

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組 物理與天文學科

佳作

051803

鴨行無阻—鴨子行進陣列與其省力情形之探究

學校名稱：新北市私立南山高級中學

作者： 高二 高宇 高二 陳禹諾 高二 白庭宇	指導老師： 林永嵩 陳俊廷
--	-----------------------------

關鍵詞：鴨子、省力、排列

摘要

本研究透過水池、橡皮鴨與伺服馬達，模擬鴨子在水面上游動的情況，藉由馬達回傳的電功率值，計算鴨子在游動時的阻力，希望找到鴨子在何種情況下最省力。透過改變鴨子的排列方式、大小、速度等變因，嘗試找出這些變因與其游動時阻力的關聯，並引入參考文獻中省力係數以描述省力的程度、用波長、水深、波速的函數關係來計算波長、並嘗試描繪尾波，透過這些以協助結果呈現並計算出難以測量的部分。最後會透過繪圖的方式來討論鴨子與水波的關聯以解釋阻力的變化，再總結出鴨子在何種排列方式、大小能夠達到最省力的狀態，完成本研究的主要目標。

壹、前言

一、研究動機

在生活中可以看到像是腳踏車隊、艦隊、鳥群在行進的過程中會排成特定隊形，更仔細觀察後，發現似乎不同大小、速度的物體在行進的過程中，還是有著不同的排列方式。恰巧在 2021 年 11 月號科學月刊看到研究鴨群游在特定相位的文章。進一步閱讀查詢後，發現其文章為僅用電腦軟體模擬，而沒有實際模型分析。於是我們一方面相當好奇是否鴨子排列確實符合論文所述，一方面想透過實際操作，歸納解決鴨子排列之謎。

二、研究目的

(一) 建構實驗模型與分析方式

1. 實驗設備的製作
2. 電流分析計算波阻力

(二) 理論輔助研究結果的呈現與解釋

1. 定義 C_{DR} , d , ℓ , ϕ ，方便數據呈現
2. 探討可能的省力原因
3. 了解福祿數 Fr ，確認省略黏滯阻力
4. 描述鴨子行進時的波，包括波長、尾波、尾跡角

(三) 實驗操作

1. 兩隻鴨

- (1) 改變兩鴨間距，量測省力程度
- (2) 改變鴨子行進速度，量測省力程度
- (3) 改變鴨子大小(長度)，量測省力程度

2. 三隻鴨

- (1) 直線排列
- (2) 倒 V 字型排列

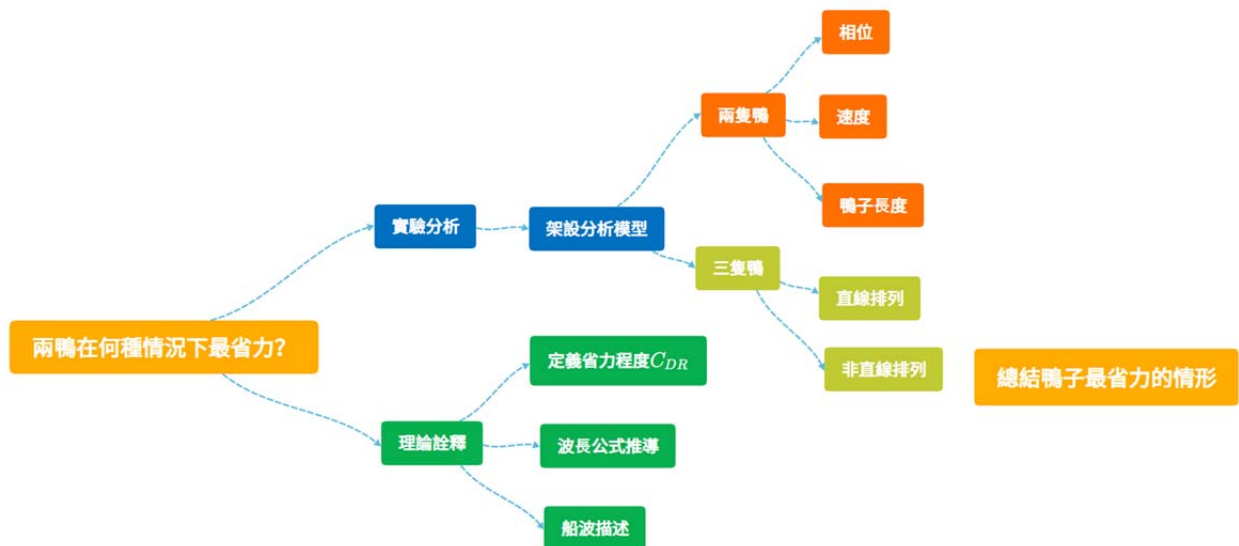








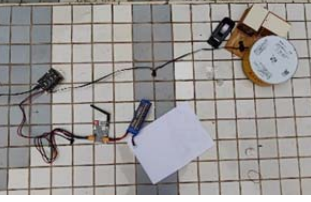
圖 1-1 研究架構圖

貳、 研究設備與器材









圖 2-1 實驗設備配置圖

表 2-1 實驗設備細項

			
<p>橡膠水池 (262cm*175cm*51cm)</p>	<p>鐵製轉盤</p>	<p>novapi board</p>	<p>伺服馬達 (MS-12A)</p>
			
<p>鋰針電池</p>	<p>游泳池(5m*5m)</p>	<p>拉動裝置連接圖</p>	

所使用到的鴨子的代號、重量、與長度，如表 2-2：

表 2-2 實驗用鴨代號、重量、長度

	代號	重量	長度(ℓ)
	M	290.2g	$\ell_M = 18\text{cm}$
	D3	191.0g	$\ell_{D3} = 11\text{cm}$
	D4	43.7g	$\ell_{D4} = 9.5\text{cm}$
	D5	32.9g	$\ell_{D5} = 8\text{cm}$
	D6	43.6g	$\ell_{D6} = 7\text{cm}$
	D7	33.4g	$\ell_{D7} = 5\text{cm}$

參、 研究過程與方法

一、 由文獻資料定義 C_{DR} (拉力減少指數、drag reduction coefficient)

參考期刊 Journal of Fluid Mechanics 鴨群省力研究的文章(參考文獻[7])

(一) C_{DR} 在原論文中的定義

$$C_{DR} \equiv \left(1 - \frac{R}{R_s}\right) \times 100\% \quad (1)$$

($R \equiv$ 鴨子游動時的波阻力, $R_s \equiv$ 平靜水面下的波阻力)

不難發現，當鴨子游動時的波阻力越小，則 C_{DR} 越大，反之，游動時的波阻力越大，則 C_{DR} 越小，也就是 C_{DR} 可視為省力程度的指標。

(二) 修正 C_{DR} 的定義以符合本研究所需

因為研究量測的是單隻鴨子或數隻鴨子排成陣列時的總拉力值，且在黏滯阻力可以忽略不計時，拉力值即等於波阻力值，所以必須將 C_{DR} 公式修正成：

$$C_{DR} \equiv \left(1 - \frac{R}{\sum_{i=1}^n R_i}\right) \times 100\% \quad (2)$$

($R \equiv$ n 隻鴨子排成陣列的總波阻力
 $R_i \equiv$ 第 i 隻鴨子單獨在水面游動的波阻力)

舉例來說，若今天的行進陣列由一隻 M 帶領一隻 D3，那麼 C_{DR} 即為，

$$C_{DR} = \left(1 - \frac{R}{R_M + R_{D3}}\right) \times 100\% \quad (3)$$

二、 探討影響阻力的因素

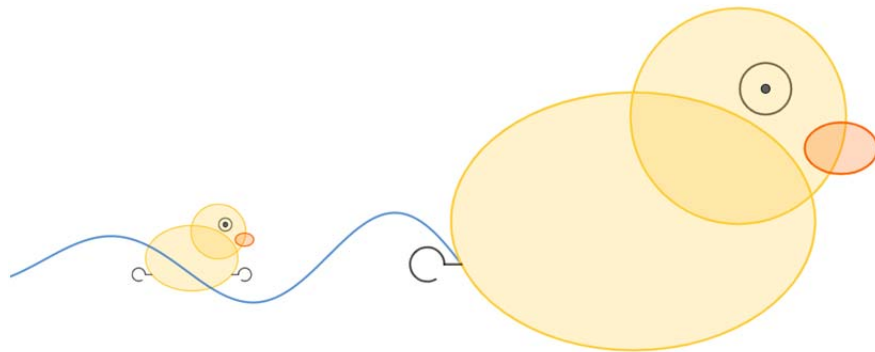


圖 3-1 小鴨所在波相位示意圖

(一) 小鴨在母鴨尾波上的相位

參考文獻[7]，母鴨所造成的後波形，對小鴨會根據相位不同而產生不同方向的力。如圖 3-1 所示，當小鴨位於波形斜率為負的區域時，浮力方向向前，故小鴨便可比無母鴨時省力。當小鴨位於波形斜率為正的區域時，浮力方向向後，故小鴨便會比無母鴨時費力。由於波形與鴨子間相對速度為 0，只要小鴨與母鴨呈相對速度也是 0，小鴨便會在波形上的固定相位。

(二) 母鴨在小鴨的船前波上

除了母鴨產生的尾波，小鴨的前方也會產生船前波。因為鴨子向前移動擠壓波形，故船前波形的振幅較大，但有效範圍卻較小。當母鴨與小鴨距離近到小於小鴨的船前波形的有效範圍時，母鴨就會受到小鴨所產生的船前波而省力。

(三) 干涉

小鴨的前波和母鴨的尾波會因為產生相長或相消性干涉導致波形的變化，進而影響浮力方向。

三、 建立實驗分析模型

(一) 實驗裝置

我們的實驗裝置分成兩個部分，分別為收線裝置與模擬鴨子游泳裝置，如圖 3-2 (a) 所示。

1. 收線裝置

首先控制馬達定速旋轉，以螺絲在馬達轉軸上固定鐵盤(圖 3-2 (b))，帶動鐵盤旋轉。在鐵盤上黏接一棉繩，當鐵盤轉動時進行收線，傳遞馬達拉力。

2. 模擬鴨子游泳裝置

(1) 直線排列

在大小鴨的前後分別黏上長為 1cm 的鐵鉤(圖 3-2 (c))，將特定長度的棉繩(圖 3-2 (d))繫於大鴨與小鴨之間，並將前述固定於鐵盤上的棉繩繫於大鴨前的鉤子上，以傳遞馬達拉力，使大鴨與小鴨以固定的速度

與間距前進。

(2) 倒 V 排列

在倒 V 字型排列中，我們以一吸管(圖 3-2 (e)紅線、圖 3-2 (f)橫桿)固定繩子(圖 3-2 (e)黑線)張角。我們固定吸管與大鴨距離為 1 公分，大小鴨距離為 12 公分。並以此規格製作出 4 組圖 3-2 (e)的 ϕ 角中分別為 15、20、25、30 度的裝置。

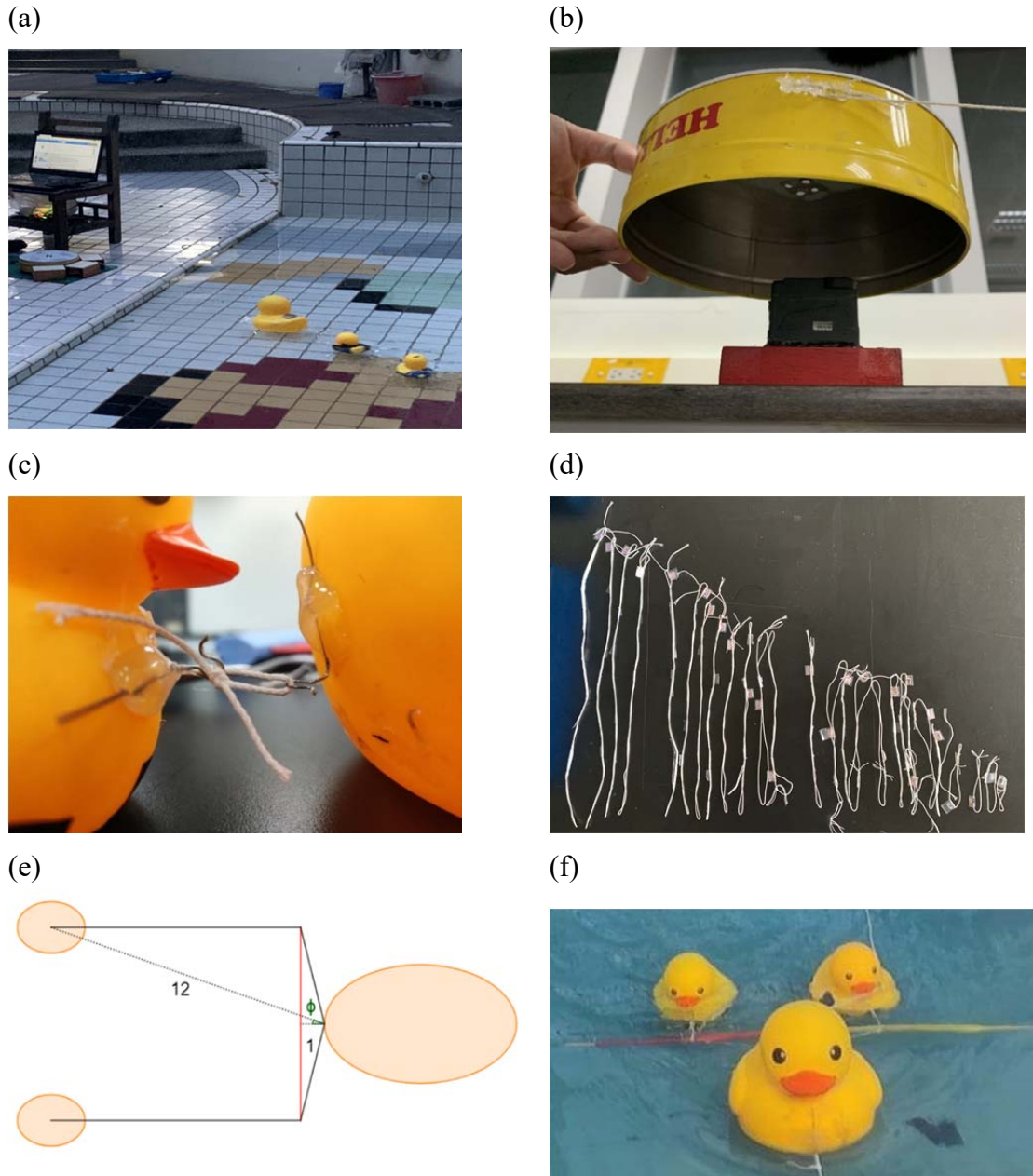


圖 3-2 實驗裝置 (a)收線裝置與鴨子 (b)收線裝置 (c)鴨子前後掛勾 (d)棉繩 (e)吸管支架示意圖 (f)吸管支架

(二) 由馬達電功率值得到拉力值進而轉換成 C_{DR}

用 python 編寫程式，並透過 mblock 與 novapi board 連接以執行 python 程式碼控制伺服馬達以一定角速度旋轉。每 40 ms(毫秒)記錄一次馬達的輸入電流、電壓和轉動的角速度。

接著我們透過懸掛固定重量的砝碼，讓馬達以固定速度轉動，以控制拉力值 F ，再紀錄此時輸出的電流與電壓計算電功率：

$$P = I \times V \quad (4)$$

做 $P - F$ 關係圖，以得到 P 和 F 的線性轉換關係。

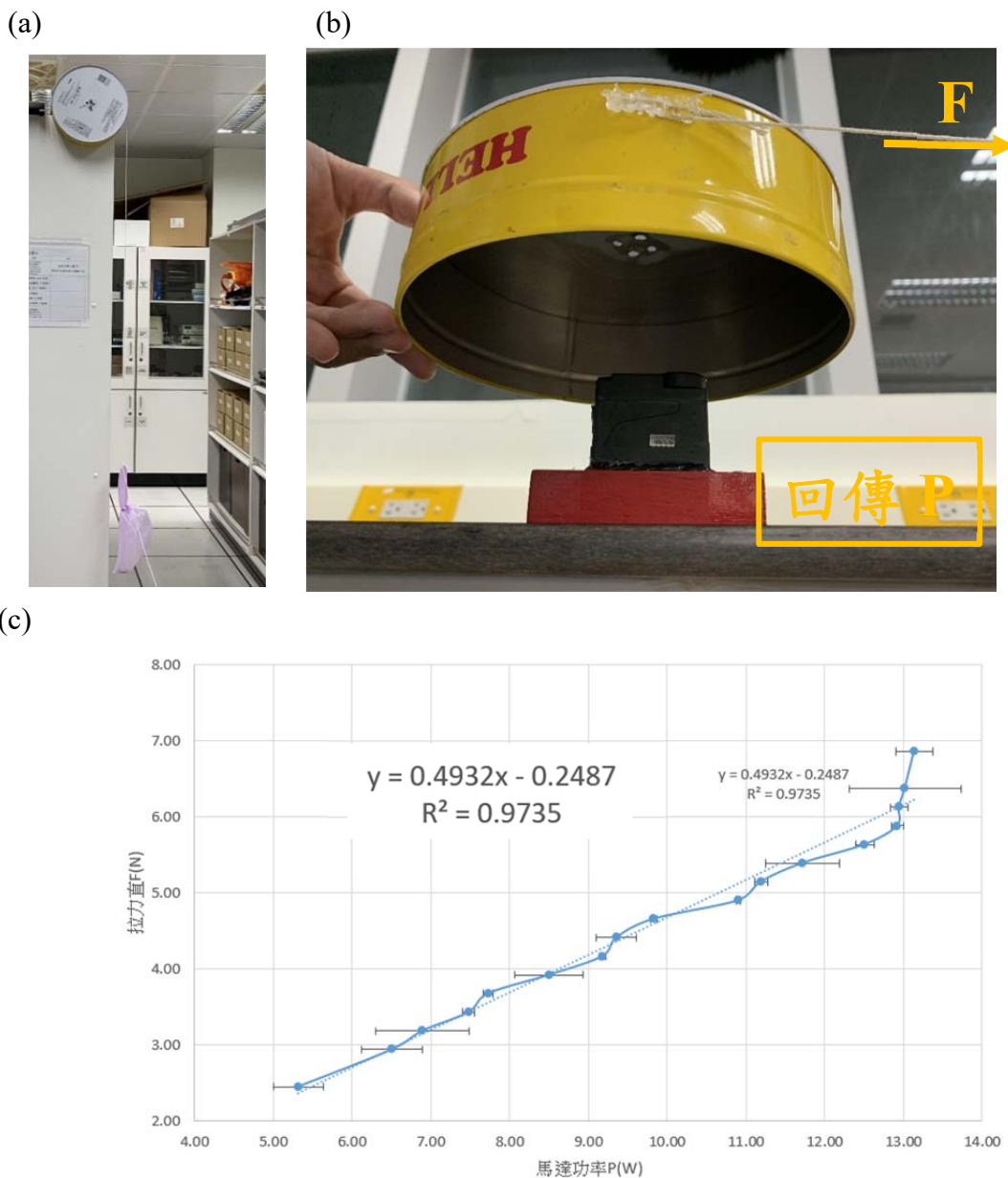


圖 3-3 (a) 圓盤與懸掛砝碼 (b) F 與 P 示意圖 (c) 電功率對拉力值關係圖

經由實驗得到線性關係式：

$$F = 0.4932P - 0.2487 \quad (5)$$

故我們可以在剩下的實驗中，藉由馬達回傳的電功率經方程式(5)轉換為拉力值F，

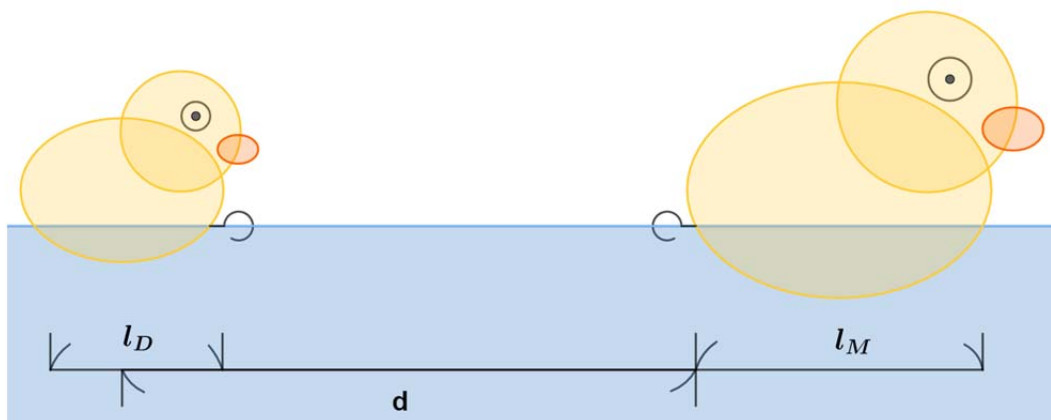
再經由方程式(2)可以得到 C_{DR} 值。

```
import novapi
import time
import math
from mbuild.smart servo import smart servo_class
smart servo_1 = smart servo_class("M1", "INDEX1")
smart servo_1.set_zero()
arrP = []
arrU = []
i=0
smart servo_1.move(2880, 38.2)
while True :
    i+=1
    I=smart servo_1.get_value("current")
    V=smart servo_1.get_value("voltage")
    U=smart servo_1.get_value("speed")
    if i>40:
        arrU.append(U)
        if U!=0:
            P = I*V
            arrP.append(P)
        else :
            arrP.append('N')
        if U<0.1:
            break
        time.sleep(0.04)
    print("Power")
    print(*arrP)
    print("Speed")
    print(*arrU)
    time.sleep(3)
    smart servo_1.move(-2880, 40)
```

圖 3-4 馬達控制的 python 程式

四、說明母鴨長 l_M 小鴨長 l_D 和兩鴨間距 d 和陣列夾角 ϕ

(a)



(b)

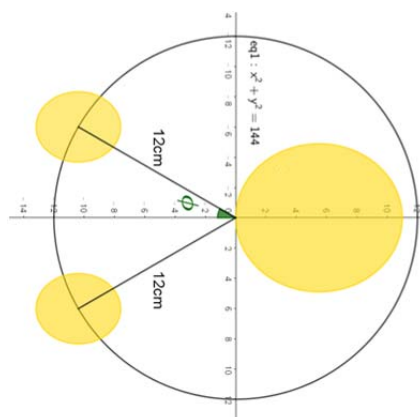


圖 3-5 (a) 標明 l_M, l_D, d (b) 標明 ϕ

首先定義母鴨、小鴨前後入水點距離分別為 l_M, l_D 。因為波是由母鴨尾部發出，且小鴨受力可視為中央質心受力。故在另外定義兩鴨間距 d 為母鴨尾部入水點至小鴨入水點中央。而陣列夾角 ϕ ，則是小鴨母鴨連線與行進方向的夾角。

藉由 l, d, ϕ 的清楚定義，將會更精準的表達兩隻鴨之間的關係，並方便呈述下文的研究結果

五、黏滯阻力與 Fr (福祿數、*Froude number*)

福祿數的定義為慣性力與重力的比值開根號

$$Fr \equiv \frac{v}{\sqrt{g\ell}} = \sqrt{\frac{\rho v^2 A}{\rho g A \ell}} \propto \sqrt{\frac{\text{慣性力}}{\text{重力}}} \quad (6)$$

($v \equiv$ 鴨子速度, $g \equiv$ 重力加速度, $\ell \equiv$ 鴨子長度)

表 3-1 各種速度時的比較

v	ℓ	Fr
$v = 0.5\text{m/s}$	$\ell_M = 0.18\text{m}$	0.376
$v = 0.45\text{m/s}$	$\ell_M = 0.18\text{m}$	0.34
$v = 0.4\text{m/s}$	$\ell_M = 0.18\text{m}$	0.30
$v = 0.35\text{m/s}$	$\ell_M = 0.18\text{m}$	0.26

我們從參考文獻[5]中得知，當 $Fr > 0.25$ 時，水所造成的黏滯阻力可以忽略不計，故在此可確認本研究所使用到的所有速度對於大鴨的福祿數，均大於 0.25，其餘小

鴨因為 l 較小，所以其實只需檢驗 l_M 即可，由表 3-1 可知，我們實驗的速度不宜低於 0.35m/s。

六、 描述鴨子行進時所產生的波

因為下文所進行的實驗，包括直線與非直線排列，故我們主要關注鴨子行進直線上所形成的尾波波長，以及為了解釋倒 V 字型排列結果的尾跡角。

(一) 由波長、波速、水深函數關係計算波長

1. 計算波長

假設擾動與振幅很小，並忽略科氏力、摩擦力與黏滯力，重力為唯一外力，運動在水平面上具等方向性，簡化數學模式為二維；設定水面高度 $z = 0$ ，

水底 $z = -H$ ，記 $\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$ ， $\rho = const$ ，則連續性方程為：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (7)$$

引入速度勢 $\nabla \varphi = v$ ，得拉普拉斯方程式：

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

引入歐拉方程，並對 v 取全導數：

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = 0 \quad (9)$$

欲證 $(v \cdot \nabla) v$ 為可忽略小量，可設振幅、波長、週期的量級分別為 a, λ, τ ，則運動液體質元速度量級為 $\frac{a}{\tau}$ ， $(v \cdot \nabla) v \ll \frac{\partial v}{\partial t}$ 等價於 $\frac{1}{\lambda} \left(\frac{a}{\tau} \right)^2 \ll \frac{a}{\tau} \cdot \frac{1}{\tau}$ ，移項得 $a \ll \lambda$ ，即為小擾動假設。在方程式(9)中忽略上述小擾動，對 z 軸積分並引入重力項後，可得：

$$p + \rho g z + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

因小擾動假設，代入 $z = 0$ ，並重新定義 φ 以消去 p ，得到上邊界條件：

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0 \quad (11)$$

假設水底為水平剛體，使水分子無法穿透，可得到下邊界條件：

$$w|_{z=-H} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=-H} = 0 \quad (12)$$

以分離變數法求解，記 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ，則可設 $\varphi(x, z, t)$ 的解為：

$$\varphi = F(z) \sin(kx - \omega t) \quad (13)$$

代入方程式(8)、(11)、(12)，可解得波的相位速率 c 的公式為：

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kH} \quad (14)$$

2. 鴨速與相位速率的關聯性

經觀察可發現，母鴨尾波波形總是和鴨子一起移動，因此母鴨與其所產生的波形無相對速度，故相位速率 c 與鴨速 v 相等。將實驗數據中水深 $H = 0.1\text{m}$ 和相位速率 $c = 0.4\text{m/s}$ 代入方程式(14)可以解得波長 λ (而這樣的波長計算方式也被使用在參考文獻[6]和參考文獻[7]中)，得下表：

表 3-2 各速度對應波長之比較

v	$\lambda(\text{cm})$
$v = 0.5\text{m/s}$	16.02
$v = 0.45\text{m/s}$	12.97
$v = 0.4\text{m/s}$	10.25
$v = 0.35\text{m/s}$	7.84

(二) 鴨子行進時的尾跡角

引入向量形式的角波數 $\mathbf{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y}$ ，定義 $\theta_k = \tan^{-1}\left(\frac{k_y}{k_x}\right)$ ，記波源速度

$$\mathbf{u} = u\hat{x}, \text{ 其中 } c = u = 0.4\text{m/s}。 \text{ 因 } c \approx \begin{cases} \sqrt{gH} & \text{淺水 } \frac{H}{\lambda} \leq \frac{1}{20} \\ \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} & \text{深水 } \frac{H}{\lambda} \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 尾波對波源}$$

的角頻率可近似為：

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{g|\mathbf{k}|} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} \quad (15)$$

因水波對波源無相對速度，代入 $\omega = 0$ ，可得：

$$\mathbf{k} = \frac{g}{(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2} \hat{\mathbf{k}} \quad (16)$$

根據群速度的定義，可得：

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{g|\mathbf{k}|} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} - \mathbf{u} \quad (17)$$

將(16)代入(17)

$$\mathbf{v}_g(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} = \frac{1}{4} [2\hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u}] - \frac{3}{4} \mathbf{u} \quad (18)$$

因為 $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{x}}$ ， $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \cos\theta_k$ ，設 $u\hat{\mathbf{e}}(\hat{\mathbf{k}}) = 2\hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u}$ ，則有直觀形式

$$\hat{\mathbf{e}}(\hat{\mathbf{k}}) = 2\hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{x}} = -\cos(2\theta_k)\hat{\mathbf{x}} + \sin(2\theta_k)\hat{\mathbf{y}} \quad (19)$$

由方程式(18)與(19)可知， $\mathbf{v}_g(\hat{\mathbf{k}})$ 為 $-\frac{3}{4}\mathbf{u}$ 與任意長為 $\frac{u}{4}$ 的向量的和，可繪出

圖 3-6 尾波幾何關係示意圖。

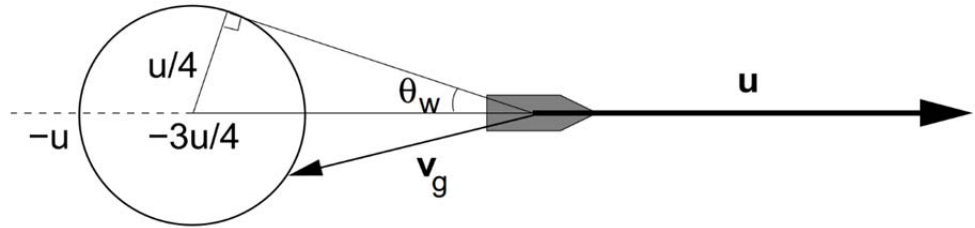


圖 3-6 尾波幾何關係示意圖

由圖 3-6 中幾何關係可知尾跡角 θ_w 為：

$$\theta_w = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 19.47^\circ \quad (20)$$

肆、 研究結果與討論

一、 小鴨在波的不同相位對 C_{DR} 的影響($C_{DR} - d$)

在本實驗中，我們先在較小的充氣泳池中實驗，處於室內干擾較少但空間較小，故拉動距離較短，約 1.5 公尺，有鑒於此，我們後來重新在學校幼兒園戶外泳池，將拉動距離加長至 5 公尺，並同時將兩鴨間的距離 d 加大到 6λ ，紀錄 C_{DR} 值。

(一) 充氣泳池(封閉水域)

	間距	使用的鴨子	波長	場地
$v = 0.4\text{m/s}$	$\frac{d}{\lambda} = 0.78 \sim 2.98$ (以 0.146 為間隔)	母鴨 M 小鴨 D3	10.25cm	充氣 泳池

固定水深約 11.5cm，以 $\frac{d}{\lambda}$ 為 X 軸表示小鴨在波上的相位關係，並以 C_{DR} 為 Y 軸

畫出下圖 4-1：

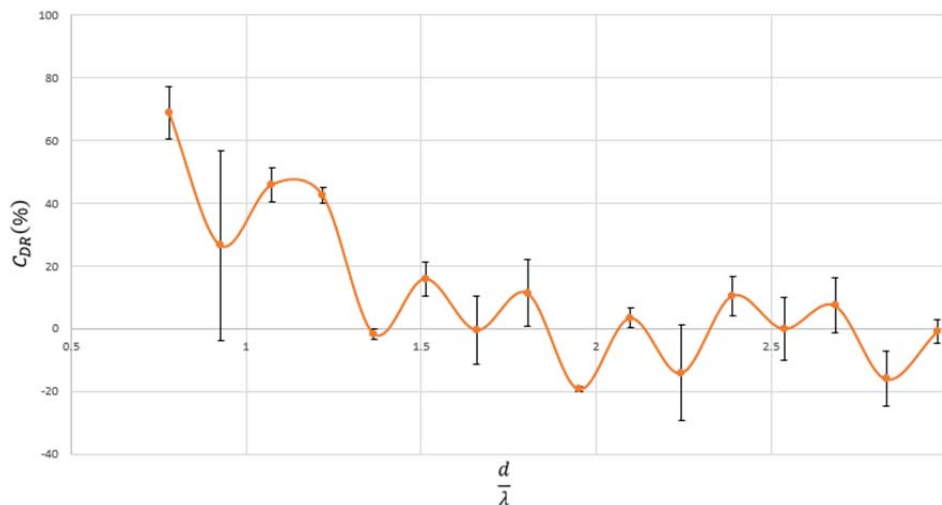


圖 4-1 在充氣水池中，兩鴨距離 d 對 C_{DR} 的影響

表 4-1 在充氣泳池中 $\frac{d}{\lambda}$ 和 C_{DR} 實驗數據

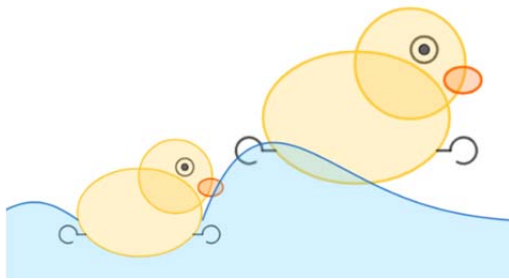
$\frac{d}{\lambda}$	0.78	0.93	1.07	1.22	1.37	1.51	1.66	1.8	1.95	2.1	2.24
C_{DR}	68.73	26.48	45.6	42.38	-1.64	15.84	-0.45	11.27	-19.32	3.31	-14.18
$\frac{d}{\lambda}$	2.39	2.54	2.68	2.83	2.98						
C_{DR}	10.4	-0.09	7.27	-16.12	-1.05						

觀察圖 4-1 中折線，可以發現：

1. C_{DR} 值於 $\frac{d}{\lambda}$ 在 $[0.7, 1]$ 的區間內遞減約 40%

在上文的研究方法與結果中有討論到當小鴨與母鴨靠的非常近的時候，母鴨會在小鴨所產生的船前波上，如圖 4-2 (a)，進而有省力的效果，所以可以看到 $\frac{d}{\lambda}$ 在 $[0.7, 1]$ 的區間越小 C_{DR} 越大。而因為船前波衰減的很快，在圖 4-2 (b) 中可以看到船前波的波峰距離鴨子最前端約 4 公分，而當 $\frac{d}{\lambda} = 0.93$ 已超過船前波的範圍。故可以在圖 4-2 (b) 中看到，在 $[0.7, 1]$ 的區間，為遞減的趨勢。

(a)



(b)

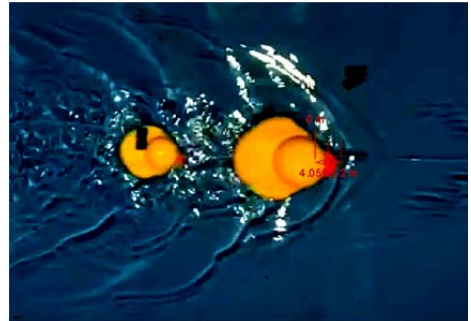


圖 4-2 船前波(a)船前波示意圖 (b)量測母鴨船前波的波峰到母鴨前端的距離

2. $\frac{d}{\lambda} > 1.25$ 後， $v = 0.4\text{m/s}$ 的 C_{DR} 在 0 上下徘徊，但似乎以 0.25 為單位作小週期起伏，以 0.75 為單位作大週期起伏。

(1) 因為尾波振幅隨距離增加而遞減， C_{DR} 本來就會愈來愈趨近 0 ($C_{DR} = 0$ 代表行進陣列並未對兩隻鴨帶來任何阻力上的影響，也就是此行進陣列相當於兩隻鴨游動於獨立水面互不干擾。)

(2) 0.25 為小週期起伏，以 0.75 為大週期起伏。

若仔細觀察 1.37 後的曲線可以看到，以 0.25 為小週期起伏，例如 1.37~1.66 為一組起伏，1.66~1.95 為另一組起伏，以此類推，而如果總觀察 $\frac{d}{\lambda} > 1.25$ 的點，又以 0.75 為大週期起伏，例如 1.37~2.1，以及 2.24~2.98，而且 2.24~2.98 的起伏的振幅較 1.37~2.1 的起伏振幅小，符合 C_{DR} 趨近 0 的推論。

而 $\frac{d}{\lambda} < 1.25$ 時則無此結果，我們推測是因為距離近，小鴨前波會影響到大鴨，導致 C_{DR} 值必須考慮大鴨的省力和小鴨的省力，但如果距離拉開，小鴨前波無法影響到大鴨時， C_{DR} 值就只需考慮小鴨的省力，如此 C_{DR} 隨著 $\frac{d}{\lambda}$ 規律的起伏亦是可預期的。

(二) 游泳池(開放水域)

	間距	使用的鴨子	波長	場地
$v = 0.4\text{m/s}$	$\frac{d}{\lambda} = 0.75\lambda \sim 6\lambda$ (以 0.25 為間隔)	母鴨 M 小鴨 D3	10.25cm	游泳池

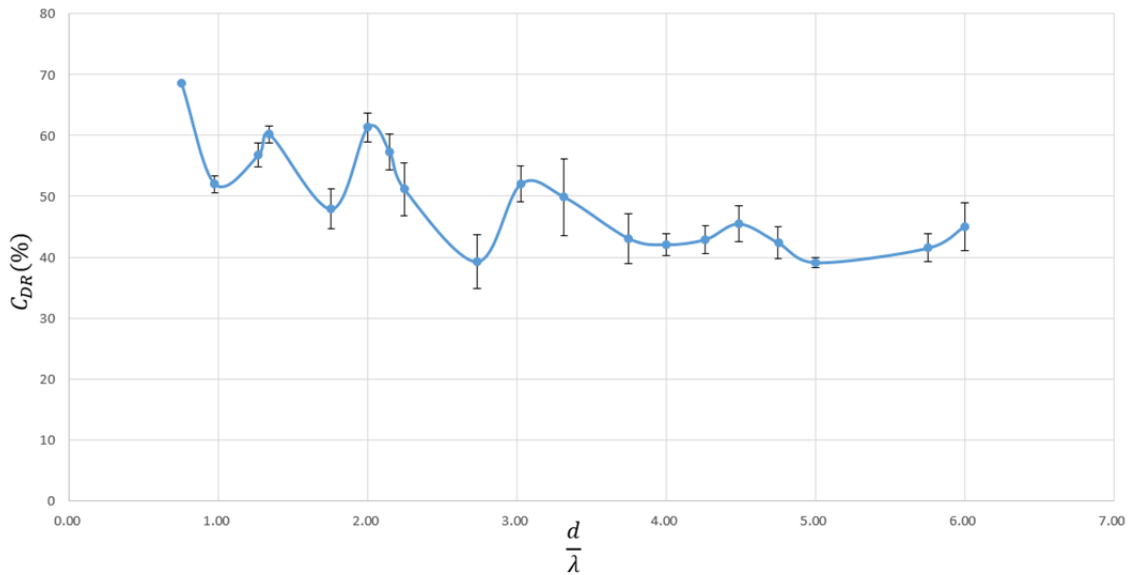


圖 4-3 在游泳池中，兩鴨距離 d 對 C_{DR} 的影響

表 4-2 在游泳池中， $\frac{d}{\lambda}$ 和 C_{DR} 的實驗數據

$\frac{d}{\lambda}$	0.75	0.98	1.27	1.34	1.76	2.00	2.15	2.24	2.73	3.02	3.32
C_{DR}	68.6	52.0	56.8	60.2	47.9	61.3	57.2	51.2	39.3	52.0	49.9
$\frac{d}{\lambda}$	3.75	4.00	4.26	4.49	4.75	5.00	5.76	6.00			
C_{DR}	43.1	42.1	42.9	45.5	42.4	39.1	41.5	45.1			

類似上述的討論，我們主要以三段區間[0.7, 1], [1.5, 3.5], [3.5, 6]來討論 C_{DR} 的變化：

1. $\frac{d}{\lambda}$ 在 [0.7, 1] 呈現遞減約 20%

相同地，我們可以套用上文對船前波造成省力的結論(圖 4-2)，因為大鴨在小鴨的船前波上因而省力，而船前波的影響範圍小，所以 C_{DR} 遞減得很快

2. $\frac{d}{\lambda}$ 在 [1.5, 3.5] 間因尾波方向造成浮力方向不同而產生的 C_{DR} 的變化

可看出此區間， $\frac{d}{\lambda} = 2$ 和 $\frac{d}{\lambda} = 3$ 時 C_{DR} 較大，而在 $\frac{d}{\lambda} = 1.5$ 和 $\frac{d}{\lambda} = 2.5$ 時 C_{DR} 較小，最大值與最小值大約差了 20%，如果我們將小鴨繪製在母鴨上的尾波上，可以發現 $\frac{d}{\lambda} = n, n \in \mathbb{N}$ 時，浮力方向向前， C_{DR} 較大，如圖 4-4 (a)，另一方面， $\frac{d}{\lambda} = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}$ 時，浮力方向向後， C_{DR} 較小，(圖 4-4 (b)，因此我們可以得知當兩隻鴨距離為整數倍波長時較為省力。

(a)

(b)

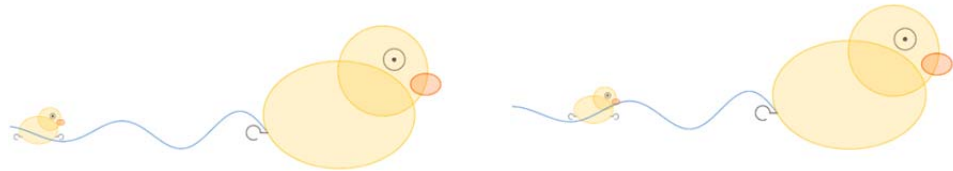


圖 4-4 尾波與浮力方向 (a) $\frac{d}{\lambda} = 2$ (b) $\frac{d}{\lambda} = 1.5$

3. $\frac{d}{\lambda}$ 在 [3.5, 6] 時較其他區間平緩

$\frac{d}{\lambda}$ 在 3.5 之後 C_{DR} 多半落於 40~45%之間，我們推測應該是距離變長後，振幅衰減，因此波對鴨子陣列的影響變小， C_{DR} 愈趨平緩。

4. 和充氣水池的結果比較

在圖 4-1 中，在 $\frac{d}{\lambda} > 1.25$ 時，就遞減至 0，但在圖 4-3 中，距離拉至 6λ 時仍有較高的 C_{DR} ，值約在 40%左右，造成此點的原因是因為拉動的距離加長，所以尾波有時間傳遞至小鴨，然而，在充氣水池的實驗中，因為拉動距離過短，導致當兩鴨間的距離上升，波來不及傳遞，致使其 C_{DR} 趨近 0。

二、不同速度對 C_{DR} 的影響($C_{DR} - v$)

	固定間距	使用的鴨子	波長	場地
$v = 0.35\text{m/s}$	$d = \lambda$	母鴨 M, 小鴨 D3	7.84cm	充氣泳池
$v = 0.4\text{m/s}$			10.25cm	
$v = 0.45\text{m/s}$			12.97cm	
$v = 0.5\text{m/s}$			16.02cm	

固定二鴨尺寸與間距，分別測量二鴨以 $v = 0.35, v = 0.4, v = 0.45, v = 0.5$ 不同速度前行時的 C_{DR} 值，繪出下圖曲線，討論速度與 C_{DR} 值的關係。

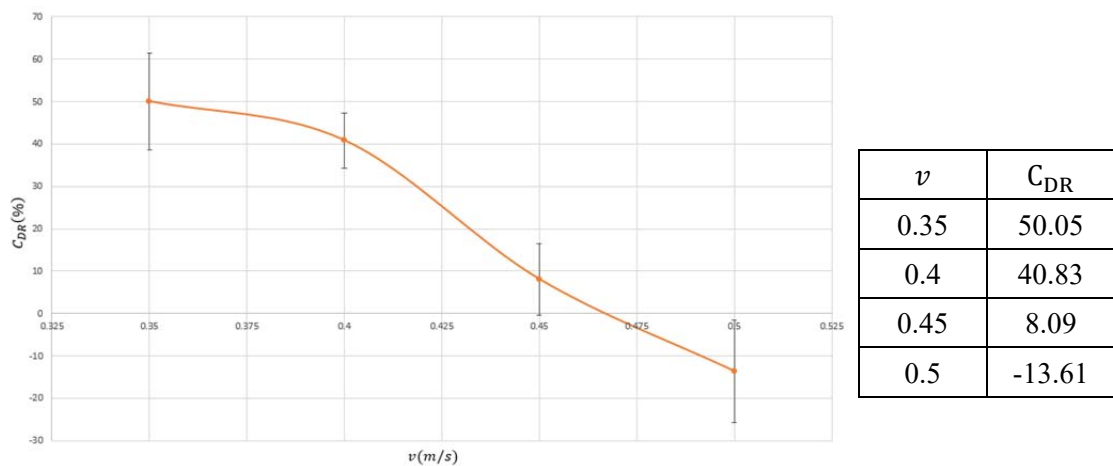


圖 4-5 速度對 C_{DR} 的影響

可以清楚觀察到此圖中 C_{DR} 值隨速度增加而下降，與前述 $C_{DR} - d$ 圖中 $v = 0.4\text{m/s}$ 的 C_{DR} 均較高和 $v = 0.5\text{m/s}$ 的 C_{DR} 均較低的狀況相似。 $C_{DR} - v$ 的實驗固定大鴨在小鴨前波上的相位與小鴨在大鴨尾波上相位，但注意到 $\frac{\ell}{\lambda}$ 在不同速度時， ℓ 相同，但 λ 不同，導致鴨子的吃水體積有所改變，為速度以外的可能變因。

三、不同鴨子長度對 C_{DR} 的影響($C_{DR} - \ell$)

	間距	使用的鴨子	波長
$v = 0.5\text{m/s}$	$d = \lambda \text{ and } 0.5\lambda$	母鴨 M, 小鴨 D3	16.02cm
		母鴨 M, 小鴨 D4	
		母鴨 M, 小鴨 D5	
		母鴨 M, 小鴨 D6	
		母鴨 M, 小鴨 D7	

使用不同小鴨 D3, D4, D5, D6, D7(其長度請參考 表 2-2)在 $d = \lambda$ (下圖橘線) 以及

$d = \frac{\lambda}{2}$ (下圖藍線)時的 C_{DR} 值，討論 $C_{DR} - \ell$ 的關係。

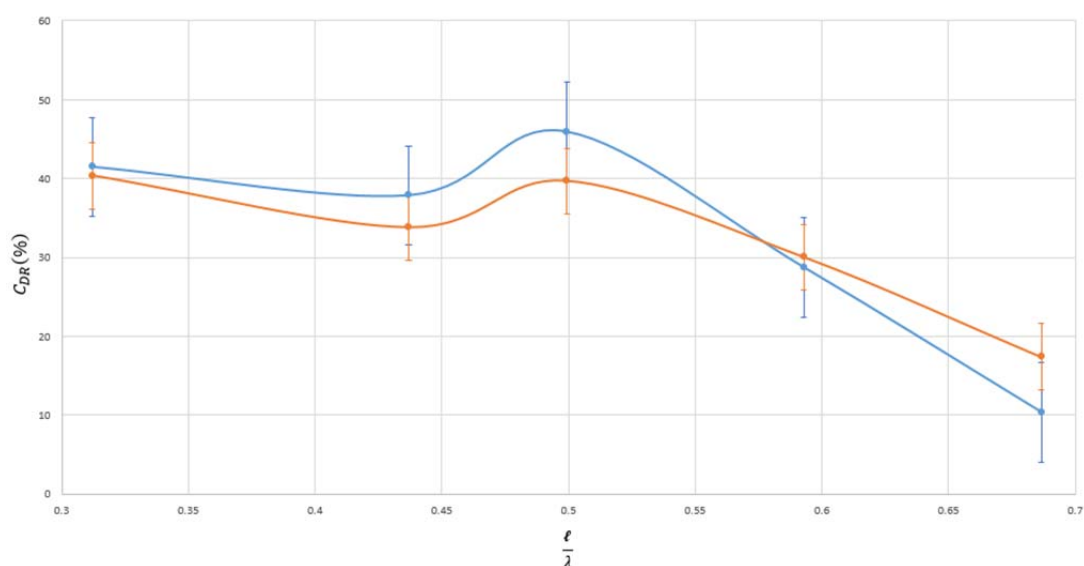


圖 4-6 鴨子長度對 C_{DR} 的影響

表 4-3 (a) $d = 0.5\lambda$, ℓ 和 C_{DR} 值數據 (b) $d = \lambda$, ℓ 和 C_{DR} 值實驗數據

ℓ	11	9.5	8	7	5
C_{DR}	10.39	28.74	45.95	37.87	41.48

(a) $d = 0.5\lambda$

ℓ	11	9.5	8	7	5
C_{DR}	17.41	30.03	39.67	33.8	40.34

(b) $d = \lambda$

可繪製 $\ell = 5\text{cm}(\ell_{D7})$, $8\text{cm}(\ell_{D5})$, $11\text{cm}(\ell_{D3})$ 與波形圖，並解釋圖 4-6 的結果。

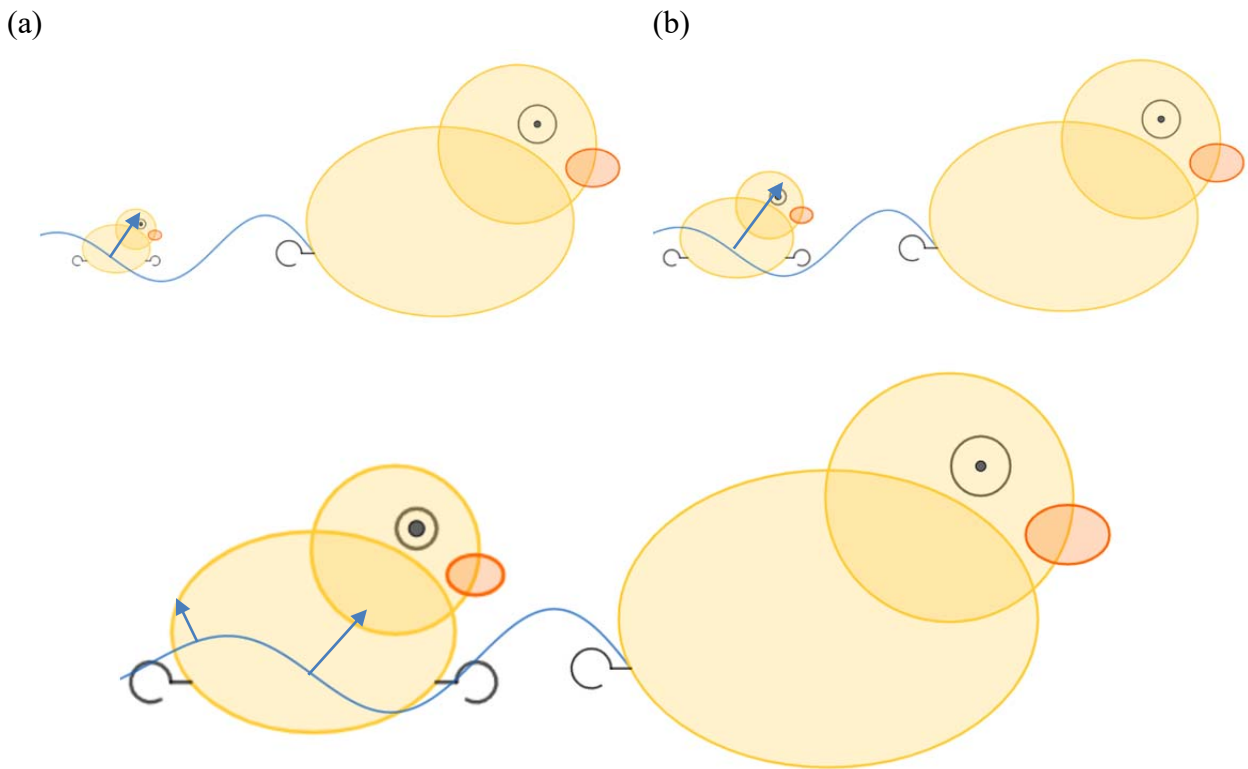


圖 4-7 鴨子長度與浮力關係 (a) M+D7 與波形圖 (b) M+D5 與波形圖 (c) M+D3 與波形圖

(一) 在 $l < 8\text{cm}$, C_{DR} 平穩

從圖 4-6 可以發現 $5\text{cm}(l_{D7})$, $7\text{cm}(l_{D6})$, $8\text{cm}(l_{D6})$ 的 C_{DR} 維持在 $[30, 50]$ 的區間，觀察圖 4-7(a)(b) 可知因為浮力總是和液面垂直，在 $l < \frac{1}{2}\lambda(8\text{cm})$ 時，浮力方向均為向前，故在對 5cm 和 7cm 的情況而言，雖然水波對其的總水平分力不及 8cm 的情況，但是因其入水的體積較小，阻力自然也較小，根據 C_{DR} 的公式可知， R 和 R_i 同時下降，故 C_{DR} 變化不大。

(二) 在 $l > 8\text{cm}$, C_{DR} 快速下降

若從浮力的方向分析，因為浮力總是和液面垂直，超過 8cm 的 11cm 和 9.5cm ，因為前或後端有部分受到向左的力，如圖 4-7 (c)，所以浮力對其的總水平分力影響較小，也就是相較於 $l < 8\text{cm}$ 的情況， R 變大，故 C_{DR} 變小。

綜上所述，在 $l < \frac{1}{2}\lambda$ (在此相當於 8cm) 時，能獲得更大的 C_{DR} 值，也就是會有更省力的效果。

四、三隻鴨子在波上不同相位對 C_{DR} 的影響



圖 4-8 三隻鴨直線排列

	間距	使用的鴨子	波長	地點
$v = 0.4\text{m/s}$	$\frac{d}{\lambda} = 0.75 \sim 4\lambda$ (以 0.25 為間隔)	母鴨 M, 小鴨 D3 ₁ , 小鴨D3 ₂	10.25cm	游泳池

上述皆為討論兩隻鴨的排列在波相位、速度、長度與 C_{DR} 的關係，在此我們開始討論三隻鴨的直線排列對 C_{DR} 的影響，為使實驗不過於複雜，這裡僅討論大鴨(M)跟第一隻小鴨(D3)的距離等於第一隻小鴨(D3)與第二隻小鴨(D3)的距離的情況。為了方便，以下討論將中間的小鴨命名為D3₁、最後面的小鴨命名為D3₂

以上表中的實驗條件進行實驗後，所得到的關係圖如下：

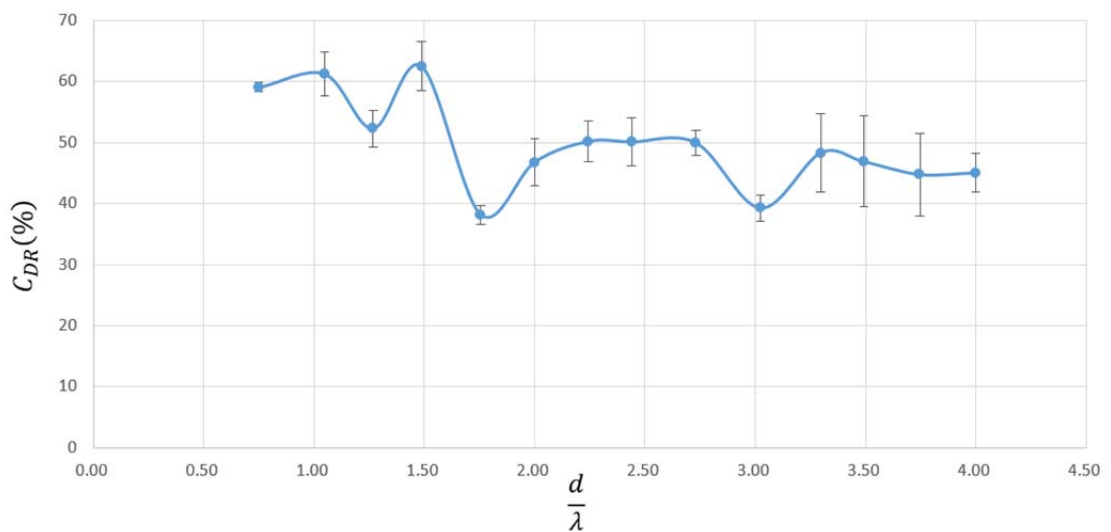


圖 4-9 三隻鴨的距離對 C_{DR} 的影響

表 4-4 三隻鴨的 $\frac{d}{\lambda}$ 和 C_{DR} 的實驗數據

$\frac{d}{\lambda}$	0.75	1.05	1.27	1.49	1.76	2.00	2.24	2.44	2.73	3.02	3.30
C_{DR}	59.0	61.2	52.3	62.5	38.2	46.8	50.2	50.1	50.0	39.3	48.3
$\frac{d}{\lambda}$	3.49	3.75	4.00								
C_{DR}	46.9	44.8	45.0								

乍看圖 4-9 可能看不出什麼結果，因為如果我們仔細思考 $D3_1$ 和 $D3_2$ 所在的波，會發現 $D3_1$ 受到 M 的尾波影響，而 $D3_2$ 則是受到 M 的尾波與 $D3_1$ 的尾波影響，但其所處的兩個波的相位不同，所以下文會關注三組(M 與 $D3_1$ 、 $D3_1$ 與 $D3_2$ 、M 與 $D3_2$)間的 C_{DR} 。

為了要討論這三組 C_{DR} 和圖 4-9 的關聯，先參考圖 4-10 (a)先釐清 M 與 $D3_1$ 、 $D3_1$ 與 $D3_2$ 、M 與 $D3_2$ 的距離分別為 d ， d ， $2d + 4.5cm$ ，再來，引用表 4-2 的資料，理想化的狀況下，用下列的公式疊加，得到(下圖橘線)並與實驗數據(下圖藍線)比較。

假設兩鴨共游所省的力只和兩鴨之間的距離有關，故令 $F_{a,b}(d) \equiv$ 鴨子 a 和鴨子 b 以距離 d 共游時所省的力。

$R_i \equiv$ 鴨子 i 單獨在水面游動的波阻力。

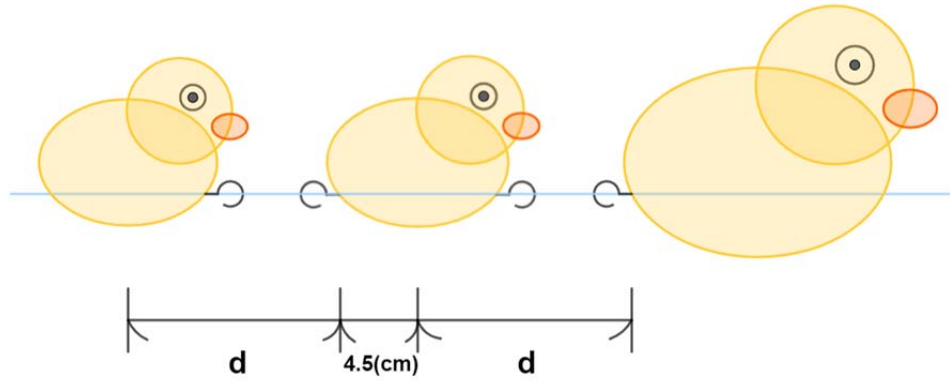
$$C_{DR} = \left(1 - \frac{R_M + R_{D3} - F_{M,D3_1}}{R_M + R_{D3}}\right) \times 100\% \quad (21)$$

$$F_{M,D3_1} = (R_M + R_{D3})C_{DR} \quad (22)$$

$$C_{DR \text{ theoretical}} = \left(1 - \frac{R_M + 2R_{D3} - F_{M,D3_1} - F_{M,D3_2} - F_{D3_1,D3_2}}{R_M + 2R_{D3}}\right) \quad (23)$$

$$C_{DR \text{ theoretical}} = \frac{(R_M + 3R_{D3}) \times C_{DR}(d) + (R_M + R_{D3}) \times C_{DR}(2d + 4.5)}{R_M + 2R_{D3}} \quad (24)$$

(a)



(b)

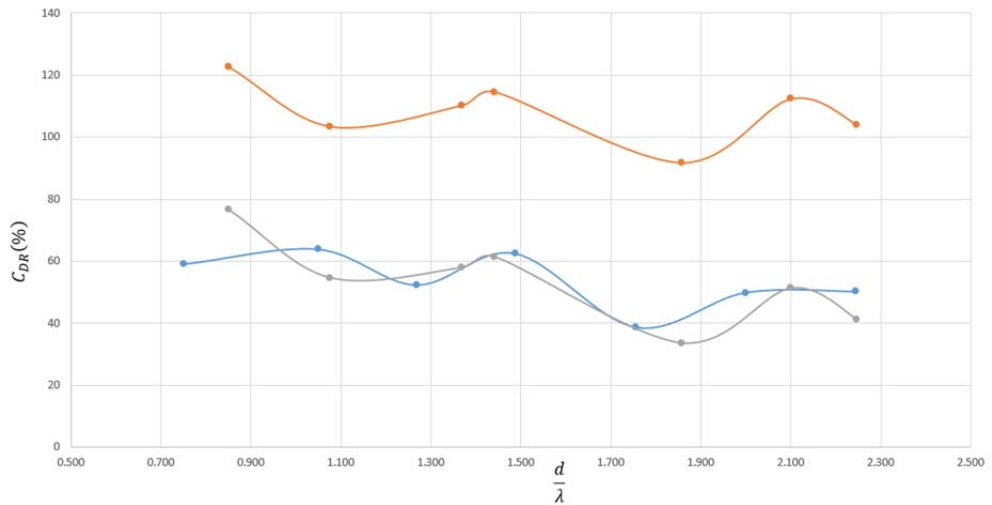


圖 4-10 (a) 三隻鴨直線排列時的距離關係圖 (b) 以 $C_{DR} - d$ 討論三隻鴨的距離對 C_{DR} 的影響

我們可以看到經過轉換，三組兩隻鴨的數據，經過疊加(圖 4-10 (b) 橘線)與平移(圖 4-10 (b) 灰線)得到相近的趨勢，惟因三隻鴨的直線排列仍須考量各波間的干涉、船前波的因素等原因，導致我們不得不採取平移的手法處理數據，但仍可見圖 4-10 (b) 中的相近趨勢，代表上述對於 M 與 D_{3_1} 、 D_{3_1} 與 D_{3_2} 、M 與 D_{3_2} 之間的拉力討論，仍為影響三隻鴨直線排列的主因。

五、三隻鴨子以倒 V 型排列時頂角對 C_{DR} 的影響

	角度	使用的鴨子	波長	場地
$v = 0.35\text{m/s}$	$\phi = 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ$	母鴨 D3, 小鴨 D_{6_1} , 小鴨 D_{6_2}	7.84cm	充氣泳池

我們進行此實驗是因為常觀察到鳥群以倒 V 型排列行進，卻從未看過鴨群呈現倒 V 型排列，所以便想觀察如果將鴨群以倒 V 型排列，對省力狀況會造成什麼影響。參考研究方法中的第一點關於 ϕ 的定義，在實驗中固定 D3 與 D6 距離(同 d 的定義)為 12cm，改變 ϕ 以量測 C_{DR} ，並繪出圖 4-11：

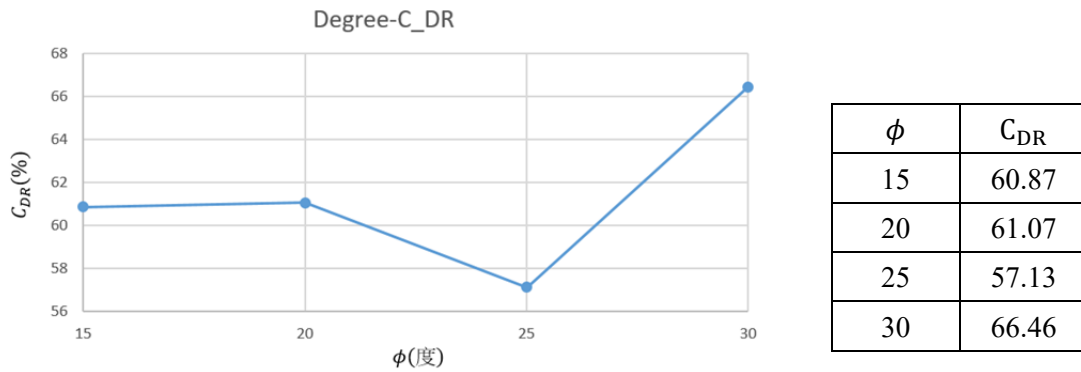


圖 4-11 改變 ϕ 對 C_{DR} 的影響

(一) 相比於前述的所有討論，圖 4-11 可說相當平緩，可知發生在角度 15~30 度之間並未使得省力情形有太大的變化，雖想使用上文所計算的尾跡角 = 19.47° 推算，可知 ϕ 越小，其所處於尾波上的面積越大，但因為考慮到僅有部分橢圓處於尾波上，其波阻力實在難以估算，但實作結果顯示， C_{DR} 起伏在 57% 到 67% 之間，省力情形仍相當顯著。

(二) 嘗試以上文數據估算與討論 ϕ 對 C_{DR} 的影響

使用圖 4-1 和圖 4-5 的數據。為取得兩隻 D6 之間的物理作用對 C_{DR} 的影響，需先取得 D3 拉動兩隻 D6 且兩隻 D6 之間無任何物理作用時的 C_{DR} 理論值，並與圖 4-11 實驗數據比較，討論小鴨並排前行時的物理現象。為聚焦討論小鴨，忽略小鴨前波對母鴨的影響，假設 $C_{DR,M} = 0$ ，且假設 $C_{DR,D}$ 僅與母鴨和小鴨的間距 d 有關。

1. 首先要找到各組圖 4-11 原始數據中大鴨與小鴨的間距 d ，可將 x 方向上的距離 $12\text{cm} \times \cos\phi$ 作為 d 來進行討論。
2. 因圖 4-11 數據中的 $v = 0.35$ ，故需由圖 4-5 實驗數據的線性回歸與表 4-1 數據的相關分析，得到行進速度對 C_{DR} 值的影響。

- 為求數據之趨勢完整，接著找出圖 4-1 中 $v = 0.4$ 的折線上的對應 C_{DR} 值，修正間距 d 對 C_{DR} 值的影響。
- 最後修正大小鴨重量比例所造成的 C_{DR} 的誤差，即可得到 $D3+D6*2$ 的理想 C_{DR} 值。

具體分析流程如下：

- 計算 $d = 12 \cos\phi$ (圖 4-12 (a))
- 將表 4-1 數據作適當線性變換(如圖 4-12 (b))，匯入 geogebra geometry 作圖 (如圖 4-12 (c))。由圖中多邊形面積與自變數變化量的比值 $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ ，可求出 ΔC_{DR} 對 Δv 的比值 $\left. \frac{\Delta C_{DR}}{\Delta v} \right|_{v=0.5}^{0.4} = \frac{\int \Delta C_{DR} d(\frac{d}{\lambda})}{\Delta \frac{d}{\lambda} \Delta v}$ 。再做 $C_{DR} - v$ 圖的回歸線(如圖 4-12 (d))，其斜率即 $\frac{\Delta C_{DR}}{\Delta v}$ 。由上述兩種數據分析方法，可求出誤差更小的 v 對 C_{DR} 值的影響。

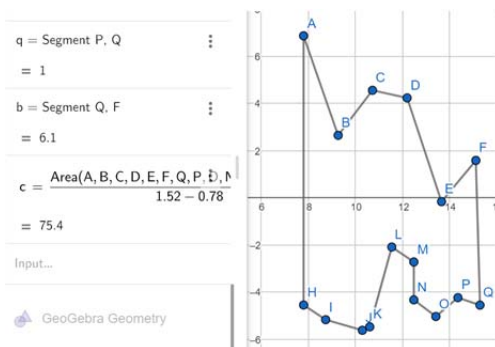
(a)

phi	d*cos phi	d*cos phi /lam
15	11.5911	1.476573248
20	11.2763	1.436471338
25	10.8757	1.38543949
30	10.3923	1.323859873

(b)

v=0.4		v=0.5	
(d/lam)*10	C_DR/10	(d/lam)*10	C_DR/10
7.80487805	6.87256839	7.80274657	-45.494119
9.26829268	2.64819425	8.73907615	-51.726477
10.7317073	4.55968446	10.2996255	-56.225563
12.195122	4.23793628	10.6117353	-54.78141
13.6585366	-0.1639161	11.5480649	-20.897111
15.1219512	1.58437496	12.4843945	-27.232908
		12.4843945	-43.297599
		13.4207241	-50.367881
		14.3570537	-42.371399
		15.2933833	-45.555163

(c)



(d)

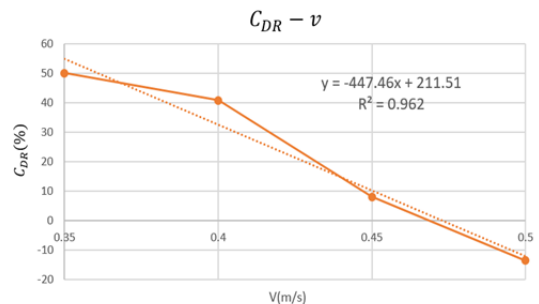


圖 4-12 (a) $d = 12 \cos\phi$ (b)表 4-1 數據變換 (c) 表 4-1 數據作圖

(d) 圖 4-5 線性回歸

由圖 4-12 (c)、(d) 可得：

$$\frac{dC_{DR}}{dv} = \frac{1}{2} \left(\frac{\int \Delta C_{DR} d\left(\frac{d}{\lambda}\right)}{\Delta \frac{d}{\lambda} \Delta v} + \frac{\Delta C_{DR}}{\Delta v} \right) = -\frac{754 + 447.46}{2} = -600.73 \quad (25)$$

3. 在圖 4-1 中 $v = 0.4$ 的折線上應用內插法，得到 $d = 12 \cos\phi$ 對應的 C_{DR} 值，即圖 4-13 (b) 的 $C_{DR \text{ interpolated}}$ 。再根據方程式(25)與修正 v 對 C_{DR} 的影響，求得圖 4-13 (c) 的 $C_{DR \text{ calibrated}}$ 。

(a)

phi	F	F篩	d	lam	d/lam	F篩-f0	C_DR
	4.923	4.9234	11	10.25	1.073	0.734	45.597
	5.032	4.9667	12.5	10.25	1.220	0.777	42.379
30			10.392		1.3239		11.024
	5.644	5.5603	14	10.25	1.366	1.370	-1.639
25			10.876		1.3854		0.7007
20			11.276		1.4365		6.7973
15			11.591		1.4766		11.588
	5.456	5.3245	15.5	10.25	1.512	1.135	15.844
	5.620	5.5443	17	10.25	1.659	1.355	-0.454

(b)

phi	C_DR interpolated	C_DR calibrated
15	11.5881	41.6246
20	6.7973	36.8338
25	0.7007	30.7372
30	11.0237	41.0602

圖 4-13 (a) 圖 4-1 內插法 (b) $C_{DR \text{ interpolated}}$ 與 $C_{DR \text{ calibrated}}$

4. 因為馬達回傳的 C_{DR} 是母鴨與小鴨各別的 C_{DR} 的加權平均，由方程式(2)可推導出：

$$C_{DR} = \frac{m_M C_{DR,M} + m_D C_{DR,D}}{m_M + m_D} \quad (26)$$

代入表 1-1 的數據可推導出：

$$C_{DR \text{ theoretical}} = \frac{2m_{D6}}{m_{D3} + 2m_{D6}} \frac{m_M + m_{D3}}{m_{D3}} C_{DR} = 0.7897 C_{DR} \quad (27)$$

則 $C_{DR\ theoretical}$ 即為 D3 拉動兩隻 D6 且兩隻 D6 之間無任何物理作用時的 C_{DR} 理論值。將 $C_{DR\ theoretical}$ 與圖 4-11 的原始數據相減，可得兩隻 D6 之間的物理效應對 C_{DR} 值的影響，即圖 4-14 中的 $C_{DR\ interaction}$ 。

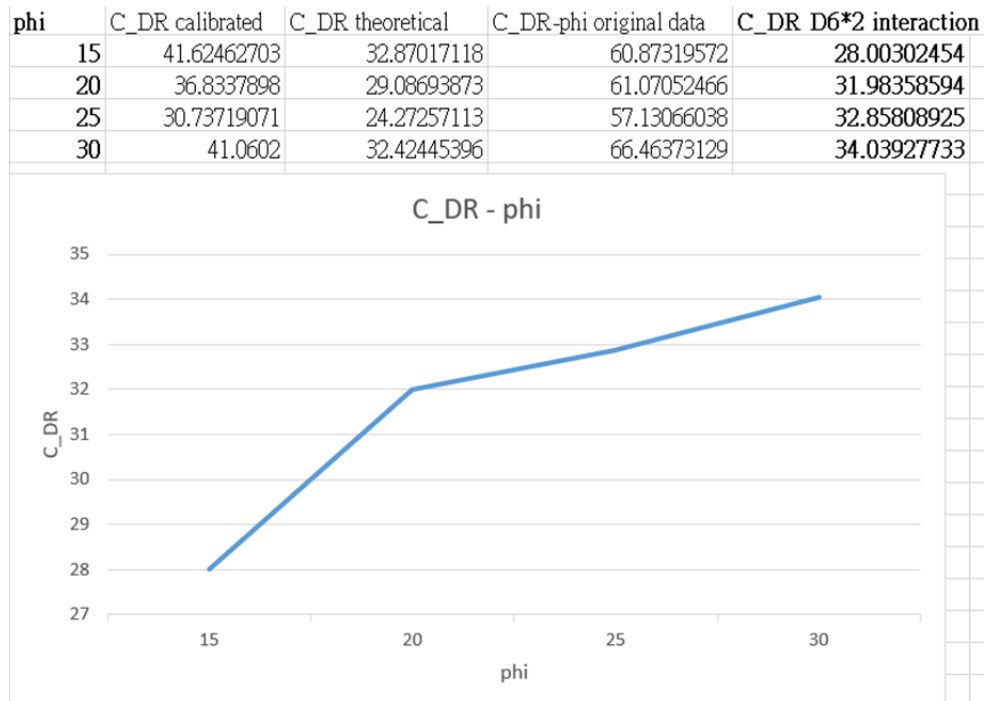
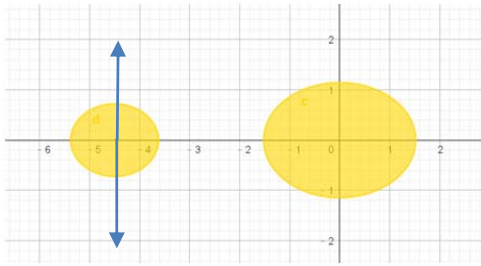


圖 4-14 $C_{DR\ interaction} - \phi$ 圖

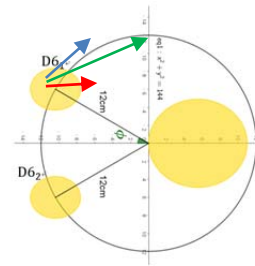
由圖 4-14 可知，兩隻 D6 之間的物理作用對 C_{DR} 的貢獻隨 ϕ 的增加而增加。這可能是因為兩隻小鴨間距減小時，亦即 ϕ 減小時，其前方部分水流因鴨身前行而被導入二鴨之間，水流不可壓縮而增加流速，使兩隻小鴨之間的壓力比外側小，小鴨所受的側向力增加，造成更劇烈的搖擺與能量損耗，降低 C_{DR} 值。

(一) 隊伍排列受到側力影響而偏移

(a)



(b)



(藍色為浮力、紅色為繩張力、綠色為合力)

(c)

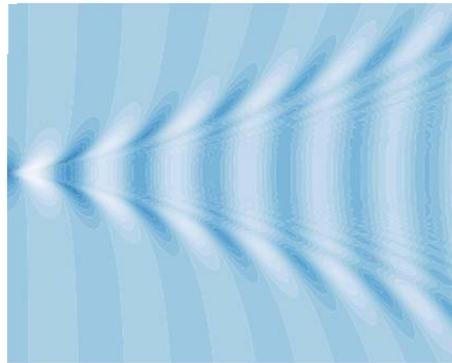


圖 4-15 解釋隊伍偏移原因 (a) 直線排列 (b) 倒 V 字型排列

(c) 尾波為圓弧形(圖片來源：參考文獻[1])

因為尾波波形呈圓弧形(圖 4-15 (c))，故圓上一點之浮力方向為從圓心指向該點的方向，之前的實驗鴨子皆為直線排列，因為都在 x 軸上，所以浮力方向皆為向前，在 y 方向上因為分力相消，不易產生上下偏移，如圖 4-15 (a)所示。

但因為倒 V 字型排列的鴨子， D_{6_1} 和 D_{6_2} 不在 x 軸上，所以 D_{6_1} 會受到的浮力含有朝 y 軸正向的分量，因拉力方向為 x 軸，故合力方向如圖 4-15 (b)中的綠色箭頭所示，而 D_{6_2} 同理。使 ϕ 變大，同時 D_{6_1} 和 D_{6_2} 因 y 方向分力無法抵銷，所以在 y 方向上微幅震盪，這應該可說是鴨子不以倒 V 字型排列的原因之一。

伍、 結論

總結以上各項實驗結果與討論之後，我們可以歸納出一些重點：

- 一、 在 $\frac{d}{\lambda} = 0.7$ 時，因鴨子產生的船前波，使 C_{DR} 達極大值，就是最省力的位置，在 $1.5\lambda \sim 3.5\lambda$ 會因為浮力方向而使得 $d = n\lambda$ 時省力， $d = \frac{n}{2}\lambda$ 時較為費力。
- 二、 鴨長 $\ell < \frac{1}{2}\lambda$ 時，浮力方向一致， C_{DR} 在 $\frac{d}{\lambda} = 0.5$ 和1時，可達40%，但鴨長 $\ell > \frac{1}{2}\lambda$ 時，浮力方向不一致，導致 C_{DR} 值較前者為低。
- 三、 三隻鴨的直線排列，主要是由 M 與 $D3_1$ 、 $D3_1$ 與 $D3_2$ 、M與 $D3_2$ 三組的互相影響而省力。
- 四、 倒 V 字型排列雖能使 C_{DR} 在 57%~67%之間，但因水波的側力影響，使得隊形不易維持，增加小鴨前進時的困難度。

陸、 參考文獻資料

- [1] CT, H. (2020). Kelvin's Ship Wave Pattern - University of Connecticut. Department of Physics - University of Connecticut.
- [2] 李聯旺(2021). 機械設計與製作專題 馬達特性與選用. 國立中興大學.
- [3] Longcope, D. (2009). A ship's wake. Department of Physics - Montana State University.
- [4] Luo, Y., & Zhao, K. (2004). 新概念物理教程-力學 (2 版). 北京高等教育出版社.
- [5] SCHULTZ, M.P. (2007) Effects of coating roughness and biofouling on ship resistance and powering. *Biofouling* 23 (5), 331–341.
- [6] Spela Rozman. (2009). Wake pattern of a boat. University of Ljubljana Faculty of Mathematics and Physics Department of Physics.
- [7] Yuan, Z.-M., Chen, M., Jia, L., Ji, C., & Incecik, A. (2021). Wave-riding and wave-passing by ducklings in formation swimming. *Journal of Fluid Mechanics*, 928.
- [8] 陳思詠, & 皇甫鈺妘. (2006). 被困住的水波?. 中華民國第 46 屆中小學科學展覽會, 全國中小學科展.
- [9] 楊舒晴, 李筠茹, & 劉邦智. (2013). 水深不深有波則明. 中華民國第 53 屆中小學科學展覽會, 全國中小學科展.
- [10] Ландау Лев Давидович, & Лифшиц Евгений Михайлович. (2013). 第一章 理想流體. In 理論物理學教程. (第 5 版, Vol. 第 6 卷, Ser. 流體動力學, pp. 1–41). essay, 高等教育出版社.

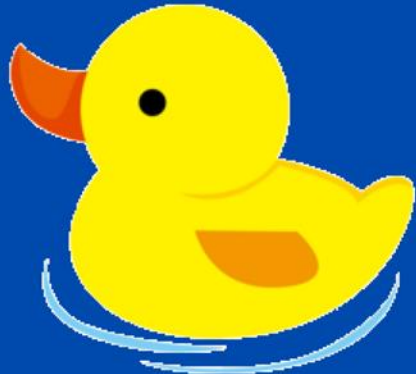
【評語】 051803

此作品模擬鴨子在水面上游動的情況，藉由馬達回傳的電功率值，計算鴨子在游動時的阻力，從而找到鴨子在何種情況下最省力。本實驗在設計、數據、分析上均能顯現所要探討議題，結論算是合理。建議作者與實際情況比較。

作品海報

鴨行無阻--

鴨子行進陣列與其 省力情形之探究



壹、動機

在生活中可以看到像是腳踏車隊、艦隊、鳥群在行進的過程中會排成特定隊形。恰巧在2021年11月號科學月刊看到研究鴨群游在特定相位的文章，然而其文章僅用電腦軟體模擬，而沒有實際模型分析。於是我們透過橡皮鴨與伺服馬達，模擬鴨子在水面上游動的情況並測量鴨子在游動時的阻力。

透過改變鴨子的速度、大小和排列方式，嘗試找出與阻力的關聯，並引入文獻中省力係數描述省力的程度、用波長、水深、波速的函數關係來計算波長，透過這些嘗試協助結果呈現並計算出難以測量的部分。最後透過繪圖的方式來討論各種鴨子與水波的關聯性以解釋阻力變化，再總結出鴨子在何種速度、大小、排列方式能夠達到最省力的狀態。

貳、研究目的

• 建構實驗模型與分析方式

利用伺服馬達帶動鴨子前進，模擬鴨子在水面游泳的情況，並找出馬達回傳的電功率與實際拉力值的關係，由此判斷省力與否。

• 理論輔助實驗的分析與解釋

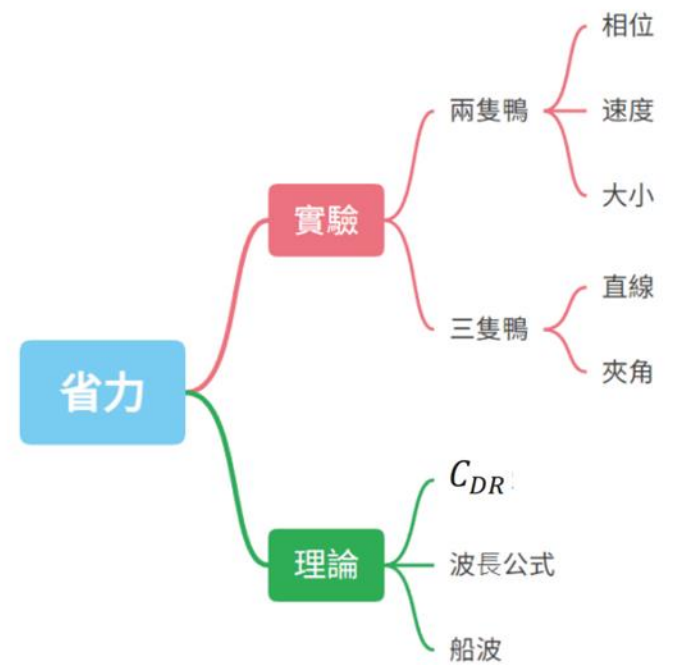
定義 C_{DR} 表示省力程度、計算福祿數 Fr 確認在討論中可忽略黏滯阻力、推導波長與波速、水深之間的關係得知實驗時的波長。

• 量測實驗數據

測量兩隻鴨的間距、速度與鴨子大小(長度)對 C_{DR} 的影響，並測量三隻鴨子直線與倒V字型排列對 C_{DR} 的影響，同時嘗試用兩隻鴨的實驗結果估算三隻鴨的情況，與實際三隻鴨的實驗結果進行比較。

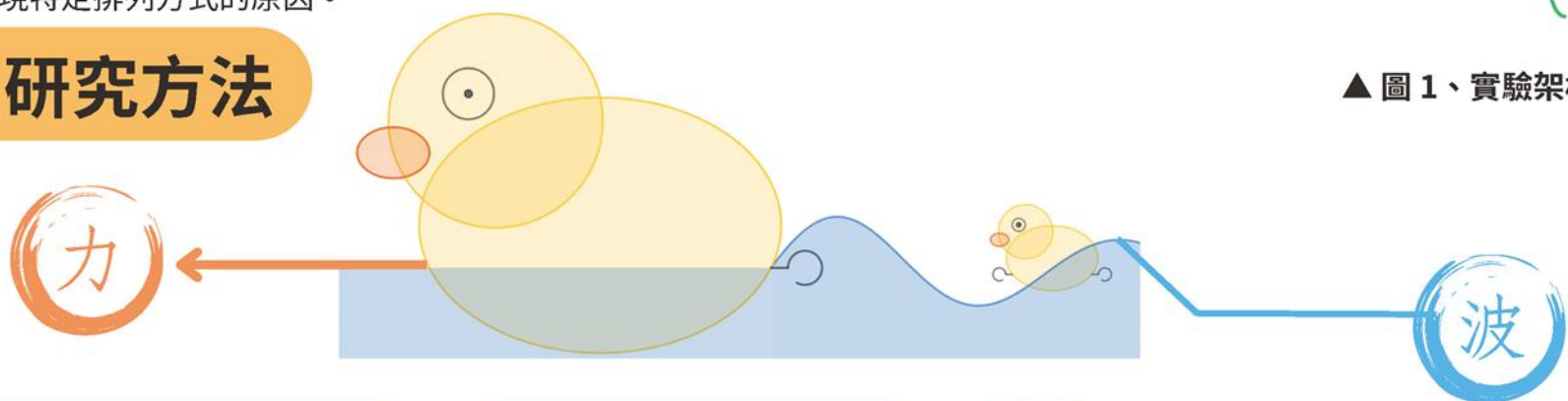
• 省力原因的探究與實驗數據的解釋

探討可能的省力原因，並將這些原因套用於實驗數據的詮釋，以解釋鴨子呈現特定排列方式的原因。



▲ 圖 1、實驗架構圖

參、研究方法



定義 C_{DR} 表示拉力的減少程度

$$C_{DR} \equiv \left(1 - \frac{R}{\sum_{i=1}^n R_i} \right) \times 100\% \quad \dots (1)$$

($R \equiv n$ 隻鴨子排成陣列的總波阻力
 $R_i \equiv$ 第 i 隻鴨子單獨在水面游動的波阻力)

確認 Fr 確保省略黏滯阻力

$$Fr \equiv \frac{v}{\sqrt{g\ell}} > 0.25 \quad \dots (2)$$

($v \equiv$ 鴨子速度
 $g \equiv$ 重力場, $\ell \equiv$ 鴨子長度)

因為鴨子長度的限制，實驗的速度應高於 0.35m/s 。

波長

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right)} \quad \dots (3)$$

$H \equiv$ 水深, $c \equiv$ 相位速率, $\lambda \equiv$ 波長

因為鴨速 = 波速，故只需藉由測量鴨速和已知的水深，就可以知道波長。

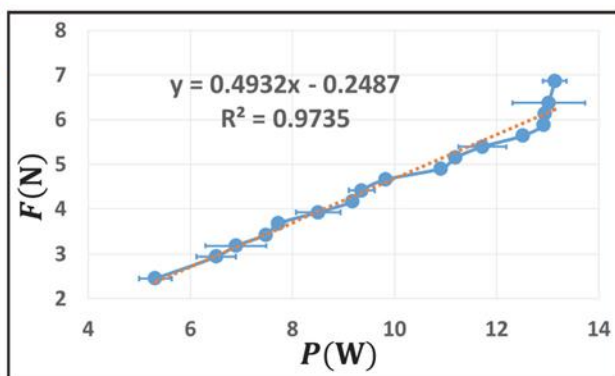
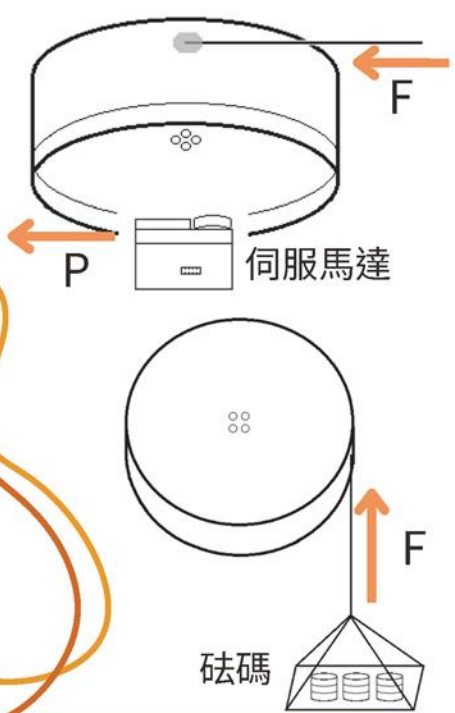
尾跡角



尾跡角為 $\theta = 19.47$ 度，可知大部分的波形擾動都將落於尾跡角的範圍內。

▲ 圖 3、尾跡角

電功率與波阻力的轉換



▲ 圖 2、拉力值與馬達電功率的轉換

懸掛固定重量的砝碼，以控制拉力值 F 。記錄馬達的輸入電流與電壓，計算電功率 P 。

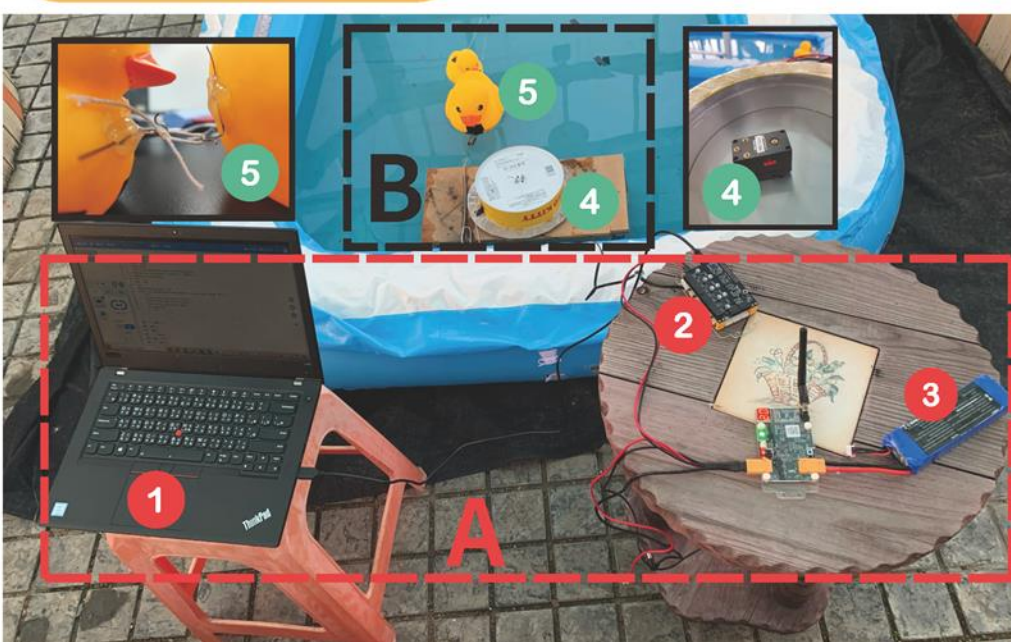
由圖一得到 $F = 0.4932 P - 0.2487$ 。

由此可藉由測量馬達的電功率值轉換成拉力值進而得到 C_{DR} 值。

探討可能的省力原因

- 1、小鴨在母鴨尾波上的相位，會影響小鴨的浮力方向，進而影響省力程度。
- 2、母鴨在小鴨的船前波上，使母鴨得到向前的浮力。
- 3、母鴨尾波和小鴨的船前波進行干涉，使得波形改變。

肆、實驗設備



▲ 圖 4、實驗裝置

藉由A部分的電腦、novapi控制B部分的馬達運轉，進而帶動水面上的鴨向前游動。

A、馬達驅動與電流測量

1、電腦與電流紀錄

對novapi編碼，控制馬達運轉與紀錄回傳的電流。

2、novapi board

以25Hz的頻率測量馬達電功率值、角速度並回傳電腦。

3、鋰針電池

穩定提供12V的電壓使馬達與novapi運作。

B、拉動裝置

4、鐵盤與伺服馬達MS-12A

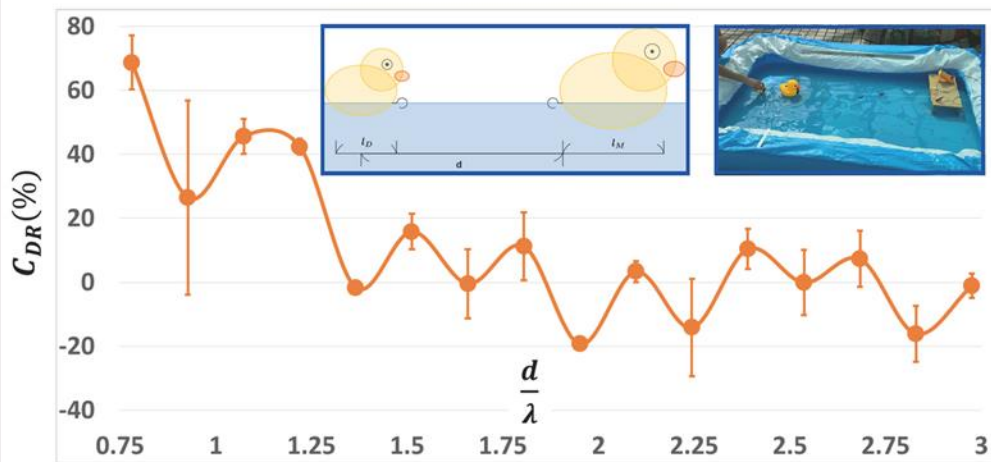
接收來自novapi的執行碼，帶動鐵盤旋轉以拉動棉線。

5、排列的橡皮鴨

用鉤子連接前後鴨子並由棉線拉動模擬鴨子游泳的情況。

伍、實驗結果

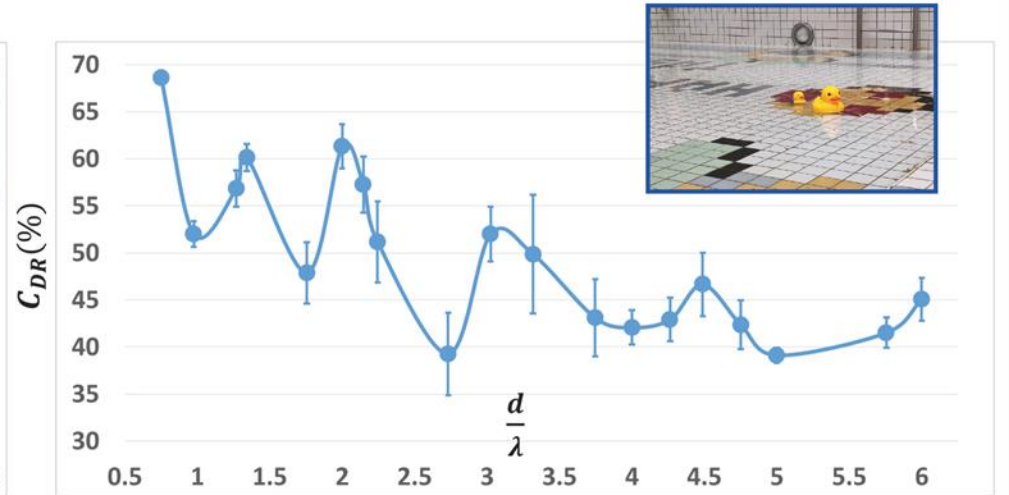
● 實驗一、兩隻鴨子間的距離對 C_{DR} 的影響



▲ 圖 5、在充氣水池中，兩鴨距離 d 對 C_{DR} 的影響

固定水深約 11.5 cm，鴨子速度為 0.4 m/s，若以 $\frac{d}{\lambda}$ 為 X 軸表示小鴨在波上的相位關係，並以 C_{DR} 為 Y 軸可畫出圖 5、圖 6。

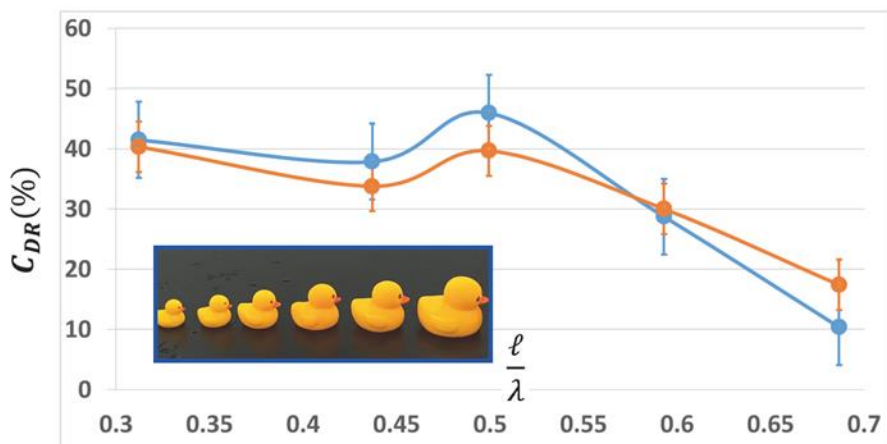
- $\frac{d}{\lambda}$ 在 [0.7, 1] 的區間，**d 越小 C_{DR} 越大**，遞減約 40%。
- $\frac{d}{\lambda} > 1.25$ ，以 0.25 小週期、0.75 大週期， C_{DR} 在 0 附近上下震盪。



▲ 圖 6、在游泳池中，兩鴨距離 d 對 C_{DR} 的影響

- $\frac{d}{\lambda}$ 在 [0.7, 1] 的區間，**d 越小 C_{DR} 越大**。
- $\frac{d}{\lambda}$ 在 [1.5, 3.5] 的區間， $\frac{d}{\lambda} = 1.5$ 和 2.5 時， C_{DR} 處於低點，而 $\frac{d}{\lambda} = 2$ 和 3 時， C_{DR} 處於高點，落差達 20%。
- $\frac{d}{\lambda}$ 在 [3.5, 6] 的區間， C_{DR} 漸趨平緩，位於 40~45% 的區間。

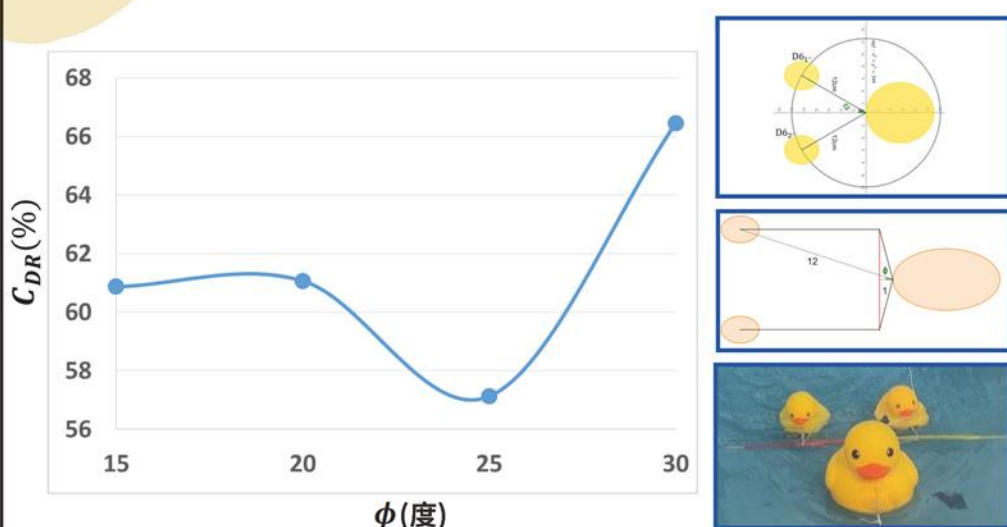
● 實驗二、鴨子長度對 C_{DR} 的影響



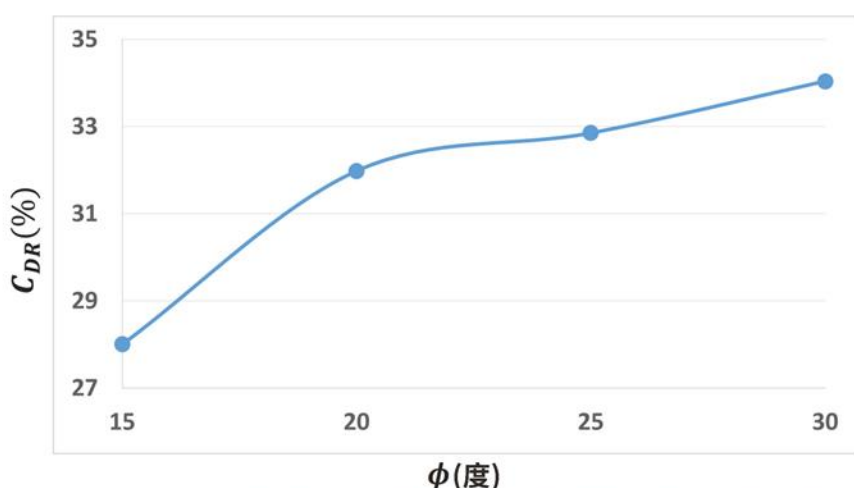
▲ 圖 7、鴨子長度 l 對 C_{DR} 的影響

- 使用不同小鴨 D3 至 D7 在 $\frac{d}{\lambda} = 1$ (圖 7 橘線) 以及 $\frac{d}{\lambda} = 1/2$ (圖 7 藍線) 時的 C_{DR} 值，討論鴨子長度對 C_{DR} 的影響。
- 由圖 7 可知， $\frac{l}{\lambda} < 0.5$ 時的 C_{DR} 維持在 [30, 50] 的區間，但 $\frac{l}{\lambda} > 0.5$ 時， C_{DR} 隨著 l 的增加而下降。

● 實驗四、三隻鴨到 V 排列頂角 ϕ 對 C_{DR} 的影響

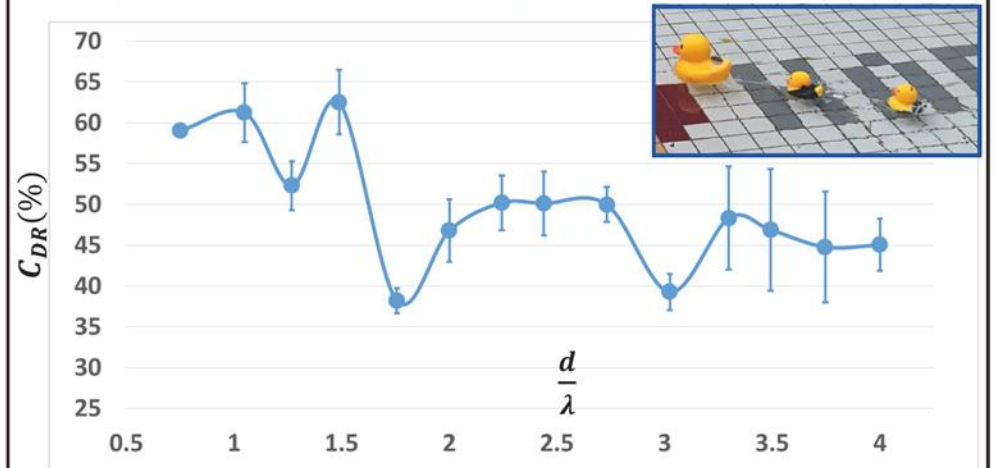


▲ 圖 10、陣列夾角 ϕ 對 C_{DR} 的影響

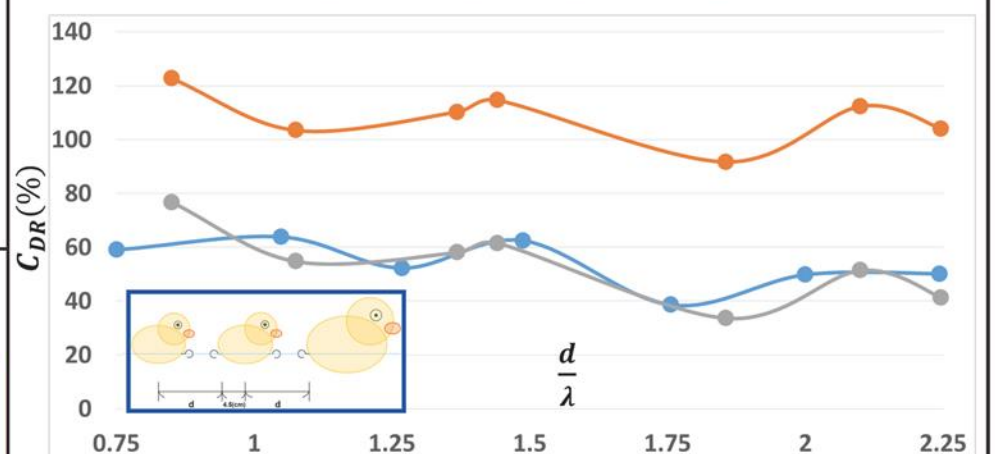


▲ 圖 11、用兩隻鴨的實驗結果估算陣列夾角 ϕ 對 C_{DR} 的影響

● 實驗三、三隻鴨的距離對 C_{DR} 的影響



▲ 圖 8、三隻鴨的距離對 C_{DR} 的影響



▲ 圖 9、用兩隻鴨的實驗結果估算三隻鴨的距離對 C_{DR} 的影響

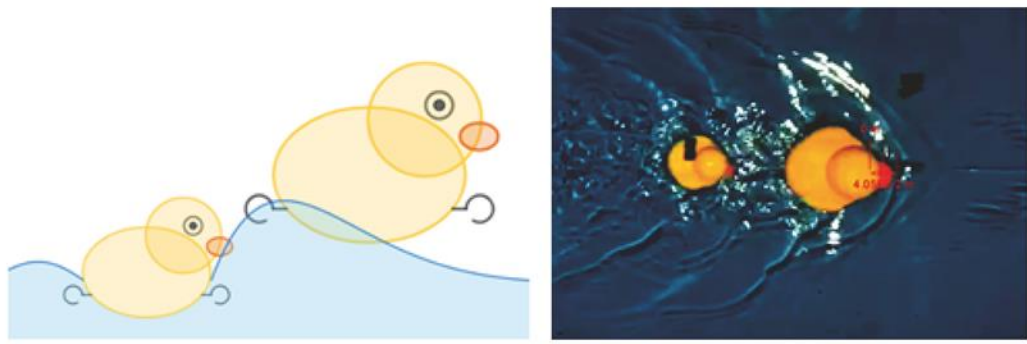
- 固定水深為 11.5 cm、鴨子速度為 0.4 m/s，討論三隻鴨的距離對 C_{DR} 的影響。
- 三隻鴨的排列涉及「母鴨和第一隻小鴨(D3-1)」、「母鴨和第二隻小鴨(D3-2)」、「第一隻小鴨(D3-1)和第二隻小鴨(D3-2)」三組之間的相互影響，於是可以利用兩隻鴨的實驗數據(實驗一)估算三隻鴨的情況。
- 圖 9 中，橘線為估算後的結果，經由平移後得到灰線，而藍線則是三隻鴨的實驗數據，可見灰線與藍線間有相近的趨勢。

- 想了解若鴨群模仿鳥群呈倒 V 型排列， C_{DR} 的變化情形，固定 D3 與 D6 距離為 12 cm，改變 ϕ 以量測 C_{DR} ，繪出圖 10，相比於上文中的實驗 C_{DR} 的起伏相對平緩，但數據點仍落在 57% 到 67% 之間，可謂相當省力。
- 因為觀察到實驗時隊形容易偏移，導致 ϕ 有偏差，故使用兩隻鴨的實驗數據(實驗一)估算倒 V 字型排列的狀況，得到圖 11， C_{DR} 的起伏仍然平緩，但在 27%~35% 之間。

陸、討論

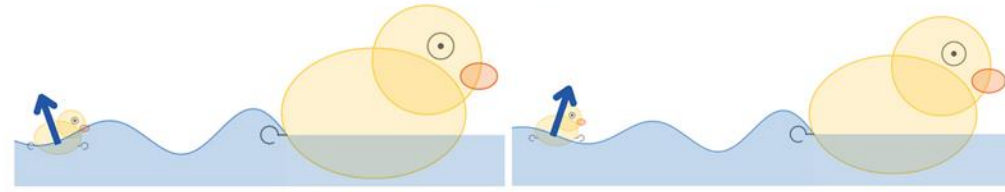
● 實驗一

- 1、討論 $\frac{d}{\lambda}$ 在 $[0.7, 1]$ 的區間
當小鴨與母鴨非常靠近的時候，母鴨會在小鴨產生的船前波上，進而省力的效果，而因為船前波衰減的很快，故在 $[0.7, 1]$ 的區間 C_{DR} 為遞減的趨勢。
- 2、討論 $\frac{d}{\lambda}$ 在 $[1.5, 3.5]$ 的區間
 $\frac{d}{\lambda}$ 為整數時，浮力方向向前； $\frac{d}{\lambda}$ 為半整數時，浮力方向向後。故當兩隻鴨距離為整數倍波長時較為省力，半整數倍波長時較為費力。
- 3、討論 $\frac{d}{\lambda}$ 在 $[3.5, 6]$ 的區間
 $\frac{d}{\lambda}$ 在 3.5 之後 C_{DR} 多半落於 40~45% 之間，推測應該是距離變長後，振幅衰減，因此波對鴨子陣列的影響變小， C_{DR} 愈趨平緩。



(a) 母鴨在小鴨的船前波上(示意圖) (b) 量測船前波的範圍

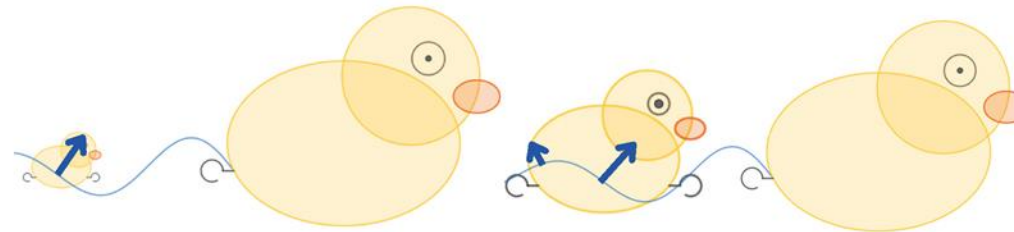
▲圖 12



(a) $\frac{d}{\lambda} = 1.5$ (示意圖)

(b) $\frac{d}{\lambda} = 2$ (示意圖)

▲圖 13



(a) $\frac{l}{\lambda} < 0.5$ (示意圖)

(b) $\frac{l}{\lambda} > 0.5$ (示意圖)

▲圖 14

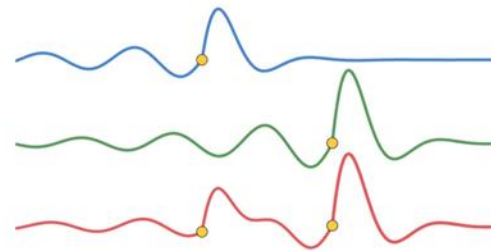


圖 15、船前波與干涉之因素(示意圖)

● 實驗二

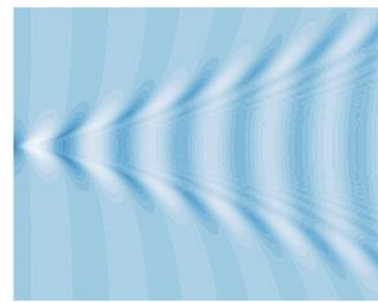
- 1、討論 $\frac{l}{\lambda} < 0.5$
浮力方向均向前，且因為入水體積較小，浮力水平分力與阻力皆較小，故 C_{DR} 較大。
- 2、討論 $\frac{l}{\lambda} > 0.5$
因鴨身部分同時受到向左和向右的力，浮力水平分力較小，故 C_{DR} 較小。

● 實驗三

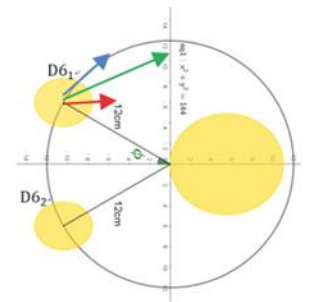
- 1、三組兩隻鴨的數據，經過疊加與平移得到與實驗數據相近的趨勢，故可以總結三隻鴨的直線排列主要是由「母鴨和第一隻小鴨」、「母鴨和第二隻小鴨」、「第一隻小鴨和第二隻小鴨」這三組關係決定省力程度。
- 2、惟因三隻鴨的直線排列仍須考量各波間的干涉、船前波的因素等原因，導致我們不得不採取平移的手法處理數據。

● 實驗四

- 1、當 ϕ 減小時，兩隻小鴨的間距減小，其前方部分水流被導入二鴨之間增加流速，橫向壓力差與側向力增加。
- 2、倒V字型排列的鴨子不在x軸上，所以浮力含有y軸方向的分量。
因此增加搖擺與能量損耗，降低 C_{DR} 值，所以鴨子不以倒V字型排列。



(a) 尾波為圓弧形(參考文獻[1])



(b) 隊形受浮力而偏移(示意圖)

▲圖 16

柒、結論

● 實驗一、兩隻鴨子間的距離對 C_{DR} 的影響

- 1、在 $\frac{d}{\lambda} = 0.7$ 時，因鴨子產生的船前波，使 C_{DR} 達極大值，也就是最省力的位置。
- 2、 $\frac{d}{\lambda}$ 在 $[1.5, 3.5]$ 的區間，會因為浮力方向而使得 $\frac{d}{\lambda} = n$ 時省力， $\frac{d}{\lambda} = n + \frac{1}{2}$ 較為費力。

● 實驗二、鴨子長度對 C_{DR} 的影響

- 1、 $\frac{l}{\lambda}$ 在 $[0.3, 0.5]$ 的區間，浮力方向一致， C_{DR} 在 $\frac{d}{\lambda} = 0.5$ 和 $\frac{d}{\lambda} = 1$ 時，可達 40%。
- 2、 $\frac{l}{\lambda}$ 在 $[0.5, 0.7]$ 的區間，浮力方向不一致，導致 C_{DR} 從 40% 遞減至 10%。

● 實驗三、三隻鴨的距離對 C_{DR} 的影響

- 1、三隻鴨的直線排列，主要是由 M 與 D3-1、M 與 D3-2、D3-1 與 D3-2 三組的互相影響而省力。

● 實驗四、三隻鴨到V排列頂角 ϕ 對 C_{DR} 的影響

- 1、倒V字型排列雖能使 C_{DR} 在 57%~67% 之間，但因水波的側力影響，使得隊形不易維持，增加小鴨前進時的困難度。

捌、未來展望

- 1、將尾波波形與鴨子形狀解析化，估算浮力與 C_{DR} 的理論值。
- 2、在倒V字型排列實驗中，尋找能固定三隻鴨的相對位置的實驗裝置。
- 3、擴大實驗裝置的尺寸，使省力效果更加明顯，以降低測量時 C_{DR} 的誤差。

玖、參考資料

- [1] CT, H. (2020). Kelvin's Ship Wave Pattern. Department of Physics - University of Connecticut.
- [2] 李聯旺(2021). 機械設計與製作專題 馬達特性與選用. 國立中興大學.
- [3] Longcope, D. (2009). A ship's wake. Department of Physics - University of Montana.
- [4] Luo, Y., & Zhao, K. (2004). 新概念物理教程-力學 (2版). 北京高等教育出版社.
- [5] SCHULTZ, M.P. (2007). Effects of coating roughness and biofouling on ship resistance and powering. Biofouling 23 (5), 331-341.
- [6] Spela Rozman. (2009). Wake pattern of a boat. Department of Physics - University of Ljubljana.
- [7] Yuan, Z.-M., Chen, M., Jia, L., Ji, C., & Incecik, A. (2021). Wave-riding and wave-passing by ducklings in formation swimming. Journal of Fluid Mechanics 928, 1-7.
- [8] 陳思詠, & 皇甫鈺妘. (2006). 被困住的水波? . 中華民國第46屆中小學科學展覽會.
- [9] 楊舒晴, 李筠茹, & 劉邦智. (2013). 水深不深有波則明. 中華民國第 53 屆中小學科學展覽會.
- [10] Ландау Лев Давидович, & Лифшиц Евгений Михайлович. (2013). 第一章 理想流體. In 理論物理學教程. (第5版, Vol. 第6卷, Ser. 流體動力學, pp. 1-41). essay, 高等教育出版社.