

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理與天文學科

探究精神獎

051806

耦合振盪器於磁場內的運動與理論模型探討

學校名稱：高雄市立高雄高級中學

作者： 高二 許翊聖 高二 邱郁蕙 高二 黃聖祐	指導老師： 盧政良 高執貴
---	-----------------------------

關鍵詞：耦合振盪、傅立葉分析、磁力

摘要

此研究針對磁力耦合振盪器進行理論建構與實驗設計，在理論建構中，我們先以彈力作為外力並推導公式，與實驗數據擬合後發現擬合參數極具參考價值。將磁力引入系統並推導公式，發現其與實驗數值擬合效果也極好。融合上述公式與參數後推廣出能描述振盪器運動模式之運動方程式，以 Python 數值模擬發現，此方程式與數據十分吻合且能產生波包與頻率下降等真實情況，故推論該運動方程式是有一定價值的。在傅立葉分析中發現了簡正模之應用，且當磁鐵初始距離越短或磁力強度越大時，振盪頻率都會有所提升，而初始位移不會造成影響。而本研究的成果將可透過一已知磁性量值之磁鐵求出另一板簧上物質之磁性量值，進而應用到新型機械式磁性雙板簧的懸臂磁力計設計。

壹、 實驗動機

懸臂磁力計是量測材料磁性的一個有力工具，其運作原理主要是於板簧上端放置一個待測的磁性物質，並於板簧的另一端接上壓電材料。在板簧震盪時，利用有無外加磁場下對壓電材料施加壓力差異所導致的電訊號差異來反推出待測物的磁性大小。而我們在思考若不使用壓電材料，有沒有可能仍利用板簧上磁鐵的震盪來解析出磁性物質的磁性量值強弱。

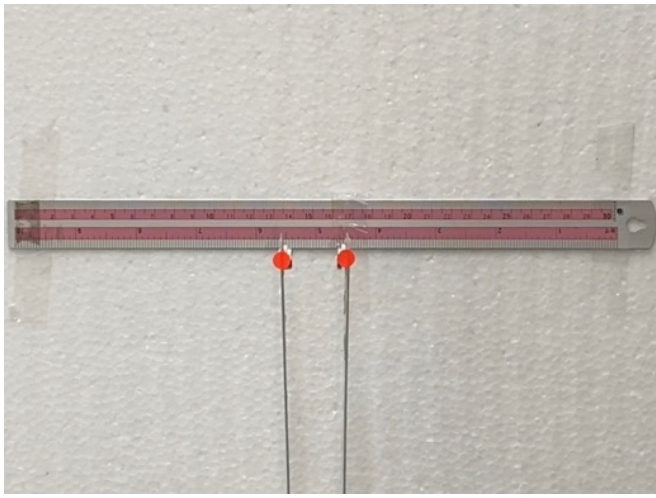
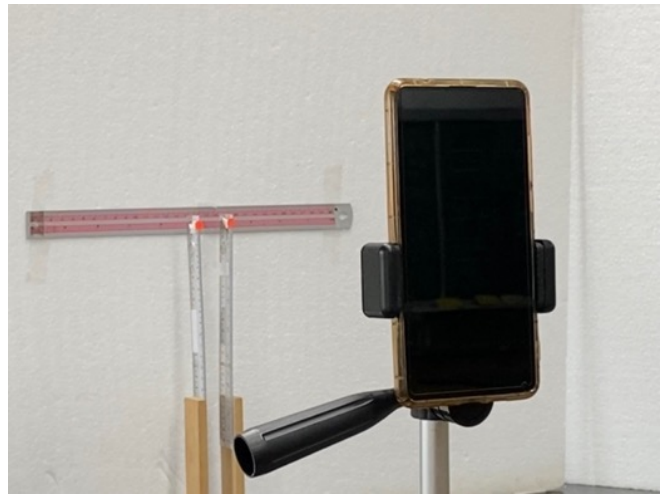
針對這個問題，我們想到之前網路上兩個磁鐵相互影響並進行耦合振盪的影片⁽¹⁾。我們認為若能理解兩個板簧上磁性材料間的耦合振盪模式，就能在一磁鐵磁性大小已知的情況下去解析另一個板簧上未知磁鐵的磁性量值。然而磁力耦合振盪器的運動相當複雜，因此我們將對此振盪器進行理論建構與實驗設計。並找出描述該振盪器運動模式之運動方程式。

貳、 實驗目的

- 一、觀察單一與耦合振盪器運動的模式。
- 二、找出能夠模擬耦合振盪器的模型與方程式進行探討。
- 三、探討耦合振盪器於磁場內運動與相關參數的變化。
- 四、比較彈力振盪器與磁力振盪器之差別與修正。
- 五、討論運動同步性對於振盪器運動的影響。

參、 研究設備及器材

1. 器材：磁鐵、板簧、固定器、黏土、尺、細繩、紅點標籤、攝影器材支架、力感測器。
2. 儀器：筆電(含 EXCEL、Visual Studio Code、Tracker、Vernier Graphical Analysis 軟體)、
手機(含相機、Phyphox 軟體)、攝影器材。

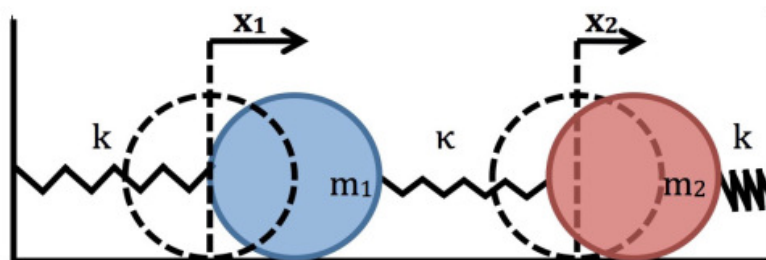
磁力耦合振盪器裝置圖	器材裝置圖
	
內容包含：磁鐵、尺、紅點標籤、板簧、黏土	內容包含：磁力耦合振盪器、攝影器材及支架

肆、 研究過程及方法

一、 理論與公式討論

(一) 一般的耦合振盪

在討論磁力耦合震盪器之前，我們先以一般彈簧耦合震盪器的案例進行討論，此模型可以被表示成兩個質量加三個彈簧的狀況，先列出此模型的運動方程式：



$$m\ddot{x}_1 = -(k + \kappa)x_1 + \kappa x_2 \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -(k + \kappa)x_2 + \kappa x_1 \quad (2)$$

於公式中可以發現，此系統中含有兩個自由度，因此可以透過耦合找到兩種不同模態的震盪。

當我們將公式(1)及公式(2)加在一起時可以得到第一種模態的耦合振盪：

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2)$$

將公式展開得到此振盪的頻率：

$$x_1 + x_2 = A_s \cos(\omega_s t + \phi_s), \quad \omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

而當公式(1)與公式(2)相減時，則可以得到第二種模態的耦合振盪：

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = (-k - 2\kappa)(x_1 - x_2)$$

將公式展開後得到第二種振盪頻率：

$$x_1 - x_2 = A_f \cos(\omega_f t + \phi_f), \quad \omega_f = \sqrt{\frac{k + 2\kappa}{m}}$$

透過此兩種振盪頻率，我們可以針對不同模型的建立進行分析。

(二) 簡正模

簡正模 (Normal mode) 是指在一個振盪系統中，所有部分都以相同的頻率並以正弦函數形式運動的特定模式。這種自由運動發生在固定的頻率上，系統的簡正模對應的振動頻率被稱為其固有頻率或共振頻率。

一般而言，一個系統的運動可以表示為其簡正模的總和。簡正模之所以被稱為「簡正的」，是因為它們可以獨立運動，也就是說，當物體被激發某種模式時，它永遠不會以其他模式運動。此外，簡正模彼此正交，也就是說它們相互垂直，因此沒有重疊運動。

透過在耦合振盪中的推導，我們得到此系統的二種簡正模。

同步模態：兩物體有相同位移且運動方向相同

$$x_1 + x_2 = A_s \cos(\omega_s t + \phi_s), \quad \omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

非同步模態：兩種物體有相同位移但運動方向相反

$$x_1 - x_2 = A_f \cos(\omega_f t + \phi_f), \quad \omega_f = \sqrt{\frac{k + 2\kappa}{m}}$$

從上述結果得知，若同步模態只取決於其彈力常數 k 及質量 m ，因此改變耦合強度 κ 時，同步模態的頻率並不會改變，但非同步模態的頻率則會受耦合強度大小影響。

(三) 耦合振盪中的拍頻

於上述公式推導中可以得知，不同的耦合振盪都會是簡正模的疊加，在實驗採用的系統中也是相符的情形，我們實驗中的耦合震盪會是上述所說的同步模態及非同步模態的疊加，當以線性結合兩個振盪公式後可以得到：

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2) \pm (x_1 - x_2)] = \frac{1}{2}[A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \pm A_f \cos(\omega_f t + \phi_f)]$$

當兩種模態頻率相近的時候，我們就可以觀察到拍頻的出現，拍頻即是兩個頻率相近但不完全相同的簡正模進行耦合時頻率差值，拍頻即可造成我們在觀察軌跡時所看到的波包。

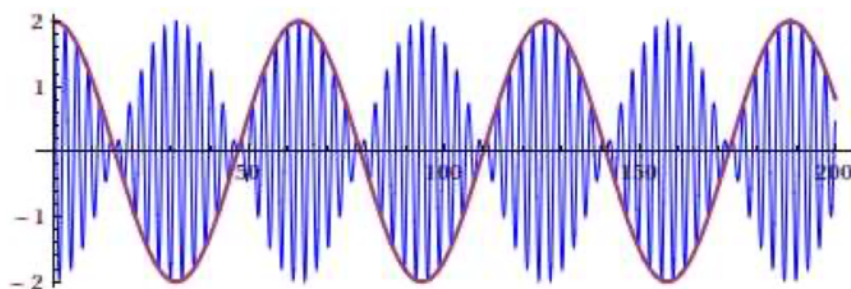
此外，我們推導了兩種簡正模的線性組合：

$$\cos(\omega_s t) + \cos(\omega_f t) = 2 \cos\left(\frac{\omega_s + \omega_f}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_s - \omega_f}{2} t\right)$$

$$\omega = \frac{\omega_s + \omega_f}{2} \approx \omega_s \approx \omega_f, \quad \epsilon = \frac{\omega_s - \omega_f}{2} \ll \omega_s, \omega_f$$

拍頻即為：

$$\omega_{beat} = |\omega_s - \omega_f|$$

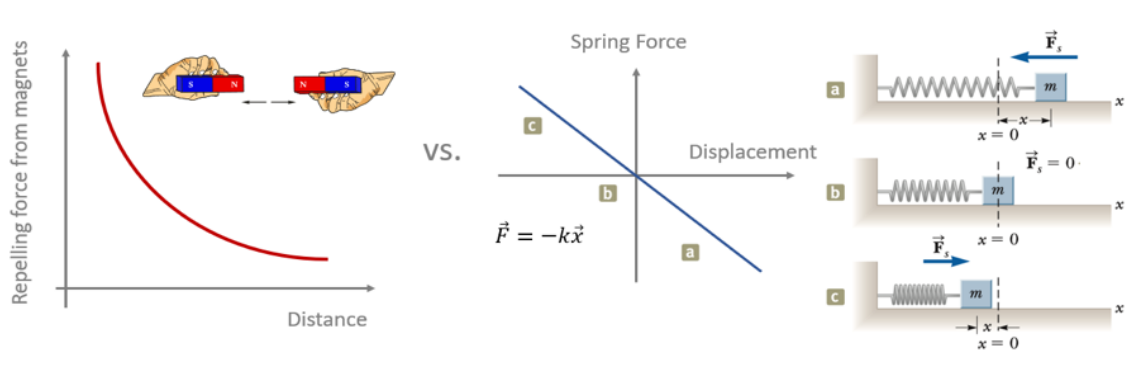


圖（一）拍頻所造成的波包

(四) 磁力在此現象中的結合與應用

在探討完彈簧的耦合系統後，為了使模型更貼近現實情況，我們希望能將耦合振盪器的中間部分置換成兩互相排斥的磁鐵，而我們將磁鐵跟彈簧最主要的差異歸納為兩點：

1. 彈簧是線性的系統，而磁力則是非線性的。
2. 彈簧所提供的力能以兩個方向來展現，但磁力只會提供相吸或相斥的力。



圖（二）彈力與磁力的比較

為了找到磁力及距離的關係圖，我們在文獻搜尋中引入了圓形磁鐵間的磁力公式：

$$F(x) \approx -\frac{1}{4} \pi \mu_0 M^2 R^4 \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+2L)^2} - \frac{2}{(x+L)^2} \right]$$

μ_0 = 自由空間的滲透率

M = 磁極強度 L = 磁鐵長度

R = 磁鐵半徑 x = 磁鐵間的距離

而文獻中也提及，若兩磁鐵間的距離大於磁鐵本身的長度時，公式可以被簡化成：

$$F(x) \approx -\frac{3}{2} \pi \mu_0 M^2 R^4 \frac{1}{x^4}$$

而我們將用於描述磁鐵的參數再簡化成磁力強度 κ ，由此可得：

$$F(x) = \frac{\kappa}{(x+\gamma)^4}$$

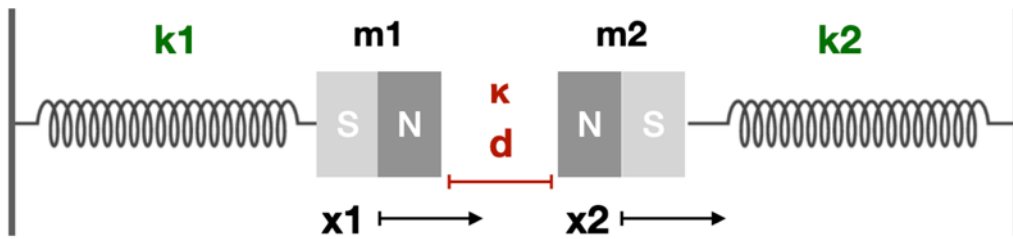
而在研究（二）中，我們將以磁鐵靠近板簧上的磁鐵並量測其造成的位移，代入上述擬合出的彈力係數後試圖探討磁力與距離的關係。

(五) 運動方程及數值模擬

經由上述對磁力的討論，我們可以將完整的模型建構出來，在此模型中，磁鐵 X1 及 X2 的運動方程式可以表示成：

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - b_1 \dot{x}_1 - \frac{\kappa}{(x_2 - x_1 + d + Y)^4} + \frac{\kappa}{(d + Y)^4}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - b_2 \dot{x}_2 + \frac{\kappa}{(x_2 - x_1 + d + Y)^4} - \frac{\kappa}{(d + Y)^4}$$



圖（三）振盪器模型示意圖

在上述等式中，公式右項可以分成三個部分討論：彈力、阻尼項以及磁力耦合項

我們將這個公式寫進 Visual Studio Code 中的 Python 進行數值模擬：

Ref: <https://scipy-cookbook.readthedocs.io/items/CoupledSpringMassSystem.html>

```
[2] from scipy.integrate import odeint
[42] def vectorfield(w, t, p):
    """
    Defines the differential equations for the coupled spring-mass system.
    w : vector of the state variables: w = [x1, y1, x2, y2]
    t : time
    p : vector of the parameters: p = [m1, m2, k1, k2, kappa, L]
    """
    x1, y1, x2, y2 = w
    m1, m2, k1, k2, b1, b2, kappa, L = p
    f = [y1,
        -b1 + y1 - k1 * x1 - kappa / (x2 - x1 + L)**4 + kappa / L**4 / m1,
        y2,
        -b2 + y2 - k2 * x2 + kappa / (x2 - x1 + L)**4 - kappa / L**4 / m2]
    return f

[43] np.sqrt(7.9/(4.27/1000))
43.01298752724269

[97] def COUPLED_SOLVE(x1, y1, x2, y2):
    # Masses:
    m1, m2 = [1, 1]

    # Spring constants
    k1, k2 = [50, 50]

    # Friction coefficients
    b1, b2 = [0.33, 0.33]

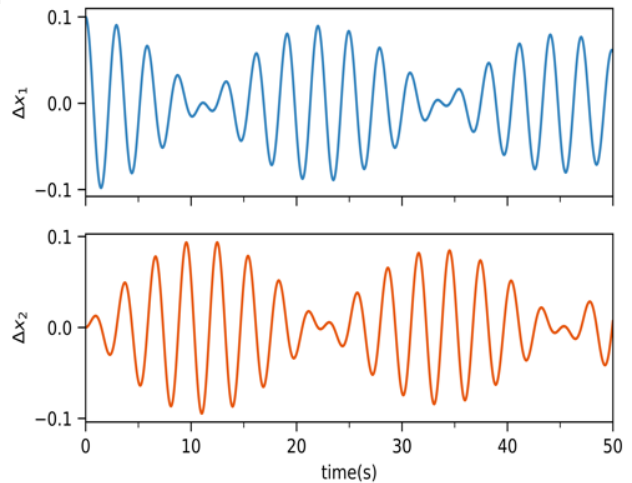
    # magnetic coupling
    kappa = 2/1e7
    L = 4/100

    # Initial conditions: x1 and x2 are the initial displacements; y1 and y2 are the initial velocities
    # x1, y1, x2, y2 = [0.5, 0.0, 0.0, 0.0]
    t = np.linspace(0, 30, 1000)

    # Pack up the parameters and initial conditions:
    p = [m1, m2, k1, k2, b1, b2, kappa, L]
    w0 = [x1, y1, x2, y2]

    # Call the ODE solver.
    wsol = odeint(vectorfield, w0, t, args=(p,))#, atol=abserr, rtol=relerr)

    return t, wsol
```



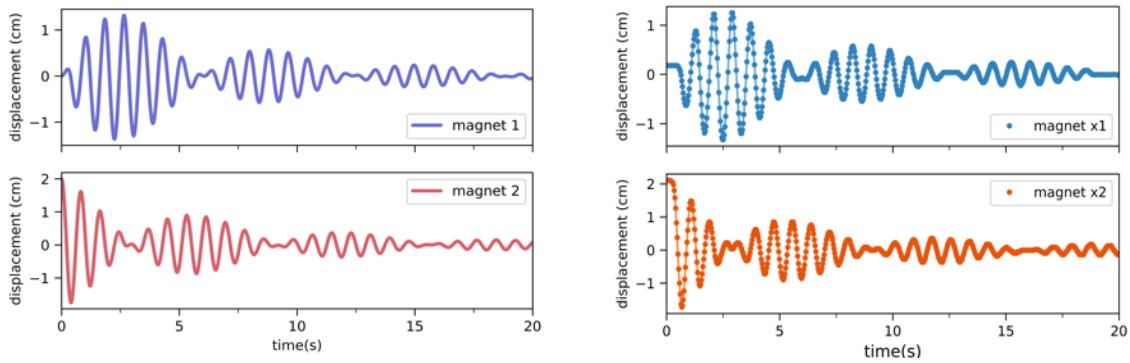
圖（四）數值模擬結果

接著我們可以代入先前擬合得到的數值如下表（一）所示：

表（一）數值模擬參數整理表

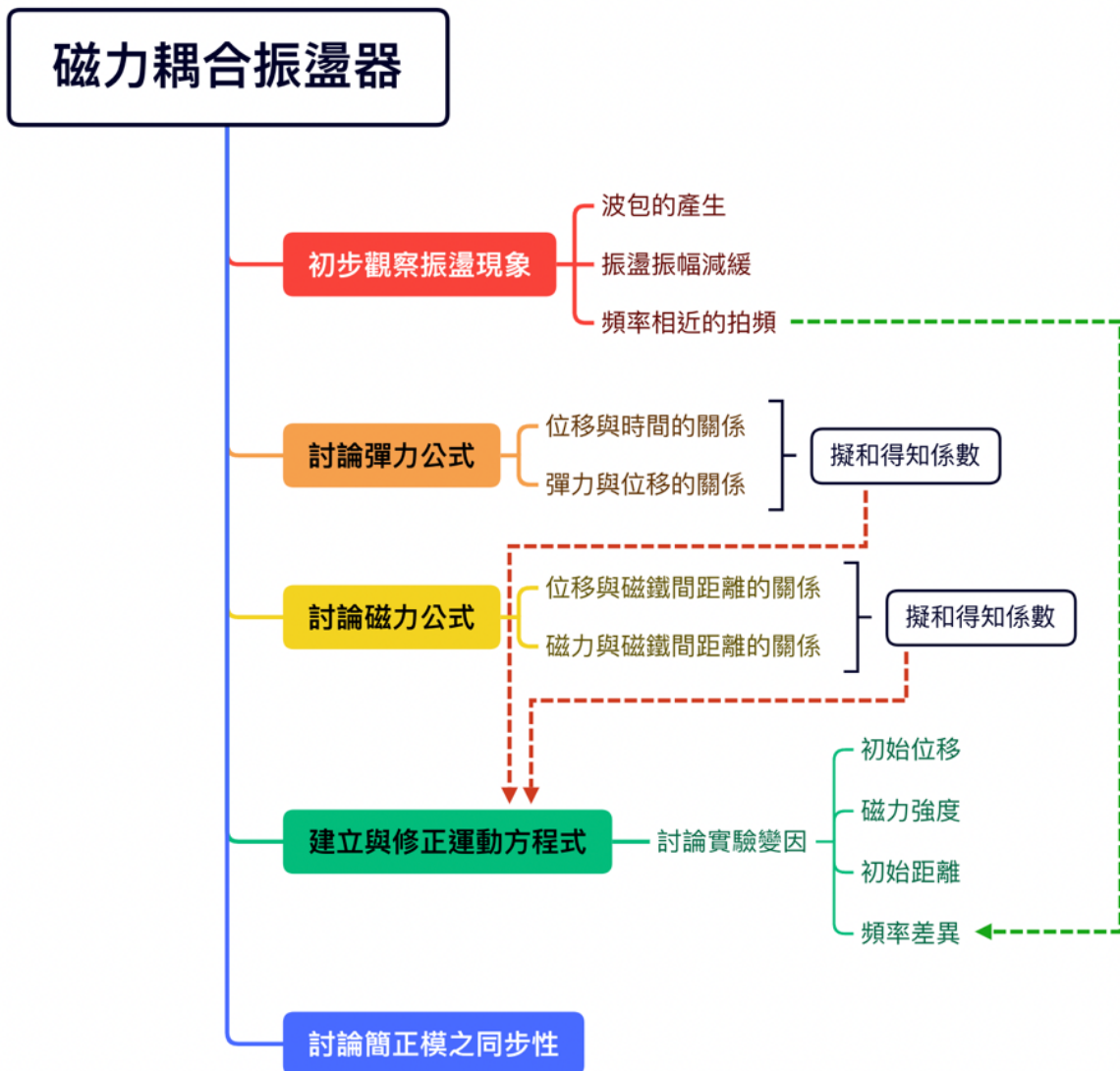
	m	k	b	κ	Y
數值	154.5 g	7.9 (N/m)	0.275 (1/s)	73.63 (N · cm ⁴)	4.45 (cm)

代入結果後，我們可以得到公式所計算出的理論軌跡並與實驗軌跡進行比對，發現擬合結果大致符合，因此我們認為以上述公式建立的理論模型可以很精確的解釋我們的實驗結果。



圖（五）理論值與實驗數值的比對結果

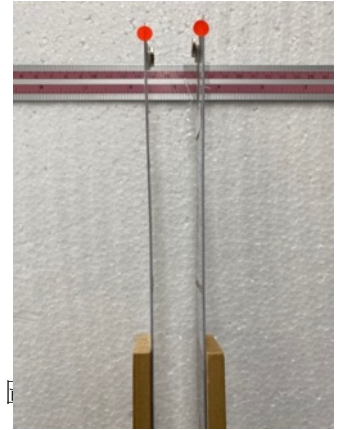
二、 研究架構



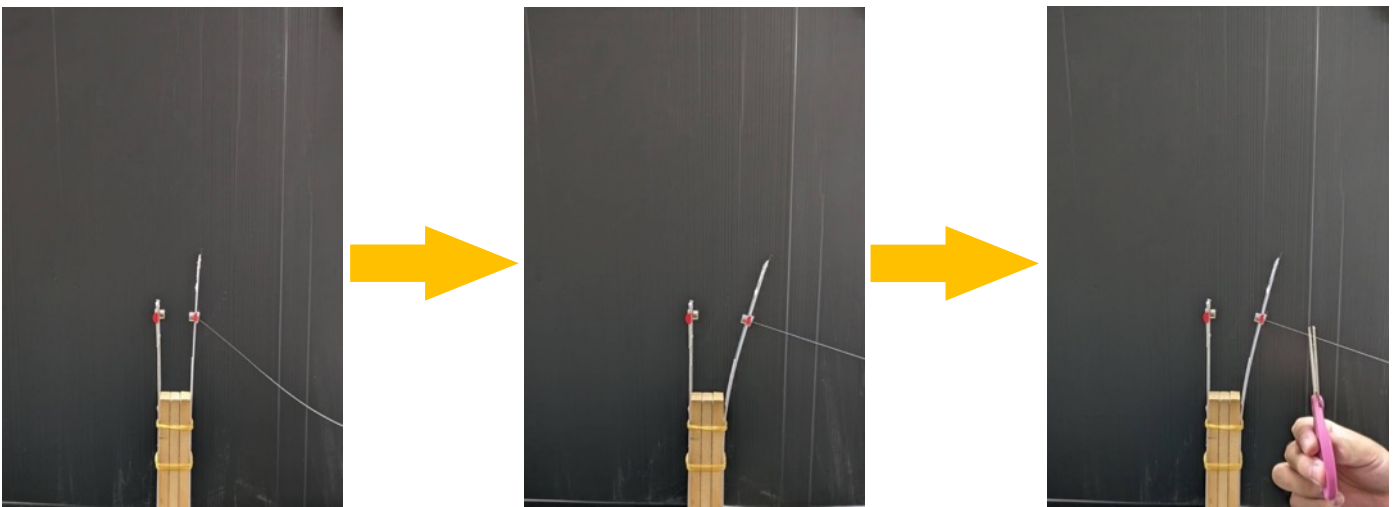
三、 實驗方法

磁力耦合振盪器架設前置作業：

1. 準備若干磁鐵，並將磁鐵固定於板簧上。
2. 將板簧對稱放置於固定器上如圖（六）所示。
3. 擺動其中一板簧，確定另一板簧有相對的擺動即為成功的磁力耦合振盪器架設。



磁力耦合振盪器振盪運動操作：



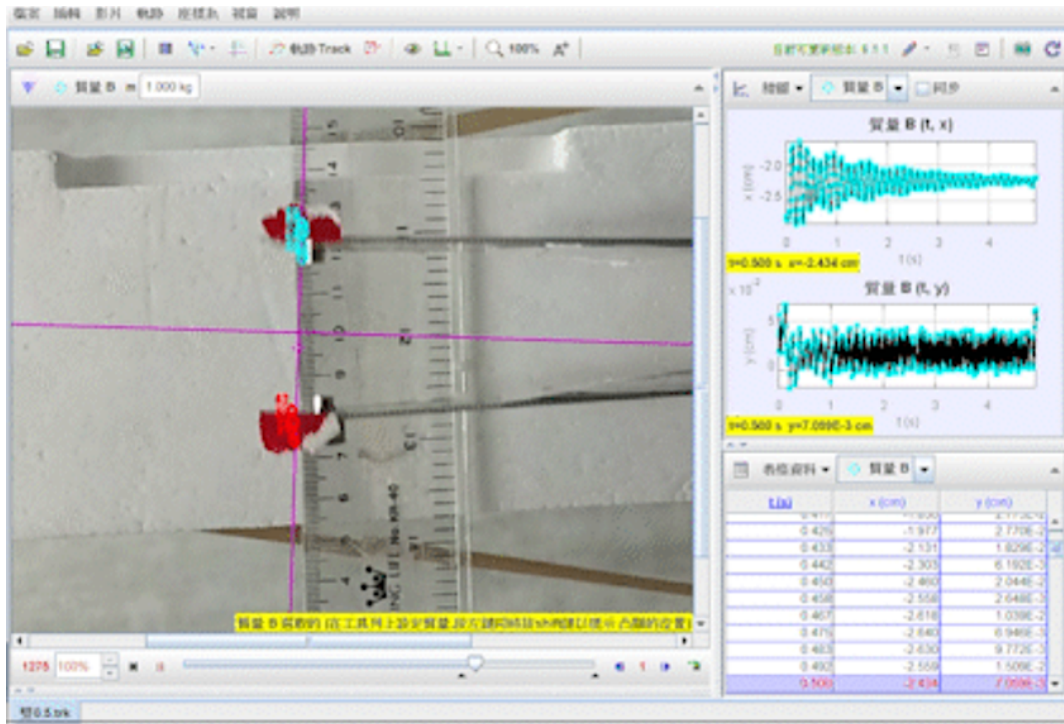
架設磁力耦合振盪器

以細繩拉動其中一板簧

剪斷細繩後板簧開始振盪

Tracker 運動分析軟體操作說明：

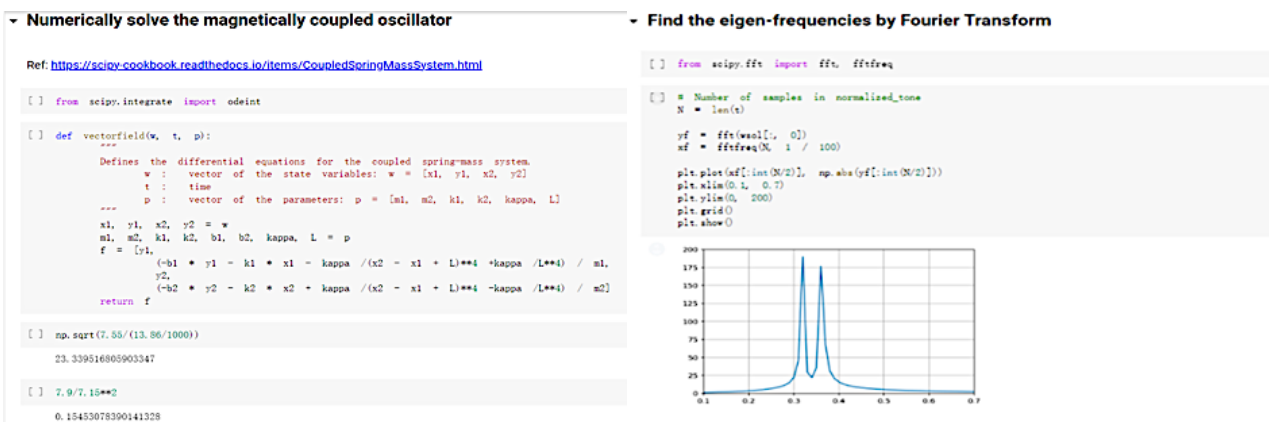
1. 點擊 Tracker 軟體左上角檔案，選擇影片檔案後即能輸入實驗影片。
2. 將影片播放於軟體視窗，並確認是否流暢。
3. 點擊上方工具列中的座標，為影片建立座標系。
4. 點擊上方工具列中的質點，設立為質點 A。
5. 按住 Ctrl+Shift 鍵，將質點移動到影片標示處。
6. 按下視窗中的開始追蹤，此時右上角的散佈圖會開始記錄數據。
7. 追蹤完畢後，選取右下角的數據並傳送至 Excel 做分析。



圖（七） Tracker 運動分析軟體介面

Visual Studio Code 軟體之傅立葉分析與數值模擬操作與說明：

1. 安裝 Python 環境於 Visual Studio Code 軟體中。
2. 將傅立葉分析之程式碼輸入至程式窗中，並確認能否運行，如圖（八）。
3. 將 Tracker 影片分析之數據整理好並儲存成 csv 檔。
4. 在所需檔案和程式碼檔案放置於同一個資料夾，即完成輸入檔案。
5. 按下程式運行鍵後，數據將以圖表形式輸出並紀錄實驗結果。
6. 將步驟 2 之程式碼替換成數值模擬程式碼，重複步驟 4-6 即完成數值模擬。



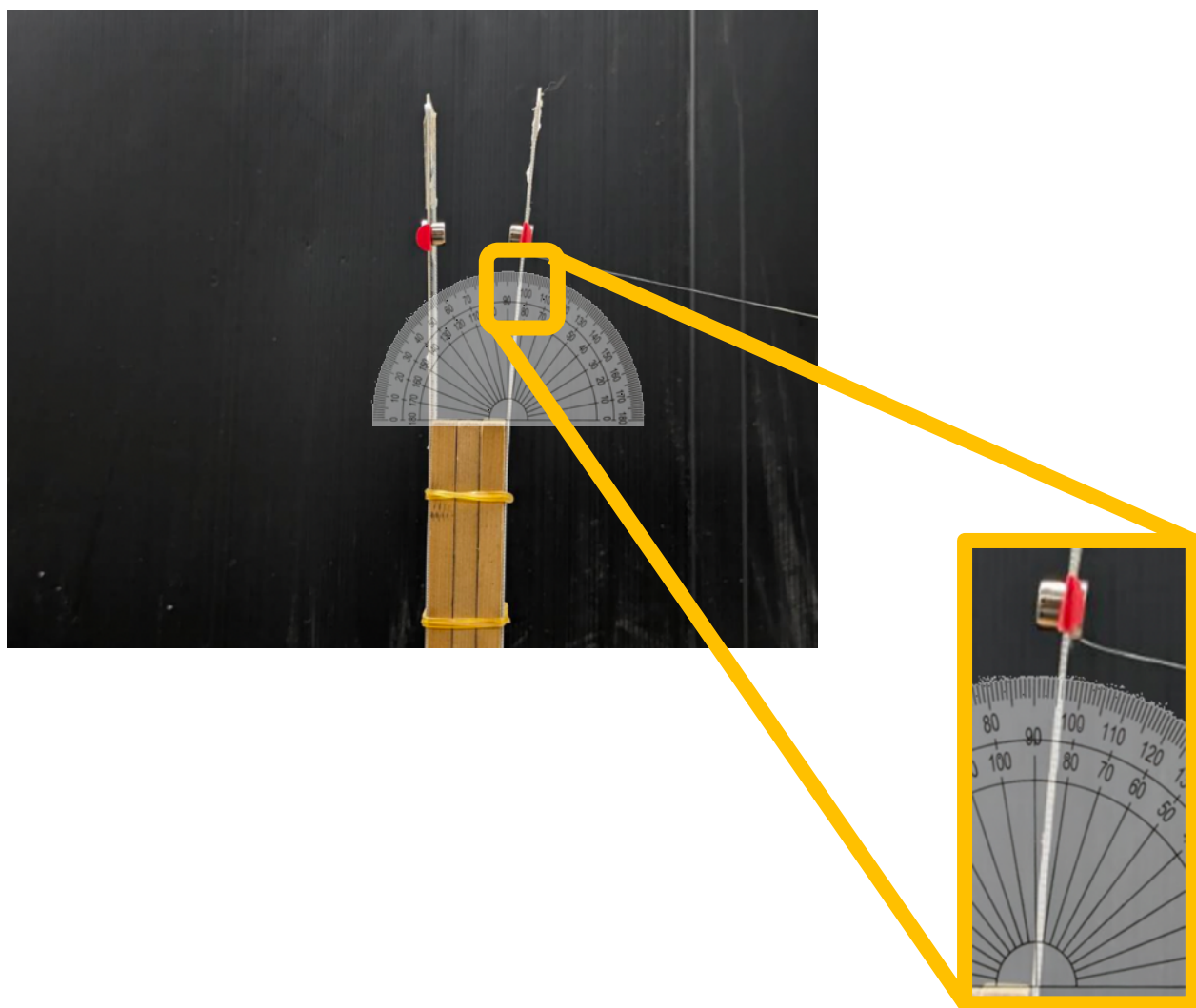
圖（八）數值模擬與傅立葉轉換程式碼

研究(一) 探討彈力振盪器的運動情形

實驗 1-1 初步觀察振盪器的運動

步驟

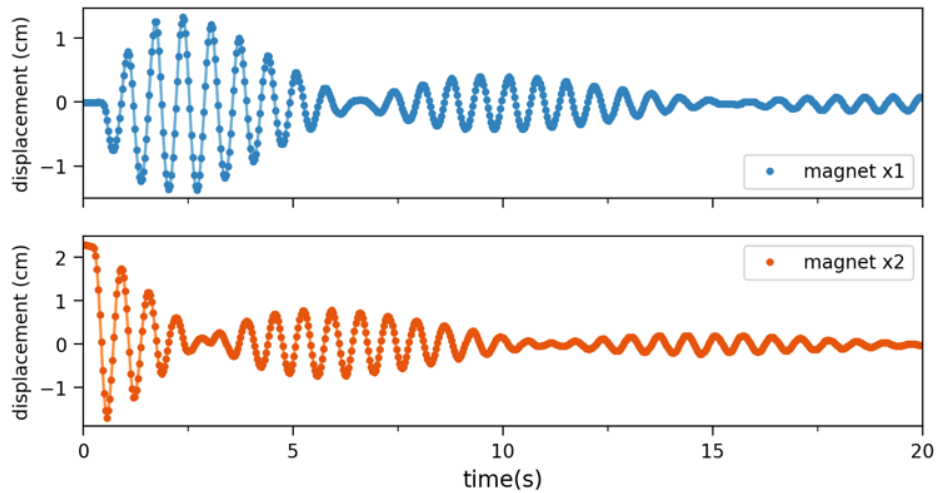
- (1) 架設耦合振盪器。
- (2) 架設攝影器材並平行於實驗器材以進行錄影。
- (3) 擺動其中一片板簧，其中擺動角度保持小於 5 度，用以構成小角度近似，如圖（九）。
- (4) 將完整運動影片錄影後輸入至 Tracker 軟體，進行運動軌跡分析。
- (5) 運動分析完後將數據輸入至 Excel 軟體進行數據整理。
- (6) 將 Excel 檔案輸入 Visual Studio Code 軟體中。
- (7) 將分析結果以圖表形式輸出，完成實驗紀錄。



圖（九）角度須小於 5 度以構成小角度近似

結果與討論

從數據中取位移 d 對時間 t 作圖，如圖（十）所示：



圖（十）兩側振動器之振幅對時間作圖

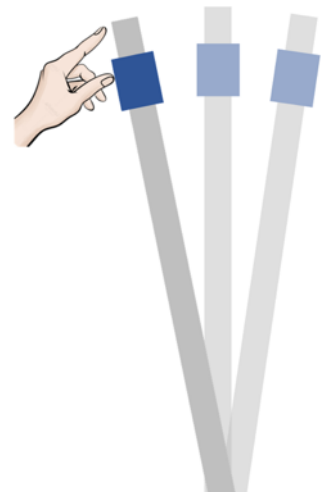
而在圖表中我們可以發現：

- (1) 無論是哪一側的振動器，其位移都會隨著時間演進而降低。
- (2) 在一段固定的時間內，會有若干個波可構成一個組合，此構造被稱為「波包」，而在拍頻的理論推導中，這段時間內的波包產生是因為兩側振動器頻率相近的拍頻所造成。
- (3) 兩側振動器的振幅是略呈相對性的，當磁鐵 X1 的位移處於接近平衡位置時，磁鐵 X2 的位移則接近波峰或波谷。值得一提的是，此處描述的用詞為「接近」平衡位置，是由於為達成波包現象，需構成頻率相近但不完全相同的拍頻。

實驗 1-2 探討位移與時間的關係並進行擬合

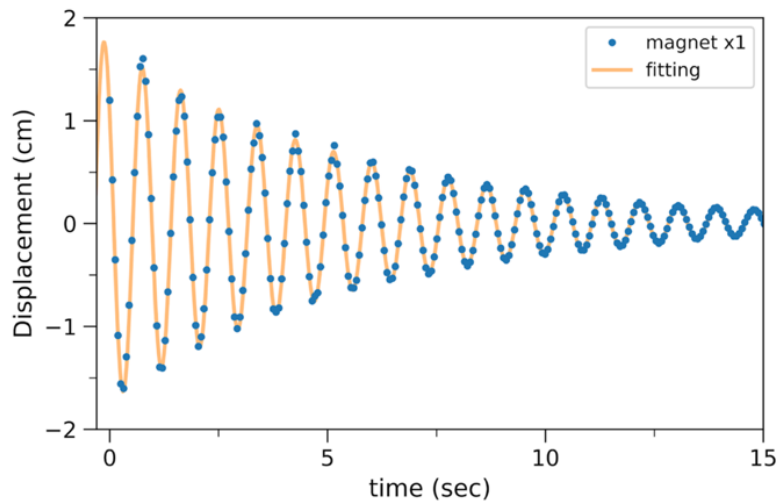
步驟

- (1) 取用單振盪器，拉動此板簧使其進行單振盪運動，如右示意圖。
- (2) 同實驗 1-1 之步驟(2)到(5)之操作，紀錄該振盪器之運動。
- (3) 將 Excel 檔案輸入 Visual Studio Code 軟體中。
- (4) 在程式窗中輸入擬合方程式並按下程式運行鍵。
- (5) 將擬合方程式與數據進行比對與分析。



結果與討論

我們在位移對時間的圖中以推導之單振盪的方程式進行擬合，得出結果如下：



圖（十一）實驗數據與擬合方程式

其中理論之方程式為：

$$x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad \gamma = \beta/m$$

在圖中可以明確發現，數據點都出現在擬合方程式上，擬合效果極佳，進而推出下列發現：

- (1) 此方程式能夠精確符合實驗的數據點，因此在單振盪器中的推論是正確的。
- (2) 擬合後得到係數依序為 $\gamma = 0.275(1/s)$ 、 $\omega_0 = 7.15(\text{rad/s})$

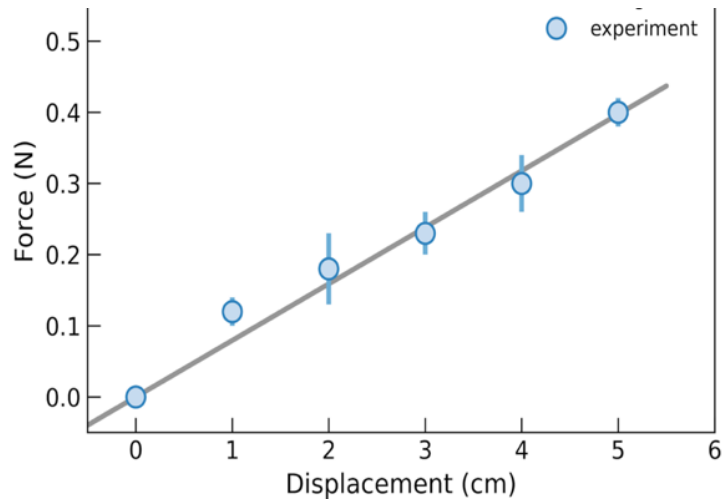
實驗 1-3 探討彈力與位移的關係並進行擬合

步驟

- (1) 將力感測器連結板簧並啟動 Vernier Graphical Analysis 軟體。
- (2) 拉動板簧並以 Tracker 紀錄其位移與時間的數據。
- (3) 將兩者之 Excel 檔案輸入 Visual Studio Code 軟體中。
- (4) 在程式窗中輸入擬合方程式並按下程式運行鍵。
- (5) 將擬合方程式與數據進行比對與分析。

結果與討論

我們在外力對位移的圖中以彈力公式 $F = kx$ 進行擬合，得出結果如下：



圖（十二）外力對振盪器位移作圖

在實驗數據與擬合之方程式中可以發現：

- (1) 實驗數據與方程式大致擬合，可以說明此實驗數據符合彈力公式
- (2) 擬合後得到係數依序為 $k = 7.9 \text{ (N/m)}$ 、 $m = 154.5 \text{ (g)}$

研究(二) 研究適合探討磁力振盪器運動的理論模型

由於在磁力耦合振盪器中所討論的外力為磁力而非彈力，故我們將先前理論中的彈力改成磁力進行討論，

而我們將磁力跟彈力最主要的差異歸納為兩點：

1. 彈簧是線性的系統，而磁力則是非線性的。
2. 彈簧所提供的力能以兩個方向來展現，但磁力只會提供相吸或相斥的力。

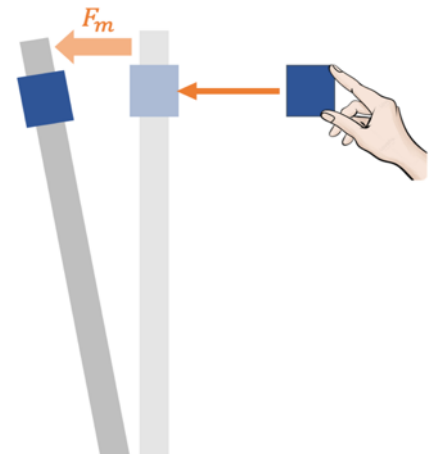
在先前理論推導後可以得到此公式：

$$F(x) = \frac{\kappa}{(x + \gamma)^4}$$

實驗 2-1 探討磁力與兩磁鐵間距離的關係

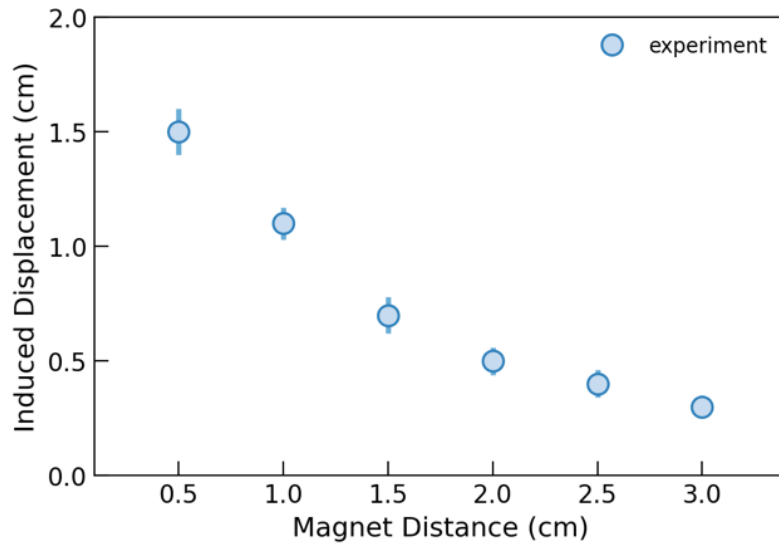
步驟

- (1) 架設一座單一振盪器於桌面。
- (2) 取一塊磁鐵逐漸靠近該振盪器如右示意圖，距離依序為 0.5、1.0、1.5、2.0、2.5、3.0 cm，如右示意圖。



- (3) 測量單一振盪器位移量值並記錄。
- (4) 將數據製成振盪器位移對磁鐵間距離的作圖。
- (5) 透過位移的變化可以經由公式推導出磁力大小，將推導結果紀錄並作圖。
- (6) 以上述磁力公式進行擬合，並討論結果與紀錄參數。

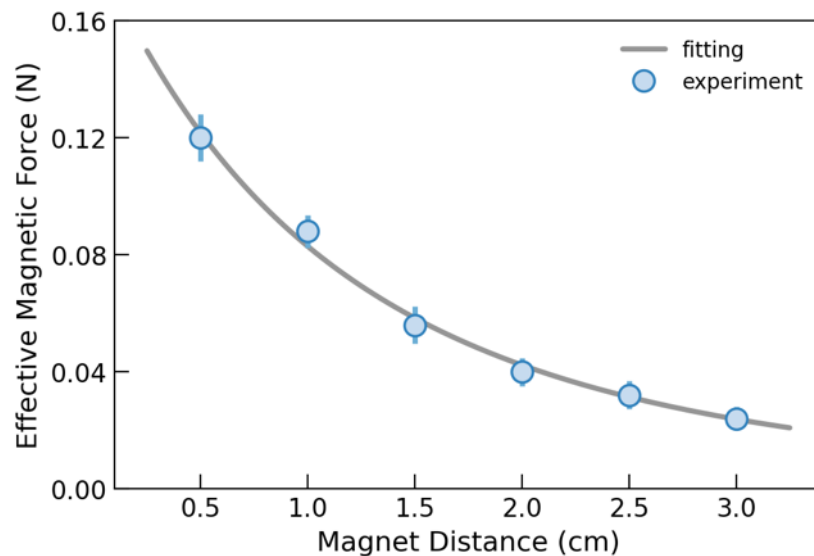
結果與討論



圖（十三）振盪器位移與磁鐵間距離的作圖

將上圖磁鐵靠近所造成的位移代入實驗 1-3 所求得之 $k = 0.079 \text{ (N/cm)}$ ，可得磁力。

呈現如下圖（十四）：



圖（十四）磁力對磁鐵間距離的作圖

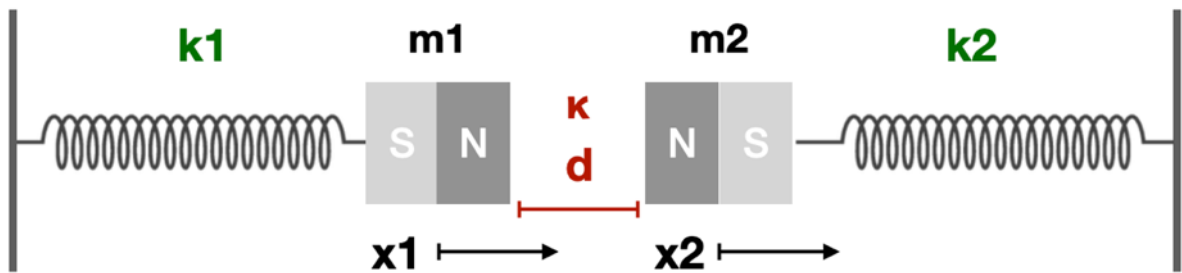
代入磁力公式並擬合後可以得到磁力強度 $\kappa = 73.63 \text{ (N} \cdot \text{cm}^4)$ 、 $Y = 4.45 \text{ (cm)}$

實驗 2-2 以數值模擬討論運動方程式

在理論推導中我們將完整的模型建構出來，運動方程式與研究模型如下列所示：

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - b_1 \dot{x}_1 - \frac{\kappa}{(x_2 - x_1 + d + \gamma)^4} + \frac{\kappa}{(d + \gamma)^4}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - b_2 \dot{x}_2 + \frac{\kappa}{(x_2 - x_1 + d + \gamma)^4} - \frac{\kappa}{(d + \gamma)^4}$$



在上述等式中，公式右項可以分成三個部分討論：彈力、阻尼項以及磁力耦合項

我們將這個公式寫進 Visual Studio Code 中的 Python 進行數值模擬。

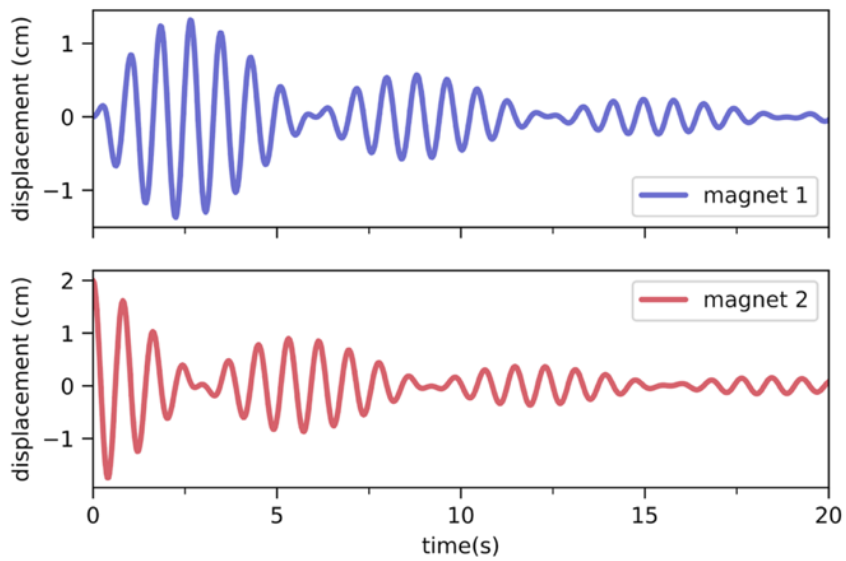
步驟

- (1) 將數值模擬之程式碼編寫於 Visual Studio Code 軟體的程式窗中，程式碼如附錄中所示。
- (2) 代入先前研究（一）與實驗 2-1 之參數結果，如下表（二）所示：
- (3) 將程式運算之結果輸出成位移對時間作圖，作為理論圖形。
- (4) 將實驗數據與理論圖形進行比對與擬合。

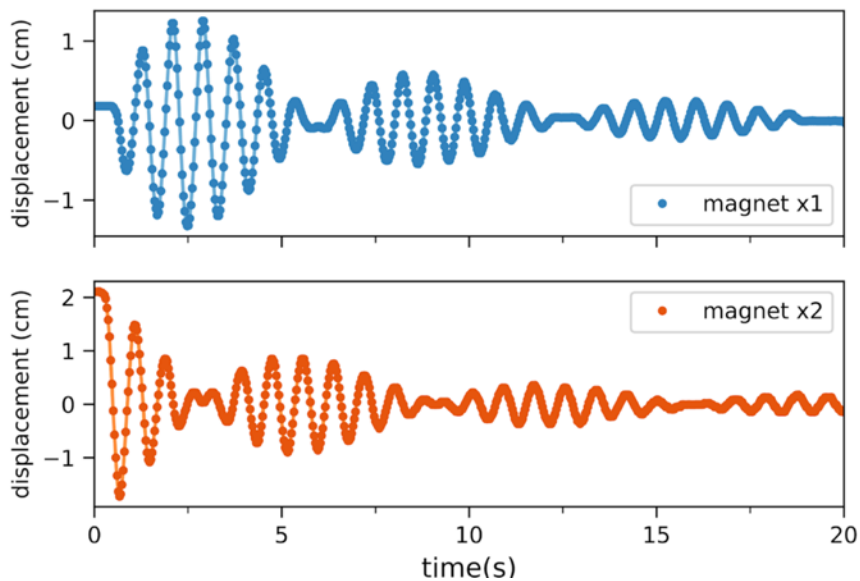
表（二） 上述實驗所得參數整理

	m	k	b	κ	γ
數值	154.5 g	7.9 (N/m)	0.275 (1/s)	73.63 (N · cm ⁴)	4.45 (cm)

結果與討論



圖（十五）理論推論出之運動軌跡圖



圖（十六）實驗所得之運動軌跡圖

在上二圖中我們可以發現兩者的波出現位置相同，理論值能夠非常精確地符合實驗數值，因此我們可以確定，理論推導出之運動方程式是合理的，因此我們將針對此運動方程式的係數設立變因並進行實驗。

研究(三) 探討影響耦合振盪器運動的因素

在研究（二）中我們以 Python 數值模擬發現推導之運動方程式可以準確符合振盪器之實驗數據，因此在研究（三）中，我們將針對運動方程式中所牽涉之變因進行實驗設計。

實驗 3-1 探討改變磁力強度對於振動頻率的影响

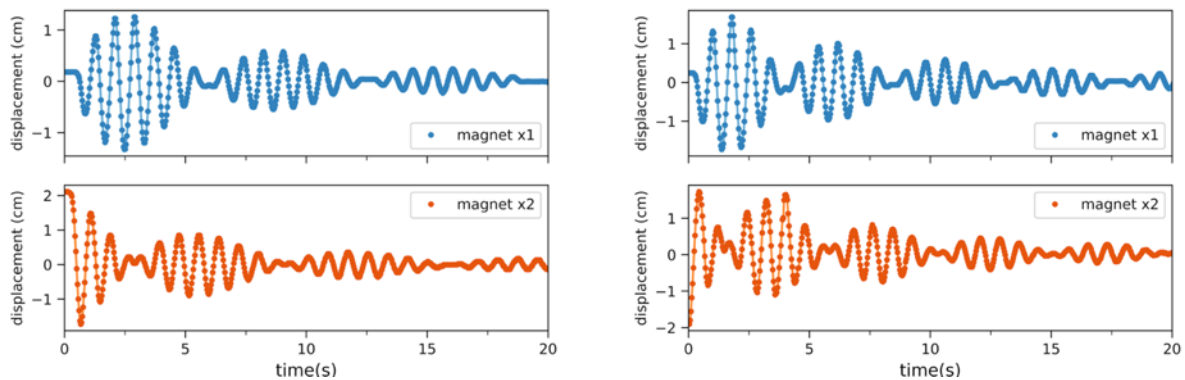
我們發現在運動方程式右項之磁力耦合項中，有一變因為磁力強度 κ ，而我們將以改變磁鐵數量來改變磁力強度 κ 。然而在改變磁鐵數量同時也會改變磁鐵質量 m ，因此我們以黏土補足減少的質量，進而固定質量量值。

步驟

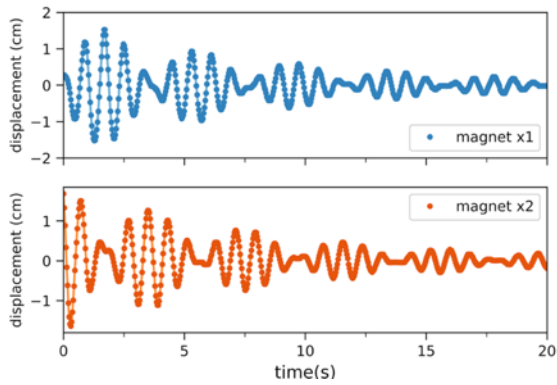
- (1) 測量最大磁鐵量時的磁鐵重量，作為最大值。
- (2) 每減少一顆磁鐵時即補充相應的黏土重量，以保持每筆數據質量為定值。
- (3) 架設好磁力耦合振盪器後改變振盪器上磁鐵數量依序為 1-4 顆磁鐵。
- (4) 擺動其中一片板簧，其中擺動角度保持小於 5 度，用以構成小角度近似。
- (5) 將完整運動影片錄影後輸入至 Tracker 軟體，進行運動軌跡分析。
- (6) 運動分析完後將數據輸入至 Excel 軟體進行數據整理。
- (7) 數據整理後輸入 Visual Studio Code 軟體進行傅立葉分析。
- (8) 將分析結果輸出成圖表後進行比較。

結果與討論

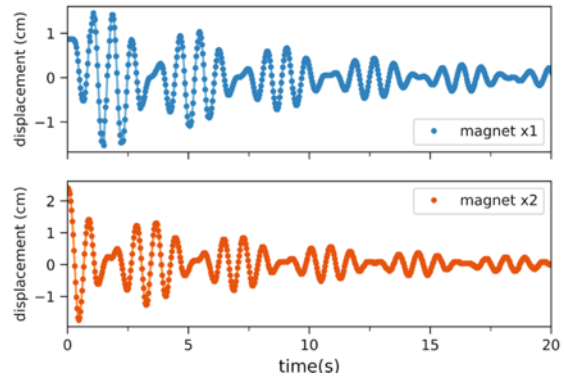
下圖依序為 1-4 顆磁鐵之位移對時間作圖：



圖（十七）一顆磁鐵之位移對時間做圖 圖（十八）兩顆磁鐵之位移對時間做圖

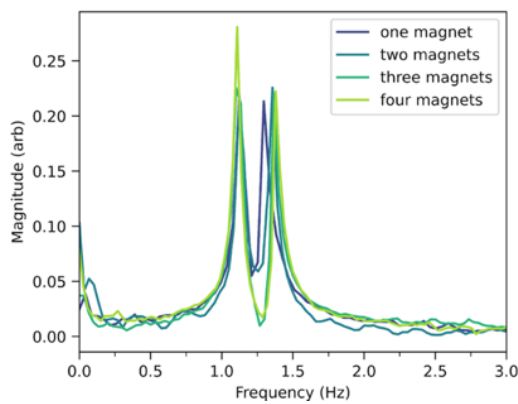


圖（十九）三顆磁鐵之位移對對時間做圖

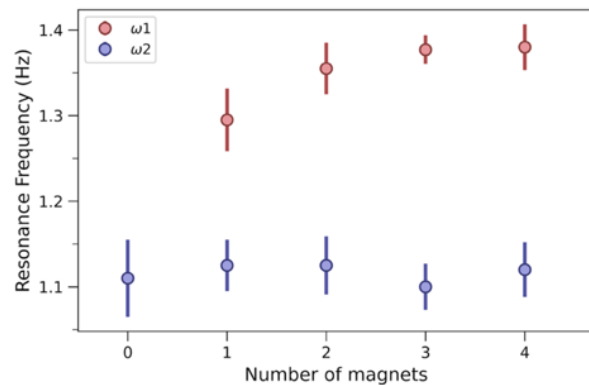


圖（二十）四顆磁鐵之位移對對時間做圖

而將上列數據進行傅立葉分析作圖如下：



圖（廿一）四種磁鐵之傅立葉分析圖



圖（廿二）振盪頻率對磁鐵數量作圖

在上圖中我們可以發現：

- (1) 左側波峰無明顯移動，因左側振盪器為同步性耦合振盪，其振動頻率只受 k 、 m 影響。
- (2) 右側的波峰會隨磁鐵增加而往右移，是因為右側振盪器為非同步性耦合振盪，振盪頻率會受磁力強度 κ 影響，因此振動頻率會隨著磁力強度的增加而增大。

實驗 3-2 探討改變磁力強度對於振動頻率的影響

我們也在運動方程式右項之磁力耦合項中，發現有一變因為磁鐵間距離，在實驗 3-2 中我們將改變此變因並進行討論。

步驟

- (1) 架設好磁力耦合振盪器後改變磁鐵間距離依序為 2.6、2.2、2.0、1.6 cm。
- (2) 擺動其中一片板簧，其中擺動角度保持小於 5 度，用以構成小角度近似。
- (3) 將完整運動影片錄影後輸入至 Tracker 軟體，進行運動軌跡分析。
- (4) 運動分析完後將數據輸入至 Excel 軟體進行數據整理。

(5) 數據整理後輸入 Visual Studio Code 軟體進行傅立葉分析。

(6) 將分析結果輸出成圖表後進行比較。

結果與討論

下圖依序為四種距離之位移對時間作圖：

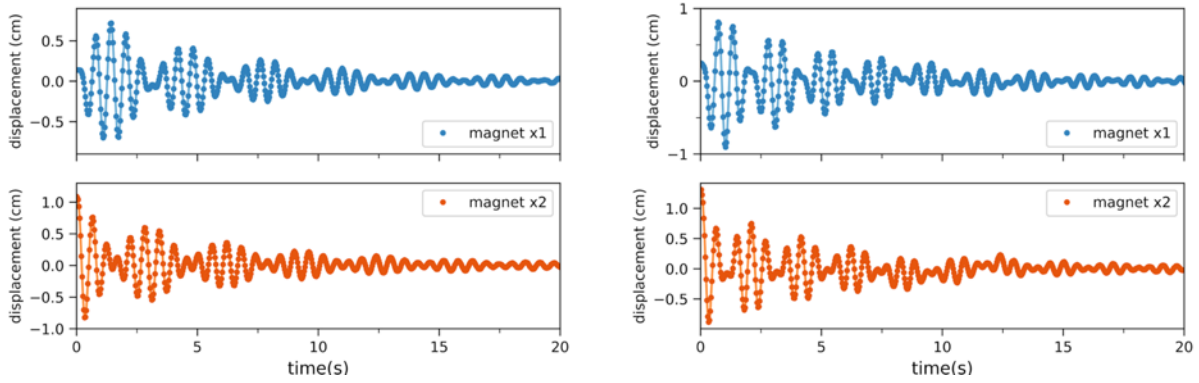


圖 (廿三) 距離 2.6 cm 時位移對時間作圖 圖 (廿四) 距離 2.2 cm 時位移對時間作圖

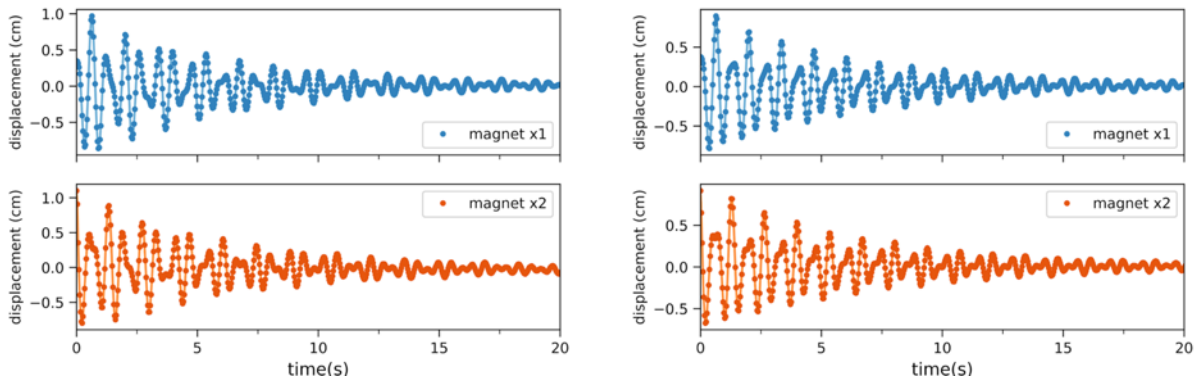


圖 (廿五) 距離 2.0 cm 時位移對時間作圖 圖 (廿六) 距離 1.6 cm 時位移對時間作圖

將上列數據進行傅立葉分析作圖如下：

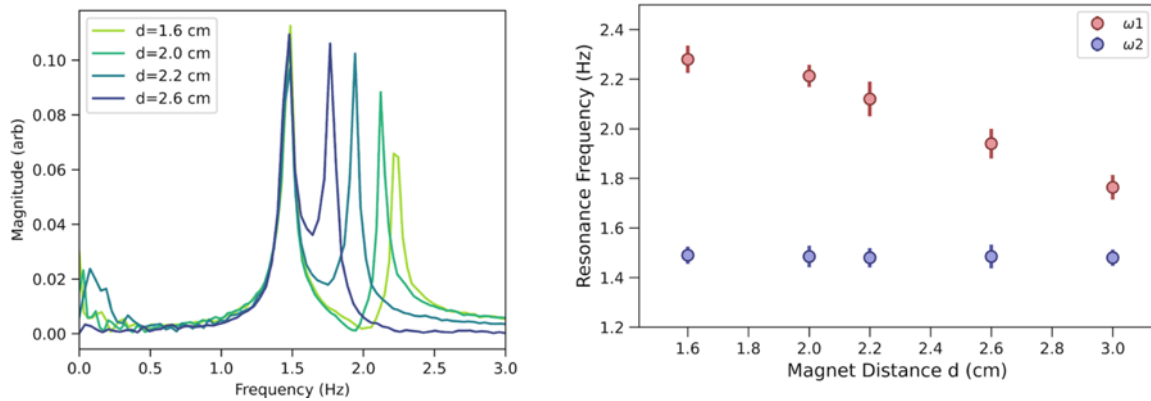


圖 (廿七) 四種距離之傅立葉分析圖 圖 (廿八) 共振頻率對磁鐵間距離作圖

在上圖中我們可以發現：

- (1) 左側波峰無明顯移動，因左側振盪器為同步性耦合振盪，其振動頻率只受 k 、 m 影響。
- (2) 右側的波峰會隨距離增加而往右移，是因為右側振盪器為非同步性耦合振盪，振盪頻率會受磁力強度 κ 影響，因此振動頻率會隨著距離的減少而增大。

實驗 3-3 探討改變磁鐵間初始位移對於振動頻率的影響

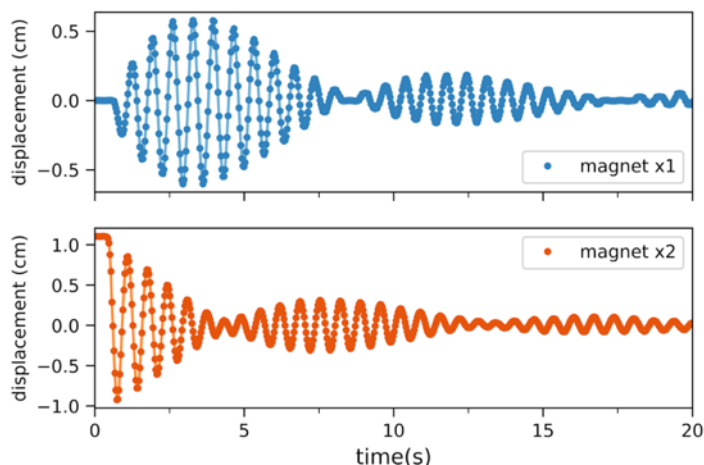
在多數具有振盪行為的系統，其振幅大多會受初始位移的影響，然而在我們所推廣的運動方程式中並沒有找到初始位移的參數。為求運動方程式之準確性，我們將改變磁鐵間初始位移 Y ，並討論初始位移是否如方程式所言般地不會影響振動頻率。

步驟

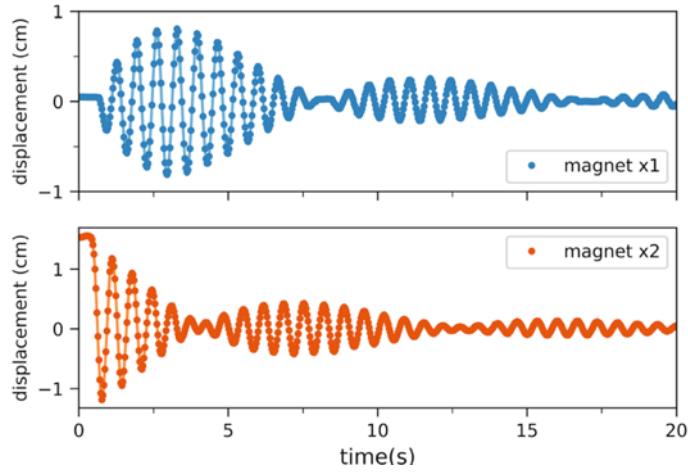
- (1) 將磁力耦合振盪器對立放置，依序改變兩振盪器間位移為 1.1、1.5、2.2 cm。
- (2) 擺動其中一片板簧，其中擺動角度保持小於 5 度，用以構成小角度近似。
- (3) 將完整運動影片錄影後輸入至 Tracker 軟體，進行運動軌跡分析。
- (4) 運動分析完後將數據輸入至 Excel 軟體進行數據整理。
- (5) 數據整理後輸入 Visual Studio Code 軟體進行傅立葉分析。
- (6) 將分析結果輸出成圖表後進行比較。

結果與討論

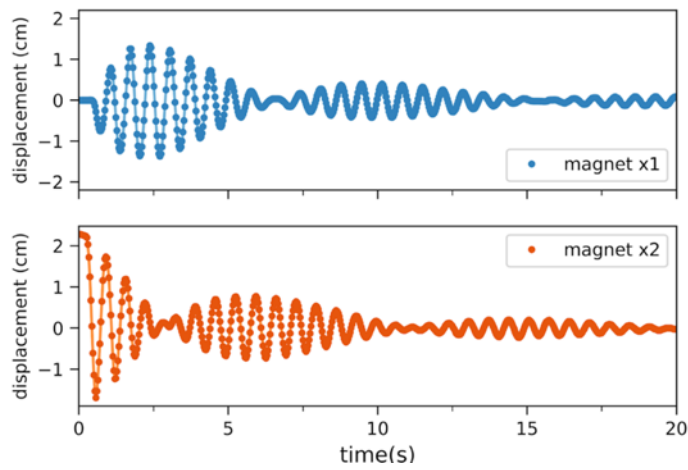
下圖依序為初始位移 1.1、1.5、2.2 cm 的位移對時間作圖：



圖（廿九）初始位移為 1.1 cm 之位移對時間作圖

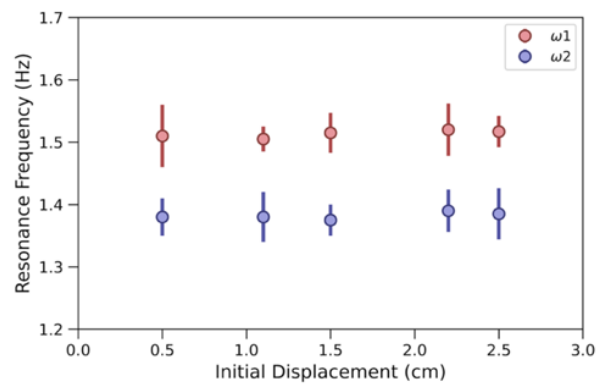
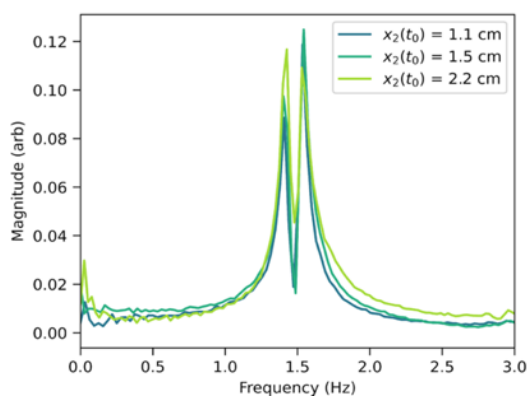


圖（三十）初始位移為 1.5 cm 之位移對時間作圖



圖（卅一）初始位移為 2.2 cm 之位移對時間作圖

而將上列數據進行傅立葉分析作圖如下：



圖（卅二）三種初始位移之傅立葉分析圖

圖（卅三）共振頻率對初始位移作圖

在圖中我們發現下列幾點：

- (1) 左側波峰無明顯移動，因左側振盪器為同步性耦合振盪，其振動頻率只受 k 、 m 影響。
- (2) 右側的波峰並不會隨距離增加而移動，符合在公式中沒有發現到初始位移變因的情形，因此推論初始位移並不會對振盪頻率造成影響。

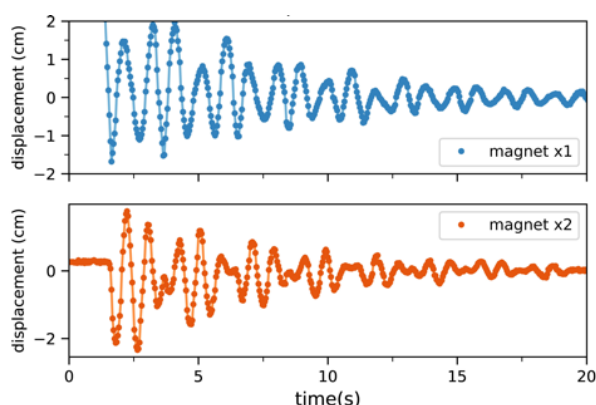
實驗 3-4 探討改變兩側振盪頻率對波包與對稱性構成之影響

在研究（一）中我們提及頻率的略微差異對於波包構成之重要性，而為了更精確地理解略微差異的概念，我們以改變板簧長度的方式改變振盪頻率，並探討其對於對稱性之影響。

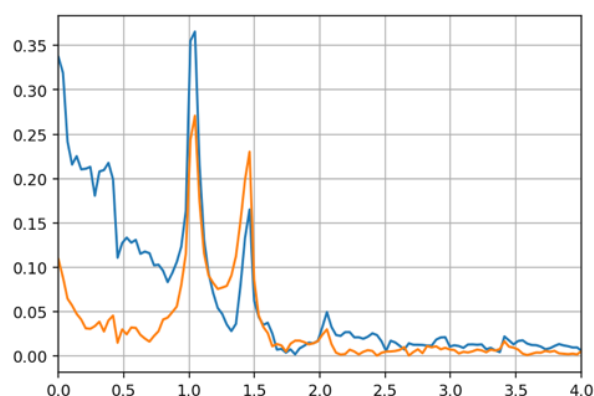
步驟

- (1) 將磁力耦合振盪器對立放置，改變其中一側振盪器中板簧之長度，使其高於另一側振盪器分別為 0、1.1、1.5cm。
- (2) 擺動其中一片板簧，其中擺動角度保持小於 5 度，用以構成小角度近似。
- (3) 將完整運動影片錄影後輸入至 Tracker 軟體，進行運動軌跡分析。
- (4) 運動分析完後將數據輸入至 Excel 軟體進行數據整理。
- (5) 數據整理後輸入 Visual Studio Code 軟體進行傅立葉分析。
- (6) 將分析結果輸出成圖表後進行比較。

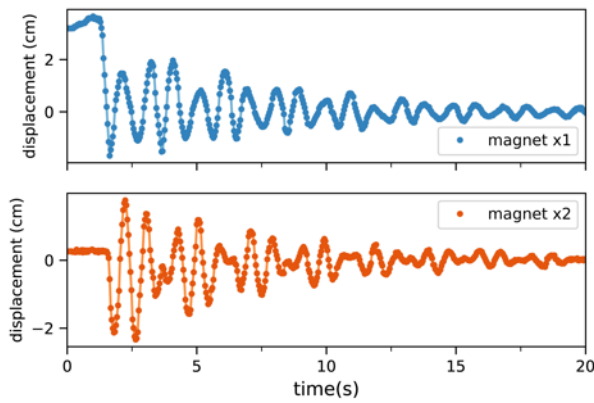
結果與討論



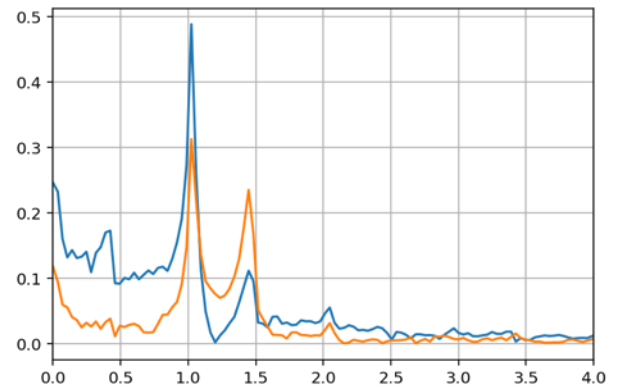
圖（卅四）距離差為 1.5 cm 時的位移



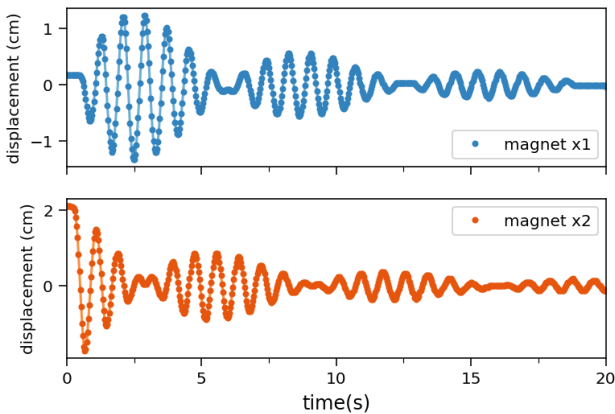
圖（卅五）距離差為 1.5 cm 時傅立葉分析圖



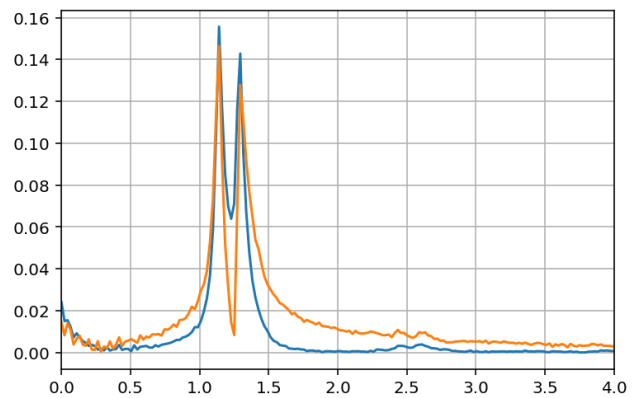
圖(卅六) 距離差為 1.0 cm 時的位移



圖(卅七) 距離差為 1.0 cm 時傅立葉分析圖



圖(卅八) 距離差為 0 cm 時的位移



圖(卅九) 距離差為 0 cm 時傅立葉分析圖

在上述圖中我們發現下列幾點：

- (1) 在觀察位移圖中可以發現，當距離差越大，意即兩者頻率差距越大時，其振盪之對稱性會隨之降低，並且在距離差為 0 cm 時有最好的對稱性效果。
- (2) 在距離差為 1.5 cm 和 1.0 cm 時都沒有觀察到明顯的波包形成，而此與先前於實驗 1-1 之討論相符合，波包的形成需建構在兩者振盪頻率差距極小的情況。

伍、 討論

研究(一) 探討彈力振盪器的運動情形

- 一、在振動器位移對時間之作圖中可以發現，有若干個波構成一個組合稱為「波包」，而在理論推導中我們得知波包的產生是因為兩側振動器頻率相近的拍頻所造成。
- 二、兩側振動器的振幅是略呈相對性的，當磁鐵 X1 的位移處於接近平衡位置時，磁鐵 X2 的位移則接近波峰或波谷。值得一提的是，此處描述的用詞為「接近」平衡位置，是由於為達成波包現象，需構成頻率相近但不完全相同的拍頻。

三、在實驗 1-2 與 1-3 中，我們將理論推導之數個公式與實驗數據進行擬合，由於擬合曲線能夠非常準確的坐落於實驗數據點上，因此我們認為該擬合是有價值的，於擬合公式中所得的參數 m 、 k 、 b 能夠於未來研究動機中新型機械式雙磁性板簧磁力計的應用。

研究(二) 研究適合探討磁力振盪器運動的理論模型

- 一、在研究（二）中我們將磁力與相關理論納入系統考量，透過推導出的公式與擬合可以發現擬合度具有一定的參考價值，以位移對磁鐵間距離與磁力之實驗數據推論出公式中係數 κ 和 γ 。
- 二、在擁有完整係數後，我們建構出完整的理論模型，其中包含了彈力項、阻尼項與磁力耦合項，在我們代入係數進行數值模擬後發現，理論值所呈現之圖形與實驗數值相符程度非常高，因此推論我們設計的理論能夠很精確描述振盪器運動之情形。

研究(三) 探討影響耦合振盪器運動的因素

- 一、透過研究（二）我們得知，推導出之理論模型能用以描述振動情形，因此我們便能對公式中牽涉到的變因設計實驗進行討論。
- 二、在傅立葉分析圖中可以發現，左側波峰無明顯移動，因為左側振盪器為同步性耦合振盪，其振動頻率只受 k 、 m 兩因素影響。
- 三、我們發現右側的波峰會隨變因改變而移動，因為右側振盪器為非同步性耦合振盪，除了 k 和 m 之外，振盪頻率也會受磁力強度 κ 影響，因此當兩振盪器之磁力強度上升或初始位置變短時，其振盪頻率都有上升的趨勢。
- 四、為求方程式之準確性，我們也討論了在方程式中沒有發現的磁鐵初始位移，而如同理論所呈現地，初始位移並不會對振盪頻率造成影響。
- 五、在討論對稱性構成之條件時，我們發現振盪對稱性如同理論推導所言，取決於兩者頻率必須相當接近且不能相等，此時才能形成可觀察到的對稱性與波包。

延伸討論（一）將磁力強度等效為彈簧之討論

我們受研究（二）實驗中的啟發，我們希望將磁力耦合振盪器與我們熟悉的彈簧耦合振盪器連接起來，為此我們對磁力項以泰勒級數展開，進而使磁力在小範圍內線性化：

$$\begin{aligned}\frac{\kappa}{(x_2 - x_1 + L)^4} - \frac{\kappa}{L^4} &\approx \frac{\kappa}{L^4} \left[1 - \frac{4}{L}(x_2 - x_1) + \dots \right] - \frac{\kappa}{L^4} \\ &\approx -\frac{4\kappa}{L^5}(x_2 - x_1)\end{aligned}$$

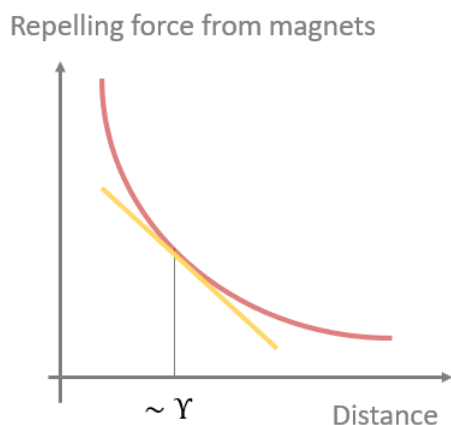
於上述公式中可以得到新的磁力係數 κ' :

$$\kappa' = \frac{4\kappa}{L^5}$$

將此結果代入彈簧的耦合震盪公式後可以得到新的彈簧耦合震盪公式 :

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - b_1 \dot{x}_1 + \kappa' (x_2 - x_1)$$

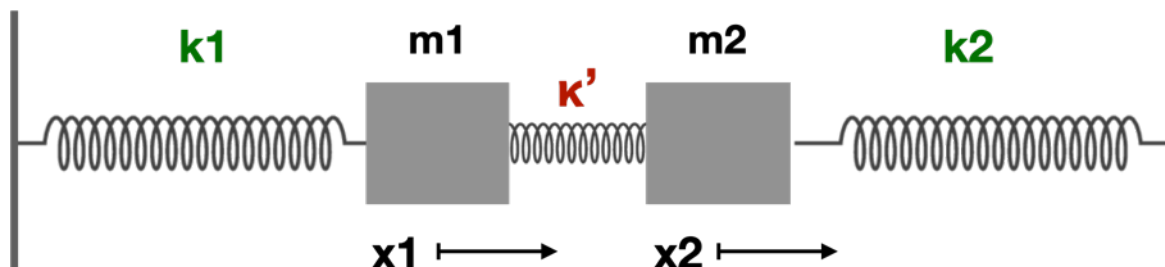
$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - b_2 \dot{x}_2 - \kappa' (x_2 - x_1)$$



圖(四十) 近似模型的發生條件圖

接著討論此近似模型的發生條件 :

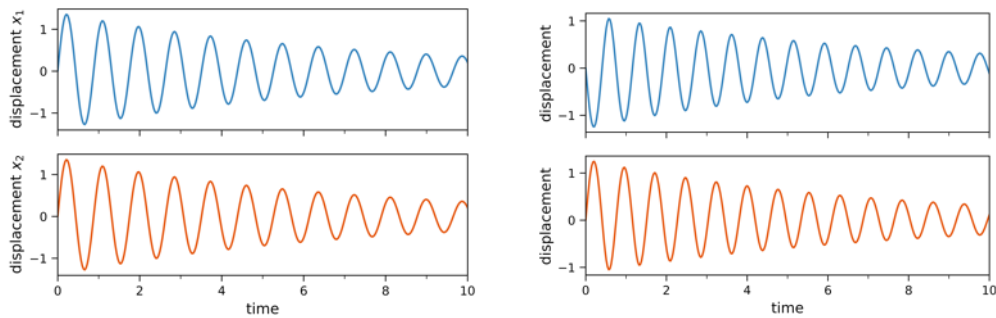
當兩側彈簧彈力係數 k_1 及 k_2 遠大於中間的 κ' 時，中間的彈簧在振盪時只會被旁邊的彈簧擠壓及拉伸，即表示此時 κ' 會表現如磁鐵的單方向性，至此我們就能將磁力模型等效成彈簧耦合振盪器模型，如下圖（四十一）：



圖（四十一）彈簧耦合振盪器

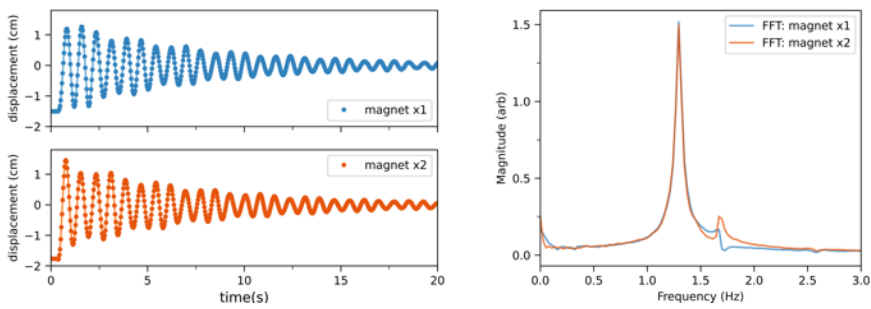
延伸討論（二）找尋此系統的簡正模

由於我們在沒有線性化耦合的情況下求解完整的運動方程式，通過仔細地選擇初始條件，我們在數值上發現了兩種正常模式，類似於彈簧耦合情況：



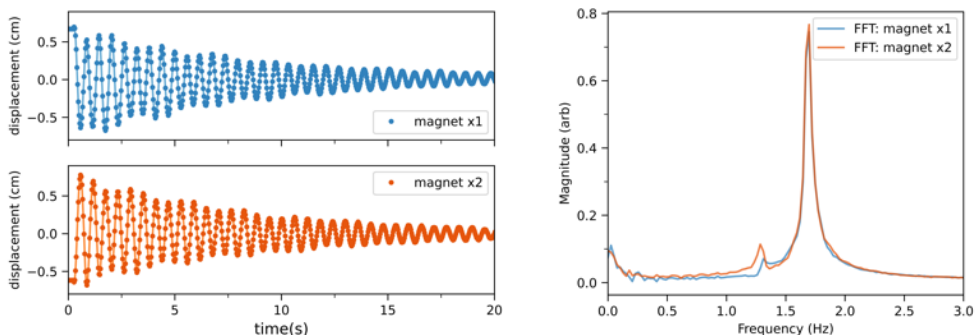
圖（四十二）左圖為同步模態，右圖為非同步模態

在圖（四十二），我們可以從數值模擬的結果看出，以彈簧作為模型之簡正模運動軌跡並沒有明顯的波包產生，因此推論其中沒有拍頻存在，為此我們也進行實驗來驗證我們的猜想：



圖（四十三）同步模態的實驗軌跡與傅立葉轉換的結果

從圖（四十三）我們可以發現此軌跡與我們計算結果非常相似，且從傅立葉分析的結果圖也可以明顯看到只有一個明顯的震盪頻率產生，代表此二系統單獨以相同頻率震盪，這符合我們對同步模態的猜想。



圖（四十四）非同步模態的實驗軌跡與傅立葉轉換的結果

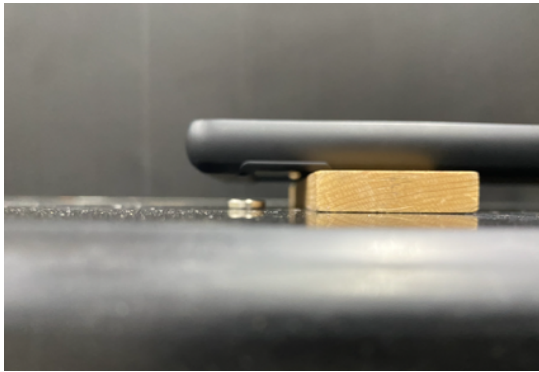
從圖（四十四）我們可以看見和同步模態類似的結果，只有一個明顯的震盪頻率在此系統產生，與同步模態不同的是此頻率略高一些，這也符合我們在理論推導中對非同步模態的假設。

延伸討論（三）討論該振盪器應用於測量磁性量值之可能性

在理論推導中，我們發現磁力耦合振盪器能測量未知磁鐵之磁性量值，因此在此討論中將以實際數值與理論推導之數值進行討論。

實際數值

我們利用手機 Phyphox 軟體中的磁力計進行測量，當磁鐵距離手機 1cm 時數值為 6.25 高斯



圖（四十五）測定磁力架設圖



圖（四十六）Phyphox 軟體測量

理論數值

在進行傅立葉分析時，我們可以藉由兩波峰數值分別得到 ω_s 和 ω_f ，而經運算後可得：

$$\omega_f^2 - 2\omega_s^2 = \frac{\kappa}{m}$$

其中 m 為等效質量，可由先前實驗得知為 154.5g，因此我們能求得 κ 的數值。

合併在理論推導的簡化方程式後可得：

$$(\omega_f^2 - 2\omega_s^2)m \approx -\frac{3}{2}\pi\mu_0 M^2 R^4$$

在 μ_0 、 R 已知的情況下，我們可以求得磁化強度 M 的數值：

$$M = \sqrt{\frac{-2m(\omega_f^2 - 2\omega_s^2)}{3\pi\mu_0 R^4}}$$

在此討論中我們將選用實驗 3-1 中一顆磁鐵實驗組之數據進行討論：

當 $\omega_s = 1.11$ 和 $\omega_f = 1.34$ 時，代入計算後可得 $M = 6.65$ 高斯，和實際值之差距在誤差範圍內，因此可以說明磁力耦合振盪器與運動方程式能夠有效地測量未知磁性物質之磁性量值。

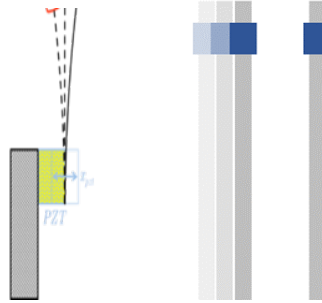
陸、 結論

- 一、 在建設理論的過程中，我們第一步先採用彈力的系統進行討論，在推導相關公式後與實驗數值擬合後發現擬合效果極佳，因此推論出的參數具有一定參考價值。將磁力系統納入考量後推導磁力相關公式並整合，經由擬合過程發現公式能夠準確描述物體的運動模式，在整合了彈力與磁力公式的方程式與參數後，我們推廣並建立了能描述振盪器振盪之運動方程式，於實驗數據中的整合也發現其極高的擬合度，因此我們所設計的理论方程式對於描述該振盪器運動模式是有很高的參考價值。
- 二、 在觀察振盪器運動情形時，我們發現了波包的構造，在理論推導中得知，此波包的產生是與兩振盪器頻率相近但不完全相同的拍頻所造成。而在簡正模的討論中我們發現，由於同步模態之振盪頻率，並不如非同步性模態會受磁力強度 κ 影響，因此兩者頻率會有些微差異，進而造成拍頻與波包的產生。
- 三、 在針對推廣之運動方程式討論影響參數時，我們發現兩磁鐵間距離、初始位移與磁力強度都會影響振盪頻率，在研究（三）的實驗中發現，當兩磁鐵間距離越小或磁力強度越大時，都會造成振盪頻率的上升，而初始位移並不會對振盪頻率造成影響。
- 四、 在研究（三）中我們也發現了同步與非同步模態之應用，在傅立葉分析圖中可以得知，左側波峰並不會隨著變因的改變而移動，是因其為同步模態的振盪頻率，只受到變因 k 和 m 影響；而右側因為是非同步性模態，其振盪頻率會受磁力強度影響，因此會受到實驗變因改變而左右位移。
- 五、 在進行與實際數值之比較中我們發現，由理論推出之理論值與實驗值之誤差為 5.8%，更增加了磁力耦合振盪器對於測量磁性量值應用的可能性。

柒、 展望

- 一、 在研究（一）和研究（二）中，我們設計了一個能精確描述振盪器運動模式的運動方程式，在數值模擬後也於研究（三）完成了剩餘變因之實驗討論。然而在理論設計的過程中，為求數學運算之合理性，我們添加了一個單位為 cm 的參數 Y ，雖然於數值模擬中可以求得其準確數值，但我們希望能在未來實驗中討論其相關的參數與變因，使我們設計之運動方程式能夠更加完善。

二、在實驗動機中我們提出了設計機械式磁性雙板簧磁力計的可能性，相較於現行需要壓電材料的單板簧懸臂磁力計，我們利用耦合振盪的模式來解出未知磁性物質的磁性。未來希望可以進一步擴增量測之適用範圍，並應用於更高磁力強度之測量，藉此完整化機械式磁性雙板簧磁力計的製作與理論驗證。



圖(四十七) 搭配壓電材料的單板簧磁力計與我們設計的機械式磁性雙板簧磁力計的比較

捌、參考資料

- (1) Magnet Coupled Oscillator (2014). <https://www.youtube.com/watch?v=vKUKPs1UJ4k>
- (2) Thornton, S. T., & Marion, J. B. (2021). Classical dynamics of particles and systems. Cengage Learning. ISO 690
- (3) Yyknosekai. (2016, September 8). Vibration Modes of a Coffee Cup Part 1: A Tribute to Ng Boon Leong. 物理の世界. From <https://yyknosekai.wordpress.com/2016/09/08/vibration-modes-of-a-coffee-cup-a-tribute-to-ng-boon-leong/>
- (4) Vokoun, D., Beleggia, M., Heller, L., & Šittner, P. (2009). Magnetostatic interactions and forces between cylindrical permanent magnets. *Journal of magnetism and Magnetic Materials*, 321(22), 3758-3763
- (5) G. Donoso, C. L. Ladera, and P. Martín, *European Journal of Physics* **31**, 433 (2010).
- (6) Przybyłowicz, Piotr & Szmidt, Tomasz. Electromagnetic damping of a mechanical harmonic oscillator with the effect of magnetic hysteresis. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 47. 259-273.(2009)
- (7) Sodano, H. A. Eddy Current Damping in Structures. *The Shock and Vibration Digest*, 36(6), 469-478. (2004).

附錄

Visual Studio Code 傅立葉分析與數值模擬程式碼：

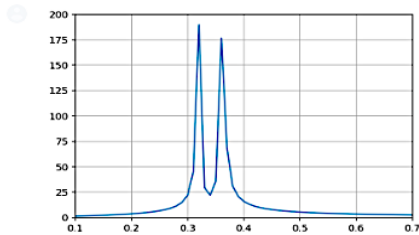
Find the eigen-frequencies by Fourier Transform

```
[ ] from scipy.fft import fft, fftfreq

[ ] # Number of samples in normalized_tone
    N = len(t)

    yf = fft(wsol[:, 0])
    xf = fftfreq(N, 1 / 100)

    plt.plot(xf[:int(N/2)], np.abs(yf[:int(N/2)]))
    plt.xlim(0.1, 0.7)
    plt.ylim(0, 200)
    plt.grid()
    plt.show()
```



This kind of makes sense, from Figure 1, we see that the high frequency oscillation has ~ 3-4 oscillations in 10 seconds, and the low frequency oscillation occurs in a timescale ~ 20 seconds.

From the fourier transform, we see two main frequencies, $f_1 \sim 0.31\text{Hz}$ and $f_2 \sim 0.37\text{Hz}$:

$$\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) = 2 \cos\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right) \cos\left(2\pi \frac{f_2 - f_1}{2} t\right)$$

which $(f_1 + f_2)/2 \sim 0.34\text{Hz} \rightarrow 3-4$ oscillations per 10 seconds and $(f_2 - f_1)/2 \sim 0.03\text{Hz} \rightarrow 1$ oscillation per 20 seconds

Note that the beat frequency is defined as $f_{\text{beat}} = f_1 - f_2$

Numerically solve the magnetically coupled oscillator

Ref: <https://scipy-cookbook.readthedocs.io/items/CoupledSpringMassSystem.html>

```
[ ] from scipy.integrate import odeint

[ ] def vectorfield(w, t, p):
    """
    Defines the differential equations for the coupled spring-mass system.
    w : vector of the state variables: w = [x1, y1, x2, y2]
    t : time
    p : vector of the parameters: p = [m1, m2, k1, k2, kappa, L]
    """
    x1, y1, x2, y2 = w
    m1, m2, k1, k2, b1, b2, kappa, L = p
    f = [y1,
        (-b1 * y1 - k1 * x1 - kappa / (x2 - x1 + L)**4 + kappa / L**4) / m1,
        y2,
        (-b2 * y2 - k2 * x2 + kappa / (x2 - x1 + L)**4 - kappa / L**4) / m2]
    return f

[ ] np.sqrt(7.55/(13.86/1000))

23.339516805903347

[ ] 7.9/7.15**2

0.15453078390141328
```

【評語】 051806

此實驗針對磁力耦合振盪器進行理論建構與實驗設計，並對此振盪器進行理論建構與實驗設計，找出描述該振盪器運動模式之運動方程式。實驗結果發現理論可以精確的描述震盪，然磁鐵的耦合震盪是一已被完全了解的課題，結果紮實但不是那麼創新。

作品海報

耦合振盪器於磁場內的
運動與理論模型探討

壹、摘要

此研究針對磁力耦合振盪器進行理論建構與實驗設計，在理論建構中，我們先以彈力作為外力並推導公式，與實驗數據擬合後發現擬合參數極具參考價值。將磁力引入系統並推導公式，發現其與實驗數值擬合效果也極好。融合上述公式與參數後推廣出能描述振盪器運動模式之運動方程式，以Python數值模擬發現，此方程式與數據十分吻合且能產生波包與頻率下降等真實情況，故推論該運動方程式是有一定價值的。在傅立葉分析中發現了簡正模之應用，且當磁鐵初始距離越短或磁力強度越大時，振盪頻率都會有所提升，而初始位移不會造成影響。而本研究的成果將可透過一已知磁性量值之磁鐵求出另一板簧上物質之磁性量值，進而應用到新型機械式磁性雙板簧的懸臂磁力計設計。

貳、實驗動機

懸臂磁力計是量測材料磁性的一個有力工具，利用外加磁場下對壓電材料的壓力差異所產生的電訊號差異來反推出待測物的磁性大小。我們想到之前網路上看過兩個磁鐵相互進行耦合振盪的影片，若能理解其耦合振盪的模式，就能在不用壓電材料的情況下測量未知磁鐵磁性。本研究將對此振盪器進行理論建構與實驗設計。並找出能描述該振盪器運動模式之運動方程式。

參、研究目的

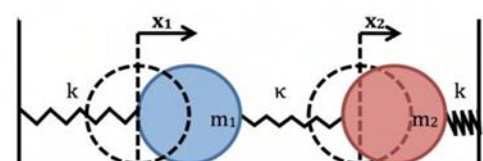
- 一、觀察單一與耦合振盪器運動的模式。
- 二、找出能夠模擬耦合振盪器的模型與方程式進行探討。
- 三、探討耦合振盪器於磁場內運動與相關參數的變化。
- 四、比較彈力振盪器與磁力振盪器之差別與修正。
- 五、討論運動同步性對於振盪器運動的影響。

肆、研究過程與方法

一、理論與公式討論

(一) 一般的耦合震盪

我們先以一般彈簧耦合震盪器的案例進行討論，此模型可以被表示成兩個質量加三個彈簧，先列出此模型的運動方程式：



$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -(k + \kappa)x_1 + \kappa x_2 \\ m\ddot{x}_2 &= -(k + \kappa)x_2 + \kappa x_1 \end{aligned}$$

於公式中可以發現此系統中含有兩個自由度，在合併後可以得到兩種模態的震盪：

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2)$$

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = (-k - 2\kappa)(x_1 - x_2)$$

我們將以此兩種振盪頻率對不同模型的建立進行分析。

(二) 簡正模

簡正模 (Normal mode) 是指在一個振盪系統中，所有部分都以相同的頻率並以正弦函數形式運動的特定模式。這種自由運動發生在固定的頻率上，系統的簡正模對應的振動頻率被稱為其固有頻率或共振頻。

而我們透過在耦合振盪中的推導，得到此系統的二種簡正模：
同步模態：兩物體有相同位移且運動方向相同：

$$x_1 + x_2 = A_s \cos(\omega_s t + \phi_s), \quad \omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

非同步模態：兩種物體有相同位移但運動方向相反

$$x_1 - x_2 = A_f \cos(\omega_f t + \phi_f), \quad \omega_f = \sqrt{\frac{k + 2\kappa}{m}}$$

我們發現同步模態的頻率只取決於其彈力常數k及質量m，因此改變耦合強度κ時，同步模態的頻率並不會受影響，但非同步模態的頻率則會受耦合強度大小影響。

(三) 耦合震盪中的拍頻

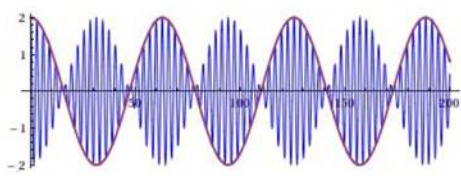
實驗中的耦合震盪是同步模態及非同步模態的疊加，當以線性結合兩個振盪公式後可以得到：

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2) \pm (x_1 - x_2)] = \frac{1}{2}[A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \pm A_f \cos(\omega_f t + \phi_f)]$$

當兩種模態頻率相近時就可以觀察到拍頻的出現，拍頻是兩個頻率相近但不完全相同的簡正模進行耦合時的頻率差值，其造成我們在觀察軌跡時所看到的波包。

此外，我們推導了兩種簡正模的線性組合：

$$\cos(\omega_s t) + \cos(\omega_f t) = 2 \cos\left(\frac{\omega_s + \omega_f}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_s - \omega_f}{2} t\right) \quad \omega = \frac{\omega_s + \omega_f}{2} \approx \omega_s \approx \omega_f, \quad \epsilon = \frac{\omega_s - \omega_f}{2} \ll \omega_s, \omega_f$$

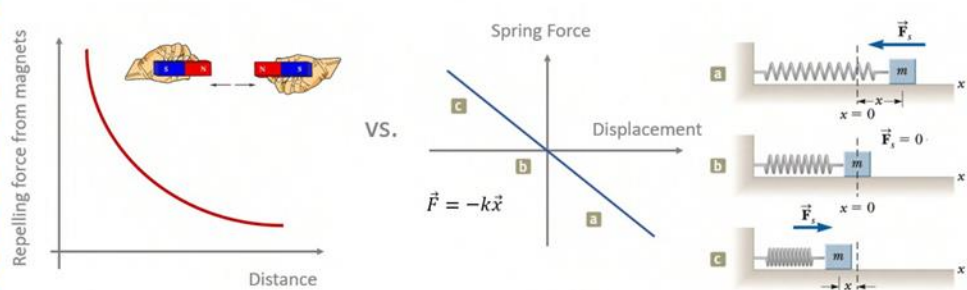


$$\omega_{beat} = |\omega_s - \omega_f|$$

(四) 磁力在此現象中的結合與應用

為了使模型更貼近現實情況，我們將耦合振盪器的中間部分置換成兩互相排斥的磁鐵，而磁鐵跟彈簧最主要的差異為：

1. 彈簧是線性的系統，而磁力則是非線性的。
2. 彈簧所提供的力能以兩個方向來展現，但磁力只會提供相吸或相斥的力。

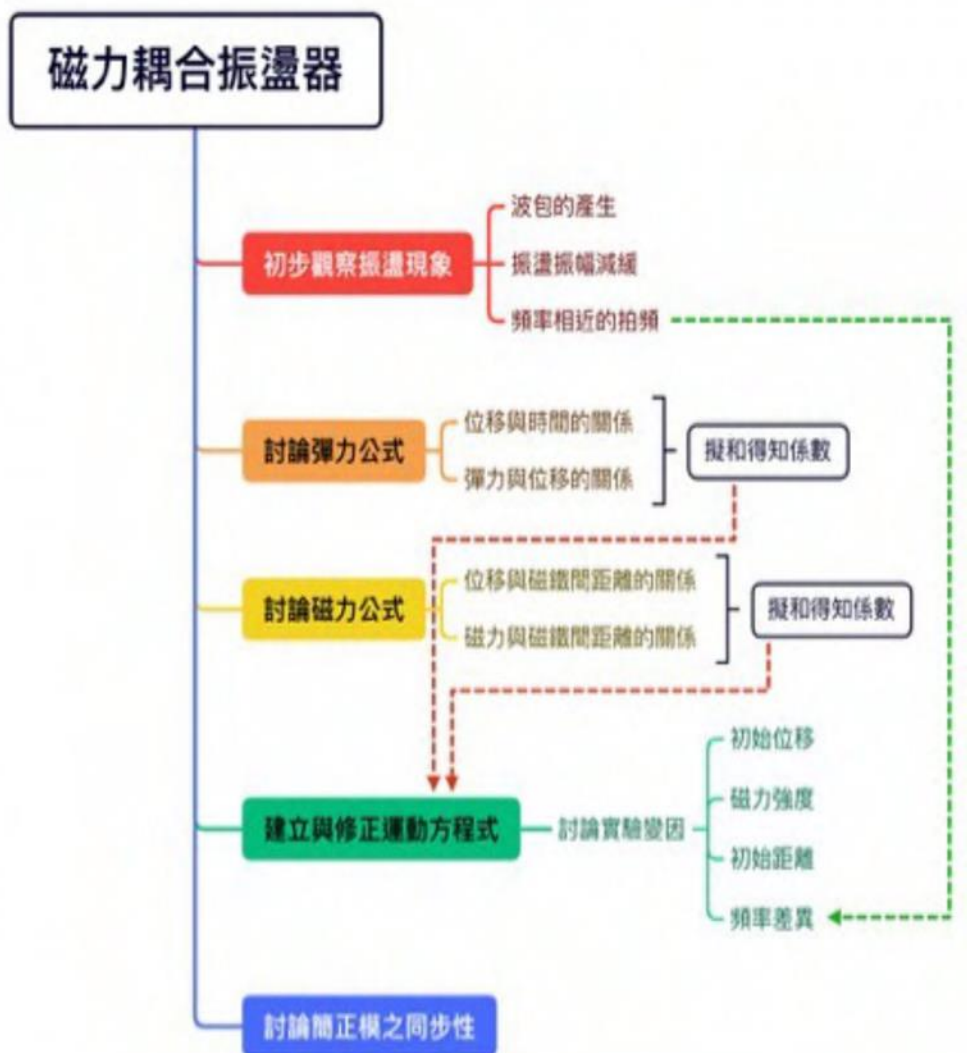


而我們將用於描述磁鐵的參數再簡化成磁力強度κ可得：

$$F(x) \approx -\frac{1}{4} \pi \mu_0 M^2 R^4 \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x + 2L)^2} - \frac{2}{(x + L)^2} \right]$$

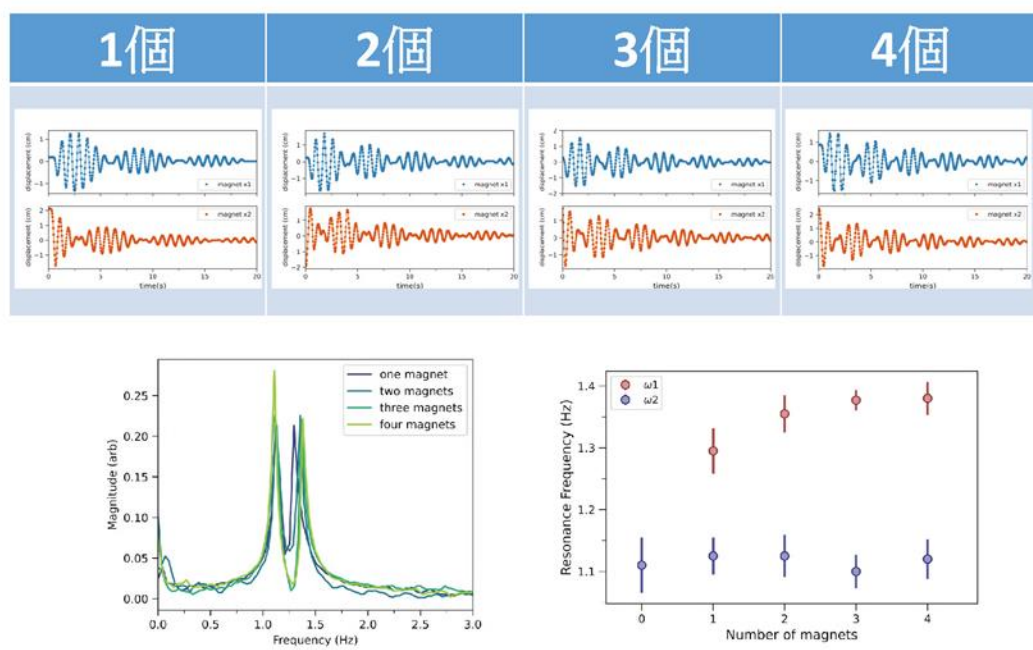
$$F(x) = \frac{\kappa}{(x + Y)^4}$$

二、研究架構



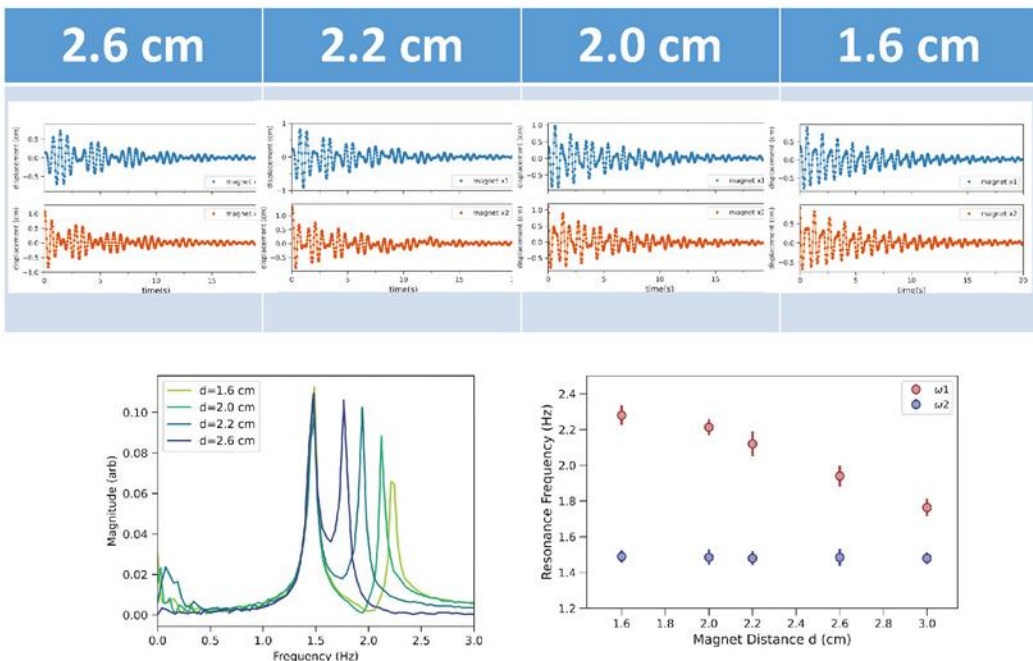
研究 (三) 探討影響耦合振盪器運動的因素

實驗3-1 探討改變磁力強度對於振盪頻率的影响



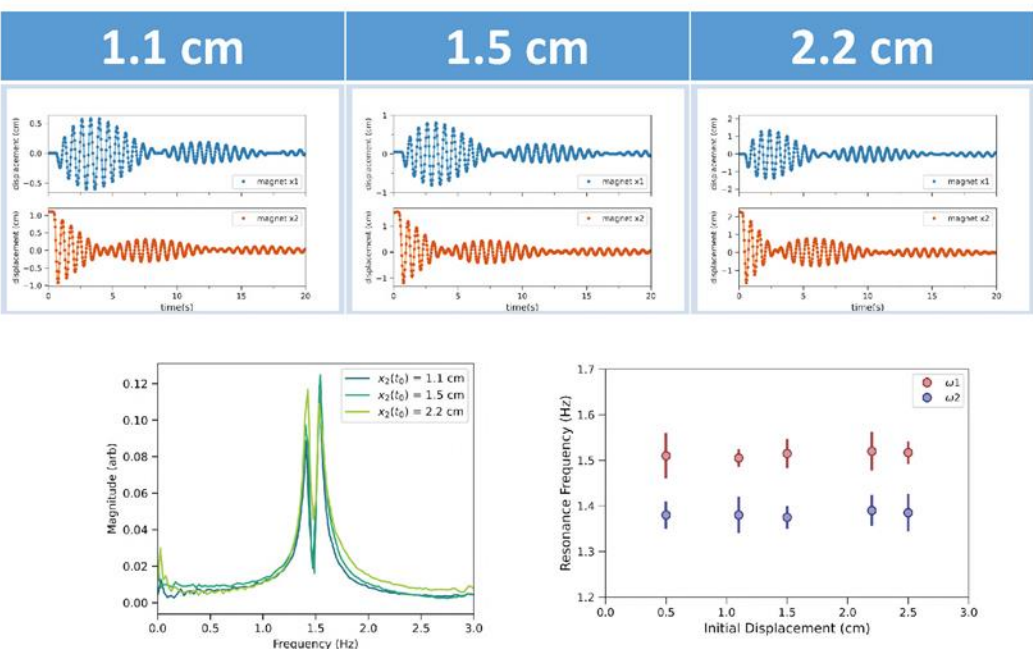
右側的波峰會隨磁鐵增加而往右移，是因為右側振盪器為非同步性耦合振盪，振盪頻率會受磁力強度 κ 影響，因此振盪頻率會隨著磁力強度的增加而增大

實驗3-2 探討改變磁鐵間距離對於振盪振幅的影响



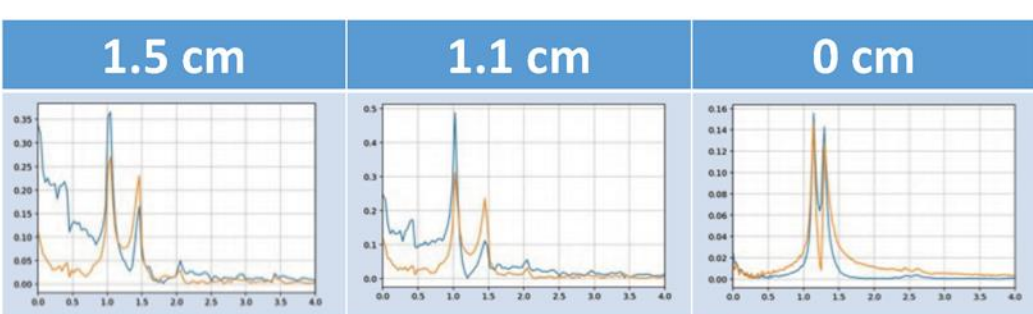
右側的波峰會隨距離增加而往右移，是因為右側振盪器為非同步性耦合振盪，振盪頻率會受磁力強度 κ 影響，因此振盪頻率會隨著距離的減少而增大

實驗3-3 探討改變磁鐵間初始位移對於振盪频率的影响



右側的波峰並不會隨距離增加而移動，在公式中也沒有發現到初始位移的變因，因此推論初始位移並不會對振盪頻率造成影響

實驗3-4 探討改變兩側振盪频率對波包與對稱性構成之影响



當距離差越小，即兩者频率差距越小時，其振盪之對稱性會隨之上升，並且在距離差為 0 cm 時會有形成波包的效果

伍、討論

延伸討論：將磁力強度等效為彈簧

我們受研究 (二) 實驗中的啟發，將磁力耦合振盪器與我們熟悉的彈簧耦合振盪器連接起來，並對磁力項以泰勒級數展開，進而使磁力在小範圍內線性化：

$$\frac{\kappa}{(x_2 - x_1 + L)^4} - \frac{\kappa}{L^4} \approx \frac{\kappa}{L^4} \left[1 - \frac{4}{L}(x_2 - x_1) + \dots \right] - \frac{\kappa}{L^4} \approx -\frac{4\kappa}{L^5}(x_2 - x_1)$$

得到新的磁力係數 κ' ：

$$\kappa' = \frac{4\kappa}{L^5}$$

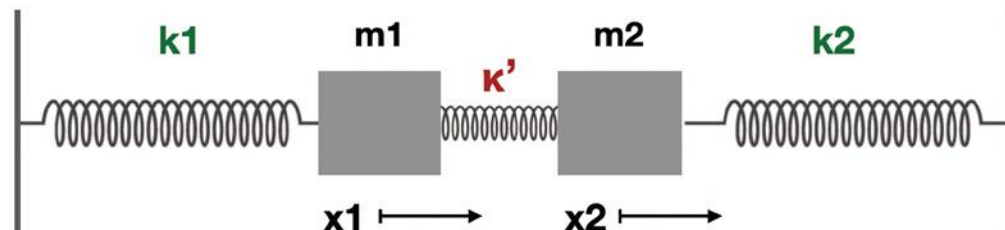
代入彈簧的耦合震盪公式後可以得到新的彈簧耦合震盪公式：

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - b_1 \dot{x}_1 + \kappa'(x_2 - x_1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - b_2 \dot{x}_2 - \kappa'(x_2 - x_1)$$

接著討論此近似模型的發生條件：

當兩側彈簧彈力係數 k_1 及 k_2 遠大於中間的 κ' 時，中間的彈簧在振盪時只會被旁邊的彈簧擠壓及拉伸，即表示此時 κ' 會表現如磁鐵的單方向性，至此我們就能將磁力模型等效成彈簧耦合振盪器模型，如下圖：



陸、結論

- 一. 在建設理論的過程中，我們第一步先採用彈力的系統進行討論，在推導相關公式後與實驗數值擬合後發現擬合效果極佳，因此推論出的參數具有一定參考價值。將磁力系統納入考量後推導磁力相關公式並整合，經由擬合過程發現公式能夠準確描述物體的運動模式，在整合了彈力與磁力公式的方程式與參數後，我們推廣並建立了能描述振盪器振盪之運動方程式，於實驗數據中的整合也發現其極高的擬合度，因此我們所設計的理论方程式對於描述該振盪器運動模式是有很高的參考價值。
- 二. 在觀察振盪器運動情形時，我們發現了波包的構造，在理論推導中得知，此波包產生是與兩振盪器频率相近但不完全相同的拍頻所造成。而在簡正模的討論中我們發現，由於同步模態之振盪频率，並不如非同步性模態會受磁力強度 κ 影響，因此兩者频率會有些微差異，進而造成拍頻與波包的產生。
- 三. 在針對推廣之運動方程式討論影響參數時，我們發現兩磁鐵間距離、初始位移與磁力強度都會影響振盪频率，在研究 (三) 的實驗中發現，當兩磁鐵間距離越小或磁力強度越大時，都會造成振盪频率的上升，而初始位移並不會對振盪频率造成影響。
- 四. 在研究 (三) 中我們也發現了同步與非同步模態之應用，在傅立葉分析圖中可以得知，左側波峰並不會隨著變因的改變而移動，是因其為同步模態的振盪频率，只受到變因 k 和 m 影響；而右側因為是非同步性模態，其振盪频率會受磁力強度影響，因此會受到實驗變因改變而左右位移。
- 五. 在進行與實際數值之比較中我們發現，由理論推出之理論值與實驗值之誤差為 5.8%，更增加了磁力耦合振盪器對於測量磁性量值應用的可能性。

柒、參考資料

- (1) Magnet Coupled Oscillator (2014). <https://www.youtube.com/watch?v=vKUKPs1UJ4k>
- (2) Thornton, S. T., & Marion, J. B. (2021). Classical dynamics of particles and systems. Cengage Learning. ISO 690
- (3) Yyknosekai. (2016, September 8). Vibration Modes of a Coffee Cup Part 1: A Tribute to Ng Boon Leong. 物理の世界. F
- (4) Vokoun, D., Beleggia, M., Heller, L., & Šittner, P. (2009). Magnetostatic interactions and forces between cylindrical permanent magnets. Journal of magnetism and Magnetic Materials, 321(22), 3758-3763
- (5) G. Donoso, C. L. Ladera, and P. Martín, European Journal of Physics 31, 433 (2010).
- (6) Przybyłowicz, Piotr & Szmidt, Tomasz. Electromagnetic damping of a mechanical harmonic oscillator with the effect of magnetic hysteresis. Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 47. 259-273.(2009)
- (7) Sodano, H. A. Eddy Current Damping in Structures. The Shock and Vibration Digest. 36(6), 469-478. (2004).