跳豆與斜坡之間的摩擦力越小，越容易滑動；跳豆長寬越長，平均速度越慢，當跳豆的長、寬增加至珠子直徑的 5 倍時則無法滾動；跳豆內珠子數量、不同形狀的跳豆造成翻滾的方向與運動方式也不相同。「翻滾吧！跳豆」研究多做定性描述，只針對全程平均有定量測量。本研究將針對每一瞬間的運動過程進行分析，本實驗與「翻滾吧！跳豆」的差異列如表一。

表一、文獻研究與本實驗差異

差異	<翻滾吧！跳豆>	<尋找最佳跳豆！>
跳豆外觀	多邊形盒(如圖二)	翻轉面為弧面
分析	針對時間計算平均	分析瞬間→分析運動學 →找出原理




圖二、文獻實驗<翻滾吧！跳豆> 的跳豆結構展開圖

## 貳、研究設備及器材

### 一、實驗設備：

表二、實驗設備與材料

編號	設備名稱	規格	圖示	備註
1	斜坡	長：61.30 cm 寬：22.90 cm		
2	手機	Samsung( FHD60) 型號名稱：Galaxy A52s		錄影紀錄

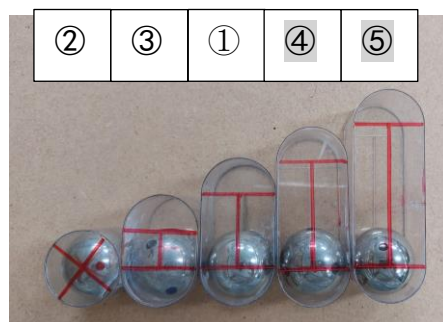
### 二、跳豆規格

表三、跳豆規格

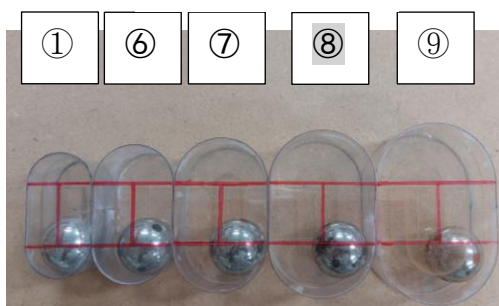
編號	內球種類	內球直徑(cm)	內球質量(g)	跳豆殼長度L(cm)	跳豆殼寬度W(cm)	實驗	備註
①	鋼珠	2.55	67.000	2.55	2.60	實驗一、二、三、四	圖三
②	鋼珠	2.55	67.000	0.00	2.60	實驗三	圖四
③	鋼珠	2.55	67.000	1.28	2.60		
④	鋼珠	2.55	67.000	3.83	2.60		
⑤	鋼珠	2.55	67.000	5.10	2.60		
⑥	鋼珠	2.55	67.000	2.55	3.25		
⑦	鋼珠	2.55	67.000	2.55	3.90		
⑧	鋼珠	2.55	67.000	2.55	4.55		
⑨	鋼珠	2.55	67.000	2.55	5.20		
⑩	空殼	3.00	3.394	3.00	3.05	實驗五	圖六
⑪	木球+殼	3.00	9.795	3.00	3.05		
⑫	塑膠球+殼	3.00	12.731	3.00	3.05		
⑬	彈珠+殼	3.00	25.211	3.00	3.05		
⑭	鋼珠+殼	3.00	71.136	3.00	3.05		



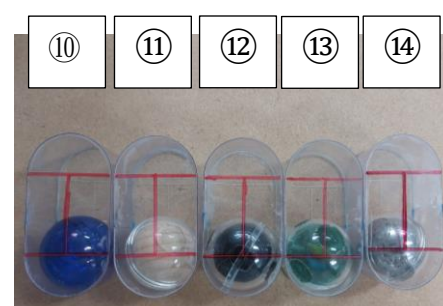
圖三、跳豆(1)



圖四、不同長度(L)的跳豆



圖五、不同寬度(W)的跳豆



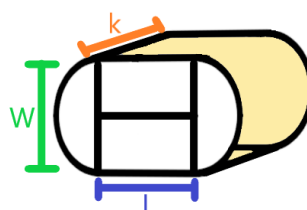
圖六、不同內球質量的跳豆

### 參、研究方法

- 一、改良跳豆：一般跳豆玩具為圓柱加兩個半球，滾動方向較不易掌控，為了控制跳豆殼翻轉的方向，本研究的跳豆改良成兩個側板加一個翻轉面，如圖七。
- 二、跳豆製作：側板由 1mm 的壓克力板經雷切機切割而成，翻轉面由軟塑膠片製作，將鋼珠置入內部，完成製作。(立體結構如圖八)



圖七、改良版跳豆



圖八、跳豆殼立體圖

(黃色為軟塑膠片，k 為跳豆厚度)

### 三、實驗步驟：

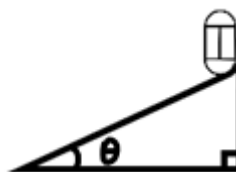
- (一) 固定斜面傾斜角  $\theta$ ，其實際實驗裝置如圖九。
- (二) 將跳豆由垂直地面自由釋放，其示意圖如圖十。
- (三) 利用 tracker 追蹤鋼珠球心(稱做點 A)和殼上的兩點(稱做點 B 和點 C，如圖十一)，再用 excel 計算跳豆殼角度  $\beta$  (如圖十二)、鋼珠速度隨時間的變化。
- (四) 改變斜面傾斜角，重複步驟(二)(三)。
- (五) 使用不同殼長度的跳豆(編號：①②③④⑤)，如圖四)，重複步驟(二)(三)。

(六) 使用不同殼寬度的跳豆(編號：①⑥⑦⑧⑨，如圖五)，重複步驟(二)(三)。

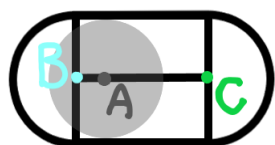
(七) 使用不同內球質量的跳豆(編號：⑩⑪⑫⑬⑭，如圖六)，重複步驟(二)(三)。



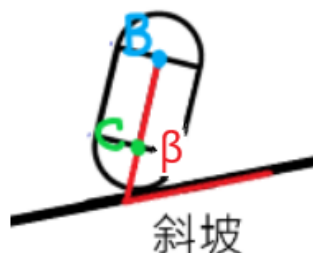
圖九、實際實驗裝置圖



圖十、實驗釋放圖(示意圖)



圖十一、tracker 標示點  
(A：球心，B、C：殼上標記點)



圖十二、跳豆傾斜角  $\beta$  示意圖  
(BC 點連線與斜面夾角)

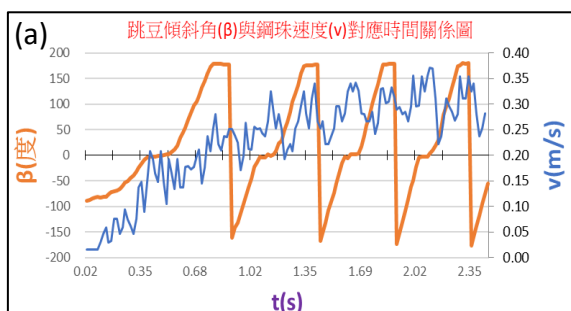
## 肆、研究結果

一、實驗一：觀察並理解跳豆翻滾時，外殼與鋼珠的運動關聯性。

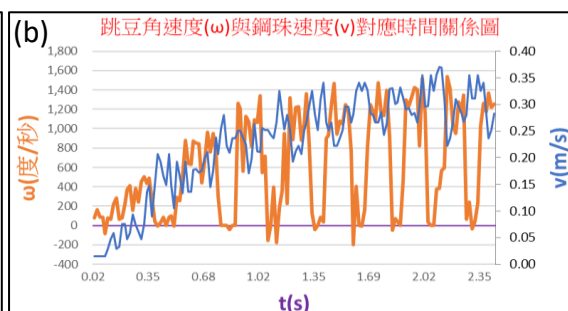
實驗裝置參數如表四，實驗數據如圖十三。分析跳豆的鋼珠速度( $v$ )與跳豆殼角度( $\beta$ )對應時間關係，如圖十三(a)，從此圖可發現跳豆重複平躺( $\beta$  為  $0^\circ$  或  $180^\circ$ ) 與翻轉的行為，且平躺時間隨次數越來越短。鋼珠速度( $v$ )與跳豆殼角速度( $\omega$ )對應時間關係圖如圖十三(b)，從此圖可發現鋼珠加速度與跳豆殼角加速度大致呈相反趨勢。

表四、實驗一裝置參數

實驗一	鋼珠直徑 (cm)	鋼珠質量 (g)	跳豆長度 L(cm)	跳豆厚度 k(cm)	斜面傾斜角 $\theta(^\circ)$	跳豆寬度 W(cm)
裝置 參數	2.55	67.000	2.55	2.80	2.2	2.60



圖十三(a)、跳豆傾斜角( $\beta$ )與鋼珠速度( $v$ )對應時間關係圖



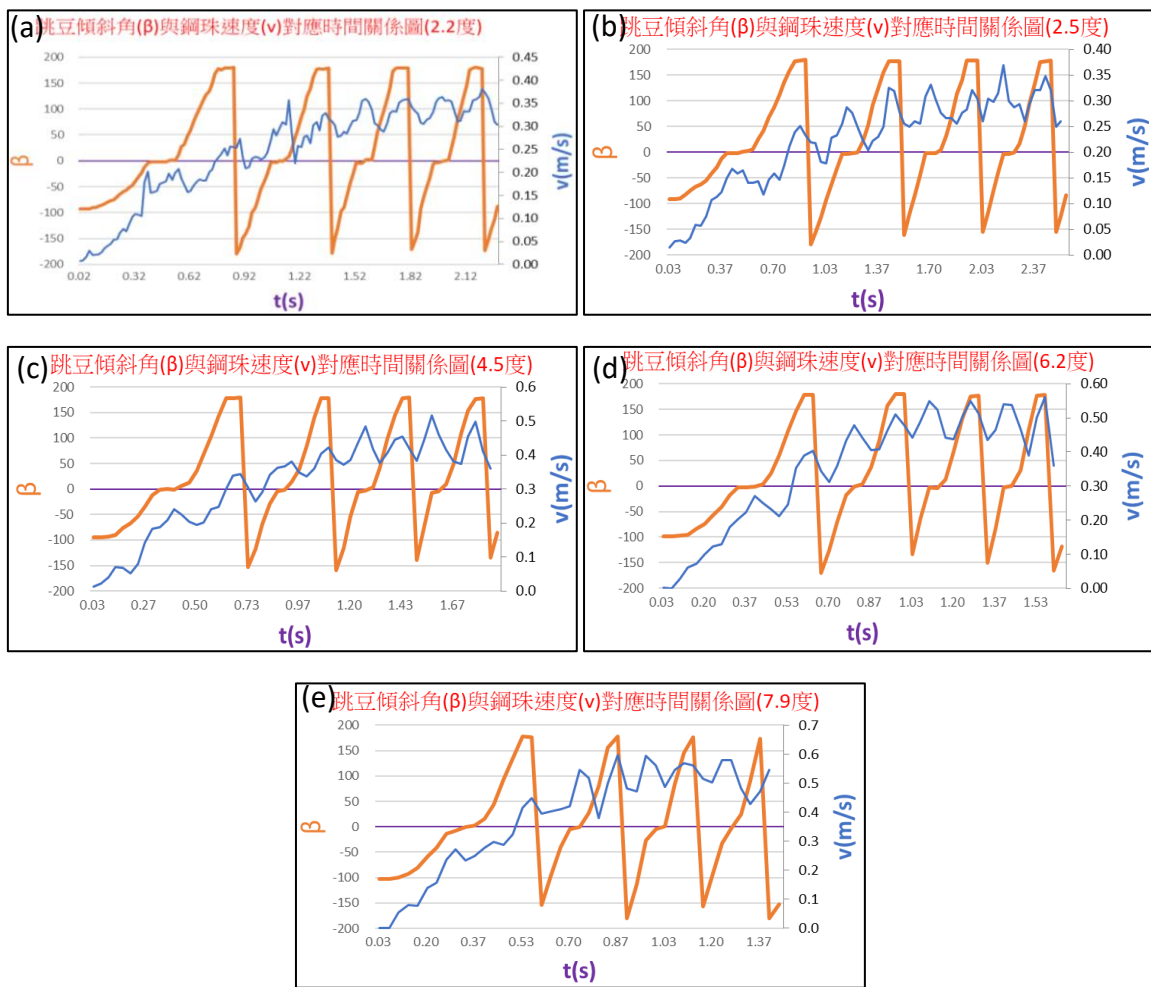
圖十三(b)、跳豆角速度( $\omega$ )與鋼珠速度( $v$ )對應時間關係圖

二、實驗二：改變斜面的傾斜角  $\theta$ ，確認跳豆是否在斜面上滑動。

實驗裝置參數如表五。改變不同斜面傾斜角  $\theta$  分別為  $2.2^\circ$ 、 $2.5^\circ$ 、 $4.5^\circ$ 、 $6.2^\circ$  及  $7.9^\circ$  跳豆傾斜角( $\beta$ )與鋼珠速度( $v$ )隨時間變化為圖十四(a)(b)(c)(d)(e)，從圖中可以發現隨著斜面傾斜角越大，平躺時間縮短。

表五、實驗二裝置參數

實驗二	鋼珠直徑 (cm)	鋼珠質量 (g)	跳豆長度 L(cm)	跳豆厚度 k(cm)	斜面傾斜角 $\theta$ ( $^\circ$ )	跳豆寬度 W(cm)
裝置 參數	2.55	67.000	2.55	2.80	(a) $2.2^\circ$ (b) $2.5^\circ$ (c) $4.5^\circ$ (d) $6.2^\circ$ (e) $7.9^\circ$	2.60



圖十四、(a)斜面傾斜角  $2.2^\circ$ 、(b)斜面傾斜角  $2.5^\circ$ 、(c)斜面傾斜角  $4.5^\circ$ 、(d)斜面傾斜角  $6.2^\circ$  及(e)斜面傾斜角  $7.9^\circ$  時跳豆傾斜角( $\beta$ )與鋼珠速度( $v$ )對應時間關係圖

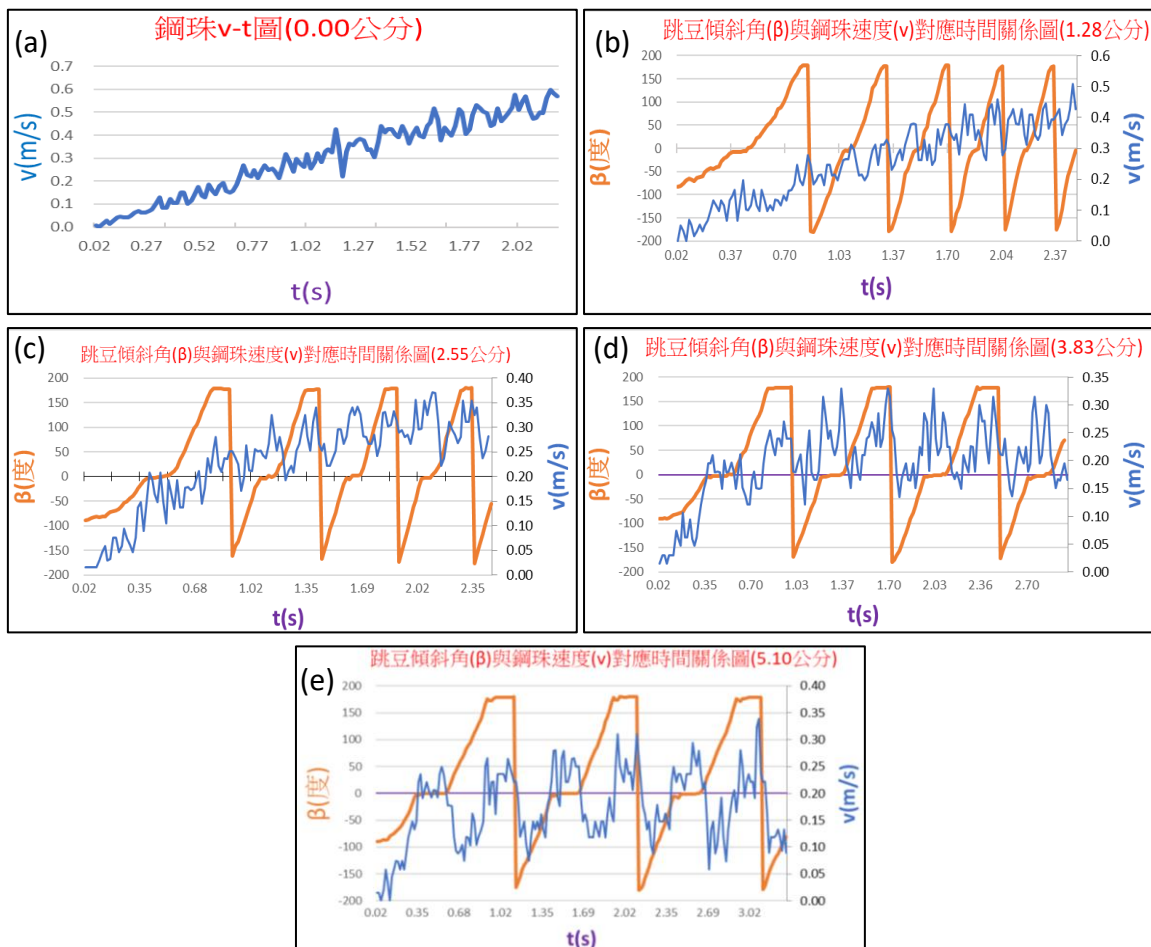


三、實驗三：改變跳豆殼長度(如圖一側板長度 L)，觀察與分析跳豆翻滾情形。

實驗裝置參數表如表六。改變不同跳豆殼長度(L)，分別為 0.00 cm、1.28 cm、2.55 cm、3.83 cm 及 5.10 cm，其跳豆傾斜角( $\beta$ )與鋼珠速度(v)對應時間關係圖如圖十五(a)(b)(c)(d)(e)。由圖十五橘線可發現跳豆殼長度(L)越長，平躺時間維持越久；由藍線可發現跳豆殼長度(L)越長，每回翻轉週期內鋼珠速度變化越大，且鋼珠速度有近似飽和的現象。跳豆長度 0 cm (樣品②)為單純圓柱體，故僅分析跳豆(③)(①)(④)(⑤)之殼角速度( $\omega$ )與鋼珠速度(v)對應時間關係圖，如圖十六(a)(b)(c)(d)。由圖十六可發現跳豆殼長度(L)越長，跳豆殼角速度越快達飽和且飽和數值越低。

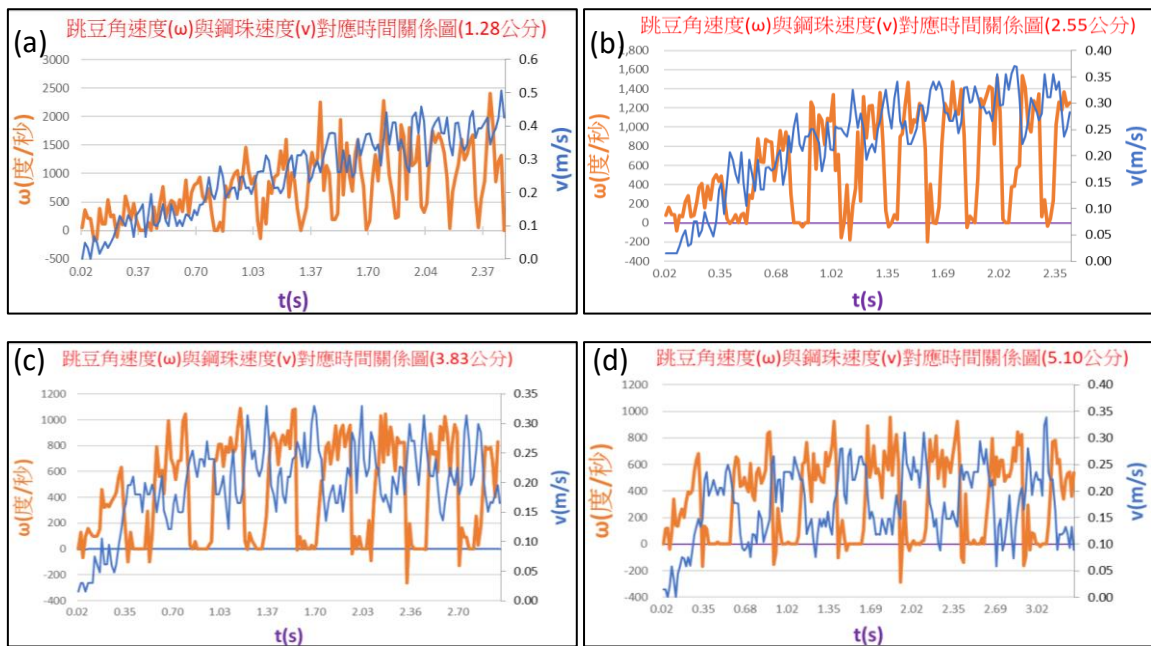
表六、實驗三裝置參數

實驗三	鋼珠直徑 (cm)	鋼珠質量 (g)	跳豆長度 L(cm)	跳豆厚度 k(cm)	斜面傾斜角 $\theta(^{\circ})$	跳豆寬度 W(cm)
裝置 參數	2.55	67.000	0.00 (②)、 1.28 (③)、 2.55 (①)、 3.83 (④)、 5.10 (⑤)	2.80	2.2	2.60



圖十五、(a) L= 0 cm、(b) L= 1.28 cm、(c) L= 2.55 cm、(d) L= 3.83 cm 及(e) L= 5.10 cm 時鋼珠速度(v)對應時間關係圖





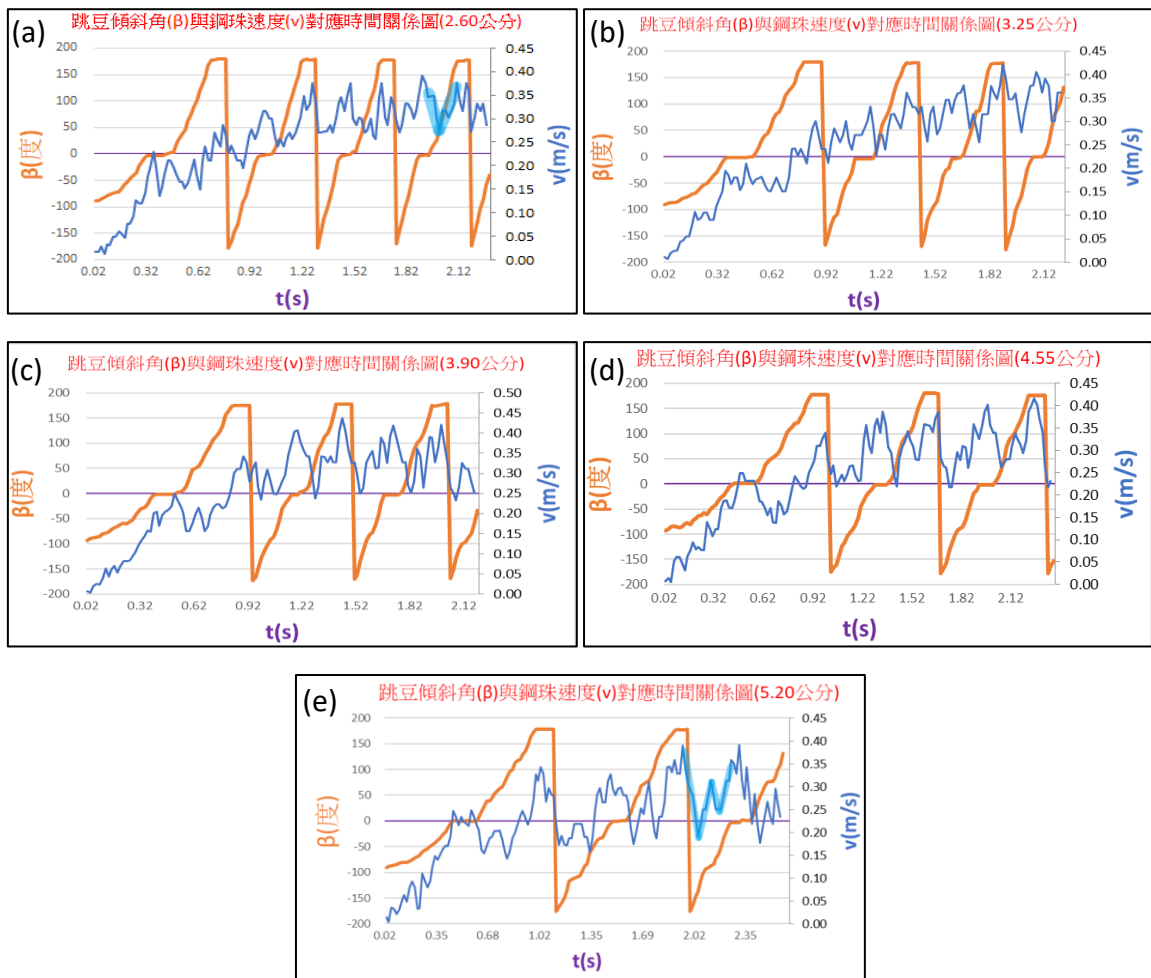
圖十六、(a)  $L=1.28\text{ cm}$ 、(b)  $L=2.55\text{ cm}$ 、(c)  $L=3.83\text{ cm}$  及(d)  $L=5.10\text{ cm}$  時  
跳豆角速度( $\omega$ )與鋼珠速度( $v$ )對應時間關係圖

#### 四、實驗四：改變跳豆殼寬度(如圖一側板寬度 $W$ )，觀察與分析跳豆翻滾情形。

裝置參數表如表七。改變不同跳豆殼寬度( $W$ )，分別為  $2.60\text{ cm}$ 、 $3.25\text{ cm}$ 、 $3.90\text{ cm}$ 、 $3.83\text{ cm}$  及  $5.10\text{ cm}$ ，其跳豆傾斜角( $\beta$ )與鋼珠速度( $v$ )對應時間關係圖如圖十七的(a)(b)(c)(d)(e)。由圖十七橘線可看出寬度越寬翻轉時間越久。由藍線可看出寬度增加時跳豆翻轉過程中鋼珠速度多了再次加速的行為，使其由「V」型變成「W」型，且寬度越長此現象越明顯。

表七、實驗四裝置參數

實驗四	鋼珠直徑 (cm)	鋼珠質量 (g)	跳豆長度 $L$ (cm)	跳豆厚度 $k$ (cm)	斜面傾斜角 $\theta$ ( $^{\circ}$ )	跳豆寬度 $W$ (cm)
裝置 參數	2.55	67.000	2.5	2.80	2.2	2.60 (①)、 3.25 (⑥)、 3.90 (⑦)、 4.55 (⑧)、 5.20 (⑨)、



圖十七、(a)  $W=2.60\text{ cm}$ 、(b)  $W=3.25\text{ cm}$ 、(c)  $W=3.90\text{ cm}$ 、(d)  $W=4.55\text{ cm}$ 、(e)  $W=5.20\text{ cm}$  的跳豆傾斜角( $\beta$ )與鋼珠速度( $v$ )對應時間關係圖

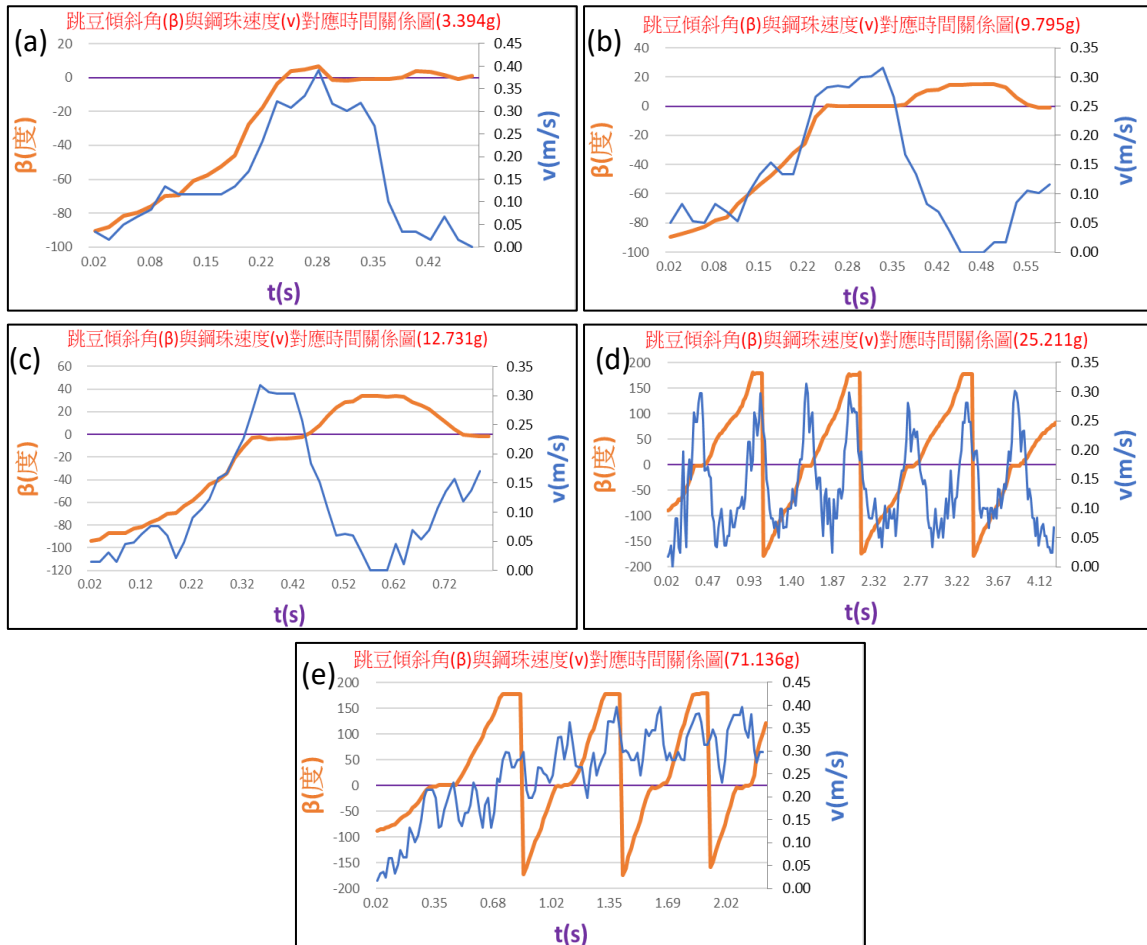
#### 五、實驗五：改變跳豆內球質量，觀察與分析跳豆翻滾情形。

裝置參數表如表八。改變跳豆內球質量，其跳豆傾斜角( $\beta$ )與鋼珠速度( $v$ )對應時間關係圖如圖十八(a)(b)(c)(d)(e)。由圖十八(a)(b)(c)可發現內球質量太輕跳豆會無法完整翻滾。由圖十八(d)(e)可看出內球質量小，內球速度較快達飽和，且平躺與翻轉時間均較長。

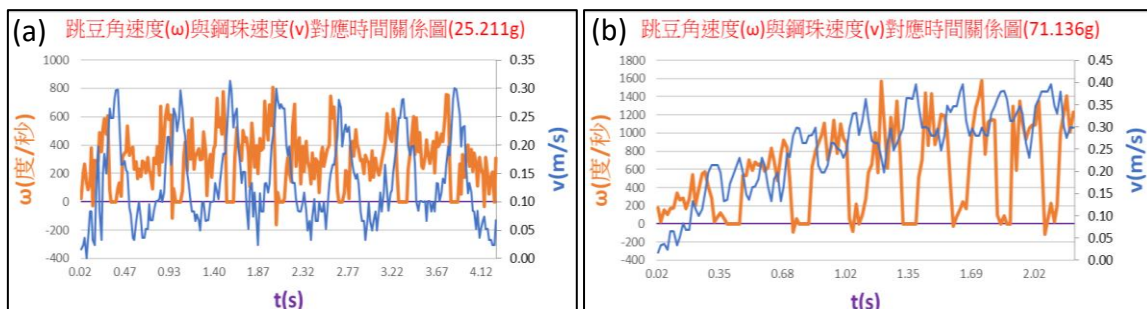
取可翻滾的樣品⑬⑭得出，跳豆角速度( $\omega$ )與鋼珠速度( $v$ )對應時間關係圖如圖十九的(a)(b)。由圖十九可看出內球質量較小，跳豆角速度較快達飽和且飽和值較小。

表八、實驗五裝置參數

實驗五	塑膠球直徑 (cm)	內球質量 (g)	跳豆長度 L(cm)	跳豆厚度 k(cm)	斜面傾斜角 $\theta (^{\circ})$	跳豆寬度 W(cm)
裝置 參數	3.00	3.394(⑩)、 9.795(⑪)、 12.731(⑫)、 25.211(⑬)、 71.136(⑭)	3.00	3.25	2.2°	3.05



圖十八、(a)內球質量 3.394 g、(b)內球質量 9.795 g、(c)內球質量 12.731 g、(d)內球質量 25.211 g、(e)內球質量 71.136 g 的跳豆傾斜角( $\beta$ )與鋼珠速度(v)對應時間關係圖

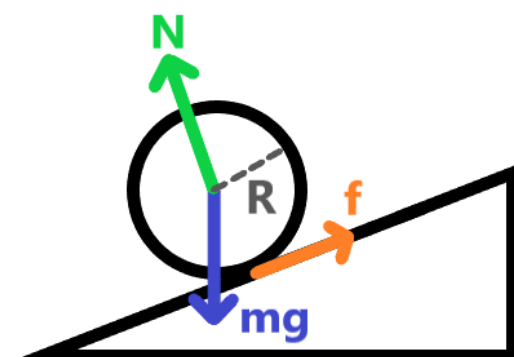


圖十九、(a)內球質量 25.211g、(b)內球質量 71.136g 的跳豆角速度( $\omega$ )與鋼珠速度(v)對應時間關係圖

## 伍、討論

### 一、實驗原理

#### (一) 跳豆平躺時鋼珠在跳豆殼內純滾動之原理



圖例：

**N**：正向力

**m**：鋼珠質量

**g**：重力加速度

**f**：摩擦力

**R**：鋼珠半徑

圖二十、球純滾動示意圖

$$mg\sin\theta - f = ma \quad (1)$$

$$fR = I\alpha \quad (2)$$

$$a = R\alpha \quad (3)$$

$$f \leq f_{s\max} = N\mu_s = mg\cos\theta\mu_s \quad (4)$$

將(3)代入(2)，得

$$fR = I\frac{a}{R} \Rightarrow f = I\frac{a}{R^2} \quad (5)$$

將(5)代入(1)，得

$$mg\sin\theta - I\frac{a}{R^2} = ma \quad (6)$$

$$a\left(m + I\frac{1}{R^2}\right) = mg\sin\theta \quad (7)$$

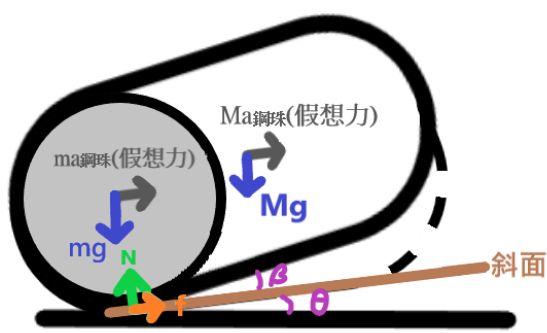
鋼珠轉動慣量  $I = \frac{2}{5}mR^2$  代入(7)，得

$$a\left(m + \frac{2}{5}m\right) = mg\sin\theta \quad (8)$$

$$a = \frac{5}{7}g\sin\theta \quad (9)$$

#### (二) 跳豆翻轉過程分析(鋼珠半徑與跳豆殼圓弧半徑相近的情況)

1. 假設：跳豆翻轉過程因為鋼珠都在跳豆底部，可以將跳豆殼和鋼珠視為同一分析主體。
2. 力圖說明：以鋼珠球心為觀察者，整個跳豆所受力圖如圖二十一。



- 圖例：
- m：鋼珠質量
  - M：殼質量
  - $a_{\text{鋼珠}}$ ：鋼珠的加速度
  - g：重力加速度
  - N：正向力
  - f：斜面對跳豆的摩擦力
  - $\theta$ ：斜面傾斜角
  - $\beta$ ：跳豆傾斜角

圖二十一、跳豆受力示意圖

### 3.跳豆物理量

(符號說明：R：鋼珠半徑，L：跳豆長度，k：跳豆厚度， $\sigma_1$ ：軟塑膠片面密度， $\sigma_2$ ：壓克力面密度， $\alpha$ ：殼的角加速度， $\omega$ ：殼的角速度)

(1) M(殼的質量)

$$M = (2\pi R + 2L)k\sigma_1 + [\pi R^2 + (2RL)] \times 2\sigma_2 \quad (10)$$

(2) I(跳豆整體含鋼珠相對鋼珠球心的轉動慣量)

$$\begin{aligned} I &= 4LR\sigma_2 \left( \frac{4}{3}R^2 + \frac{7L^2}{12} \right) + \frac{\pi R^2}{2}\sigma_2(L^2 + R^2) + Lk\sigma_1 \left( \frac{L^2}{3} + R^2 \right) + (3\pi Rk\sigma_1)(R^2 + L^2) \\ &= L^3 \left( \frac{7}{3}R\sigma_2 + \frac{k\sigma_1}{3} \right) + L^2 \left( \frac{\pi R^2}{2}\sigma_2 + 3\pi Rk\sigma_1 \right) + L \left( \frac{16}{3}R^3\sigma_2 \right) + \left( \frac{\pi R^4}{2}\sigma_2 + 3\pi R^3k\sigma_1 \right) \quad (11) \end{aligned}$$

### 4.運動分析 (註：推導過程見附錄)

(1) 轉動方程式(以鋼珠球心為參考點)：

$$fR - Mg \frac{L}{2} \cos(\theta + \beta) - Ma \frac{L}{2} \sin \beta = I \frac{d^2 \beta}{dt^2} = I\alpha \quad (12)$$

(2) 移動方程式(地面參考座標)：

$$\text{平行斜面：} (mg + Mg) \sin \theta - f = (m + M)a_{\text{鋼珠(平行斜面)}} \quad (13)$$

$$\text{鉛直斜面：} N - (mg + Mg) \cos \theta = (m + M)a_{\text{鋼珠(鉛直斜面)}} \quad (14)$$

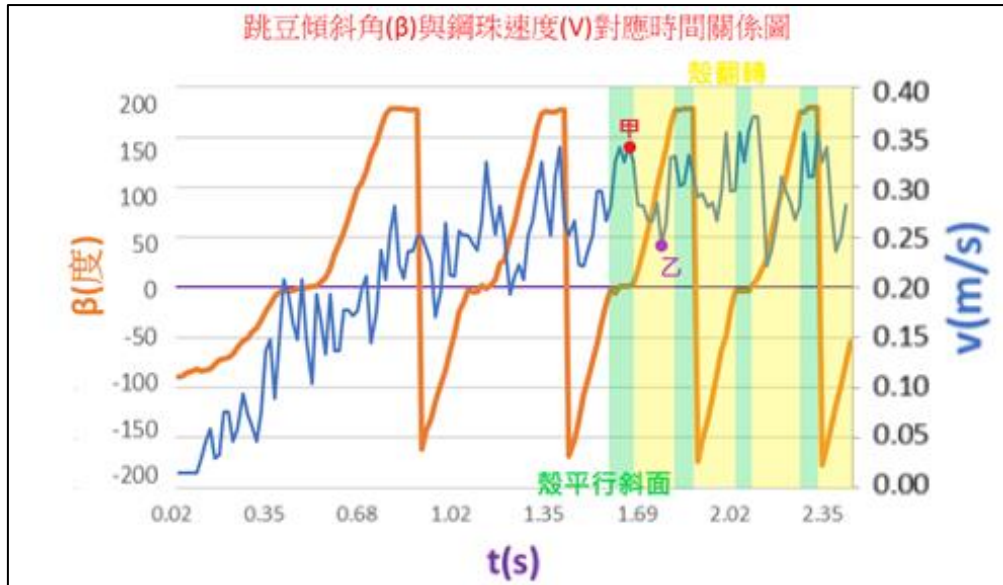
利用轉動與移動方程式得出鋼珠加速度( $a_{\text{鋼珠}}$ )

$$a_{\text{鋼珠}} = \frac{1}{M \frac{L}{2} \sin \beta + m + M} \left\{ (m + M)g \sin \theta - \alpha \left[ I + \frac{LM}{2} \sin \beta \right] - \omega^2 \frac{LM}{2} - Mg \frac{L}{2} \cos(\theta + \beta) \right\} \quad (15)$$

## 二、實驗結果分析與討論

### (一) 跳豆的運動狀態分析

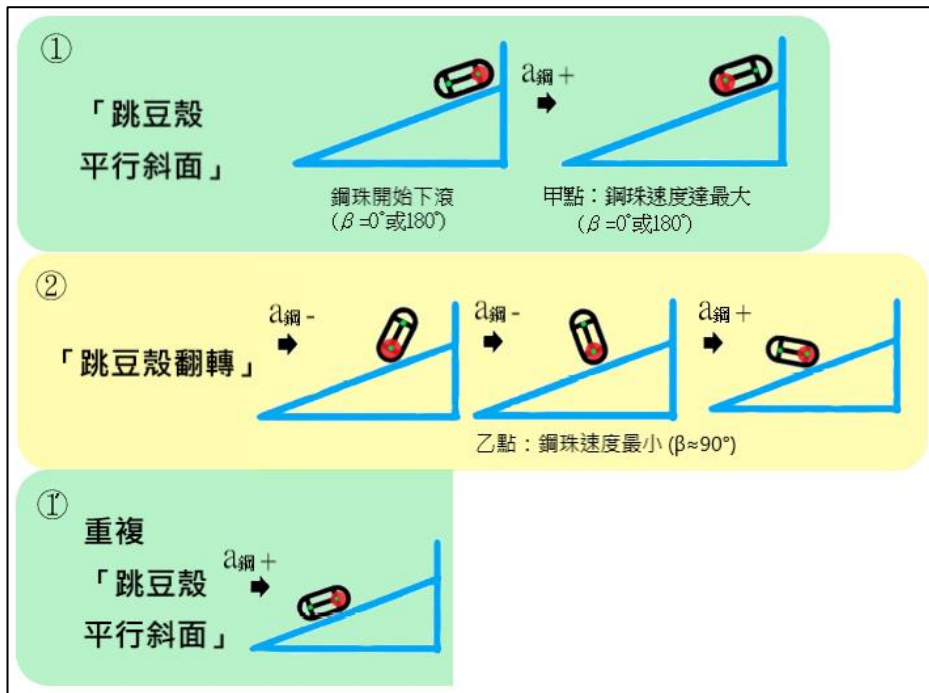
1. 由圖二十二可看出，跳豆的運動過程分為「跳豆殼翻轉」(黃色區域)和「跳豆殼平行斜面」(綠色區域)。跳豆不斷重複綠、黃區間的行為。



圖二十二、跳豆傾斜角( $\beta$ )與鋼珠速度( $v$ )對應時間關係圖  
(註：全程皆有重複著黃色區域與綠色區域的運動情形，為避免畫面混亂只取後段標示)

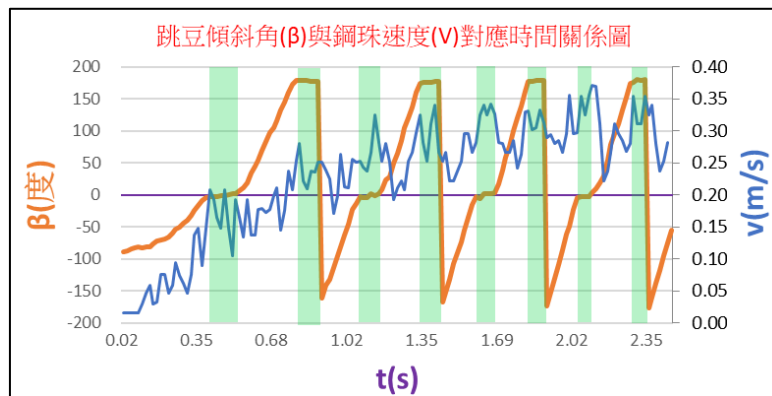
2. 分析其運動流程如圖二十三，搭配圖二十二可以得下兩點：
  - (1) 「跳豆殼平行斜面」區域中(即圖二十二的綠色區間和圖二十三的①)，鋼珠開始從上端加速下滾。當鋼珠抵達跳豆下端時，鋼珠達最大速度(如圖二十二中甲點)，緊接著進入「跳豆殼翻轉」。
  - (2) 「跳豆殼翻轉」區域中(即圖二十二的黃色區間和圖二十三的②)，鋼珠會先減速。當殼翻轉至大約垂直斜面時鋼珠達最小速度(如圖二十二的乙點與圖二十三②的中央圖)，接著鋼珠又開始加速。



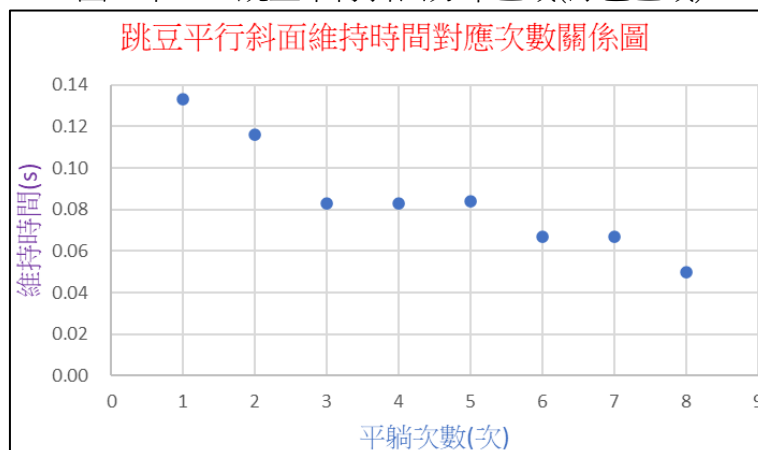


圖二十三、流程示意圖

3. 隨著翻滾次數增加，「跳豆殼平行斜面」所維持的時間越來越短(即綠色區域時間越來越短，如圖二十四、圖二十五)且鋼珠的速度極值(即圖二十二甲點速度)越來越大(如圖二十六)。

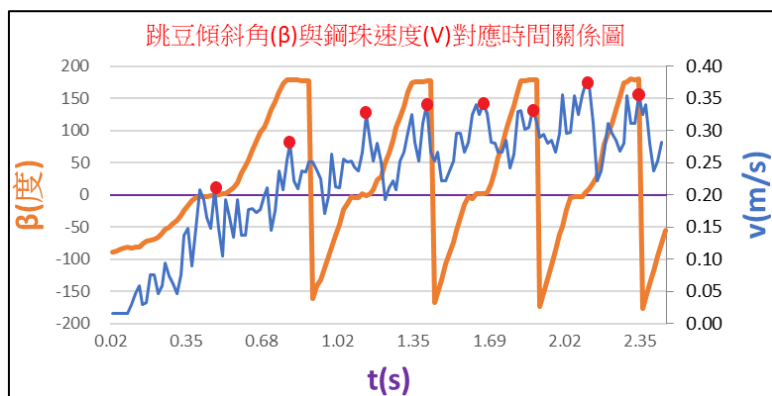


圖二十四、跳豆平行斜面分布區域(綠色區域)



圖二十五、跳豆平行斜面維持時間對應次數關係圖





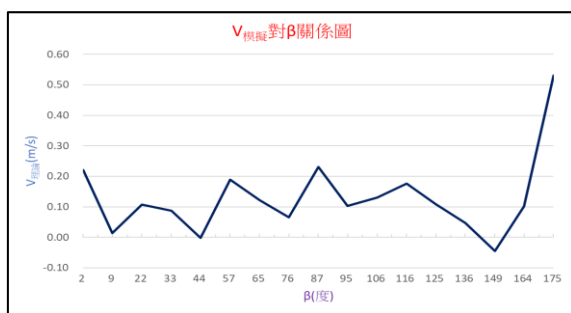
圖二十六、鋼珠速度極值與發生時間點

#### 4. 跳豆翻轉期間鋼珠速度變化

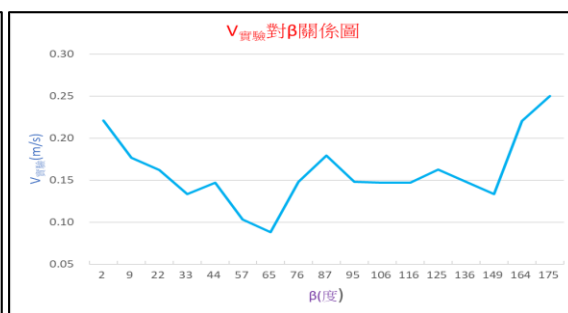
由公式(15)：

$$a_{\text{鋼珠}} = \frac{1}{M \cdot \frac{L}{2} \sin \beta + m + M} \left\{ (m + M)g \sin \theta - \alpha \left[ I + \frac{LM}{2} \sin \beta \right] - \omega^2 \frac{LM}{2} - Mg \frac{L}{2} \cos(\theta + \beta) \right\}$$

可得知跳豆翻轉期間鋼珠加速度受到跳豆殼夾角( $\beta$ )、跳豆角速度( $\omega$ )及跳豆角加速度( $\alpha$ )影響。將實驗數據結合參數代入公式(15)後可得到圖二十七之模擬數據，此圖與原實驗數據(圖二十八)大致有相同的趨勢變化。



圖二十七、 $V_{\text{模擬}}$ 對 $\beta$ 關係圖



圖二十八、 $V_{\text{實驗}}$ 對 $\beta$ 關係圖

## (二)跳豆於斜面滑動之分析

當「跳豆殼平行斜面」時 (即  $\beta=0^\circ$ 或  $180^\circ$ 時)，若圖十一的 B、C 兩點各自平行斜面位移為零(即  $\Delta X_B=0$  且  $\Delta X_C=0$ )，代表沒有滑動，分析結果如下表九。

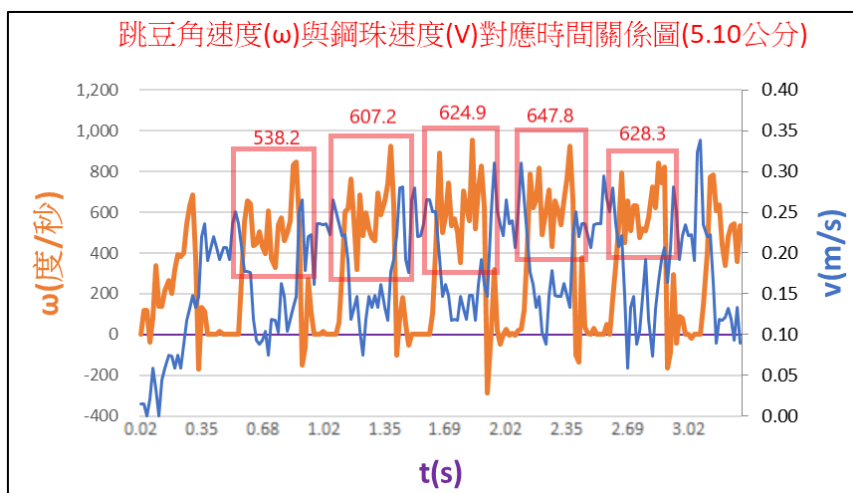
表九、判斷不同斜坡傾斜角  $\theta$  跳豆是否滑動

傾斜角度 平行次數	$\theta=2.2^\circ$	$\theta=2.5^\circ$	$\theta=4.5^\circ$	$\theta=6.2^\circ$	$\theta=7.9^\circ$
一	X	X	X	X	X
二	X	X	X	X	O
三	X	X	X	O	O
四	X	X	X	O	O
五	X	X	O	O	O
六	X	X	O	O	無法判斷(因為只有拍到一個點，無法算出 $\Delta X$ )
七	X	X	O	O	無法判斷(原因同上)
八	X	X	O	O	O
備註：O(有滑)，X(沒滑)					
結論：後續實驗採用斜面傾斜角 $\theta=2.2^\circ$					

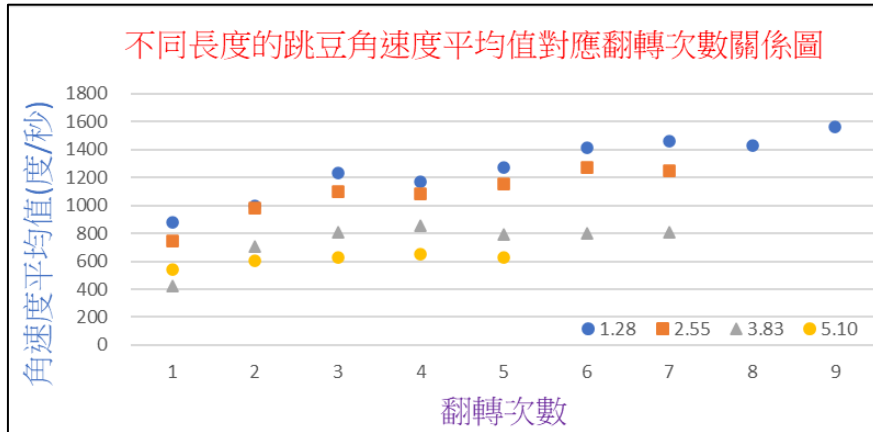
## (三)不同跳豆長度之運動情形

### 1. 角速度與跳豆長度的關係

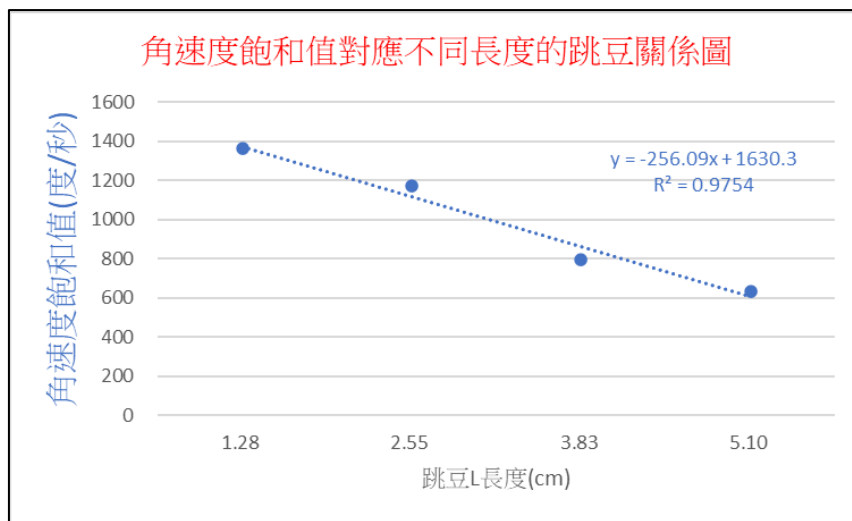
計算每次跳豆翻轉時跳豆角速度平均值(如圖二十九的紅色方框)，不同長度的跳豆角速度平均值對應翻滾次數關係圖如圖三十，隨著次數增加角速度平均值漸趨飽和，選擇此圖後段的飽和數值計算平均，得到角速度飽和值對應跳豆長度關係圖，如圖三十一，由此圖可發現跳豆越長飽和角速度越小，幾乎為線性關係。



圖二十九、單次翻轉跳豆角速度平均值取樣區間說明圖



圖三十、不同長度的跳豆每次翻轉的角速度平均值對應翻轉次數關係圖



圖三十一、角速度飽和值對應不同長度的跳豆關係圖

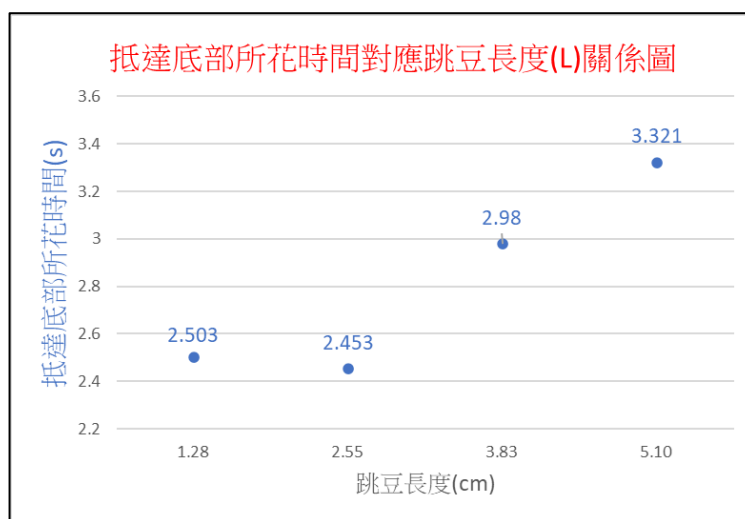
## 2. 全程時間與跳豆長度的關係

### (1) 預期結果

跳豆平行斜面時，鋼珠作純滾動，以固定加速度加速，故推測跳豆長度越長，鋼珠可利用平行斜面期間加速至較大速度，因此實驗前預期全程時間隨跳豆長度越長而越短。

### (2) 全程時間對應跳豆長度的關係

斜面長度固定為 61.30 cm 時，不同長度的跳豆所在全程時間如圖三十二，從此圖可以發現並非跳豆越長，越快抵達斜面底部，而是有理想長度。



圖三十二、抵達底部所花時間對應跳豆長度關係圖

### (3) 全程時間的分佈

全程時間( $t_{全}$ )可區分成「跳豆殼平行斜面」( $t_{平}$ )和「跳豆殼翻轉」( $t_{翻}$ )兩種，分析數值如表十。

表十、不同長度的跳豆抵達斜坡底部時間表 (註：數字四捨五入至小數點第三位)

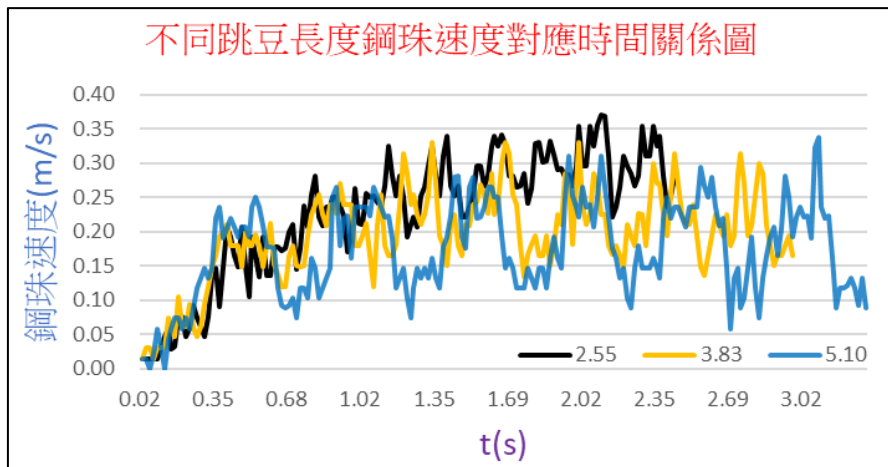
跳豆長度 (cm)	全程時間 ( $t_{全}$ )(s)	殼平行斜面時間 ( $t_{平}$ )(s)	殼翻轉時間 ( $t_{翻}$ )(s)	「殼平行斜面」次數(n)	「殼翻轉」次數(n') (註：半圈為一次)	殼平行斜面時，鋼珠球心前進1cm平均時間( $\frac{t_{平}}{n}$ )	殼翻轉鋼珠球心前進1cm平均時間( $\frac{t_{翻}}{n'}$ )
0.00	2.203	2.203 (100%)					
1.28	2.503	0.469 (18.7%)	2.034 (81.3%)	11	10.906	0.033	0.046
2.55	2.453	0.733 (29.9%)	1.720 (70.1%)	8	9.320	0.036	0.045
3.83	2.980	1.116 (37.4%)	1.864 (62.6%)	7	8.009	0.042	0.057
5.10	3.321	1.301 (39.2%)	2.020 (60.8%)	6	6.144	0.043	0.080

### 3. 最快抵達斜面底部之跳豆長度有理想值之原因分析

#### (1) 跳豆長度超過某個值後跳豆長度越長全程時間越長的原因

跳豆的鋼珠速度對應時間圖如圖三十三，由此圖可發現跳豆長度越長，雖然鋼珠加速幅度較多，但跳豆翻轉時，鋼珠減速幅度也較多，推測原因為

跳豆長度越長，轉動慣量越大，使殼翻轉時間拉長，而鋼珠減速幅度因此增加，使其花較長時間抵達底部，如圖三十四。



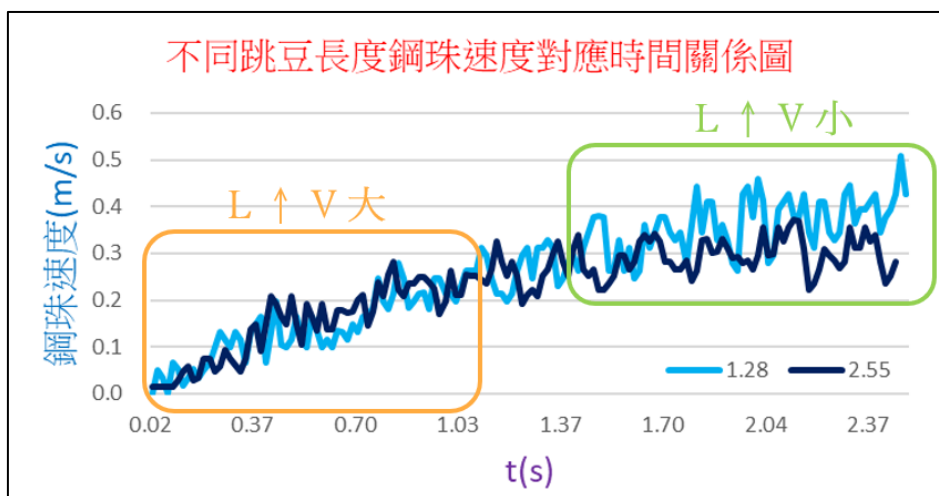
圖三十三、跳豆長度為 2.55 公分，3.83 公分和 5.10 公分的鋼珠速度比較圖



圖三十四、跳豆越長，抵達時間越久的因素

(2) 全程時間非跳豆長度越短越快之原因

如圖三十五可發現跳豆長度 2.55 cm 所花的時間比 1.28 cm 還短，與圖三十四之理論不同。分析每瞬間鋼珠速度隨時間的變化(如圖三十五)可觀察到後期(綠框處)跳豆長度越長速度越小，與原理論相符。但前期(黃框區)長跳豆速度較快，代表前期跳豆平行斜面的加速效果比翻轉減速效果明顯，由此推斷在有限斜坡距離下有最佳跳豆長度。

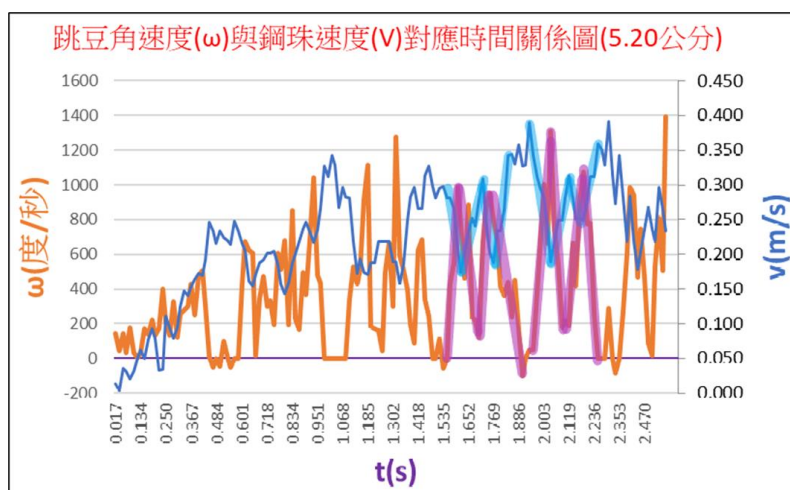


圖三十五、跳豆長度 1.28 公分和 2.55 公分的鋼珠速度比較圖

#### (四) 不同跳豆寬度之運動情況






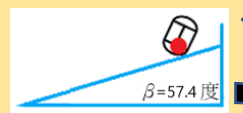
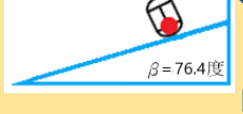
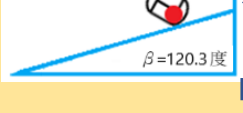
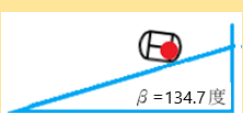
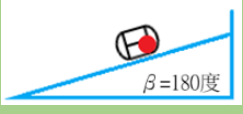
##### 1. 翻轉過程寬度較大的跳豆具有「W」型速度變化的趨勢

- (1) 當寬度變大，翻轉過程中鋼珠會多出一組減速加速段，使鋼珠速度對時間圖由原本的「V」型變成「W」型(如圖三十六)，分析跳豆寬度 5.20 cm 的運動過程如表十一，從此表可發現翻轉過程中鋼珠加速度會反覆變化。



圖三十六、「W」型與「M」型

表十一、W= 5.20 cm 的跳豆鋼珠加速度與速度對應流程示意圖

編號	翻滾情形	示意圖	鋼珠加速度 (註：左下方為正)	鋼珠速度變化標示
1-1	跳豆殼平行斜面		a+	
1-2				
2-1	跳豆殼翻轉		a+	
2-2			a-	
2-3			a+	
2-4			a- 隨著翻滾次數增加， 整體速度上升， 此階段消失	
2-5				
1'-1		跳豆殼平行斜面		

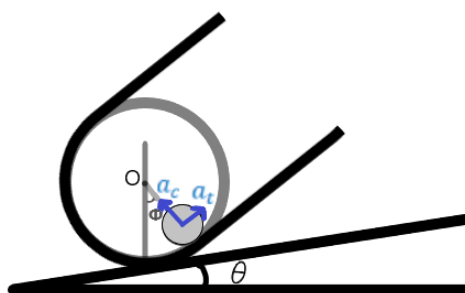


(2) 比較不同寬度跳豆翻轉過程，鋼珠加速減速發生角度和加減速度值如表十二。

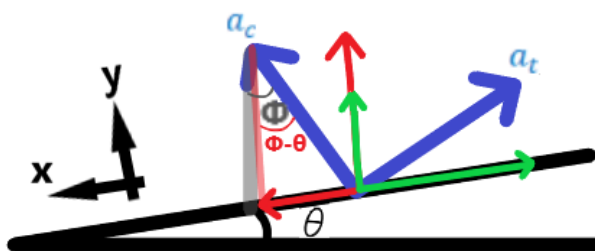
表十二、不同跳豆寬度翻轉過程比較圖

比較	W=2.60公分	W=3.25、3.90、4.55、5.20公分																																				
翻轉過程鋼珠加速度示意圖																																						
翻轉過程鋼珠速度對時間變化趨勢	<p style="text-align: center;">「V」型</p>	<p style="text-align: center;">「W」型</p>																																				
鋼珠速度變化	減速→加速	減速→加速→減速→加速 (→*減速)→加速																																				
備註		後期此階段可能會消失而觀察不到																																				
加減速角度分布與鋼珠速度變化量 (取最後一次翻轉作圖)	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>W寬度 (cm)</th> <th>初速 (m/s)</th> <th>末速 (m/s)</th> <th>減速量值</th> <th>加速量值</th> <th>角度分布 (degrees)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>5.20</td> <td>0.390</td> <td>0.359</td> <td>-0.200</td> <td>+0.123</td> <td>31.9° - 42.9° - 89.0° - 92.7° - 113.9° - 129.0°</td> </tr> <tr> <td>4.55</td> <td>0.402</td> <td>0.386</td> <td>-0.139</td> <td>+0.075</td> <td>15.2° - 27.6° - 94.2° - 103.5° - 125.7° - 140.8°</td> </tr> <tr> <td>3.90</td> <td>0.419</td> <td>0.327</td> <td>-0.168</td> <td>+0.109</td> <td>37.3° - 67.7° - 86.5° - 100.6° - 106.5° - 119.0° - 136.6° - 155.7°</td> </tr> <tr> <td>3.25</td> <td>0.421</td> <td>0.346</td> <td>-0.074</td> <td>+0.014</td> <td>24.6° - 48.0° - 78.1° - 92.0° - 105.4°</td> </tr> <tr> <td>2.60</td> <td>0.391</td> <td>0.376</td> <td>-0.089</td> <td>+0.074</td> <td>87.5° - 112.4°</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;">90.0°      β(°)</p> <p style="text-align: center;">■ 減速度量值    ■ 加速速度量值    □ 因tracker本身的時間差導致無法記錄到</p>		W寬度 (cm)	初速 (m/s)	末速 (m/s)	減速量值	加速量值	角度分布 (degrees)	5.20	0.390	0.359	-0.200	+0.123	31.9° - 42.9° - 89.0° - 92.7° - 113.9° - 129.0°	4.55	0.402	0.386	-0.139	+0.075	15.2° - 27.6° - 94.2° - 103.5° - 125.7° - 140.8°	3.90	0.419	0.327	-0.168	+0.109	37.3° - 67.7° - 86.5° - 100.6° - 106.5° - 119.0° - 136.6° - 155.7°	3.25	0.421	0.346	-0.074	+0.014	24.6° - 48.0° - 78.1° - 92.0° - 105.4°	2.60	0.391	0.376	-0.089	+0.074	87.5° - 112.4°
W寬度 (cm)	初速 (m/s)	末速 (m/s)	減速量值	加速量值	角度分布 (degrees)																																	
5.20	0.390	0.359	-0.200	+0.123	31.9° - 42.9° - 89.0° - 92.7° - 113.9° - 129.0°																																	
4.55	0.402	0.386	-0.139	+0.075	15.2° - 27.6° - 94.2° - 103.5° - 125.7° - 140.8°																																	
3.90	0.419	0.327	-0.168	+0.109	37.3° - 67.7° - 86.5° - 100.6° - 106.5° - 119.0° - 136.6° - 155.7°																																	
3.25	0.421	0.346	-0.074	+0.014	24.6° - 48.0° - 78.1° - 92.0° - 105.4°																																	
2.60	0.391	0.376	-0.089	+0.074	87.5° - 112.4°																																	

(3) 翻轉過程鋼珠速度具有「W」型的原因



圖三十七、  
鋼珠加速度示意圖



圖三十八、  
鋼珠加速度分解圖

( $R$ ：殼半徑； $a_c$ ：向心加速度； $r$ ：鋼珠半徑； $a_t$ ：切線加速度；  
 $\theta$ ：斜面傾斜角； $\phi$ ：殼繞  $O$  點的旋轉角度)

鋼珠質心對  $O$  點向心加速度：

$$a_c = (R - r) \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \quad (17)$$

鋼珠質心對  $O$  點切線加速度：

$$a_t = (R - r) \frac{d^2\phi}{dt^2} \quad (18)$$

小球對  $O$  點：

$$a_{\text{球}x} (\text{平行斜面}) = (R - r) \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \sin(\phi - \theta) - (R - r) \frac{d^2\phi}{dt^2} \cos(\phi - \theta) \quad (19)$$

$$a_{\text{球}y} (\text{鉛直斜面}) = (R - r) \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \cos(\phi - \theta) + (R - r) \frac{d^2\phi}{dt^2} \cos(\phi - \theta) \quad (20)$$

小球對地：

$$a_{\text{球對地}x} : a_{\text{球}x} + a_{\text{ox}} \quad (21)$$

$$a_{\text{球對地}y} : a_{\text{球}y} + a_{\text{oy}} \quad (22)$$

其中：

$$a_{ox} = R \frac{d^2\phi}{dt^2} \quad (23)$$

$$a_{oy} = 0 \quad (24)$$

將(19)、(20)、(23)及(24)代入(21)、(22)，得：

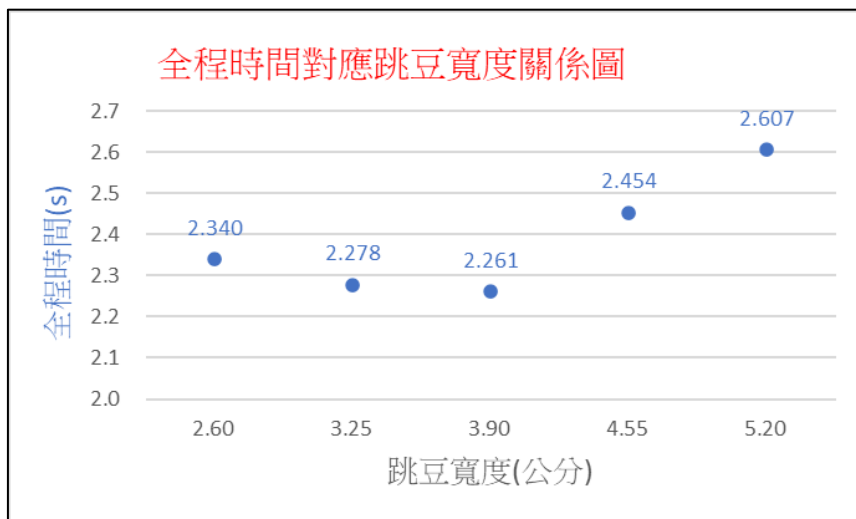
$$a_{\text{球對地}_x} = (R - r) \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \sin(\phi - \theta) - (R - r) \frac{d^2\phi}{dt^2} \cos(\phi - \theta) - R \frac{d^2\phi}{dt^2} \quad (25)$$

$$a_{\text{球對地}_y} = (R - r) \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \cos(\phi - \theta) + (R - r) \frac{d^2\phi}{dt^2} \sin(\phi - \theta) = 0 \quad (26)$$

由此公式(25)可發現當寬度變大時( $R > r$ )，翻轉過程會受鋼珠對殼心 O 點角度中的變化而加速減速，因此從「V」型變成「W」型。

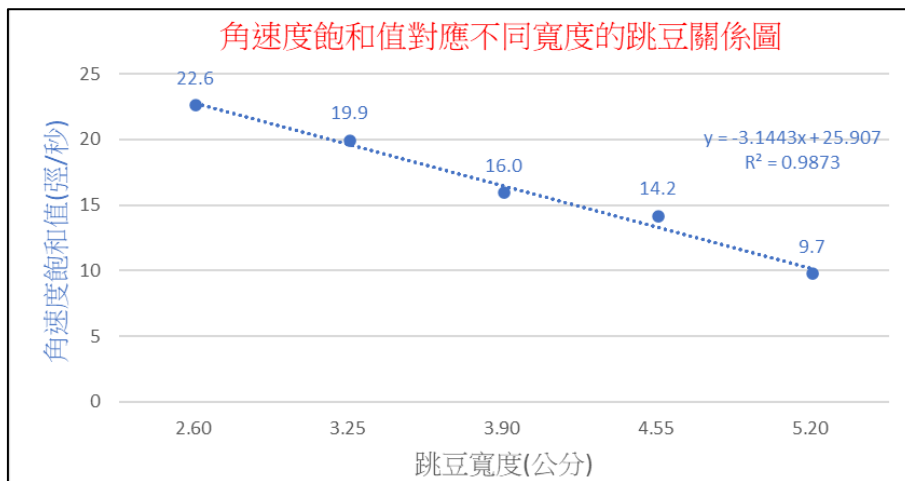
## 2. 全程時間與跳豆寬度的關係

(1) 從圖三十九可看出，跳豆殼  $W=3.90$  公分所花時間最短，而  $W=5.20$  公分所花時間最長。



圖三十九、全程時間與跳豆寬度(W)的關係圖

(2) 由圖四十可知跳豆越寬，翻轉時跳豆殼的飽和角速度越小，且近似為線性關係。

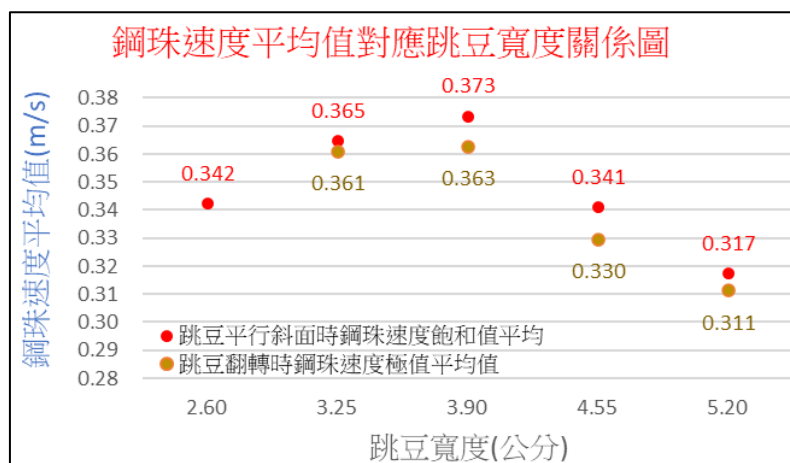


圖四十、跳豆殼角速度極值( $\omega$ ) 對跳豆寬度(W)關係圖

(3) 由圖四十一可發現鋼珠速度隨時間趨於飽和，將平躺時的飽和區(紅框處)取平繪於圖四十二紅點。由圖四十一可觀察到翻轉時的鋼珠速度極值隨時間趨於飽和，將飽和值極值(褐色點)繪於圖四十二褐色點。從此圖可以發現  $W = 3.90$  cm 的跳豆鋼珠速度最大導致抵達底部時間最短。



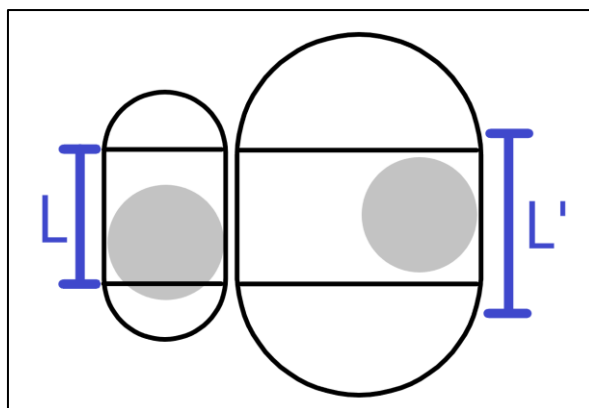
圖四十一、鋼珠速度平均值取樣說明



圖四十二、鋼珠速度平均值對應跳豆寬度關係圖

#### (4) 具有理想跳豆寬度的原因

當跳豆殼寬度變寬，跳豆平行於斜面使鋼珠直線滾動加速的有效長度從  $L$  變成  $L'$  使加速量值增加(如圖四十三)，但跳豆寬度增加會使翻轉時間拉長導致飽和平均速度下降。因此具有理想寬度，而非越窄或越寬越好。



圖四十三、鋼珠直線加速有效長度說明

#### (五) 不同內球質量，跳豆運動分析。

1. 由於質量相對於跳豆殼太輕時因力矩不夠大無法完整翻轉。
2. 可翻滾情況中質量較輕的跳豆較快達飽和，且加速減速量值較多，推測原因為翻轉時間較長導致量值變化較大。
3. 試著找各個跳豆可翻滾的斜面傾斜角臨界值，實驗中發現翻滾情形因此分成只能翻轉一次或多次，因此本臨界值定義為僅能完成一次翻轉之斜面傾斜角，數據如表十三。

表十三、不同內球質量跳豆的臨界值

內球質量(g)	3.394	9.795	12.731	25.211	71.136
斜面傾斜角臨界值	無，先發現滑動		6.4°	1.1°	無（因 0.2° 也能多次翻轉

## 陸、結論

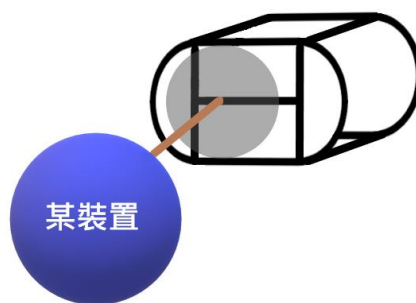
- 一、跳豆不斷重複「殼平行斜面」與「殼翻轉」的運動模式。
- 二、鋼珠加速度與跳豆殼角加速度具有相反趨勢。
- 三、跳豆殼長度越長，加速距離越大，加速量值越多，但因翻轉時間越久，減速量值也越大，使得鋼珠飽和速度較低。
- 四、跳豆殼角速度飽和值與跳豆長度近似線性關係。
- 五、在有限斜坡距離下，跳豆有理想最佳長度，而非越長越好。
- 六、隨著跳豆寬度越寬，跳豆翻轉期間，鋼珠速度對時間圖由「V」型轉變成「W」型，出現二次加速段。
- 七、在有限斜坡距離下，跳豆有理想寬度，而非越窄或越寬越好。
- 八、相同的跳豆殼，若內球質量較小，在翻轉時的減速量值和平行斜面時的加速量值皆較多，且較快達到飽和值。

## 柒、未來展望

- 一、實驗將跳豆內鋼珠轉換為金屬圓柱，觀察跳豆的運動情形。
- 二、改變跳豆殼曲率，觀察其運動模式。
- 三、製作偏心鋼珠的跳豆，觀察其運動模式。
- 四、添加流體於跳豆內，觀察其運動模式。

## 捌、應用

- 一、利用跳豆 L 越長，飽和速度越低的特性，設計成翻滾減速的裝置，可減少因車速過快無法立即減速而發生意外。(如圖四十四)
- 二、利用跳豆 W 變寬，有二次加速段出現的現象，設計成需要不停重複進行加速減速運動情形的裝置。(如圖四十四)



圖四十四、應用裝置示意圖

## 玖、參考資料文獻及其他

- 一、吳友仁(民 76)。物理基礎觀念第二冊(69-75 頁)。台北:東江圖書股份有限公司。
- 二、林念臻等人(民 96 年)。翻滾吧!跳豆。臺灣網路科教館。取自：  
<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/47/elementary/080816.pdf>
- 三、蔡伊淑(2008 年)。科學遊戲活動設計－跳豆翻滾樂。屏東教大科學教育。取自：  
<https://dsc.nptu.edu.tw/var/file/136/1136/img/257/62-72.pdf>
- 四、Neil Lu。從角位置到角加速度| 學呀- 物理| 物理、旋轉、轉動。ZTU。取自：  
<https://www.zetria.org/view.php?subj=physics&chap=b59uo8kv2x>
- 五、J. L. Meriam、L. G. Kraige(民 97)。動力學。台北：全華圖書股份有限公司。



附錄：公式推導過程

一、若質心不在球心上

(一) 轉動方程式(以質心為參考點)：

$$f R - Mg \frac{L}{2} \cos(\theta + \beta) - Ma \frac{L}{2} \sin \beta = I \frac{d^2 \beta}{dt^2} \quad (27)$$

(二) 移動方程式(地面參考座標)：

$$\text{平行斜面} (mg + Mg) \sin \theta - f = (m + M) a_{\text{鋼珠(平行斜面)}} \quad (28)$$

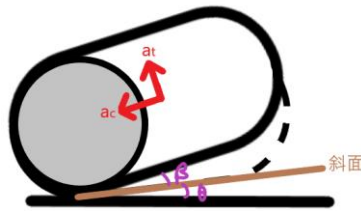
$$\text{鉛直斜面} N - (mg + Mg) \cos \theta = (m + M) a_{\text{鋼珠(鉛直斜面)}} \quad (29)$$

二、用球心觀察質心的加速度

$$r' = \frac{L}{2} \frac{M}{m + M} \quad (30)$$

$$a_t = r' \alpha \quad (31)$$

$$a_c = r' \omega^2 \quad (32)$$



圖四十五、用球心觀察質心的加速度，質心加速度的示意圖

相對鋼珠座標系統質心有切線加速度 $a_t$ 和向心加速度 $a_c$ ，將其分解成平行鉛直斜面分量：

$$\text{平行斜面} = a_t \sin \beta + a_c \cos \beta = r' \frac{d^2 \beta}{dt^2} \sin \beta + r' \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \cos \beta \quad (33)$$

$$\text{鉛直斜面} = a_t \cos \beta - a_c \sin \beta = r' \frac{d^2 \beta}{dt^2} \cos \beta - r' \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \sin \beta \quad (34)$$

三、球心座標

(一) 轉動方程式(以質心為參考點)：

$$f R - Mg \frac{L}{2} \cos(\theta + \beta) - Ma \frac{L}{2} \sin \beta = I \frac{d^2 \beta}{dt^2} \quad (35)$$

(二) 移動方程式

平行斜面=

$$\sin \theta (m + M)g - [f + (m + M)a] = (m + M) \left\{ r' \frac{d^2 \beta}{dt^2} \sin \beta + r' \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \cos \beta \right\} \quad (36)$$

鉛直斜面=

$$N - (m + M)g \cos \theta = (m + M) \left\{ r' \frac{d^2 \beta}{dt^2} \cos \beta - r' \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \sin \beta \right\} \quad (37)$$

將(36)移項，得：

$$f = (m + M) \left\{ g \sin \theta - a - r' \frac{d^2 \beta}{dt^2} \sin \beta - r' \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \cos \beta \right\} \quad (38)$$

(38)代入(35)，得：

$$(m + M) \left\{ g \sin \theta - a - r' \frac{d^2 \beta}{dt^2} \sin \beta - r' \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \cos \beta \right\} R - Mg \frac{L}{2} \cos(\theta + \beta) - Ma \frac{L}{2} \sin \beta = I \frac{d^2 \beta}{dt^2} \quad (39)$$

四、求  $a_{\text{鋼珠}}$

$$a \left[ M \frac{L}{2} \sin \beta + (m + M) \right] = (m + M)g \sin \theta - \frac{d^2 \beta}{dt^2} \left[ I + \frac{LM}{2} \sin \beta \right] - \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 \left( \frac{LM}{2} \right) - Mg \quad (40)$$

又

$$\alpha = \frac{d^2 \beta}{dt^2} \quad (41)$$

$$\omega = \frac{d\beta}{dt} \quad (42)$$

將(41)(42)代入(40)，得

$$a \left[ M \frac{L}{2} \sin \beta + (m + M) \right] = (m + M)g \sin \theta - \alpha \left[ I + \frac{LM}{2} \sin \beta \right] - \omega^2 \left( \frac{LM}{2} \right) - Mg \quad (43)$$

移項得

$$a_{\text{鋼珠}} = \frac{1}{M \frac{L}{2} \sin \beta + m + M} \left\{ (m + M)g \sin \theta - \alpha \left[ I + \frac{LM}{2} \sin \beta \right] - \omega^2 \frac{LM}{2} - Mg \frac{L}{2} \cos(\theta + \beta) \right\} \quad (44)$$

## 【評語】 051812

探討跳豆的運動過程與模式，利用移動和轉動方程式得到翻轉期間鋼珠理論加速度，搭配實驗數據得出速度理論值與速度實驗值有相似的趨勢。探討跳豆的內球質量、長度、寬度，以及滑落板傾斜角度。本作品專注在小角度的斜面翻轉運動，提供了對跳豆運動比較深入的了解。但類似跳豆運動的問題研究有許多參考文獻，本研究只聚焦在記錄跳豆的運動，較少深層新穎設計分析，可以再加強實驗設計與創新。

# 作品海報

尋找最佳跳豆！





# 摘要

跳豆為輕殼與重球組合而成，輕推能重複翻滾。本實驗分析其運動過程與模式。實驗中可發現跳豆不斷重複「殼平行斜面」與「殼翻轉」的運動模式。隨跳豆長度增加，「殼平行斜面」的鋼珠加速區變長，但翻轉時間也變長，導致飽和速度明顯較低，在有限斜坡長度下有最佳跳豆長度。本研究利用移動和轉動方程式得到翻轉期間鋼珠理論加速度，搭配實驗數據得出速度理論值與速度實驗值有相似的趨勢。隨著跳豆寬度越寬，跳豆翻轉期間鋼珠速度對時間由「V」型轉變成「W」型，但翻轉角速度小導致鋼珠減速多，因此在有限斜坡距離下，跳豆有理想寬度。可完整翻滾中內球質量小的跳豆，鋼珠加減速度值多，使飽和值低且抵達底部時間長。

# 動機

有一天在夜市賣的戳戳樂中抽到跳豆，很吸睛。打開後發現裡面只有一顆小鋼珠，很想知道翻滾的過程中裡面究竟發生了什麼事？要怎麼樣才能改變跳豆的翻滾速度？什麼樣的結構可以形成一顆好跳豆？滿滿的疑惑充斥在我的內心。

# 研究目的

- (一)實驗一：觀察並理解跳豆翻滾時，外殼與鋼珠的運動關聯性。
- (二)實驗二：改變斜面的傾斜角 $\theta$ 。
- (三)實驗三：改變跳豆殼長度L，觀察與分析跳豆翻滾情形。
- (四)實驗四：改變跳豆殼寬度W，觀察與分析跳豆翻滾情形。
- (五)實驗五：改變跳豆內球質量，觀察與分析跳豆翻滾情形。

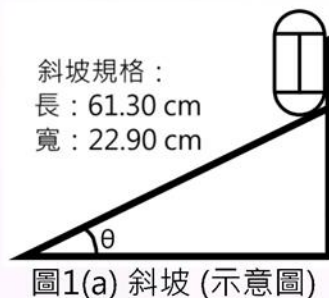


圖1(a) 斜坡 (示意圖)

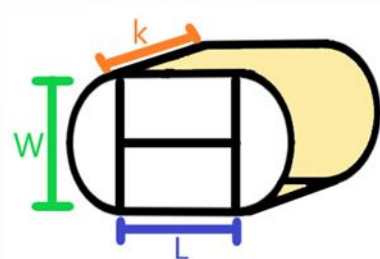


圖1(b) 側板 (示意圖)

# 研究方法

## 一、跳豆圖示



圖2(a) 各種跳豆、跳豆殼



圖2(b) 跳豆 (1)



圖2(c) 不同長度(L)的跳豆 (2)(3)(4)(5)



圖2(d) 不同寬度(W)的跳豆 (1)(6)(7)(8)(9)



圖2(e) 不同內球質量的跳豆 (10)(11)(12)(13)(14)

## 二、實驗方法

表1 實驗步驟

步驟	說明
(一)釋放跳豆	跳豆放置斜面上垂直地面釋放
(二)分析	tracker追蹤鋼珠球心A點和殼上的BC兩點 excel計算鋼珠速度、跳豆殼 $\beta$ 隨時間的變化

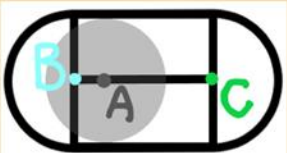


圖3(a) tracker 標示點

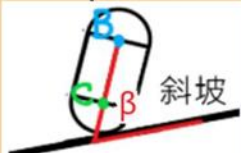


圖3(b) 跳豆傾斜角 $\beta$ 示意圖

## 三、跳豆規格

表2 跳豆規格

編號	內球種類	內球直徑 (cm)	內球質量 (g)	跳豆殼長度L (cm)	跳豆殼寬度W (cm)	實驗	備註	
①	鋼珠	2.55	67.000	2.55	2.60	一、二、三、四	圖2(b)	
②	鋼珠	2.55	67.000	0.00	2.60	三	圖2(c)	
③				1.28				
④				3.83				
⑤				5.10				
⑥				2.55				
⑦	空殼	3.00	12.731	3.00	3.05	五	圖2(e)	
⑧								3.90
⑨								4.55
⑩	彈珠+殼	25.211						
⑪	鋼珠+殼	71.136						

跳豆側板：1mm壓克力  
跳豆翻滾面：軟塑膠片

# 實驗原理(推導過程詳見說明書)

## 一、跳豆平躺時鋼珠在跳豆殼內純滾動之原理

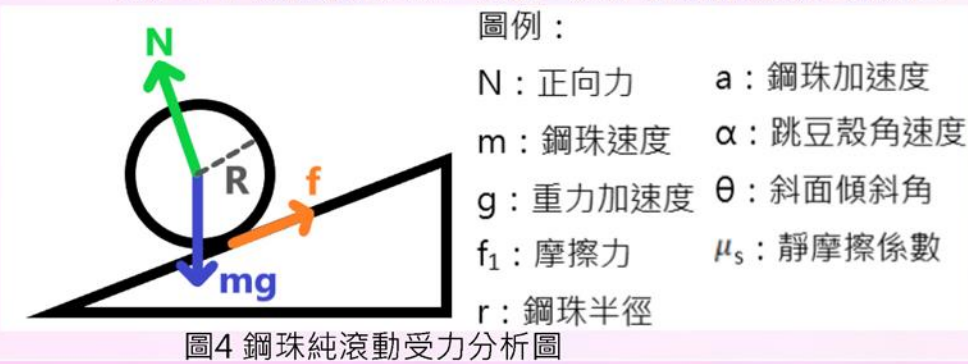


圖4 鋼珠純滾動受力分析圖

- 圖例：
- N：正向力
  - m：鋼珠質量
  - g：重力加速度
  - $f_1$ ：摩擦力
  - r：鋼珠半徑
  - a：鋼珠加速度
  - $\alpha$ ：跳豆殼角速度
  - $\theta$ ：斜面傾斜角
  - $\mu_s$ ：靜摩擦係數

根據公式：

$$mg \sin \theta - f_1 = ma \quad (1)$$

$$f_1 r = I \alpha \quad (2)$$

$$a = r \alpha \quad (3)$$

$$f_1 \leq f_{s \max} = N \mu_s = mg \cos \theta \mu_s \quad (4)$$

$$\rightarrow a = \frac{5}{7} g \sin \theta \quad (5)$$

## 二、跳豆翻轉過程分析(跳豆殼圓弧半徑(R)與鋼珠半徑(r)相近時的加速度分析)

$$(一) I (\text{轉動慣量}) = C_1 L^3 + C_2 L^2 + C_3 L + C_4 = D_1 R^4 + D_2 R^3 + D_3 R^2 + D_4 R + D_5 + I_{\text{鋼珠}} \quad (6)$$

( $C_1 C_2 C_3 C_4 D_1 D_2 D_3 D_4 D_5$  為常數)

(二)轉動方程式(鋼珠為觀察者)：

$$f_2 R - Mg \frac{L}{2} \cos(\theta + \beta) - Ma \frac{L}{2} \sin \beta = I \frac{d^2 \beta}{dt^2} = I \alpha \quad (7)$$

(三)移動方程式(地面參考座標)：

$$\text{平行斜面：} (mg + Mg) \sin \theta - f_2 = (m + M) a_{\text{鋼珠(平行斜面)}} \quad (8)$$

$$\text{鉛直斜面：} N - (mg + Mg) \cos \theta = (m + M) a_{\text{鋼珠(鉛直斜面)}} \quad (9)$$

(四)利用轉動與移動方程式得出鋼珠加速度( $a_{\text{鋼珠}}$ )

$$a_{\text{鋼珠}} = \frac{1}{M \frac{L}{2} \sin \beta + m + M} \left\{ (m + M) g \sin \theta - \alpha \left[ I + \frac{LM}{2} \sin \beta \right] - \omega^2 \frac{LM}{2} - Mg \frac{L}{2} \cos(\theta + \beta) \right\} \quad (10)$$

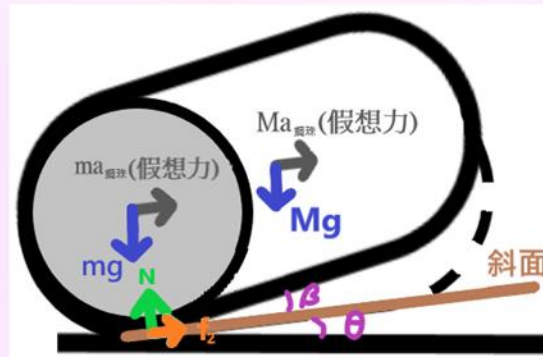


圖5 跳豆受力分析圖

- 圖例：
- M：殼質量
  - a<sub>鋼珠</sub>：鋼珠加速度
  - $f_2$ ：斜面對跳豆的摩擦力
  - $\beta$ ：跳豆傾斜角
  - R：跳豆殼圓弧半徑
  - L：跳豆殼長度

## 三、跳豆翻轉過程分析(跳豆殼圓弧半徑(R)與鋼珠半徑(r)不相近時的加速度分析)



圖6(a) 鋼珠加速度示意圖

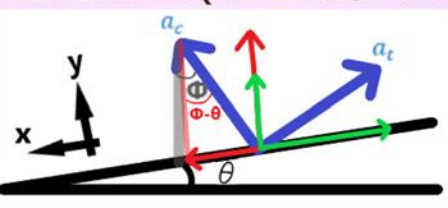


圖6(b) 鋼珠加速度分解圖

將鋼珠加速度分解成向心加速度和切向加速度

$$a_c = (R - r) \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \quad (11)$$

$$a_t = (R - r) \frac{d^2 \phi}{dt^2} \quad (12)$$

$$a_{\text{球x(平行斜面)}} = (R - r) \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \sin(\phi - \theta) - (R - r) \frac{d^2 \phi}{dt^2} \cos(\phi - \theta) \quad (13)$$

$$a_{\text{ox}} = R \frac{d^2 \phi}{dt^2} \quad (14) \quad a_{\text{球對地x}} = a_{\text{球x}} + a_{\text{ox}} \quad (15)$$

$$a_{\text{球對地x}} = (R - r) \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \sin(\phi - \theta) - (R - r) \frac{d^2 \phi}{dt^2} \cos(\phi - \theta) - R \frac{d^2 \phi}{dt^2} \quad (16)$$



# 實驗數據與討論

## 跳豆裡面究竟發生什麼事？



圖7(a) 跳豆實際流程圖

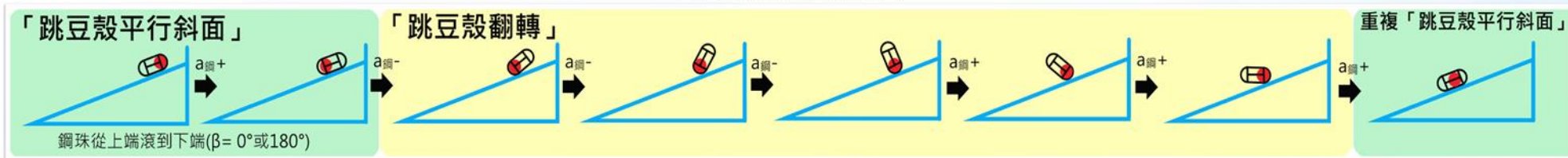


圖7(b) 流程示意圖

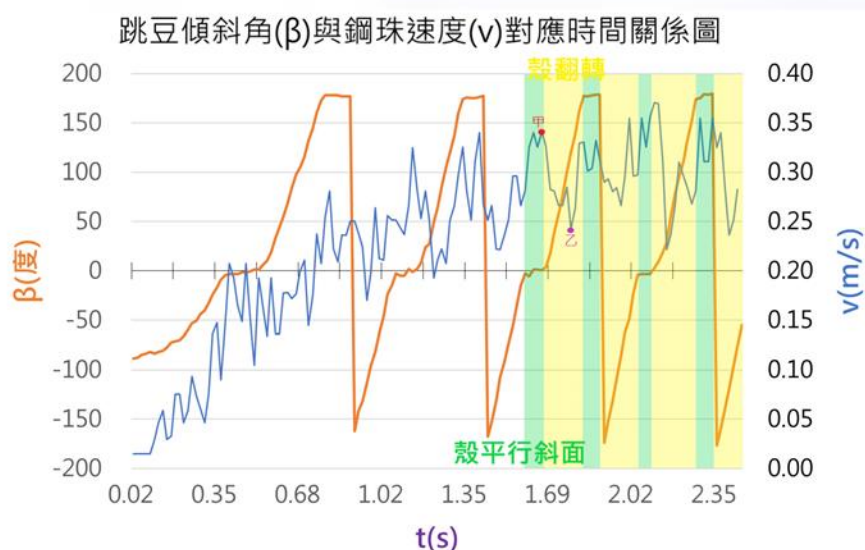


圖7(c) 跳豆傾斜角( $\beta$ )與鋼珠速度( $v$ )對應時間關係圖

跳豆的運動過程可分為「殼翻轉」(黃色區域)和「殼平行斜面」(綠色區域)，跳豆不斷重複「綠色」區域和「黃色」區域的運動模式。

從表中可知當鋼珠速度極值達到 **0.450 m/s** 時跳豆會滑動。

## 跳豆滑不滑動？

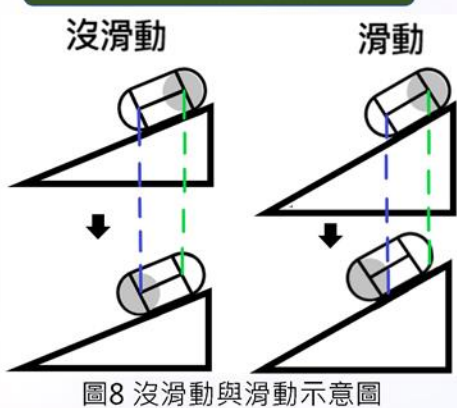


圖8 沒滑動與滑動示意圖

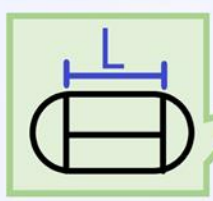
表3 判斷不同斜坡傾斜角 $\theta$ 跳豆是否滑動

平躺次數	2.2°	2.5°	4.5°	6.2°	7.9°
一	X	X	X	X	X(0.273)
二	X	X	X	X(0.403)	O(0.450)
三	X	X	X	O(0.479)	O
四	X	X	X(0.422)	O	O
五	X	X	O(0.484)	O	O
六	X	X	O	O	O
七	X	X	O	O	△
八	X(0.348)	X(0.381)	O	O	O

備註：O(有滑)·X(沒滑)·△(因只有一個影格而無法判斷)·(該次鋼珠速度極值m/s)

結論：後續實驗選擇用  $\theta = 2.2^\circ$  進行

## 長跳豆快抵達？短跳豆快抵達？



跳豆L越長 → I(轉動慣量)越大 →  $\alpha$ 小 → 翻轉所花時間長 → 鋼珠減速多

預期結果：全程時間隨跳豆長度越長而越短

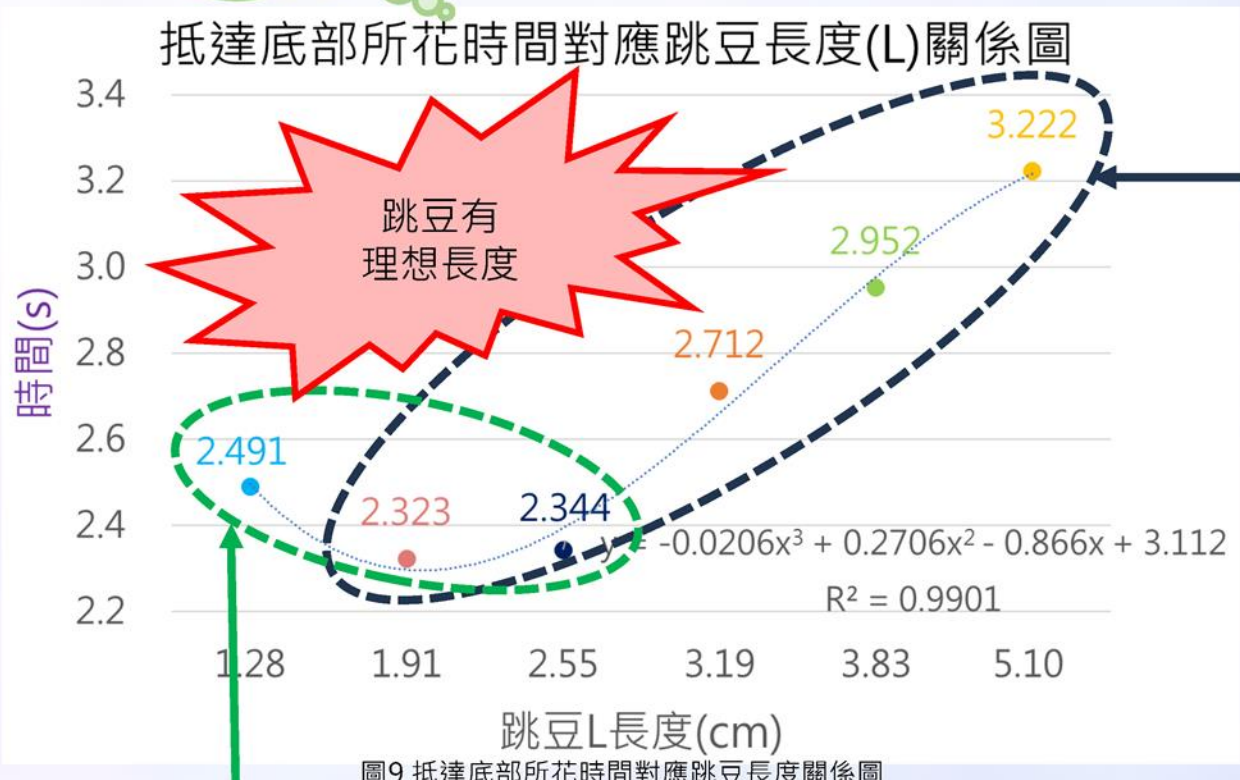


圖9 抵達底部所花時間對應跳豆長度關係圖

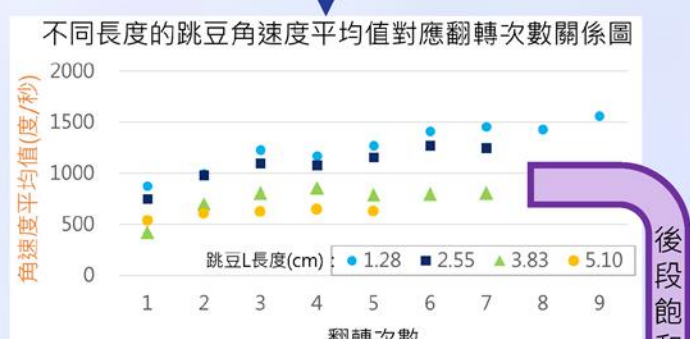


圖10(a) 不同長度的跳豆每次翻轉的角速度平均值對應翻轉次數關係圖



圖10(b) 角速度飽和值對應不同長度的跳豆關係圖  
跳豆越長飽和角速度越小，幾乎為線性關係。

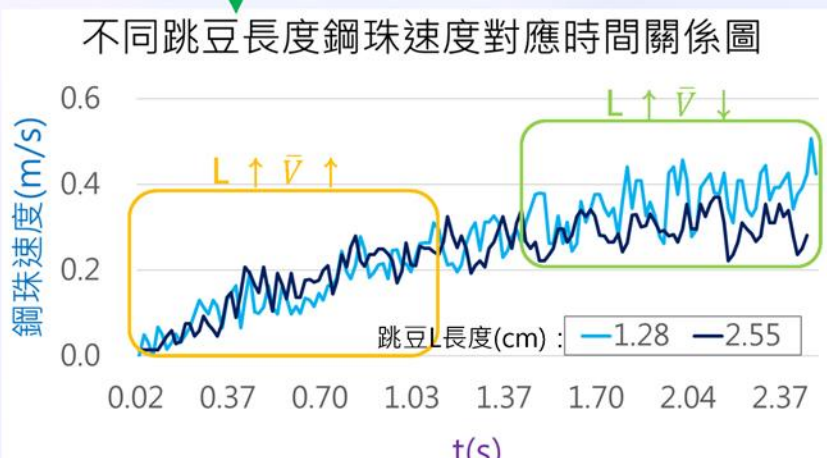


圖12 跳豆長度1.28公分和2.55公分的鋼珠速度比較圖

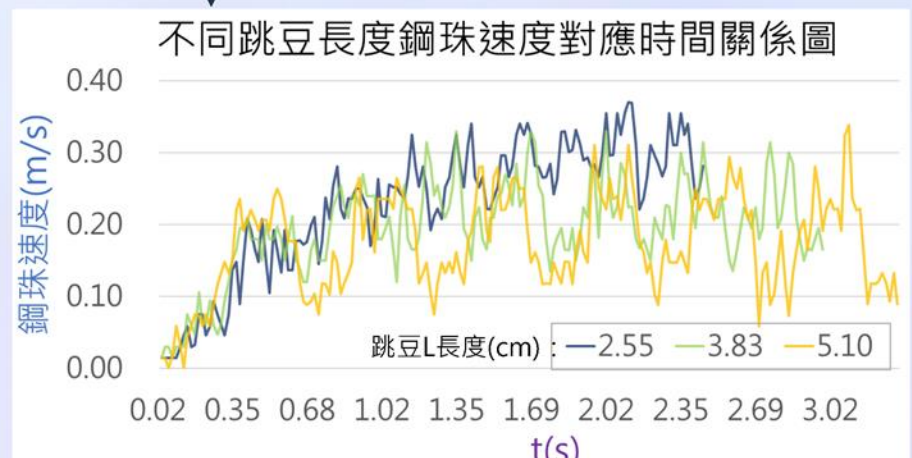


圖11 跳豆長度為2.55公分、3.83公分和5.10公分的鋼珠速度比較圖

後期長跳豆翻轉時鋼珠減速多，使鋼珠平均速度較小。而前期長跳豆平躺鋼珠加速距離多，使鋼珠平均速度較大。



寬跳豆快抵達？窄跳豆快抵達？

全程時間對應跳豆寬度關係圖

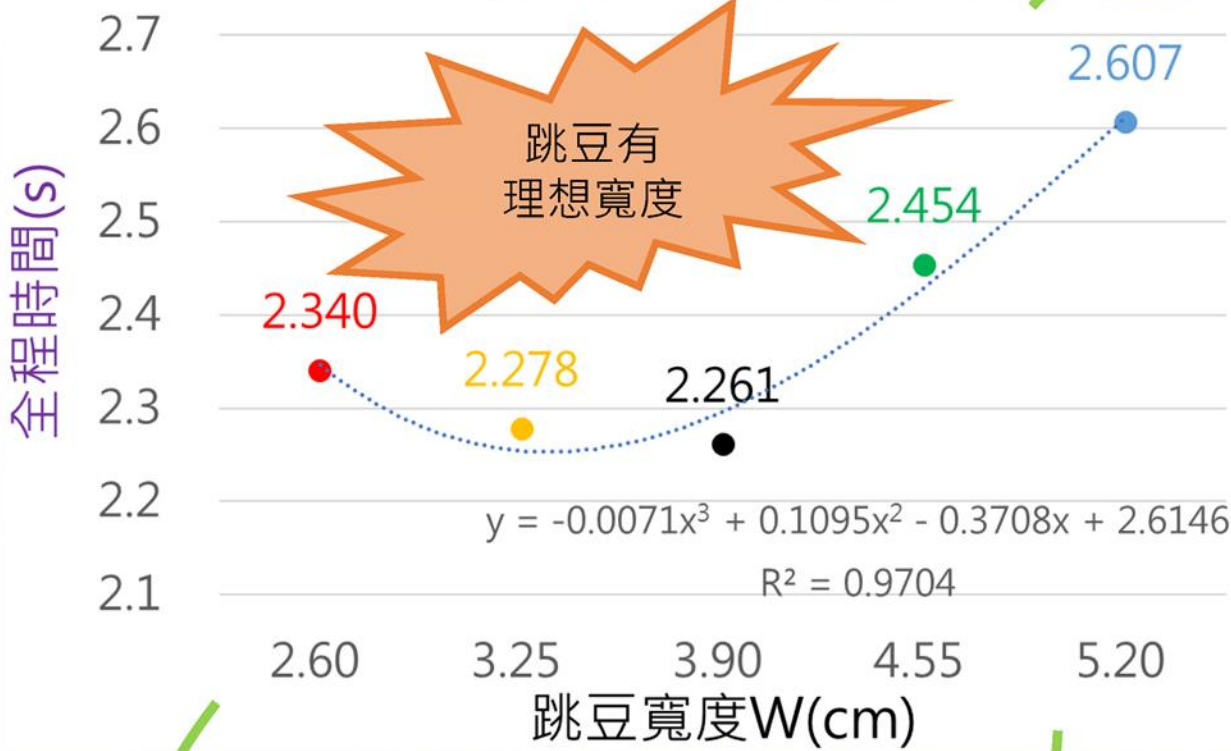


圖13 全程時間與跳豆寬度(W)的關係圖

寬的劣勢

寬的優勢2

窄跳豆V型

V.S

寬跳豆W型

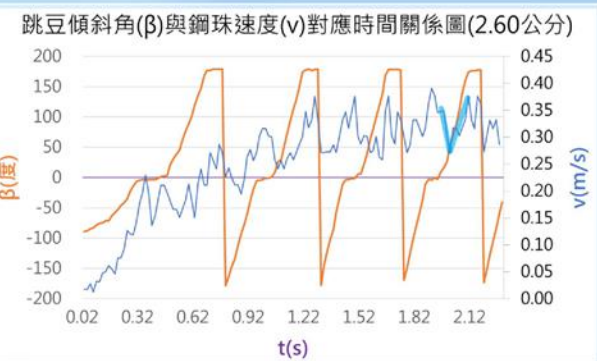


圖14(a) W= 2.60 cm 的跳豆傾斜角(beta)與鋼珠速度(v)對應時間關係圖



圖14(b) W= 5.20 cm 的跳豆傾斜角(beta)與鋼珠速度(v)對應時間關係圖

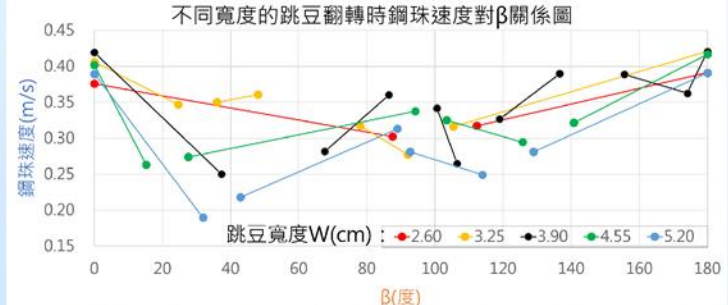


圖14(c) 不同寬度的跳豆翻轉時鋼珠速度對beta關係圖

鋼珠在寬跳豆翻轉時多了一段加速段，使鋼珠對時間從「V型」變「W型」

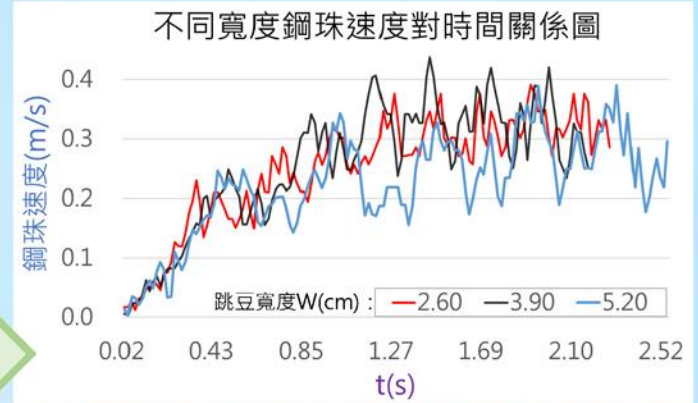


圖17 不同寬度的跳豆鋼珠速度對時間關係圖

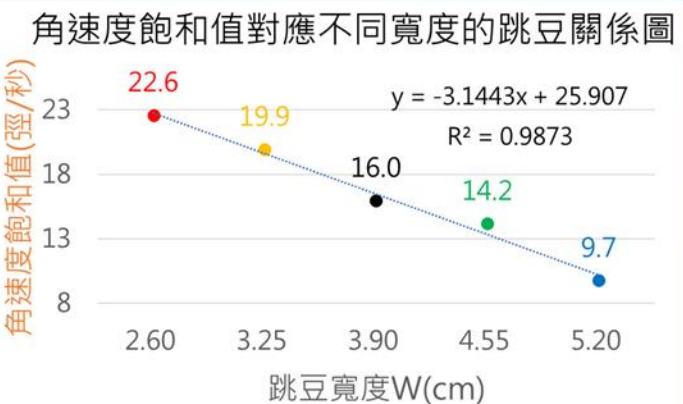


圖16 跳豆殼角速度極值(omega) 對跳豆寬度(W)關係圖

跳豆越寬飽和角速度越小，幾乎為線性關係。

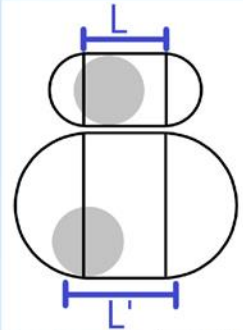


圖15 鋼珠直線加速有效長度示意圖

寬跳豆的鋼珠直線滾動加速的有效長度從L變成L'，使加速量值增加。

相互影響後的結果

內球質量大的跳豆快抵達？內球質量小的跳豆快抵達？

不可完整翻滾 力矩不夠大無法完整翻轉



圖18(a) 內球質量 3.394 g 的跳豆傾斜角(beta)與鋼珠速度(v)對應時間關係圖

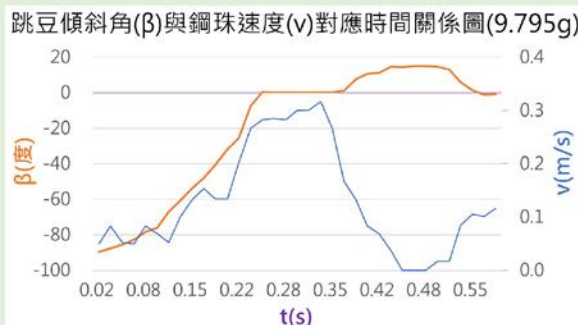


圖18(b) 內球質量 9.795 g 的跳豆傾斜角(beta)與鋼珠速度(v)對應時間關係圖

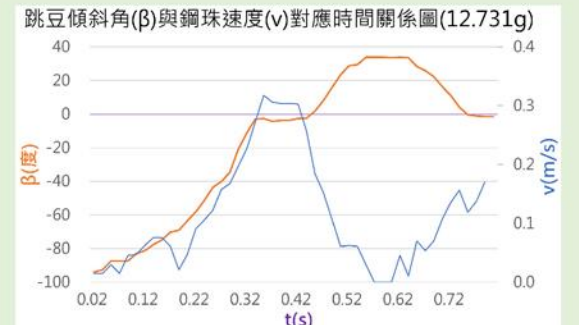


圖18(c) 內球質量 12.731 g 的跳豆傾斜角(beta)與鋼珠速度(v)對應時間關係圖

可完整翻滾 輕跳豆：1.翻轉時間較長 2.內球速度較快達飽和 3.內球速度加速減速量值較多

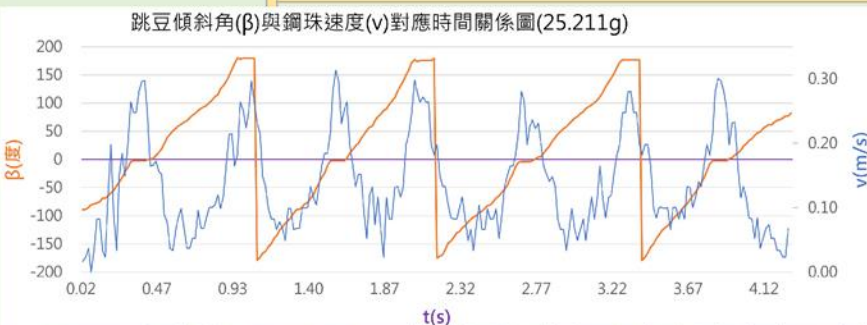


圖19(a) 內球質量 25.211 g 的跳豆傾斜角(beta)與鋼珠速度(v)對應時間關係圖

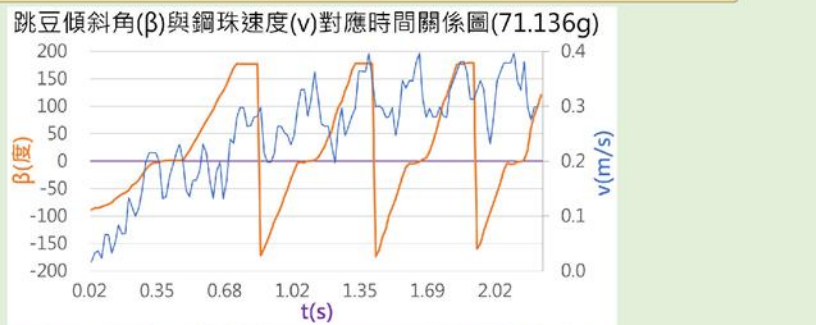


圖19(b) 內球質量 71.136 g 的跳豆傾斜角(beta)與鋼珠速度(v)對應時間關係圖

不同內球質量的跳豆

斜面傾斜角臨界值

表4 不同內球質量跳豆的臨界值

內球質量(g)	與殼質量比值(球/殼)	斜面傾斜角臨界值
3.394	0.580	無，先發現滑動
9.795	1.673	無，先發現滑動
12.731	2.175	6.4°
25.211	4.307	1.1°
71.136	12.152	無(因0.2°也能多次翻轉)

殼質量 ~ 5.854 g

內球質量小先滑動

內球質量大臨界值趨近於零

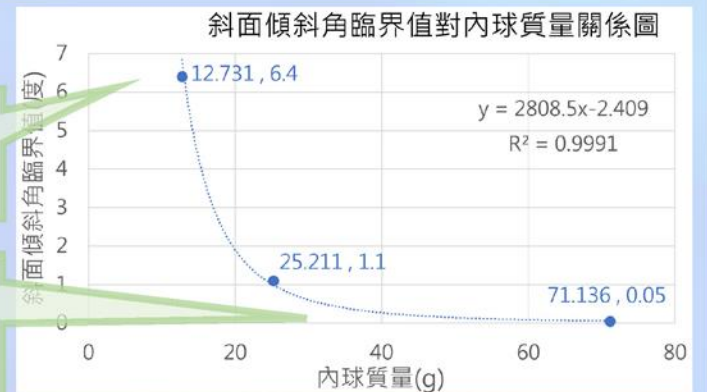


圖19 斜面傾斜角對內球質量關係圖

結論

- 跳豆不斷重複「殼平行斜面」與「殼翻轉」的運動模式。
- 鋼珠加速度與跳豆殼角加速度具有相反趨勢。
- 長跳豆鋼珠平躺加速距離大，加速量值多，但因翻轉時間久，減速量值也大，使得鋼珠飽和速度低。
- 寬跳豆翻轉期間，鋼珠速度對時間圖由「V」型轉變成「W」型。
- 在相同有限斜坡距離下，跳豆有理想長度與寬度。
- 可完整翻滾中內球質量小的跳豆，鋼珠加減速量值多，使飽和值低且抵達底部時間長。

參考文獻

一、吳友仁(民76)·物理基礎概念第二冊(69-75頁)·台北:東江圖書股份有限公司。  
 二、林念臻等人(民96年)·翻滾吧!跳豆·臺灣網路科教館·取自: <https://twsfntsec.gov.tw/activity/race-1/47/elementary/080816.pdf>  
 三、蔡伊淑(2008年)·科學遊戲活動設計-跳豆翻滾樂·屏東師範大學教育·取自: <https://dsc.nptu.edu.tw/var/file/136/1136/img/257/62-72.pdf>  
 四、Neil Lu·從角位置到角加速度|學呀·物理|物理、旋轉、轉動·ZTU·取自: <https://www.zetria.org/view.php?subj=physics&chap=b59uo8kv2x>  
 五、J. L. Meriam·L. G. Kraige(民97)·動力學·台北:全華圖書股份有限公司。