

# 中華民國第 63 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高中組 物理與天文學科

051808

玩水珠珠

學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者：  高二 吳俊賢  高二 賴韋丞  高二 魏榮佑	指導老師：  林立婷
---	------------------

關鍵詞：空氣墊、液滴撞擊(LDI)、普拉托-瑞利不穩定性

## 摘要

本研究主要在探討液滴撞擊薄水液面後，產生的水珠滑行之現象。研究中，我們以液滴滴落高度及底部液面厚度作為操縱變因，測量飛濺出的水珠之各項性質，探討其與變因間的關係，並在用高速攝影機觀察其微觀機制，以及參考相關文獻後，推論滑行水珠的成因與滴落時產生的水冠因普拉托-瑞利不穩定性（Plateau - Rayleigh instability）而破裂有關[7]。我們用三種假設推論其所受阻力特性，配合實驗數據得出其所受阻力與速度成正比，並建立模型嘗試說明滑行水珠存在的原因，以及對實驗數據進行解釋。

## 壹、前言

### 一、 研究動機

團隊成員在浴室洗澡時，發現頭髮上的水滴滴落到地板後，會產生出許多小水珠，並在表面滑行的現象，好奇為何有此現象發生，因此我們決定研究這個現象。在研究過程中，我們試圖使用流體力學的相關概念去解釋此現象的各式成因，並探究液滴滴落高度、液面厚度對此現象之影響。

### 二、 研究目的

- (一) 研究滑行水珠出現的原因
- (二) 水珠的滑行距離和時間之關係
- (三) 探討液滴滴落高度對水珠的影響
  1. 與水珠水平初速度之關係
  2. 單次滴落中水珠數量的期望值
- (四) 探討液面厚度對水珠的影響
  1. 與水珠水平初速度之關係
  2. 單次滴落中水珠數量的期望值

### 三、 名詞定義和現象解釋

#### (一) 名詞定義

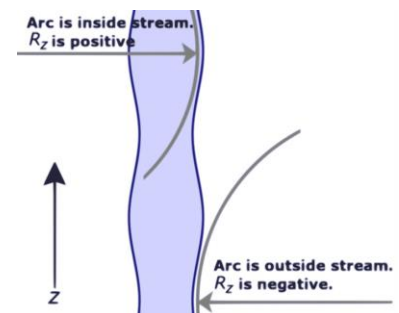
1. 液滴：由微量吸管尖滴落，撞擊液面的水滴。
2. 水冠：液滴撞擊液面時，液面濺起而形成的構造（如圖一）。
3. 水柱：水冠上突起的構造。
4. 水珠：液滴撞擊水面後濺出的細小水珠。其中為了方便解釋，我們又將水珠分類，一顆水珠不一定只能歸屬於單一分類，如下：
  - (1) 第一組水珠：由水柱較細的前端分裂而形成，通常速度較第二組水珠快，質量較第二組水珠小。
  - (2) 第二組水珠：由水柱較粗的中後端分裂而成，通常速度較第一組水珠慢，質量較第一組水珠大。
  - (3) 未滑行水珠：液滴撞擊液面後濺出細小水珠，但未在水面上滑行，而是直接融入液面中，通常多為第一組水珠。
  - (4) 滑行水珠：落到液面後有在液面上滑行的水珠。
5. 初速度：水珠飛濺出時的速度。



圖一(水冠圖片)

#### (二) 現象解釋











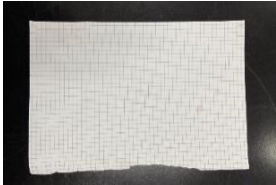

1. 觀察到的現象：液滴撞擊薄液面後，會飛濺出細小水珠，部分水珠落至液面後就會融入液面，不會產生滑行現象，另一部分水珠落到液面後會在液面上滑行，並在滑行一段距離後，才融入液面。
2. 普拉托-瑞利不穩定性：因噴射水柱內有小擾動[12]，且表面張力傾向最小化其表面積[1]，綜合作用下水柱會斷裂成液滴（如圖二）。







圖二 (普拉托-瑞利不穩定性示意圖) Author: Karlhahn

## 貳、研究設備及器材

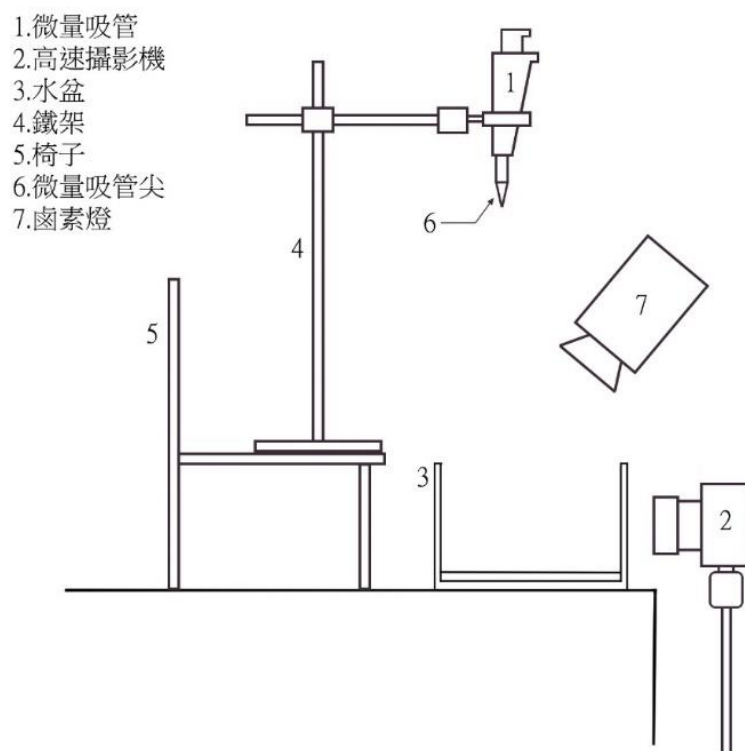
### 一、硬體設備

名稱	鐵架	水	Sony RX10 高速攝影機	攝影腳架
圖片				
用途	架高微量吸管	實驗用	紀錄實驗過程	固定、架高高速攝影機
名稱	三叉夾	微量吸管	微量吸管尖	塑膠水盆
圖片				
用途	夾住微量吸管	固定滴落水珠體積	搭配微量吸管使用	盛裝液體用
名稱	椅子	四角型固定夾	網格紙	鹵素燈
圖片				
用途	架高鐵架	組成實驗裝置	作為比例尺	提供光源

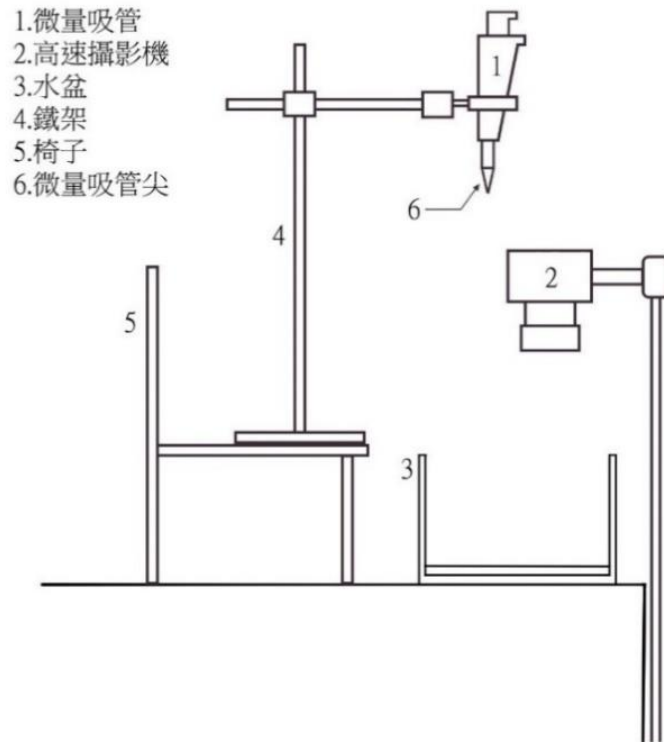
名稱	水平儀	紗布	膠帶	皮尺
圖片				
用途	測量器材是否水平	使塑膠水盆水平	固定水平儀	設量距離、高度

二、 分析軟體：Tracker、Excel

三、 實驗配置架設



圖三(實驗配置圖-側面觀測)



圖四(實驗配置圖-上方觀測)

### 參、研究過程或方法

#### 一、 研究方式-從側面觀察水珠的形成

- (一) 架設微量吸管、鐵架、椅子、鹵素燈及水盆如圖三，並用水平儀確認水盆是否呈水平。
- (二) 架設並調整高速攝影機，以確保拍到完整的影像。
- (三) 加入實驗所需的水量至透明水盆。
- (四) 調整四角型固定夾，讓微量吸管尖至實驗高度。
- (五) 用微量吸管吸取  $12\mu\text{l}$  的水，接著將其滴落至盆中，同時拍攝滴落後液面上的變化。
- (六) 觀看影片並進行分析。

## 二、 研究方式-改變滴落高度

(一) 架設微量吸管、鐵架、比例尺、椅子及水盆如圖四，並用水平儀確認水盆是否呈水平。

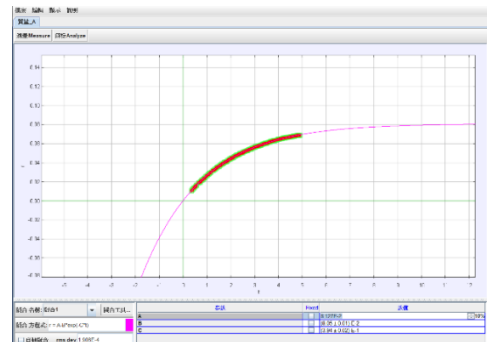
(二) 架設並調整高速攝影機，以確保拍到完整的影像。

(三) 取 75ml 水加入透明水盆。

(四) 調整四角型固定夾，讓微量吸管尖至實驗高度。

(五) 用微量吸管吸取  $12\mu\text{l}$  的水，接著將其滴落至盆中，並拍攝滴落後液面上水珠的運動情形。

(六) 用 Tracker 分析所拍攝影片中水珠移動距離、初速及水珠產生數量，並生成擬合曲線（如圖五），其中速度可由擬和曲線對時間微分獲得。



圖五(Tracker 擬和頁面)

(七) 用 Excel 將 Tracker 所分析的數據製成表格或圖表。

## 三、 研究方式-改變液面厚度

(一) 架設微量吸管、鐵架、比例尺、椅子及水盆如圖四，並用水平儀確認水盆是否呈現水平。

(二) 架設並調整高速攝影機，以確保拍到完整清晰的影像。

(三) 加入實驗所需的水量至透明水盆。

(四) 調整四角型固定夾，讓微量吸管尖至距離液面 75cm 處。

(五) 用微量吸管吸取  $12\mu\text{l}$  的水，接著將其滴落至盆中，並拍攝滴落後液面上水珠運動情形。

(六) 用 Tracker 分析所拍攝影片中水珠移動距離、初速及水珠產生數量，並生成擬合曲線，其中速度可由擬合曲線對時間微分獲得。

(七) 用 Excel 將 Tracker 所分析的數據製成表格或圖表。

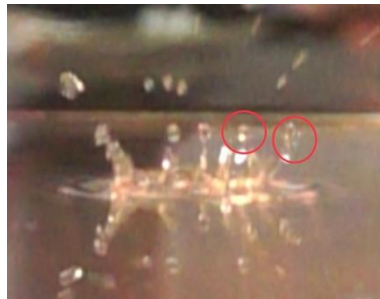
## 肆、研究結果

### 一、研究滑行水珠出現的原因

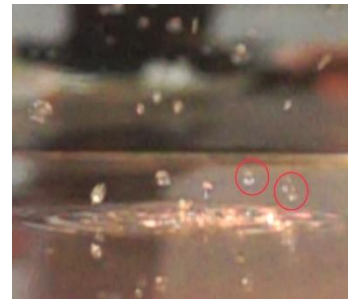
根據高速攝影機的觀察，液滴撞擊液面後，會先產生許多細小的水柱，接著隨著整體結構高度增加，會形成一個圓柱形的水牆和許多細小的水柱，也就是水冠。在部分條件下，細小水柱末梢會破裂，形成許多細小的水珠飛濺出去，而水冠則會繼續發展。隨著水冠發展，水珠（第二組水珠）會從水冠頂部脫離。在掉落到液面上後，部分水珠會在液面上以跳動或伴隨著垂直方向上的振動前進，隨著其鉛直速度越來越低，最後會趨於滑行。



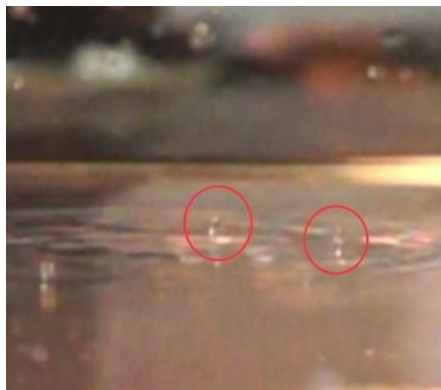
圖六(水冠形成)



圖七(水冠破裂)



圖八(水珠飛濺出)



圖九(水珠跳動)

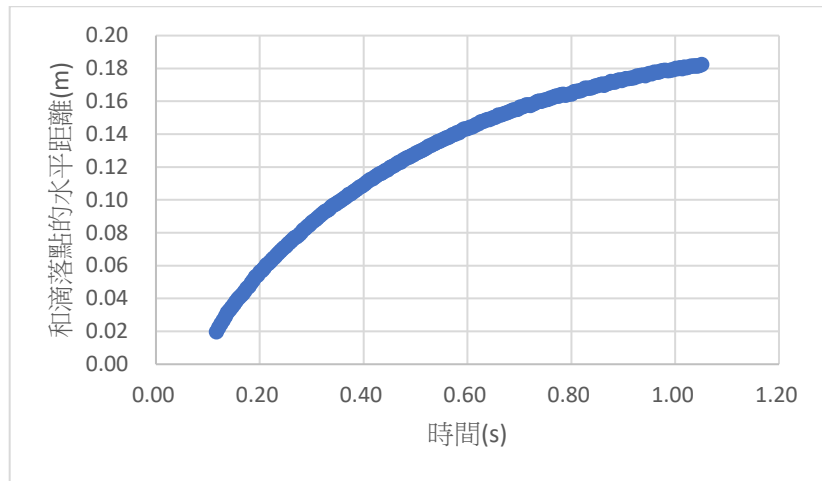


圖十(水珠滑行)

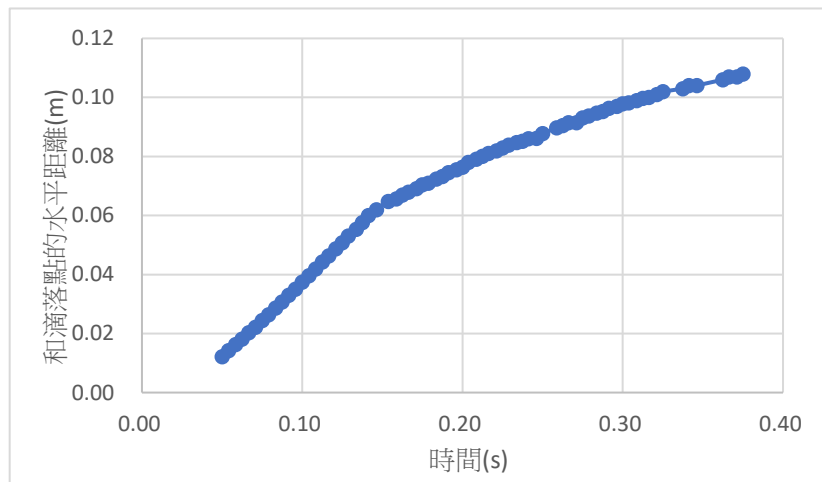
### 二、水珠的位置和時間的關係

我們利用高速攝影機拍攝滑行水珠的運動軌跡，匯入 Tracker 後進行分析，得到了滑行水珠和液面上滴落點的距離和時間之間的關係圖，並進行分類，如圖十一及圖十二。

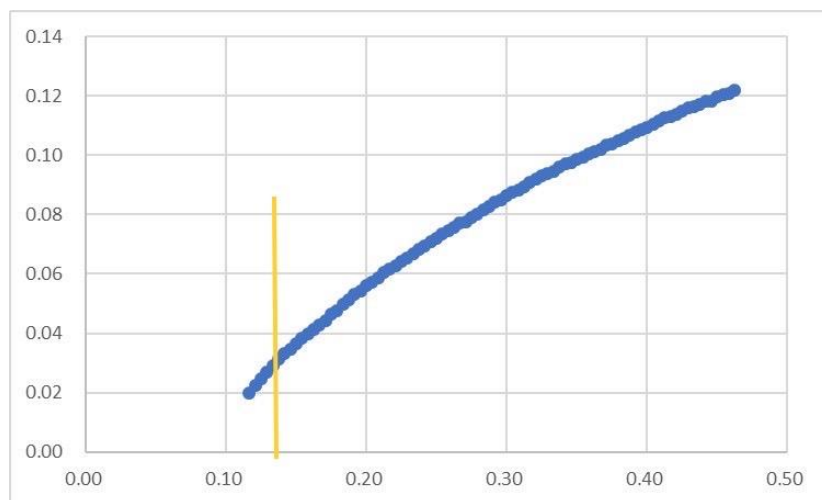




圖十一(水珠和滴落點水平距離和時間關係圖一)



圖十二(水珠和滴落點水平距離和時間關係圖二)



圖十三(圖十一的前端放大示意圖)

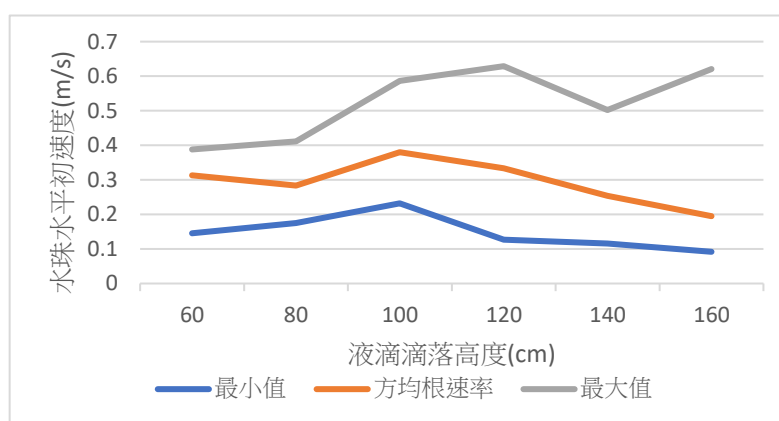
圖十一和圖十二分別是兩顆不同的水珠。其中圖十一中，可看出圖形整體是一個凹口向下的曲線，也就是說水珠的速度會隨時間減少。而圖十二相較於

圖十一，則是在曲線前面多了一段斜直線，也就是說，圖十二中的水珠是先經歷了一段等速運動後，速度才開始隨時間減少。圖十三則是將圖十一前部分特別拿出來，將其放到和圖十二相同的時間尺度下比較，而圖十三中，黃線左側可看出為一段斜直線，黃線以右則是一段凹口向下曲線，也就是說，圖十一的水珠其實是先經過一段長約 0.02 秒的等速運動後，速度才開始隨時間減少。

### 三、液滴滴落高度對水珠的影響

#### (一) 水珠的水平初速度

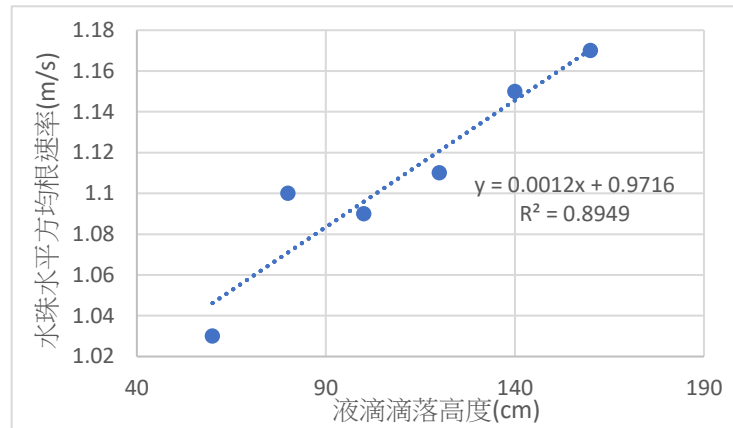
##### 1. 滑行水珠



圖十四(不同滴落高度下滑行水珠的水平初速度)

圖十四中，我們統計了不同滴落高度下，所有滑行水珠的水平初速度，並取個別高度下，數據的最小值、最大值、方均根速率。圖中可見，水平初速度的最小值，跟液滴滴落高度之間無明顯關係。而方均根速率在滴落高度為 100cm 處有極大值。初速度的最大值，在滴落高度達到 100cm 以下時，有隨滴落高度增加而增加的趨勢。不過滴落高度達到 100cm 以上後，初速度達到約 0.6m/s 處，便不再增加。

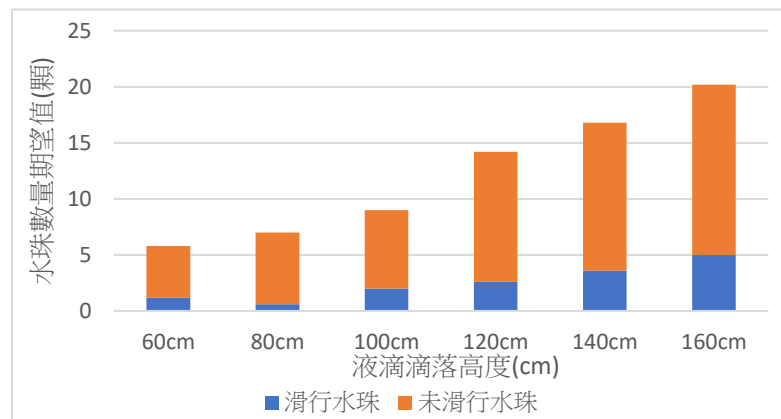
## 2. 未滑行水珠



圖十五（不同滴落高度下未滑行水珠的水平分均根初速率）

圖十五中可見，未滑行水珠的水平分均根初速率，和液滴滴落高度呈正相關，其與趨勢線的  $R^2$  值為 0.8949。

### (二) 單次滴落中出現的水珠數量的期望值



圖十六(不同高度下水珠數量的期望值)

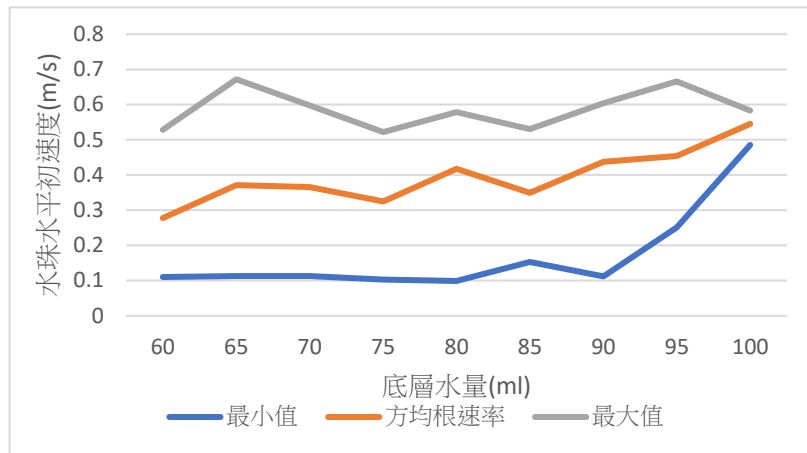
圖十六中，我們統計了不同滴落高度下，每次液滴撞擊產生的水珠數量，並取個別高度下單次滴落產生的水珠數量的期望值。圖中可見，不論是滑行水珠或未滑行水珠，數量的期望值皆和滴落高度呈正相關。

## 四、液面厚度對水珠的影響

由於塑膠水盆整體為長方體，且水盆底面積為  $33*24\text{cm}^2$ ，因此我們使用改變底層水量的方法來改變液面厚度，也因此後面都使用底層水量來表示液面厚度。

## (一) 水珠的水平初速度

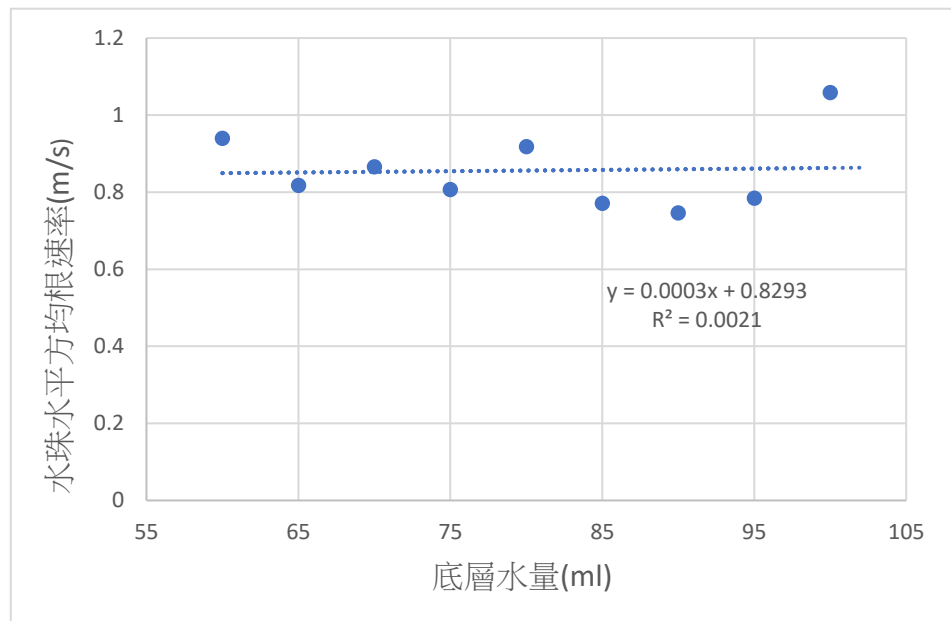
### 1. 滑行水珠



圖十七(不同液面厚度下滑行水珠的水平初速度)

由圖十七中可見，滑行水珠水平初速度的最大值在 0.5~0.7m/s 之間，和底層水量之間無明顯趨勢。而方均根速率則隨底層水量增加而增加，兩者之間呈正相關。最小值在底層水量小於 90ml 前均維持在約 0.1m/s，而當底層水量大於 90ml 時，則和底層水量呈正相關。

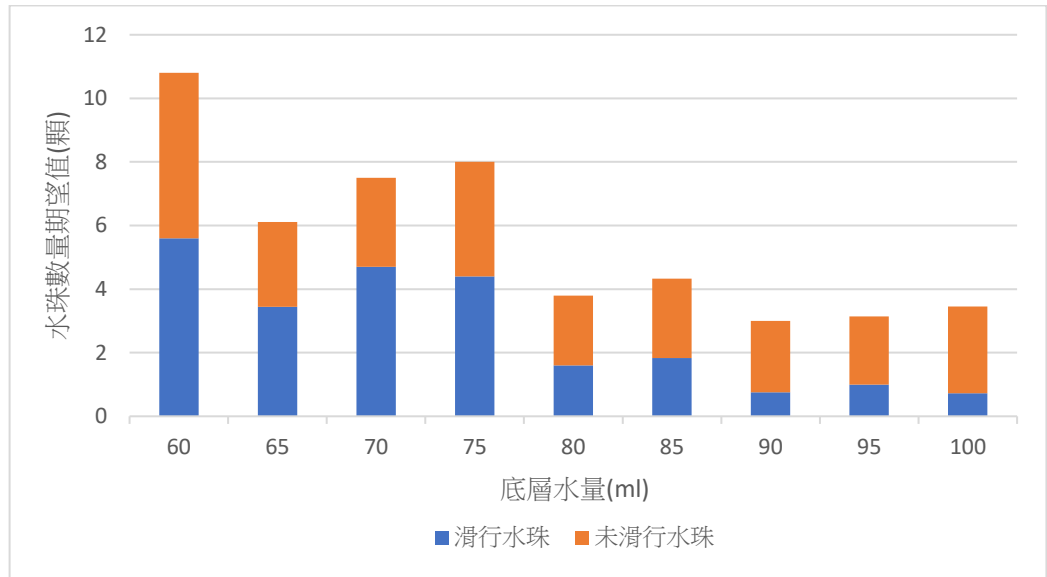
### 2. 未滑行水珠



圖十八(不同液面厚度下未滑行水珠的水平分均根初速率)

圖十八中，我們統計了不同液面厚度下，所有未滑行水珠的水平初速度，取個別厚度下的方均根速率，並進行比較。圖中可見，未滑行水珠的水平分均根初速率和液面厚度之間，無明顯趨勢，其與趨勢線的相關係數  $R^2$  為 0.0021。

## (二) 水珠之單次滴落中出現的水珠數量的期望值



圖十九(不同厚度下水珠數量期望值)

圖十九中，水珠數量期望值，整體與液面厚度呈負相關。其中滑行水珠數量的期望值，隨液面厚度增加而減少；未滑行水珠數量的期望值，除了於底層水量為 60ml 處較高，其餘皆大約為 2~4 顆。

## 伍、討論

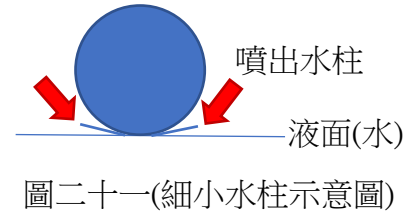
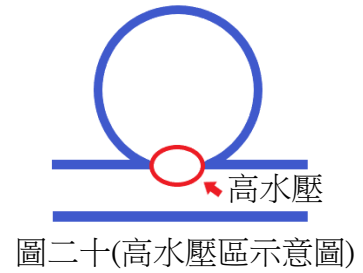
### 一、水珠出現的原因

#### (一) 觀察與推論

關於水珠的生成原因，我們使用高速攝影機觀測，發現水珠是由水冠破裂產生。而整個過程我們認為可以分成以下兩個階段：

## 1. 水冠的形成

當液滴撞擊液面時，由於液滴和液面之間的擠壓，造成兩者之間會形成一個高水壓區[3]（如圖二十），巨大的壓力梯度，導致兩者之間會噴出細小的水柱[6]（如圖二十一、二十二）。而噴出水柱後，由於壓力梯度仍然存在，而這個壓力梯度會支撐整體結構



向上發展，由此形成水冠。而我們猜想水冠上突起的結構（水柱）（如圖二十三）的形成，是因為液滴剛撞擊液面的時候，由於系統內部有很多小擾動，因此每個方向上的壓力梯度存在差異，而壓力梯度較大的地方，會有較大的加速度，最後讓那個地方的速度相較其他地方快，從而形成水柱。



圖二十二(細小水柱)



圖二十三(夠長的細小水柱)

## 2. 水珠的形成

而當水柱發展的足夠細長的時候，便會因為普拉托-瑞利不穩定性（Plateau - Rayleigh instability）而破裂，破裂後便會形成水珠[7]。其中，根據觀察，水珠通常會分兩組形成，第一組體積、質量較小且速度較快（如



圖二十四(形成第一組水珠)

圖二十四)，掉落到液面上後通常會直接融進液面，而非在液面上滑行；第二組體積、質量較大但速度較慢（如圖二十五），掉落到液面上後較容易產生滑行的現象（如圖二十六）。此外，我們認為水冠能否發展的足夠細長，是取決於水冠吸收了多少來自液滴的動能，當水冠有了足夠的重力位能和表面位能時，便可以讓整體結構發展的更高，且有更多的表面積可以發展細長的結構，故重力位能及表面位能不夠時，水冠就不會破裂（如圖二十七）。



圖二十五(形成第二組水珠)

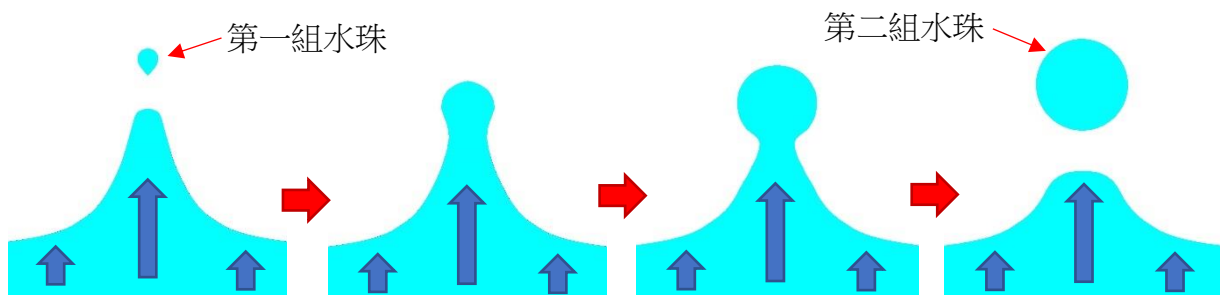


圖二十六(水珠滑行)



圖二十七(水冠未破裂)

而根據前面「速度差異造成水冠會有突起結構」的假設，第一組水珠形成時和第二組水珠形成時，均是從水冠上突起的結構分裂，那麼應該可以觀測到，第一組水珠和第二組水珠在同一方向上的現象（如圖二十八），或著第二組水珠出現在兩個第一組水珠方向約角平分線的位置，這是因為兩個太靠近的水柱有可能合在一起。



圖二十八(第一組水珠和第二組水珠形成於相同位置示意圖)

## (二) 推論驗證

首先，根據 Asadi 和 Passandideh-Fard [3] 於 2009 年做的研究，在利用數值模擬做出的分析中，水冠呈現完美的軸對稱結構，且不存在任何突起的結構，而數值模擬和實際的實驗最大的差異，就在於許多微小的擾動無法被考慮到，也因此我們認為，「微小的擾動會導致微小的壓力梯度差異，並最終導致速度差及水冠突起結構的形成」這個假設可由和數值模擬出的理想情形，進行對比後，得到佐證。

此外，在同一方向上，觀測到第一組水珠和第二組水珠的推論，既從宏觀的觀測中得到證實（如圖二十九），也從微觀高速攝影機拍到的影像得到了證實（如圖二十四、二十五）。



圖二十九(黃色叉為液滴撞擊液面點，藍色圓圈為第一組水珠，紅色圓圈為第二組水珠)

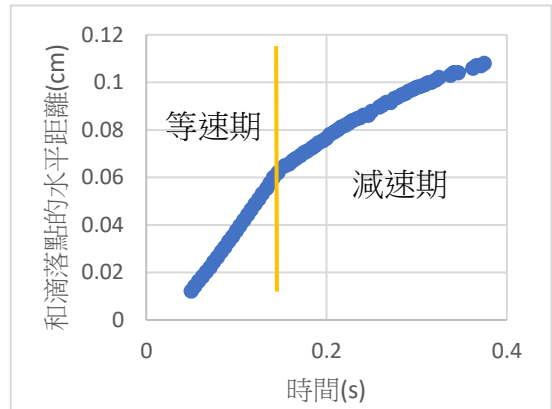
## 二、水珠的位置和時間的關係

### (一) 位置對時間的擬和函數之推導

根據實驗分析過後的結果，我們將水珠在水平方向上的運動，分為等速期以及減速期，又結合高速攝影機的觀察，可看出滑行水珠是從水冠分裂後，再掉入液面上而形成。目前推論等速期，是因為水珠在這段時間，剛因水冠分裂而形成，且尚未接觸到液面或是正在跳動，也就是這段時間受到的力僅有空氣阻力、重力及空氣浮力，由於空氣阻力和空氣浮力幾乎



可以忽略不計，而重力作用於鉛直方向，因此這個期間，水珠在水平分量上，基本可視為等速運動，考慮有些水珠從水冠脫離後便很快就開始在液面上滑行，因此部分水珠的等速期不明顯（如圖十一），需要特別將前半段的數



圖三十(水珠運動分期示意圖)

據拿出來看，才看得到其等速期（如圖十三）。減速期則是水珠開始滑行後，因受到阻力，導致速度的量值持續下降，考慮此阻力可能是水珠和液面間的摩擦力或是流體的阻力，我們分別假設了三種情形：

### 1. 摩擦力

由於水珠是在液面上滑行，因此此時影響水珠的摩擦力應屬於動摩擦力，考慮  $f = \mu N$ ，其中  $f$  為動摩擦力， $\mu$  是動摩擦係數， $N$  為正向力，且考慮水珠在滑行時，垂直方向上幾乎沒有運動，也就是處於垂直方向上的力平衡，因此正向力只會受到水珠質量影響，而不會受到速度影響，也因此對於單一水珠而言，從頭至尾的摩擦力均相同，而在這個推論下，水珠位置對時間的函數，可由一常數對時間積分兩次推得：該函數應為二次函數。

### 2. 流體阻力（假設和速度成正比）

根據推導，位置對時間的函數應會呈現  $x(t) = \alpha - \gamma e^{-\beta t}$ ，具體推導過程如下：

假設加速度和速度成正比，也就是：

$$a = -\beta v$$

其中  $a$  為加速度， $v$  為速度， $\beta$  為一個定值，負號表示方向相反。

而此式亦可寫作  $\frac{dv}{dt} = -\beta v$ ，移項後可得：

$$\frac{dv}{v} = -\beta dt$$

同時對兩邊進行積分，可得：

$$\ln(v) \Big|_{v_0}^v = -\beta t \Big|_{t_0}^t$$

將上式進行整理，可得到速度對時間的函數：

$$v(t) = (v_0 e^{\beta t_0}) \times e^{-\beta t}$$

上式對時間進行積分，便可得出水珠位置對時間的函數：

$$x(t) = \left( -\frac{v_0 e^{\beta t_0}}{\beta} \right) \times e^{-\beta t} + \alpha$$

上式中的  $\alpha$  為積分常數，令  $\gamma = \frac{v_0 e^{\beta t_0}}{\beta}$ ，可得：

$$x(t) = \alpha - \gamma e^{-\beta t}$$

### 3. 流體阻力（和速度的平方成正比）

根據推導，位置對時間的函數為  $x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \alpha(t - t_0) + \frac{1}{v_0} \right] + c$ ，

具體推導過程如下：

假設加速度和速度的平方成正比，也就是：

$$a = -\alpha v^2$$

其中  $a$  為加速度， $v$  為速度， $\alpha$  為一個定值，負號表示方向相

反。而亦可將此式寫作  $\frac{dv}{dt} = -\alpha v^2$ ，移項後可得：

$$\frac{dv}{v^2} = -\alpha dt$$

同時對兩邊積分，並整理過後可得：

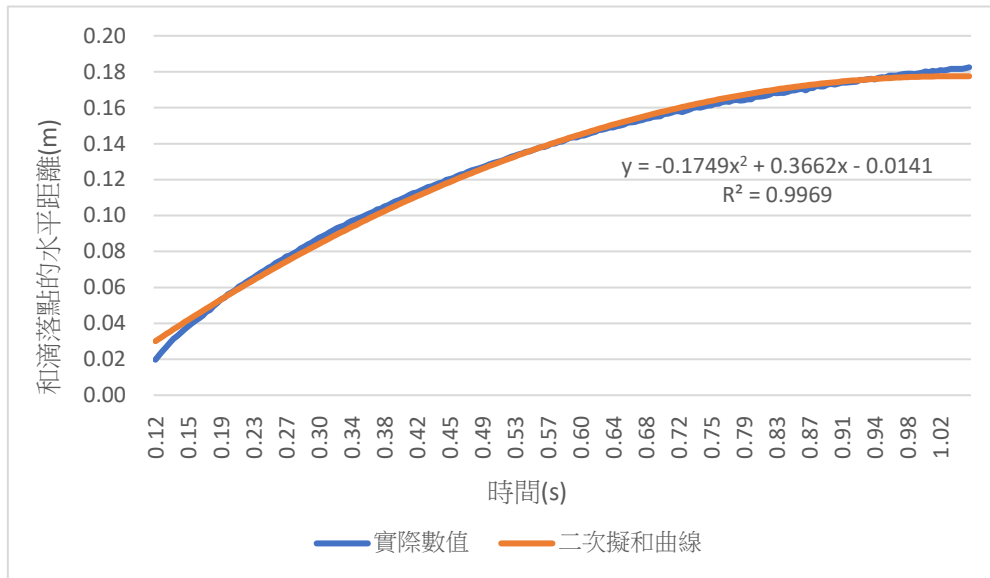
$$v(t) = \frac{1}{\alpha(t - t_0) + \frac{1}{v_0}}$$

上式對時間進行積分，加上積分常數  $c$ ，可得：

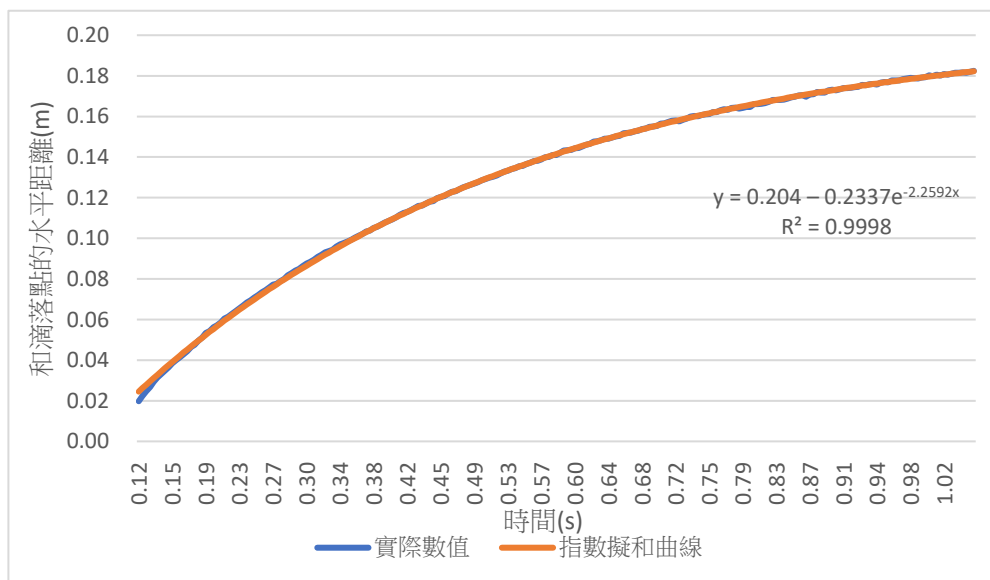
$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \alpha(t - t_0) + \frac{1}{v_0} \right] + c$$

## (二) 不同函數間的擬和比較

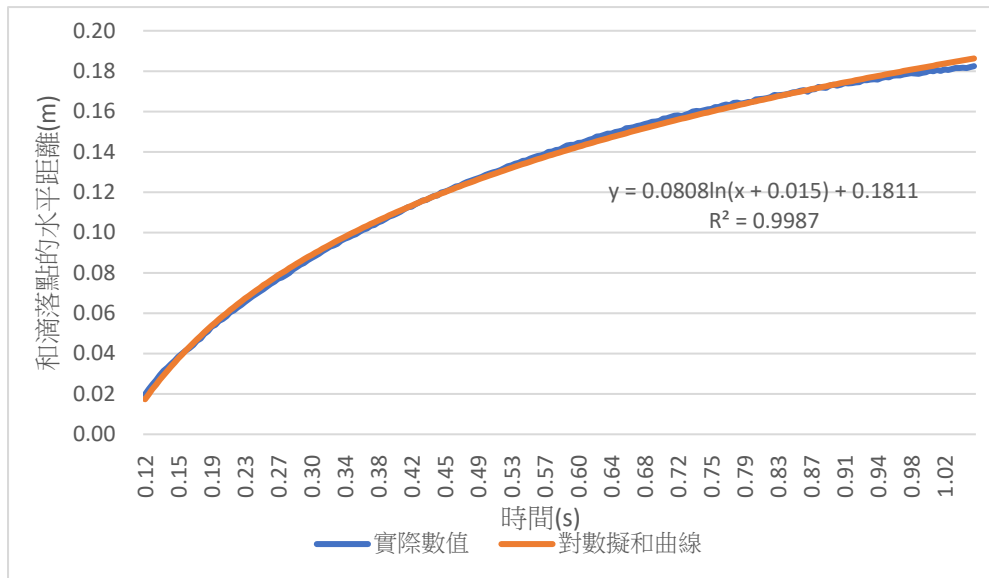
此處會先對水珠位置隨時間變化的數據，使用上述三種擬和函數進行擬和，再將水珠的實際位置，以及同時時間對應到擬和函數上預測的點進行比較，此處以其中一顆水珠的情形為例，如圖三十一、三十二、三十三：



圖三十一(二次函數擬和)



圖三十二(指數函數擬和)

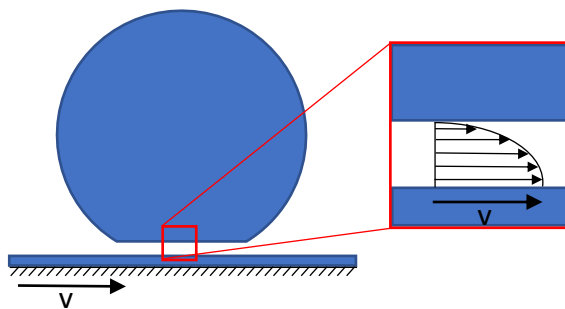


圖三十三(自然對數函數擬和)

其中二次函數的  $R^2$  值為 0.9969，指數函數的  $R^2$  值為 0.9998，自然對數函數的  $R^2$  值為 0.9987，不論從視覺效果，亦或是  $R^2$  值，都顯然是指數函數擬合得更好。而從這裡也可以得知，水珠在液面上行進的阻力和水珠的速度成正比，關於阻力為何會和水珠的速度成正比，我們根據一些參考文獻，試圖建立模型解釋來這件事情，同時也解釋了為何水珠可以存在於液面上，以及水珠要滑行時存在的最高初速度。

### (三) 建模

根據 Moláček 和 Bush [5] 於 2013 年的利用矽油做的研究，在他們的實驗中，他們認為油滴和液面之間存在一層極薄的空氣墊，讓油滴不會崩潰融入液面中。而根據 Lhuissier [4] 等人於 2013 的研究，他們認為移動的表面上可以有液滴懸浮，而支撐液滴的空氣墊內，有空氣的流動（如下圖）。



圖三十四(空氣墊內空氣流示意圖)

以此為出發點，若在矽油換成水的情形下，空氣墊也可以存在，則代表水珠在液面上滑行時，可由空氣墊支撐其不會崩潰融入液面中。此外，我們認為，水珠在液面上滑行，跟液滴在移動表面上的懸浮，兩者之間以相對運動來看，是相似的狀況。因此，支撐水珠的空氣墊內部的空氣流動應該會呈現類似的情形，只是速度分布會上下顛倒。此時可先利用計算其雷諾數 (Reynolds number)，以得知水珠在滑行的情形下，空氣墊內部空氣的流動情形，而雷諾數的計算方式如下[2, 9]：

$$R_e = \frac{\rho VL}{\mu}$$

其中  $\rho$  為流體的密度 (單位： $\text{kg/m}^3$ )， $\mu$  為流體的黏度 (單位：Pa·s)， $V$  為特徵速度 (單位：m/s)， $L$  為特徵長度 (單位：m)。而空氣墊內的空氣流可看作是一種「平板流」[9]，也就是特徵長度為空氣墊厚度，其中空氣墊的厚度約為  $3 \times 10^{-6}$  m [4]，特徵速度為水珠的速度，最大值約為 0.7 m/s，空氣的密度為  $1.225 \text{ kg/m}^3$ ，而空氣的黏度約為  $1.85 \times 10^{-5}$  Pa·s [2, 8]，由此可計算出的雷諾數約為 0.14，不過因實際的特徵速度通常小於 0.7 m/s，故雷諾數必定小於 0.14，而在這個情形下，我們可以忽略空氣流的慣性和可壓縮性，僅考慮其黏滯性[4]。

也因此，我們認為水珠在液面上運動時，所受到的阻力，應該是空氣墊內部的黏滯力，其中黏滯力的計算公式如下[8]：

$$F = \mu A \frac{\Delta u}{\Delta z}$$

其中  $F$  指的是黏滯力， $\mu$  指的是流體的黏度， $A$  指的是接觸面積， $\Delta u$  指的是速度差，由於此處可假設液面是靜止的，因此  $\Delta u$  就是水珠的運動速率，而  $\Delta z$  此處可視為空氣墊的厚度，因此，我們發現可由「 $\Delta u$  可視為水珠的運動速率  $v$ 」，解釋為何阻力會和速度成正比。而若於此處結合黏滯力公式、牛頓第二定律、 $\mathbf{a} = -\beta \mathbf{v}$ ，可得出：

$$\mathbf{a} = -\frac{\mu A}{m \Delta z} \mathbf{v} = -\beta \mathbf{v}$$

也就是說，可以將  $\beta$  寫成：

$$\beta = \frac{\mu A}{m \Delta z} = \frac{\mu \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\frac{4}{3} \pi \rho r^3 \Delta z} = \frac{3\mu}{16\rho r \Delta z}$$

由於接觸面積可視為一個圓（如圖三十四），而此處暫時假設此圓的半徑是水珠半徑的一半。將空氣黏度  $\mu = 1.85 \times 10^{-5} Pa \cdot s$  [2, 8]，水密度  $\rho = 1000 kg/m^3$ ，水珠的半徑約  $0.5 \sim 1 mm$ ，以及空氣墊厚度  $\Delta z = 3 \times 10^{-6} m$  [4] 共四個數值帶入，可得到  $\beta$  約為  $1.16 \sim 2.31 s^{-1}$ ，而實際的實驗數值得到的  $\beta$  值整體落在  $0.2 \sim 10 s^{-1}$ ，其中有超過一半落在  $1.6 s^{-1}$  和  $4 s^{-1}$  之間，此與理論計算出來的  $\beta$  在同一個數量級，而且也相當接近。可看出，利用空氣墊內的空氣流中的黏滯力，解釋水珠受到的阻力，此模型建立的相當成功。

#### (四) 水珠產生滑行現象的條件

當斷裂出來的水珠速度太快時，可能會衝破空氣墊，因此無法在水面上滑行。其應存在一臨界速度，超出臨界速度就會衝破空氣墊，但我們只能觀測水珠水平速度，無法同時觀測水珠鉛直速度，因此無法求出準確臨界速度，但根據實驗數據，滑行水珠水平速度約在  $0.6 \sim 0.7 m/s$  處存在臨界速度。此外，同樣根據實驗結果，我們推測要形成滑行水珠，亦存在一水平初速度的下限，約為  $0.1 m/s$ ，目前推測可能是因為，若沒有達到此速度，便無法從水冠上脫離。

### 三、液滴滴落高度對水珠的影響

#### (一) 理論推導

終端速度  $V_t$  的計算公式為[10]：

$$V_t = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_d}}$$

其中  $m$  為液滴的質量 ( $1.2 \times 10^{-6} kg$ )， $g$  為重力加速度 ( $9.8 m/s^2$ )， $\rho$  為空

氣密度 (1.225kg/m)，A 為物體的投影面積 (假設液滴為球形，A 約為  $6.337 \times 10^{-6} \text{m}^2$ )， $C_d$  為阻力係數 (在液滴為球形的情況下約為 0.47 [11])，將以上數值分別代入，可求出終端速度  $V_t$  為  $8.029 \text{m/s}$ 。

若液滴之重力位能全部轉換成動能，液滴滴落至液面前速度  $V$  公式為：

$$V = \sqrt{2gh}$$

$g$  為重力加速度 ( $9.8 \text{m/s}^2$ )， $h$  為滴落高度，若以終端速度  $V_t$  為  $8.029 \text{m/s}$  代入，可以求出達到終端速度前的最大  $h$  為  $3.29 \text{m}$ ，本實驗所做的最高高度僅為  $1.6 \text{m}$ ，不及達到終端速度所需高度，因此不需考慮因液滴達到終端速度而影響實驗結果。

## (二) 水珠的水平初速度

### 1. 水珠水平初速度的影響因素

由於此處探討的是水珠在水平方向上的速度分量，因此只會考慮會對水珠在水平方向上造成影響的因素，像重力這種作用於鉛直方向的力，並不會考慮。而我們認為，水平方向上會影響水珠運動的因素，主要有以下四種：

#### (1) 液滴撞擊液面造成的壓力梯度力

壓力梯度會推動水冠的發展，而水珠從水冠上脫離時，有一部分的速度應是繼承自水冠發展的速度，因此我們認為液滴撞擊液面造成的壓力梯度，是影響水珠水平初速度的原因之一。

#### (2) 水冠形狀上造成的內聚力

因為水冠結構的原因，水冠頂端的水，會受到內聚力的影響 (如圖三十五)，這導致越晚從水冠上脫離的水珠，受內聚力的影響時間越長，最終脫離水冠時的水平初速度就越慢。



圖三十五(水冠內聚力示意圖)

(3) 第一組水珠和第二組水珠的內聚力

此處指的是若第一組水珠並沒有脫離水冠，而是跟著第二組水珠一起離開水冠，由於第一組水珠和第二組水珠之間存在速度差，則兩者之間的內聚力，會使第二組水珠的水平速度增加。

(4) 來自水盆的摩擦力

水盆的摩擦力大小主要和底層水的厚度有關，若底層水的厚度越薄，來自水盆的摩擦力的效應會越明顯。此處由於操縱變因為滴落高度，暫不做討論。

2. 滑行水珠的水平初速度

(1) 滴落高度小於 100cm

在滴落高度小於 100cm 時，由於隨著滴落高度增加，液滴撞擊液面時所形成的壓力梯度會越大，因此水平初速度的最大值有所增加，水珠整體獲得的水平初速度亦增加。關於水平初速度的最小值，我們認為是有存在一下限，當低於下限時，水珠就無法從水冠上脫離，依實驗數據，其下限大約是在 0.1m/s。

(2) 滴落高度大於 100cm

當在滴落高度大於 100cm 時，水平初速度最大值便停留在約 0.6m/s 處不再增加，我們認為，這是因為滑行水珠形成的條件之一是不能衝破空氣墊，過快的水平初速度會導致水珠可直接衝破空氣墊而融入水中，因此水珠水平初速度的最大值，無法超過約 0.6~0.7m/s 處。此外，由於隨著滴落高度的增加，一方面無法形成更快的滑行水珠，另一方面由於第一組水珠較容易形成（如圖十六），導致第二組水珠較難因兩者間的內聚力加速，又因為水柱更長更細，「第二顆第二組水珠」更容易形成，其中所謂的「第二顆



第二組水珠」指的是水柱分裂出第二組水珠時分裂出的第二顆水珠，由於較晚從水冠分裂出來，受到水冠內部的內聚力的時間較長，因此水平初速度較慢。而「第二顆第二組水珠」更容易形成也意味著有更多較慢的水珠的生成，並導致整體的方均根速率，會隨高度增加而降低。

### 3. 未滑行水珠的水平方均根速率

從能量的觀點看，由於液滴滴落高度的增加，意味著液滴的重力位能增加，也因此未滑行水珠獲得的動能增加。從壓力梯度的觀點來看，由於液滴滴落高度較高時，液滴撞擊時產生的壓力梯度較大，加上未滑行水珠不存在速度上限，因此初速度量值較大。

#### (三) 液滴單次撞擊中出現的水珠數量的期望值

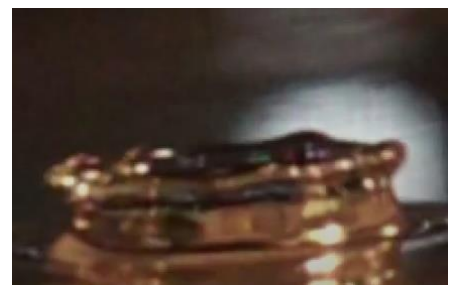
由於液滴滴落高度的增加，液滴重力位能增加，其滴落時轉換成的動能就會增加，也因此會讓水冠擁有更多能量，而反映在水冠上，則水冠從滴落液滴獲得的能量越多，水冠會濺得更高，這同時也意味著就是水冠的每一個分支會更加細長，水冠會越薄（如圖三十六），使水冠更容易碎裂（如圖三十七），導致水珠更容易出現，數量也容易更多；反之，若滴落高度較低，則滑行水珠或非滑行水珠皆較難出現（如圖三十八）。



圖三十六(滴落高度 160cm)



圖三十七(滴落高度 160cm)



圖三十八(滴落高度 40cm)

#### 四、液面厚度對水珠的影響

##### (一) 水珠的水平初速度

###### 1. 滑行水珠

滑行水珠水平初速度的最大值由於受到 0.6~0.7m/s 的速度限制，因此大致上均在 0.5~0.7m/s 之間。至於滑行水珠水平初速度的最小值，在底層水量少於 90ml 時，由於一根水柱有機會形成「第二顆第二組水珠」，因此整體維持在約 0.1~0.2m/s；而底層水量大於 90ml 時，由於「第二顆第二組水珠」較難形成，因此最小值開始增加。而方均根速率和液面厚度呈正相關，我們認為是因為液面厚度越厚，水盆摩擦力造成的效應會比較不明顯，加上初速度較慢的水珠較難形成，因此整體速度增加。

###### 2. 未滑行水珠

未滑行水珠通常由第一組水珠構成，而第一組水珠主要在水冠形成前期，便從水冠頂部脫離，其中整個過程中，主要會對第一組水珠造成水平速度上的改變的，只有液滴撞擊液面的一瞬間，產生的壓力梯度力，而壓力梯度力的大小主要和液滴的滴落高度相關，與液面厚度較無關聯，因此未滑行水珠的水平初速度，和液面厚度之間，較無明顯關聯。

##### (二) 液滴單次撞擊中出現的水珠數量的期望值

關於實驗結果中，隨著液面厚度增加，單次滴落中滑行水珠數量的期望值的下降，我們認為是因為水是流體，隨著液面厚度增加，液滴撞擊產生的壓力梯度，會有更多被底部的水所吸收，從而導致產生水冠的原動力減少，這導致水冠所獲得的能量相對減少，換言之，水冠無法濺得更高，更難破裂產生水珠（如圖三十九、四十）。不過未滑行水珠主要由第一組水

珠構成，而第一組水珠的形成主要只和液滴撞擊液面的一瞬間產生的壓力梯度力有關，故未滑行水珠數量的期望值，跟液面的厚度之間，並沒有明顯的趨勢。



圖三十九(底層水量 60ml)



圖四十(底層水量 150ml)

## 陸、結論

### 一、 研究總結

- (一) 液滴撞擊液面產生的水冠，會因內部的流速差異而形成水柱，而水柱又會因為普拉托-瑞利不穩定性（Plateau – Rayleigh instability）而破裂形成水珠。
- (二) 水珠滑行時受到的阻力和速度成正比，此現象可用支撐水珠的空氣墊內部的空氣流之黏滯力解釋。
- (三) 滑行水珠的水平初速度存在上限和下限，上限約為 0.6~0.7m/s，因為超過此上限就會衝破空氣墊融入水中，下限約為 0.1m/s，因為低於此下限水珠就沒辦法從水冠脫離。
- (四) 滑行水珠的方均根速率在滴落高度約為 100cm 處存在極大值，和液面厚度呈正相關。其數量的期望值和滴落高度呈正相關，和液面厚度呈負相關。
- (五) 未滑行水珠的方均根速率及數量的期望值，均和滴落高度呈正相關，和液面厚度之間沒有關聯。

### 二、 未來展望

- (一) 可加入溫度和濕度的控制設備，增加實驗精度。

- (二) 可加入液滴的質量作為操縱變因，就目前的模型預測，水珠數量的期望值應該會和液滴的質量呈正相關，這是因為質量較大的液滴，在滴落前具有較大的重力位能，故會有較多的能量，可以提供給水冠以形成水珠。
- (三) 使用不同流體進行實驗，並觀察現象上的異同。
- (四) 探討水珠崩潰融入液面的機制。
- (五) 探討影響水珠半徑的因素。

## 柒、參考文獻資料

- [1] 中華民國第 62 屆中小學科學展覽會作品說明書---液滴爆炸
- [2] 流體力學, 陳俊勳, 杜鳳棋著, 初版, 三民書局, (2004)
- [3] Asadi, S., & Passandideh-Fard, M. (2009).A computational study on droplet impingement onto a thin liquid film. The Arabian Journal for Science and Engineering, Volume 34, Number 2B
- [4] Lhuissier, H., Tagawa, Y., Tran, T., & Sun, C. (2013).Levitation of a drop over a moving surface. Journal of Fluid Mechanics, 733.doi:10.1017/jfm.2013.470
- [5] Moláček, J., & Bush, J. W. M. (2013).Drops bouncing on a vibrating bath.doi:10.1017/jfm.2013.279
- [6] Rouslan Krechetnikov; George M. Homsy (2009).Crown-forming instability phenomena in the drop splash problem. 331(2), 555 – 559. doi:10.1016/j.jcis.2008.11.079
- [7] Zhang, Li V.; Brunet, Philippe; Eggers, Jens; Deegan, Robert D. (2010).Wavelength selection in the crown splash. Physics of Fluids, 22(12), 122105 – .doi:10.1063/1.3526743
- [8] Wikipedia: Viscosity <https://reurl.cc/Rz1yo6>
- [9] Wikipedia: Reynolds number <https://reurl.cc/9VEEQX>
- [10] Wikipedia: Terminal speed <https://reurl.cc/7Ro3z9>
- [11] Wikipedia: Drag coefficient <https://reurl.cc/KMjXZp>
- [12] Wikipedia: Plateau-Rayleigh instability <https://reurl.cc/mDqNVl>

## 【評語】 051808

本作品探討液滴撞擊液面之過程以及所產生的小水珠在液面滑行的情形與機制。研究中，液滴滴落高度及底部液面厚度作為操縱變因，測量飛濺出的水珠之各項性質，探討其與變因間之關係，推論滑行水珠的成因與滴落時產生的水冠因普拉托瑞利不穩定性而破裂有關。假設推論其所受阻力特性，配合實驗數據得出其所受阻力與速度成正比，並建立模型嘗試說明滑行水珠存在的原因，以及對實驗數據進行解釋。液滴撞擊液面產生液冠的問題本身已有許多研究，可在加強本研究內容的創新設計與突破性成果。

# 作品海報

玩

水

珠

珠



## 摘要

本研究主要在探討液滴撞擊薄水液面後，產生的水珠滑行之現象。研究中，我們以液滴滴落高度及底部液面厚度作為操縱變因，測量飛濺出的水珠之各項性質，探討其與變因間的關係，並在用高速攝影機觀察其微觀機制，以及參考相關文獻後，推論滑行水珠的成因與滴落時產生的水冠因普拉托-瑞利不穩定性 ( Plateau-Rayleigh instability ) 而破裂有關[7]。我們用三種假設推論其所受阻力特性，配合實驗數據得出其所受阻力與速度成正比，並建立模型嘗試說明滑行水珠存在的原因，以及對實驗數據進行解釋。

## 研究動機

團隊成員在洗澡時，發現頭髮上的水滴滴落到地板後，會分裂出許多小水珠，並在表面滑行的現象，好奇為何有此現象發生，因此我們決定研究這個現象。在研究過程中，我們試圖使用流體力學的相關概念去解釋此現象的成因，並探究液滴滴落高度、液面厚度對此現象之影響。

## 現象解釋及名詞定義

一、現象：液滴撞擊薄液面後，會飛濺出細小水珠，部分水珠落至液面後就會融入液面，不會產生滑行現象，另一部分水珠落到液面後會在液面上滑行，並在滑行一段距離後才融入液面。(如現場影片所示)

二、名詞定義及解釋：

液滴：由微量吸管滴落，撞擊液面的水滴。

水冠：液滴撞擊液面時，液面濺起而形成的構造。(如右圖)

水柱：水冠上的突起構造。

水珠：液滴撞擊水面後濺出細小水珠。為了方便解釋，我們又將水珠分類，一顆水珠不一定只能歸屬於單一分類，如下：

- (1)第一組水珠：由水柱較細的前端分裂而形成，通常速度較第二組水珠快，質量較第二組水珠小。
- (2)第二組水珠：由水柱較粗的中後端分裂而成，通常速度較第一組水珠慢，質量較第一組水珠大。
- (3)未滑行水珠：未在液面上滑行，而是直接融入液面中的水珠，通常多為第一組水珠。
- (4)滑行水珠：落到液面後有在液面上滑行的水珠，通常多為第二組水珠。

初速度：水珠飛濺出時的速度。

普拉托-瑞利不穩定性：水柱會因內部擾動和表面張力斷裂成水珠[1, 12]。

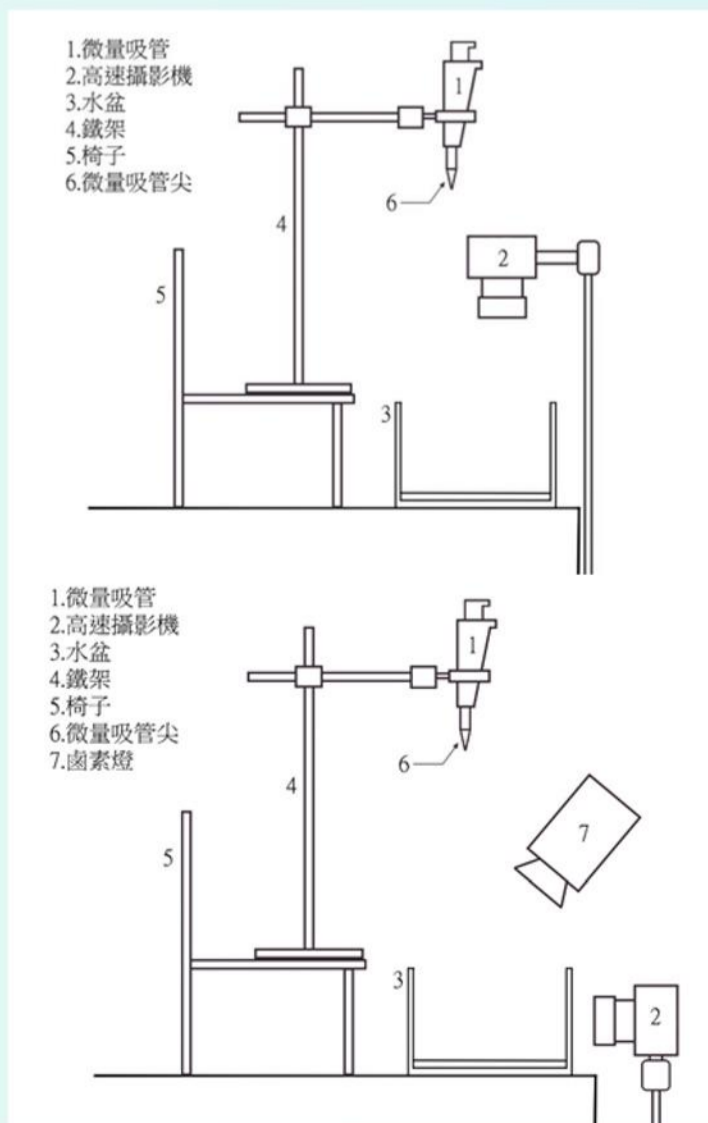


水冠

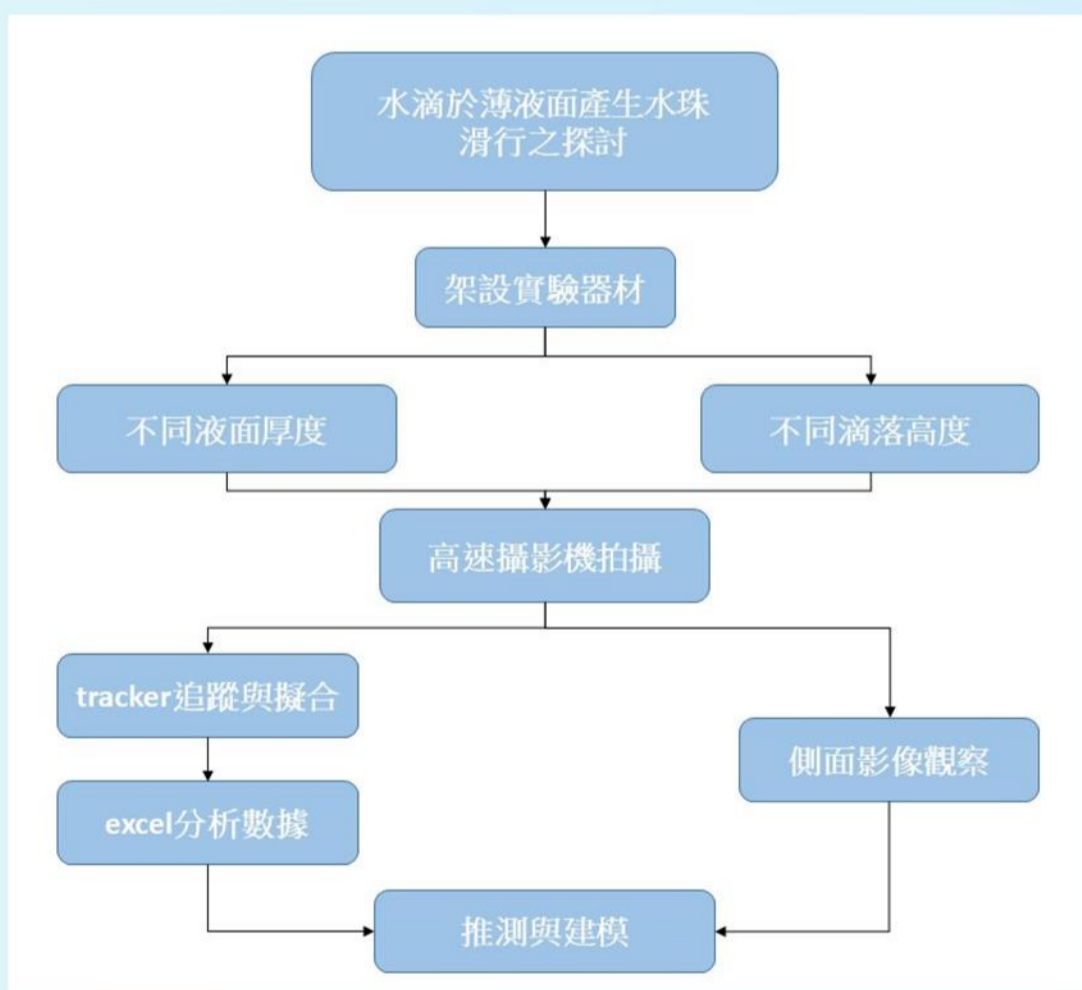
## 研究目的

- 一、滑行水珠出現的原因
- 二、水珠的滑行距離和時間之關係
- 三、探討液滴滴落高度對水珠的影響
  - (一) 與水珠水平初速度之關係
  - (二) 單次滴落中水珠數量的期望值
- 四、探討液面厚度對水珠的影響
  - (一) 與水珠水平初速度之關係
  - (二) 單次滴落中水珠數量的期望值

## 研究設備



## 研究架構



## 研究方法

- 一、架設實驗裝置，用水平儀確認水盆是否水平。
- 二、架設並調整高速攝影機，以確保拍到完整清晰的影像。
- 三、加入實驗所需的水量至透明水盆。
- 四、調整四角型固定夾，讓微量吸管尖至實驗高度處。
- 五、用微量吸管吸取12 $\mu$ l的水，接著將其滴落至盆中，並拍攝液滴滴落後液面上水珠運動情形。
- 六、用Tracker分析所拍攝影片中水珠移動距離、初速度及水珠產生數量，並生成擬合曲線，其中速度可由擬合曲線對時間微分獲得。
- 七、用Excel將Tracker所分析的數據製成表格或圖表。



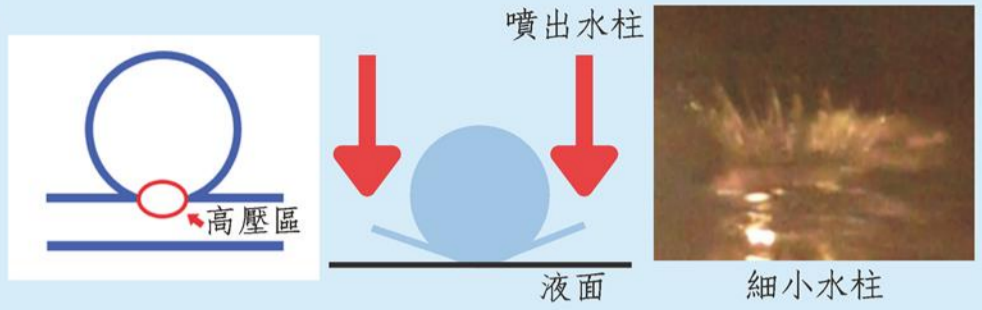
# 研究結果與討論

## 一、 滑行水珠出現的原因

根據高速攝影機的觀察，液滴撞擊後會產生水冠，接著水冠破裂，水珠從水冠頂部脫離，在掉落到液面上後，在液面上以跳動或伴隨著垂直方向上的振動前進，隨著其鉛直速度越來越低，最後會趨於滑行。

### (一) 水冠的形成

液滴撞擊液面時，擠壓會造成高水壓[3]，壓力梯度導致有細小水柱噴出[6]。水柱形成後，壓力梯度仍然存在，會支撐整體結構向上發展形成水冠[3]。而水柱的形成，我們推測是由於系統內部有很多小擾動，因此每個方向上的壓力梯度存在差異，壓力梯度較大的地方，會有較大的加速度，最後有較快的速度而形成水柱。這個猜想可由前人做的數值模擬結果[3]和實際結果相比較得到證明。

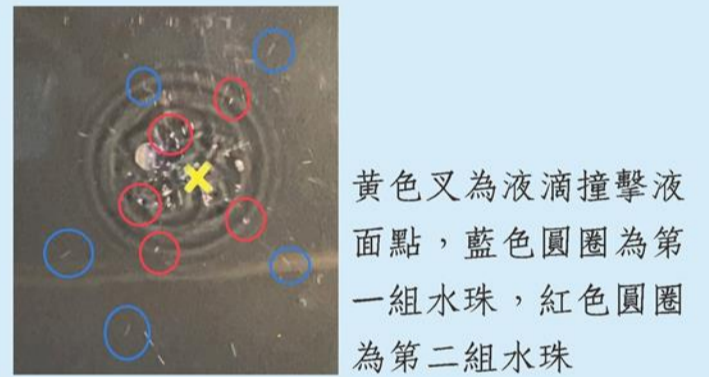
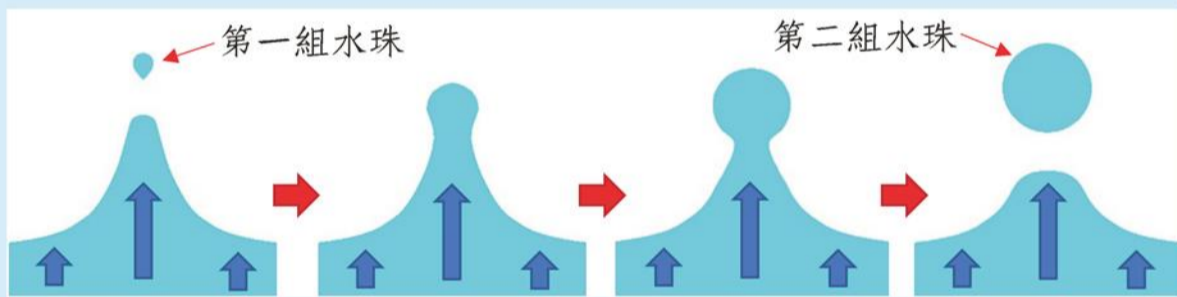


### (二) 水珠的形成

當水柱足夠細長的時候，便會因為普拉托-瑞利不穩定性 ( Plateau-Rayleigh instability ) 破裂形成水珠[7]。水珠通常會分兩組形成：第一組水珠，體積、質量較小且速度較快，掉落到液面上後通常會直接融進液面，而非在液面上滑行；第二組體積、質量較大但速度較慢，掉落到液面上後較容易產生滑行的現象。而水柱是否足夠細長，是取決於水冠吸收了多少來自液滴的動能，當水冠有了足夠的重力位能和表面位能時，便可以發展的更高，且有更多的表面積可以發展細長的結構，故重力位能及表面位能不夠時，水冠就不易破裂。



根據前面「第一組水珠和第二組水珠形成時，是從水冠上突起的結構分裂」的觀察和「速度差造成水冠形成突起結構」的假設，我們推測應該可以觀測到，第一和第二組水珠出現在同一方向上。

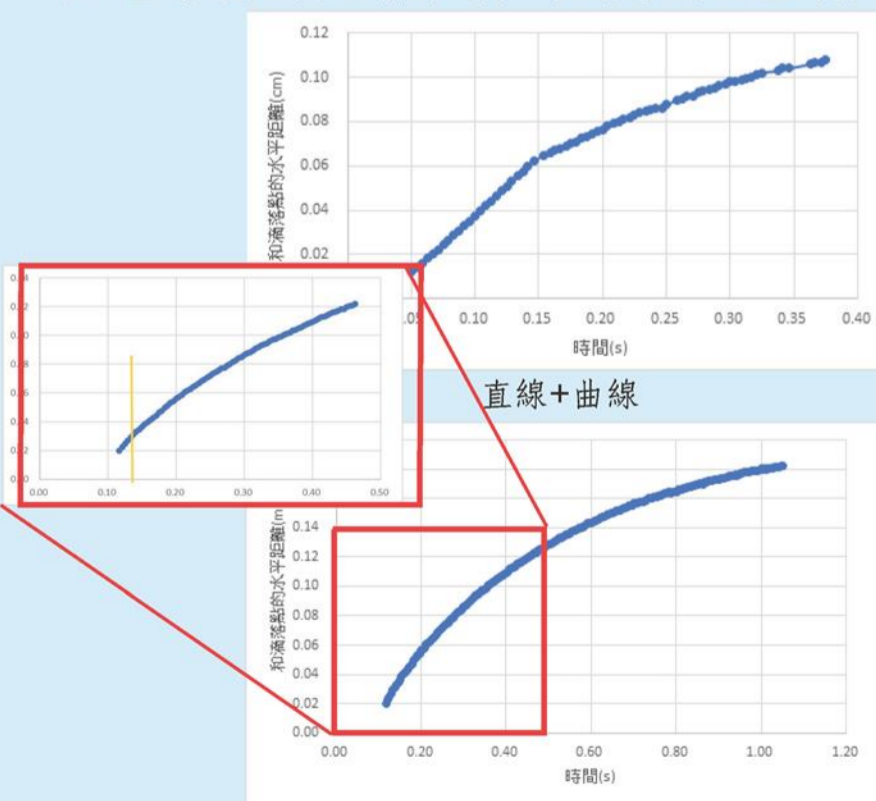


黃色叉為液滴撞擊液面點，藍色圓圈為第一組水珠，紅色圓圈為第二組水珠

## 二、 水珠的位置和時間的關係

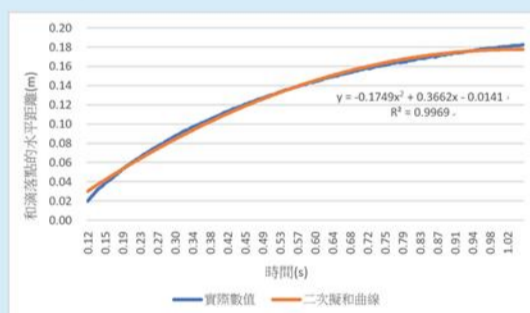
### (一) 研究結果

我們拍攝水珠的運動軌跡，匯入Tracker後進行分析，得到水珠和液面上滴落點的距離和時間之間的關係圖。直線是落到液面前的飛行，曲線是在液面上滑行。



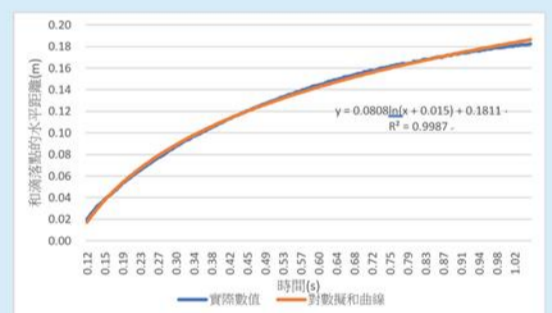
只有曲線?

### (二) 擬和函數的比較(減速期)



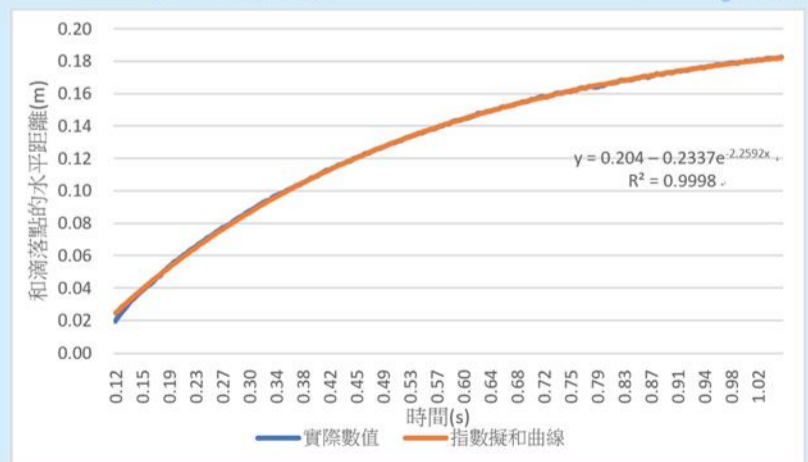
加速度為定值(摩擦力)

二次函數



加速度 ∝ 速度(流體阻力)

對數函數



加速度 ∝ 速度(流體阻力) 指數函數

### (三) 建模



根據文獻[4, 5]，我們假設水珠和液面間存在一層極薄空氣墊。以此為出發點，我們計算空氣墊內部氣流的雷諾數

，並得出雷諾數必小於0.14 [2, 4, 8, 9]，因此我們可以僅考慮其黏滯性[4]，於是我們計算其黏滯力[8]：

$$\text{從 } F = \mu A \frac{\partial u}{\partial z} = \mu A \frac{\Delta u}{\Delta z} = ma \text{ 和 } a = -\beta v, \text{ 可得 } \beta = \frac{\mu A}{m \Delta z} = \frac{\mu \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2}{4 \pi r^3 \Delta z} = \frac{3\mu}{16\rho r \Delta z}。$$

算出的β值約為1.16~2.31 s<sup>-1</sup>[2, 4, 8]，而實際觀測到的水珠β值均在0.2~10 s<sup>-1</sup>之間，其中超過一半在1.6~4 s<sup>-1</sup>之間。此外，結合後面的數據，可看出水珠水平初速度存在上限及下限，其中上限可用速度過快，水珠會衝破空氣墊融入液面解釋。

### 三、液滴滴落高度對水珠的影響

#### (一) 終端速度條件計算

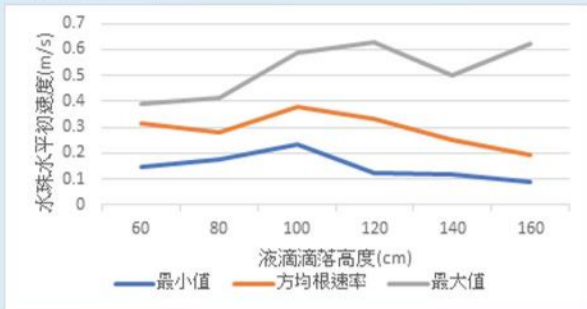
經計算，達成終端速度 (約8.029 m/s [10, 11]) 需要約3.29m的滴落高度，而我們最高的滴落高度僅1.6m，因此不需考慮終端速度造成之影響。

#### (二) 水珠的受力考慮

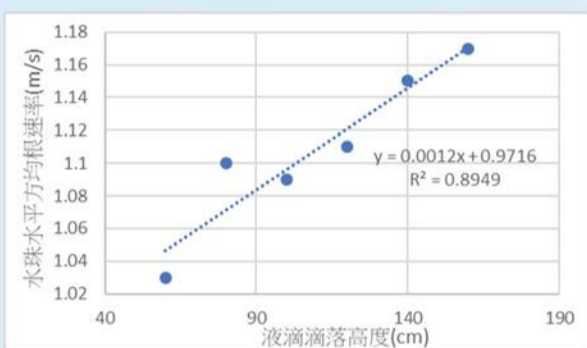
我們認為，水珠的初速度主要受到這三種力的作用造成的影響：(1) 液滴撞擊產生的壓力梯度力 (2) 水分子間的分子作用力，這主要體現在第一組水珠跟第二組水珠之間因速度差異而有的內聚力，和水冠自身因結構形成的內聚力 (3) 來自水盆的摩擦力。

#### (三) 水珠的水平初速度

##### 1. 滑行水珠



##### 2. 未滑行水珠

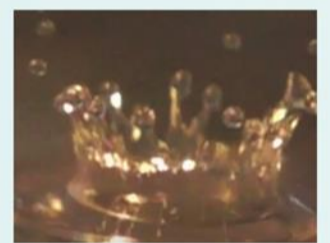


(1) 最小值：我們認為存在一下限，當低於下限時，水珠就無法從水冠上脫離，而下限大約是0.1 m/s。

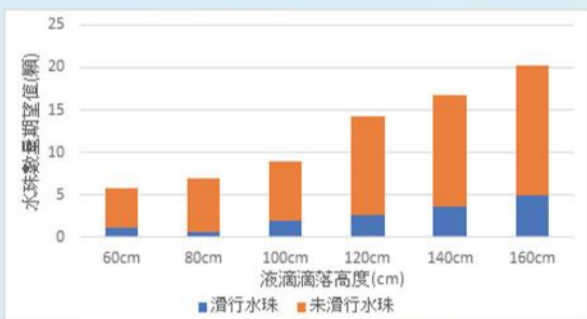
(2) 最大值：當在滴落高度大於100cm時，水平初速度最大值便停留在約0.6 m/s處 (速度上限) 不再增加。

(3) 方均根速率：滴落高度小於100cm時，因液滴撞擊形成的壓力梯度隨滴落高度增加，水平初速度隨高度增加。至於滴落高度大於100cm時，因為「第二顆第二組水珠」的數量增加，和第一組水珠更易離開水冠 (未滑行水珠數量增加)，因此整體初速度下降。

未滑行水珠：以能量來看，重力位能增加，動能也會增加。以壓力來看，未滑行水珠主要是第一組水珠，壓力梯度的增加，加上不像滑行水珠存在速度上限，因此整體速度增加。



#### (四) 單次滴落中出現的水珠數量的期望值

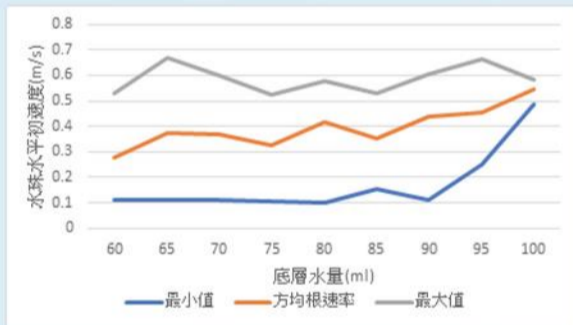


期望值：隨著滴落高度增加，液滴重力位能增加，滴落時的動能就會增加，因此水冠會有更多能量，水柱更長，水冠越薄，更易碎裂，導致滑行水珠和未滑行水珠皆更容易出現，數量也容易更多。

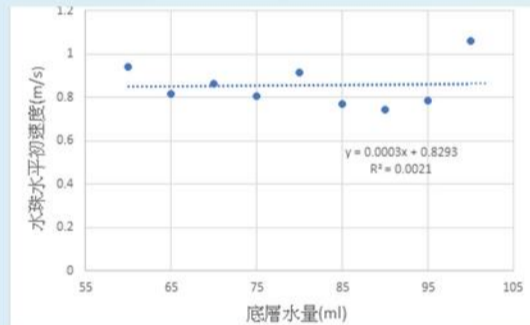
### 四、液面厚度對水珠的影響

#### (一) 水珠的水平初速度

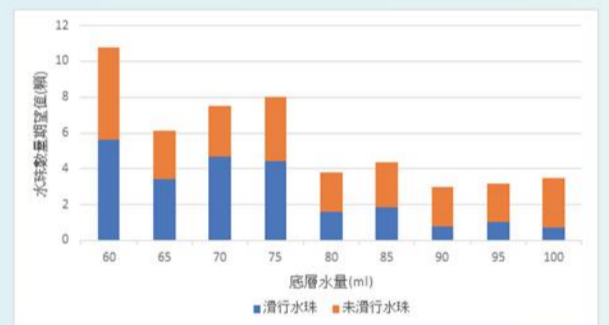
##### 1. 滑行水珠



##### 2. 未滑行水珠



#### (二) 單次滴落中出現的水珠數量的期望值



##### 1. 滑行水珠

(1) 最大值：均在0.6~0.7 m/s，我們認為是受到了速度上限的限制。

(2) 最小值：在底層水量小於90ml受速度下限限制，均約在0.1~0.2 m/s；底層水量大於90ml處則因「第二顆第二組水珠」較難形成，速度增加。

(3) 方均根速率：底層水量增加則來自水盆的摩擦力效應較不明顯，速度增加。

2. 未滑行水珠：初速度和數量主要受剛撞擊時的壓力梯度 (滴落高度) 影響。

3. 期望值：液面厚度增加，則壓力梯度更多被水吸收，水冠獲得能量減少，不易破裂。



## 結論

(一) 液滴撞擊液面產生的水冠，會因內部的流速差異而形成水柱，而水柱又會因為普拉托-瑞利不穩定性 (Plateau-Rayleigh instability) 而破裂形成水珠。

(二) 水珠滑行時受到的阻力和速度成正比，此現象可用支撐水珠的空氣墊內部的空氣流之黏滯力解釋。

(三) 滑行水珠的水平初速度存在上限和下限，上限約為0.6~0.7 m/s，因為超過此上限就會衝破空氣墊融入水中，下限約為0.1 m/s，因為低於此下限水珠就沒辦法從水冠脫離。

(四) 滑行水珠的方均根速率在滴落高度約為100cm處存在極大值，和液面厚度呈正相關。其數量的期望值和滴落高度呈正相關，和液面厚度呈負相關。

(五) 未滑行水珠的方均根速率及數量的期望值，均和滴落高度呈正相關，和液面厚度之間沒有關聯。

## 參考資料

- [1] 中華民國第62屆中小學科學展覽會作品說明書---液滴爆炸
- [2] 流體力學, 陳俊勳, 杜鳳棋著, 初版, 三民書局, (2004)
- [3] Asadi, S., & Passandideh-Fard, M. (2009). A computational study on droplet impingement onto a thin liquid film. The Arabian Journal for Science and Engineering, Volume 34, Number 2B
- [4] Lhuissier, H., Tagawa, Y., Tran, T., & Sun, C. (2013). Levitation of a drop over a moving surface. Journal of Fluid Mechanics, 733. doi:10.1017/jfm.2013.470
- [5] Moláček, J., & Bush, J. W. M. (2013). Drops bouncing on a vibrating bath. doi:10.1017/jfm.2013.279
- [6] Krechetnikov, R., & Homay, G. M. (2009). Crown-forming instability phenomena in the drop splash problem. Journal of Colloid and Interface Science, 331(2), 555-559. doi:10.1016/j.jcis.2008.11.079
- [7] Zhang, Li V.; Brunet, Philippe; Eggers, Jens; Deegan, Robert D. (2010). Wavelength selection in the crown splash. Physics of Fluids, 22(12), 122105-. doi:10.1063/1.3526743
- [8] Wikipedia: Viscosity <https://reurl.cc/Rz1yo6>
- [9] Wikipedia: Reynolds number <https://reurl.cc/9VEEQX>
- [10] Wikipedia: Terminal speed <https://reurl.cc/7Ro3z9>
- [11] Wikipedia: Drag coefficient <https://reurl.cc/KMjXZp>
- [12] Wikipedia: Plateau-Rayleigh instability <https://reurl.cc/mDqNVl>