

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理與天文學科

051802

液中各表__動態表面張力分佈造成液面上彩圈
之行為討論

學校名稱：國立中科實驗高級中學

作者： 高二 李傳弘 高二 李昱儒 高二 羅唯倫	指導老師： 傅祥益 林高源
---	-----------------------------

關鍵詞：表面張力、界面活性劑、馬倫哥尼對流

摘要

以不同濃度的界面活性劑、容器面寬、水深來觀察界面活性劑在水中運動的種種現象。在界面活性劑中加入固定比例的紅色色素 6 號，使其滴入水面上時可以明顯觀察彩圈的漲縮現象，再藉由 Tracker 追蹤彩圈運動軌跡，進而計算出其直徑大小之改變，最後將實驗結果以圖的方式記錄下來，再觀察其運作規律並製作出函數圖形，確定此一現象的運動方式，並思考此現象形成的可能原因。

壹、前言

一、研究動機

相信大家都曾看過一個趣味小實驗，就是邊上塗了洗碗精的保麗龍小船可以在水面上短暫行駛；或是表面灑滿胡椒粒的一碗水，水面中央若滴入洗碗精胡椒粒會迅速散開。可令人意猶未盡的是同一水面只能玩一次，當然我們現在都能理解，這是因為玩一次就會讓水表面佈滿界面活性劑分子，使水表面再無表面張力差異去讓小船或胡椒粒運動，於是我們便對界面活性劑分子是如何快速的在水表面分佈產生興趣，又因我們所使用的洗碗精透明無色不好觀察，故我們設計將洗碗精以紅色色素染色，希望將洗碗精滴入水面後，藉染料顏色於水面分佈去了解界面活性劑分子於在水面的行為。但這洗碗精不滴不知道，一滴嚇一跳，實驗結果並非原先預想的非常快速分佈，反之我們觀察到的是染料慢悠悠的在水面擴張，最後竟然還會收縮至一塊很小的區域！這和我們過去的相關經驗發生衝突，畢竟我們可沒有看到胡椒粒還會再往水面中央集中成一小區，於是這洗碗精於水面的一滴，便滴開了我們高中生涯的研究之路，本以為這會和去年科展的液滴爆炸有所相關，但當我們深入研究之後才發現，原來我們和他們完全是不同概念。

二、研究目的

- (一) 探討界面活性劑濃度與表面張力之關係
- (二) 探討不同水深對彩圈的運動關係
- (三) 探討不同容器面寬對彩圈擴散半徑的關係
- (四) 探討不同容器面寬、滴入量對急速圈的關係
- (五) 探討彩圈擴散速率對時間關係

貳、研究設備及器材

一、製作界面活性劑和色素混合液

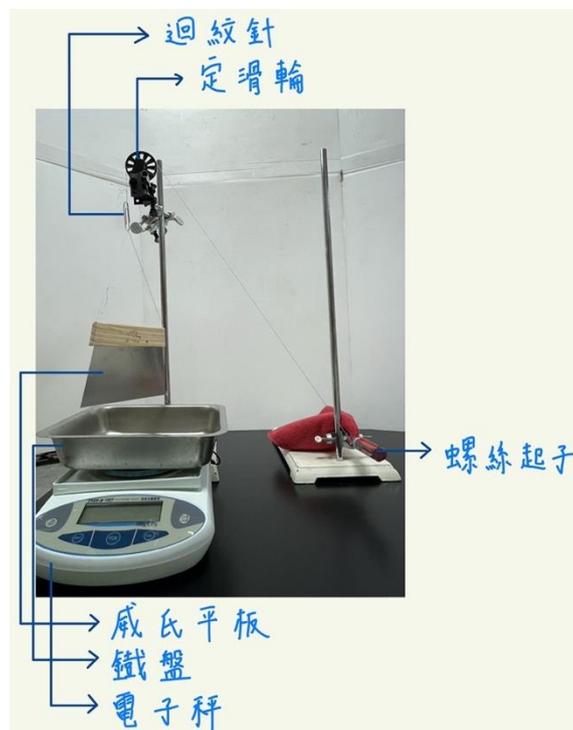
電子秤、塑膠瓶、白熊洗碗精、燒杯、滴管、6號紅色色素



(圖一)

二、威氏平板法架設

鐵支架、定滑輪、棉線、鐵盤、威氏平板、抹布、螺絲起子、電子秤、迴紋針、膠帶



(圖二)

三、測不同容器面寬對彩圈的影響實驗

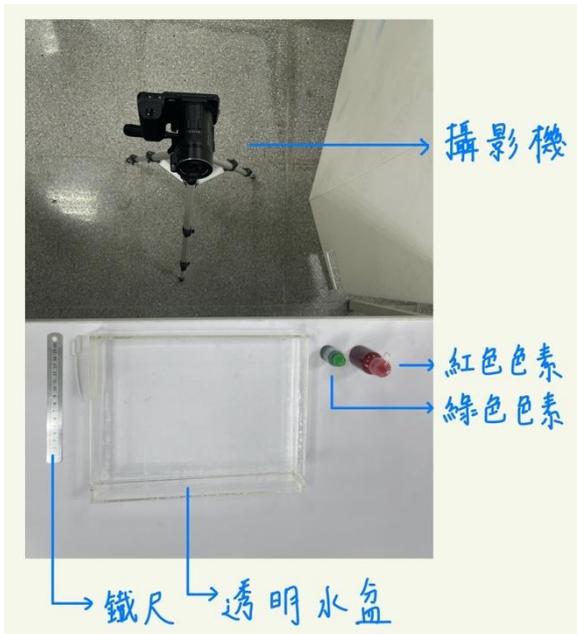
JVC 的 GC-PX10U 的攝影機、腳架、圓盤（半徑 16.5cm、15cm、12cm、7.5cm、5.25cm、2.75cm 各一個）、迴紋針、鐵尺、界面活性劑和色素混合液



(圖三)

四、從側面觀察液體的對流現象實驗

JVC 的 GC-PX10U 的攝影機、腳架、透明水盆、滴管、鐵尺、紅色色素、綠色色素



(圖四)



(圖五)

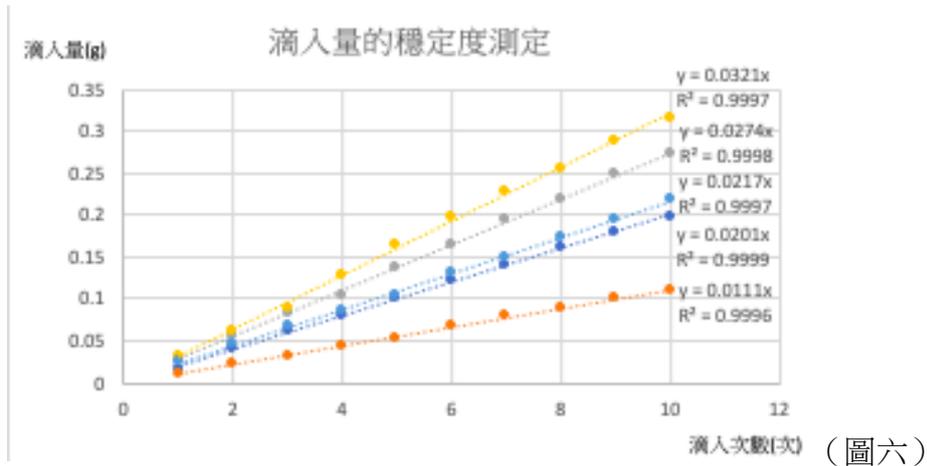
五、追蹤彩圈之程式

Tracker

參、研究過程或方法

一、測量滴入有色素之界面活性劑和水的混合液質量

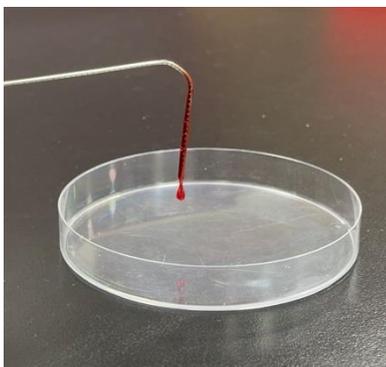
想到每次滴入的量會可能不同的問題，我們利用可以測量到小數點後三位的電子秤測量過，每種器具滴 10 次並紀錄再繪製成圖，再利用 Excel 繪製趨勢線，各滴入量結果所形成的斜率代表各自滴入的平均質量，而檢驗結果如下表（圖六）（表一）。



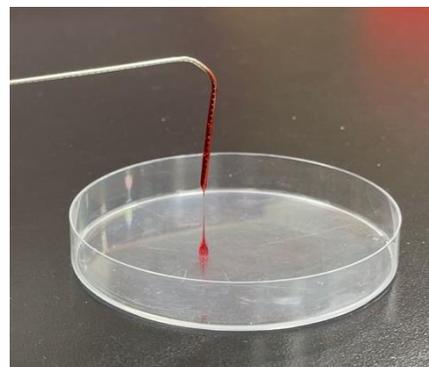
	小滴管	迴紋針	鐵棒	熱融膠	筷子
斜率	0.0201	0.0111	0.0274	0.0321	0.0217
滴入量的R ² 值	0.9999	0.9996	0.9998	0.9997	0.9997

（表一）

由上圖可知所有器具之滴入穩定量差異不大，但考慮到可能由於操作人員的不同而有所差異（傾斜角度等等），我們最後小滴入量選擇用迴紋針、中滴入量選擇用小滴管、大滴入量選擇用鐵棒，再利用地球萬有引力將混合液自然滴落（圖七）（圖八）。



（圖七）



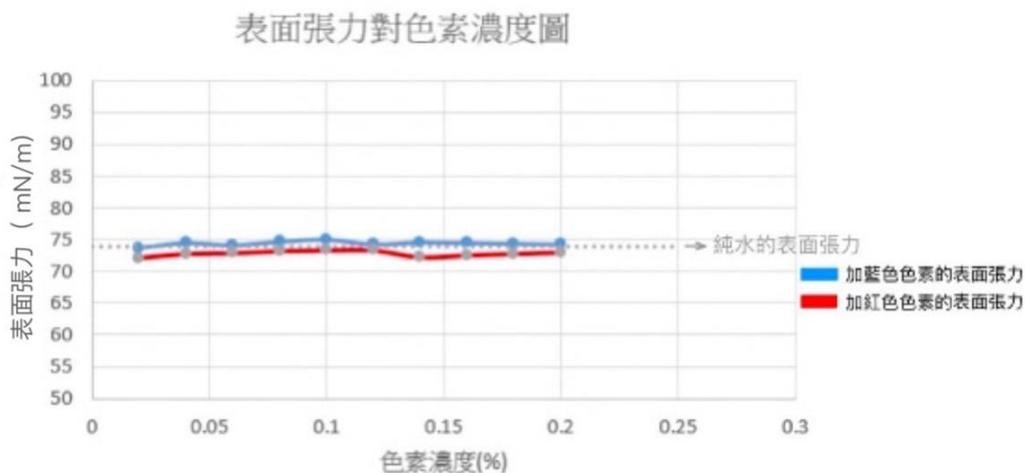
（圖八）

二、檢驗實驗數據是否相關（T 檢定—單因子變異數分析 ANOVA 檢定）

為了確定實驗變因是否為有顯著差異，我們使用 ANOVA 檢定來做檢測，p 值取 0.05 為基準判斷，p 值大於 0.05 代表兩數據沒有顯著關係，p 值小於 0.05 則反之。

三、確認紅、藍之染料是否影響表面張力

由下圖可看出將藍色染料與紅色染料滴入水中，混入染料的水的表面張力和純水的表面張力幾乎相同，可得知此兩種染料並不會對表面張力產生影響，故我們將染料加入界面活性劑中再滴入水中，並定義染料顏色為相對的表面張力的參考濃度。



(圖九)

四、彩圈的階段性（名詞解釋）

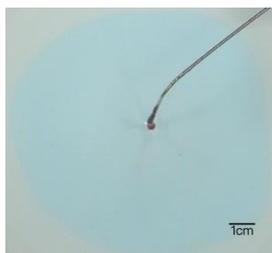
為了方便後續說明，這裡先統整一下不同階段之彩圈擴張行為的名詞解釋。

前提：表面張力 T 、半徑 r

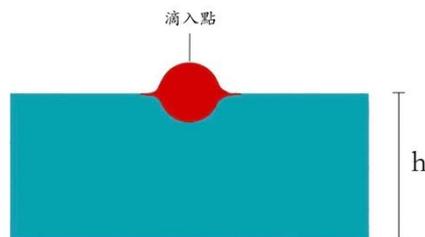
(一) 界面活性劑初滴入：

我們先在水中滴入一滴藍色純染料，再將界面活性劑滴入水中。

界面活性劑初滴入瞬間，無色急速圈尚未形成，定義時間(t)為 $t = 0$ 。



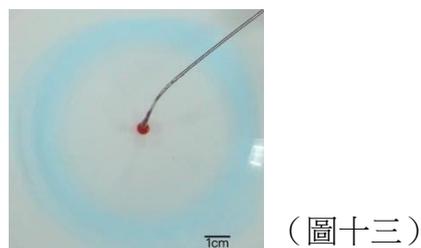
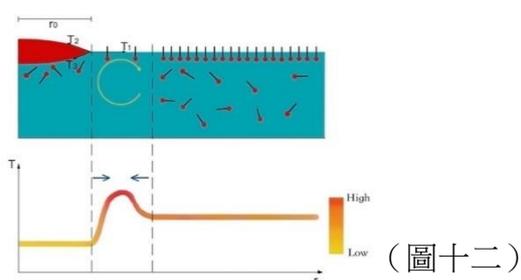
(圖十)



(圖十一)

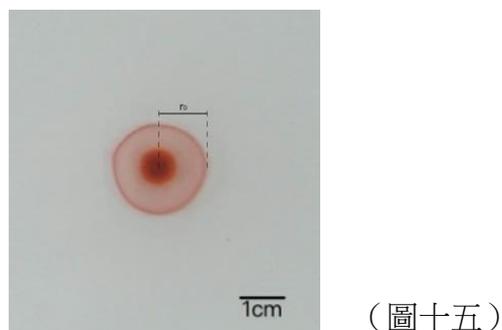
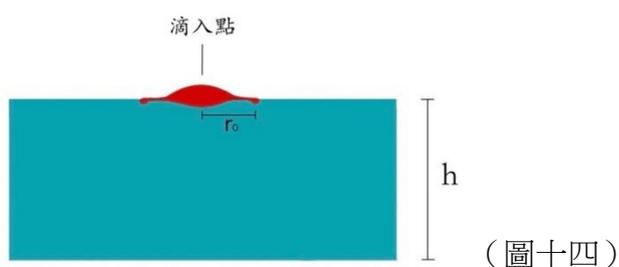
(二) 界面活性劑滴入且無色急速圈擴張瞬間

滴入界面活性劑後，會因表面張力差而形成馬倫哥尼對流（圖十二）（也就是界面活性劑快速擴散時，由於表面張力強的液體會將表面張力弱的液體拉過去，導致原滴入點周圍的水被拉到容器邊緣，此時底下將會形成一個向上的對流）而拉動液面的過程則為我們所定義之無色急速圈(圖十三，為擴散過程示意圖)，使原滴入點附近為界面活性劑濃度低而表面張力高的區域。



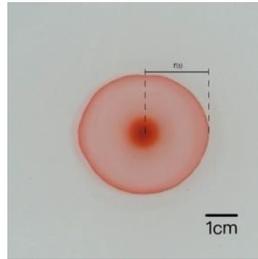
(三) 彩圈初形成 $t = t_0$ 、 $r = r_0$

無色急速圈結束後，在原滴入點附近會突然出現一個明顯的有色區域（並不是由原滴入點慢慢擴張成(圖十五)，而是在最外側累積形成的），我們推測其乃因邊界處有無色急速圈帶上來含較少的界面活性劑之水體，因此該區表面張力較兩側強(即彩圈內外)，故會形成對流使得彩圈積累在內側(圖十二，表面張力高峰處會形成一股馬倫哥尼對流，將表面張力高峰處左側和右側（即彩圈的內側和外側）的界面活性劑分子區隔），而最外圈顏色最深的一圈稱為彩圈（圖十四、圖十五），彩圈初形成定義時間(t)為 $t = t_0$ 、起始半徑(r)為 $r = r_0$ ，故 r_0 為彩圈起始半徑。



(四) 彩圈穩定擴張 $r=r(t)$

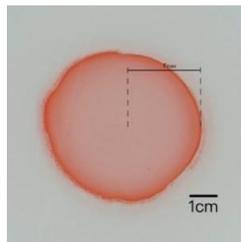
彩圈會由(圖十五)慢慢擴張，此階段為彩圈由起始半徑擴散至最大半徑的過程。



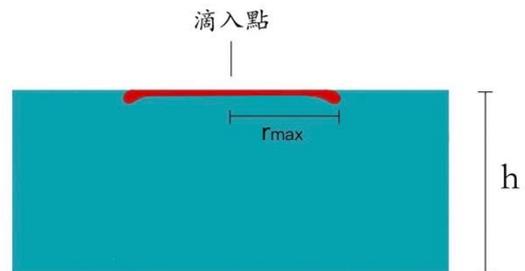
(圖十六)

(五) 彩圈達最大 $t = t_{max}$ 、 $r = r_{max}$

彩圈會從起始半徑(圖十五)慢慢擴張到最大半徑(圖十七、圖十八)，下一秒就要收縮，此時定義時間(t)為 $t = t_{max}$ 、半徑 $r = r_{max}$ ， r_{max} 即為彩圈最大半徑。



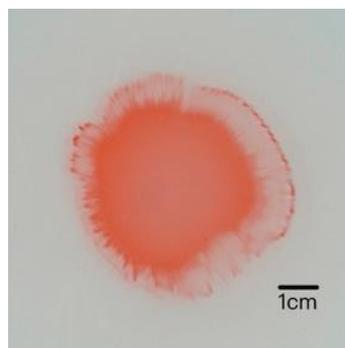
(圖十七)



(圖十八)

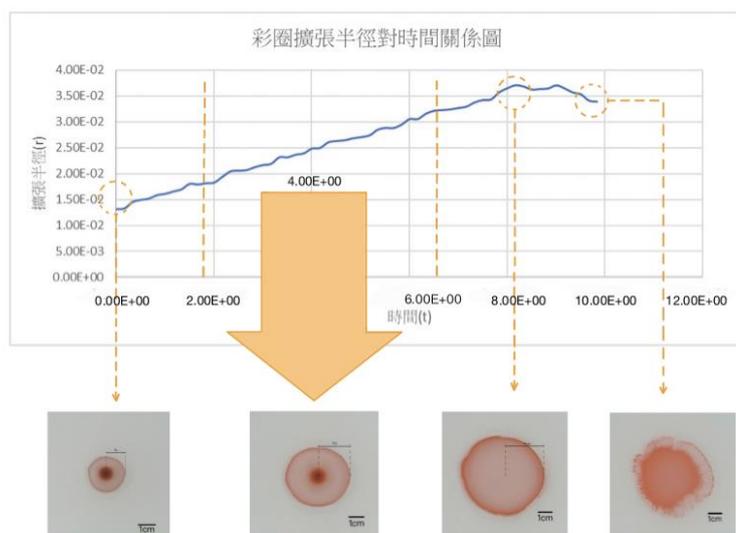
(六) 彩圈收縮

彩圈逐漸收縮(圖十九)。



(圖十九)

(七) 彩圈半徑和時間的統整：

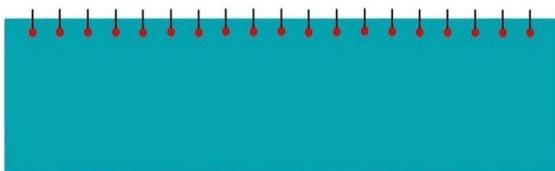


(圖二十)

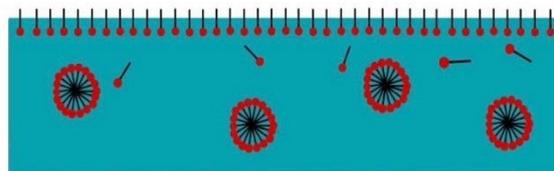
上圖中的時間起始點並非為初滴入時間點，而是彩圈恰開始擴張的時間點，此時時間 t 即為 t_0 。

五、CMC 臨界膠束濃度 (名詞解釋)：

界面活性劑在未達 CMC 時 (圖二十一)，其累積量尚無法使肉眼看見 (色素累積量未達一定程度)，而 CMC 為介面活性劑「不形成微胞」所能接受的界面活性劑最大的量，當液面佈滿界面活性劑時，多的界面活性劑會在液面下形成微胞 (圖二十二)，而此時表示濃度已超過臨界膠束濃度(CMC)，表面張力不再隨濃度上升而改變。



(圖二十一)



(圖二十二)

六、研究方式 ---- 表面張力的測量（威氏平板法）

（一）先測量水的溫度（因為表面張力和當下氣溫有關）

$$\text{公式：表面張力}(mN/m) = 72.75 * [1 - 0.002 * (K - 291)]$$

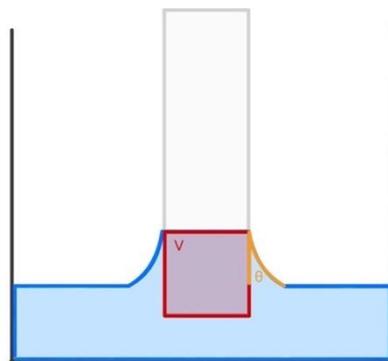
（二）上拉威氏平板並紀錄下水膜破掉前電子秤顯示最小的數

注意：由於要忽略在水面下威氏平板體積、上拉水膜之角度，和正常的威氏平板法（如圖二十三）不同，我們將威氏平板一角輕碰到容器壁再拉起（如圖二十五）。

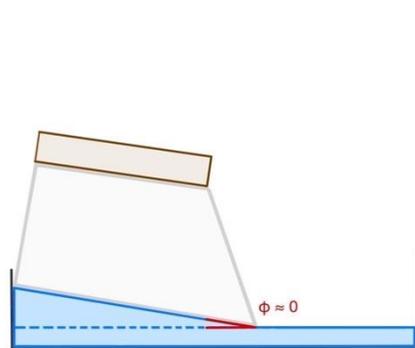
（靠在容器壁上可以借器壁讓水形成一層三角薄膜，而重力會使水膜整體向下拉，而使水膜和威氏平板之間角度趨近於0（如圖二十六），不用再考慮接觸角和平板在水下之體積造成的影響（如圖二十四紅色部份）。而我們在做實驗後，也發現在室溫 19 度時（此時純水表面張力理論值為 71.3135mN/m），威氏平板靠容器壁時測得的表面張力為 70.92mN/m，而未靠容器壁時表面張力測得 55.22mN/m，可得知靠容器壁時測得的數據較接近理論值）



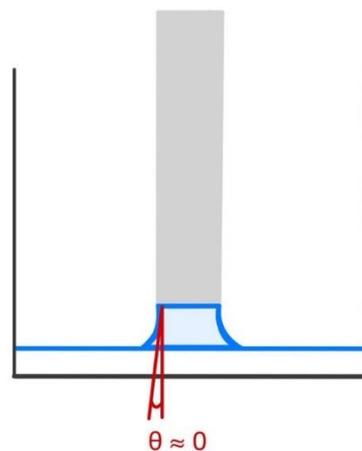
（如圖二十三）



（如圖二十四）



（如圖二十五）



（如圖二十六）

(三) 帶入公式查證是否和第一點之表面張力大小相近

$$\text{公式：} 2TL = \Delta w$$

其中， T 為表面張力、 L 為威氏平板之長度（公尺）（此使用 0.157m 的威氏平板）

若符合，則開始實驗；若不合，則調整威氏平板之角度

1. 滴入重量百分濃度 0.04% 之有色素之界面活性劑和水的混合液一滴
2. 充分攪拌後，再進行一次威氏平板法，並記錄
3. 重複步驟 4、5 步驟並記錄，再進入 Excel 做圖



(圖二十七)

七、研究方式 ---- 不同面寬對彩圈在液面上運動行為的影響

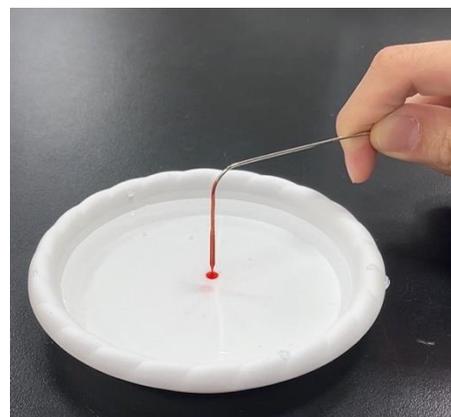
(一) 架設好器材之後，於容器裝入一公分的水

(二) 滴入一滴有色素之界面活性劑和水的混合液一滴，並用攝影機紀錄下彩圈運動行為

(三) 六種不同直徑之水盆（半徑 2.75cm、5.25cm、7.5cm、12cm、15cm、16.5cm）都分別滴入界面活性劑，並記錄下來

(四) 利用 Tracker 將彩圈擴張的過程量化成數據

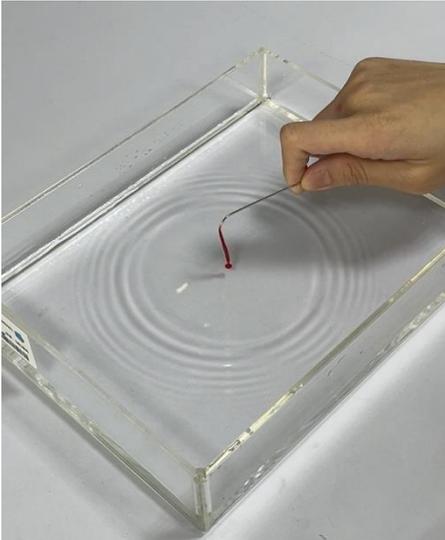
(五) 利用 Excel 將數據繪製成圖，並觀察其趨勢



(圖二十八)

八、研究方式 ---- 不同深度對彩圈在液面上運動之影響

- (一) 於容器中分別裝入 0.4cm、1cm、2cm、3cm、4cm、5cm 的水
- (二) 滴入一滴有色素之界面活性劑和水的混合液一滴，並用攝影機紀錄下彩圈運動狀態
- (三) 利用 Tracker 將彩圈擴張的過程量化成數據
- (四) 利用 Excel 將數據繪製成圖，並觀察其趨勢

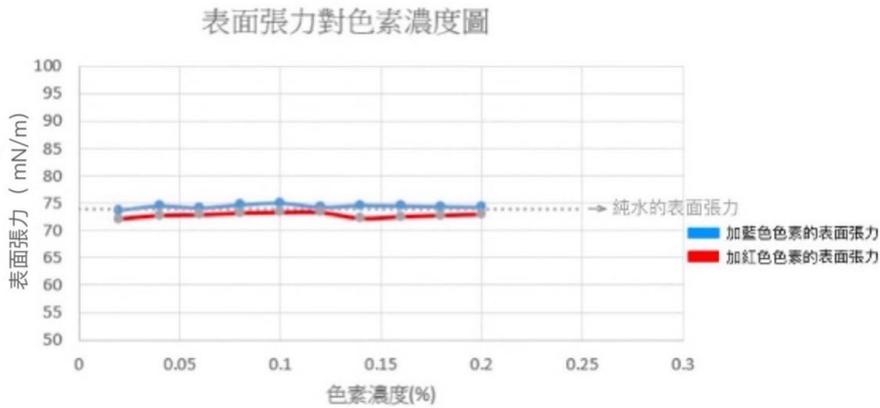


(圖二十九)

肆、研究結果

一、威氏平板法檢測紅、藍墨水對表面張力的影響

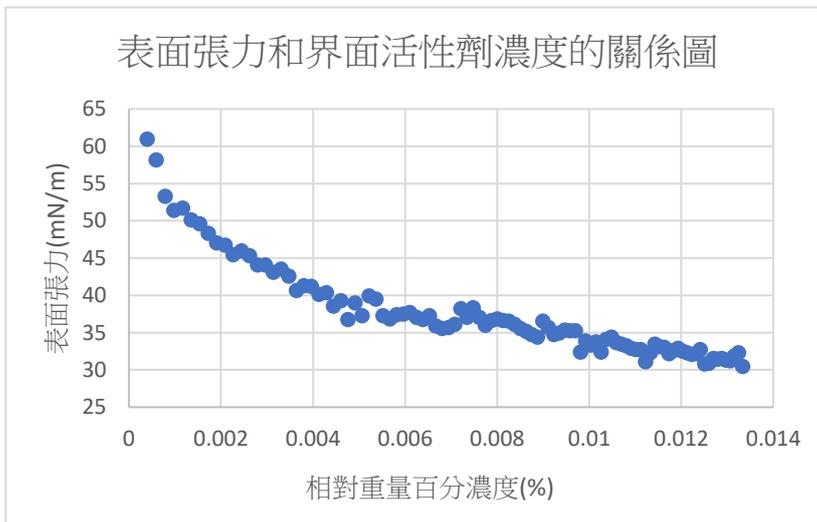
(一) 紅、藍色素濃度對水的表面張力關係圖



(圖三十)

由(圖三十)可知加入藍、紅色墨水並不會對實驗結果產生嚴重誤差，故選用藍色墨水藉以觀察肉眼無法觀測之第一圈無色急速圈，紅色墨水則使用於將界面活性劑染色。

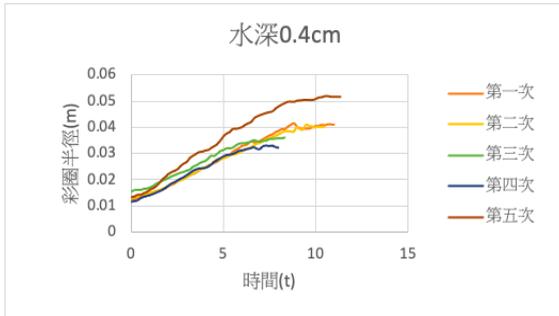
(二) 純水的表面張力對界面活性劑濃度關係圖



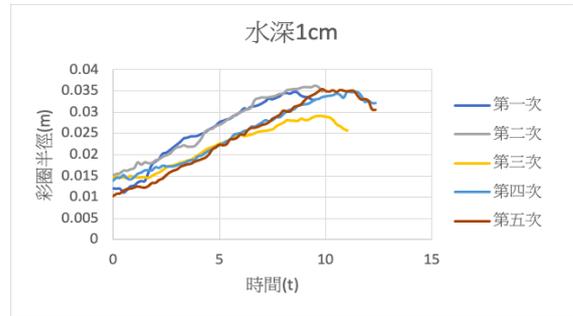
(圖三十一)

二、探討不同水深對彩圈擴張行為關係

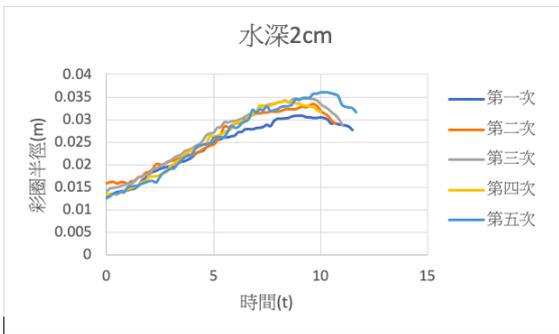
(一) 水深 0.4、1、2、3、4 公分彩圈擴張半徑對時間關係圖



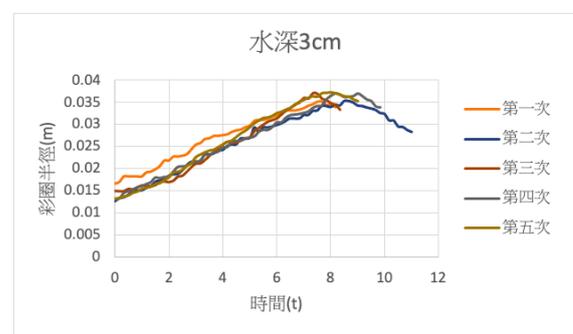
(圖三十二)



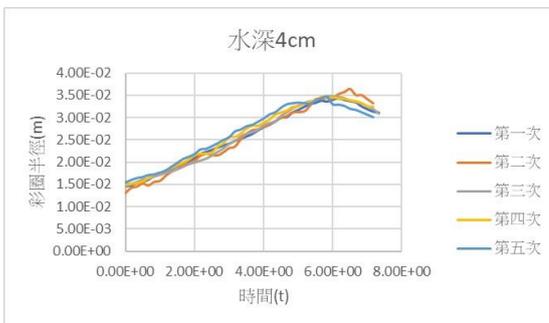
(圖三十三)



(圖三十四)



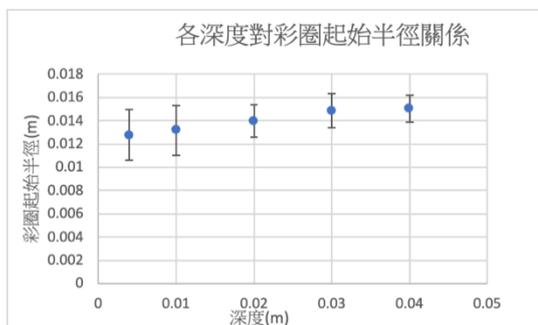
(圖三十五)



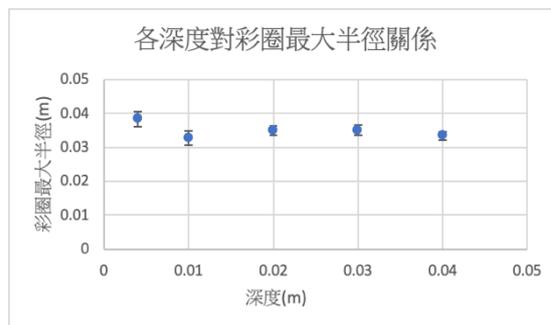
(圖三十六)

由上五張圖可知起始半徑、擴張速率和最大半徑在水深為 2、3、4 公分時皆集中在特定區域，但在水深為 0.4、1 公分時雖然彩圈的起始半徑仍非常相似，但擴張速率和最大寬度則較難掌握，我們認為是因在低水位下對流狀況不穩定所導致。

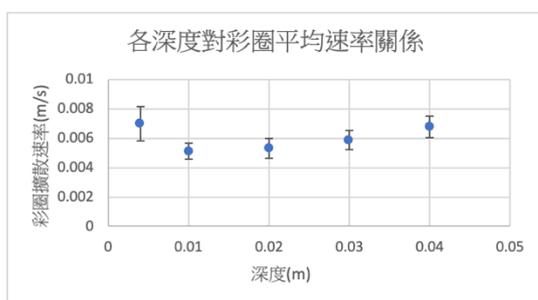
(六) 各深度彩圈擴張行為對時間關係



(圖三十七)



(圖三十八)



(圖三十九)

由(圖三十七、三十八、三十九)可看出不同深度下彩圈在擴張階段時的運動狀態，雖然各深度下仍略有差異，但整體在起始半徑、最大半徑、擴散速率上的表現大致相同。

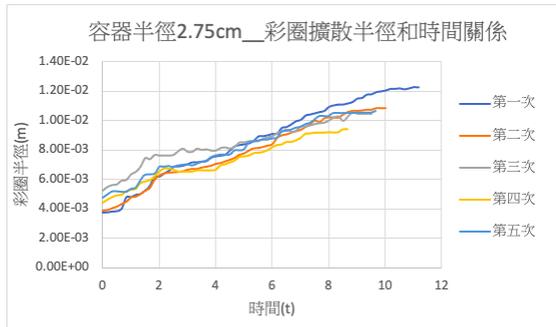
而我們也利用 T 檢定來檢測，發現每筆數據的 p 值都遠大於 0.05 (代表每筆數據在不同水深下的分佈狀況都差不多)，由此可知水深與彩圈起始半徑、最大半徑、擴散速率皆無關，由於水深對彩圈的運動行為影響較小，在後面就不深入探討。

組	個數	總和	平均	變異數		
H0.4	10	0.383192	0.038319	9.74E-05		
H1	10	0.328057	0.032806	2.38E-05		
H2	10	0.349149	0.034915	9.58E-06		
H3	10	0.350667	0.035067	3.67E-06		
H4	10	0.3337	0.03337	1.42E-05		
ANOVA						
變源	SS	自由度	MS	F	P-值	臨界值
組間	0.000184	4	4.61E-05	1.551943	0.203542	2.578739
組內	0.001337	45	2.97E-05			
總和	0.001522	49				

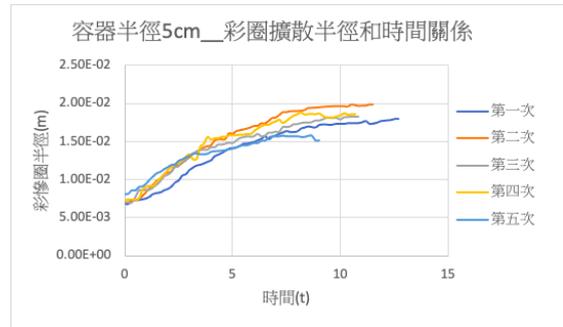
(圖四十)

三、探討不同容器大小對彩圈擴張行為關係

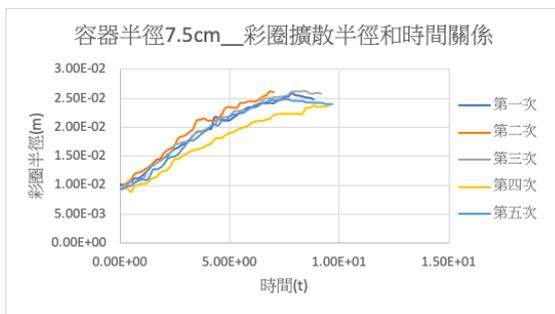
(一) 容器半徑 2.75、5、7.5、12、15、16.5 公分彩圈擴張大小對時間關係圖



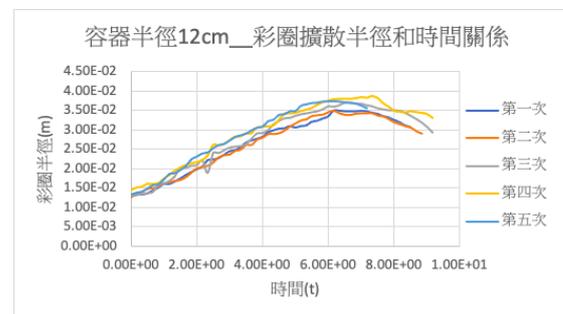
(圖四十一)



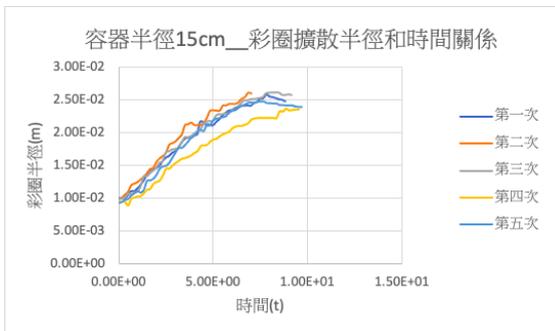
(圖四十二)



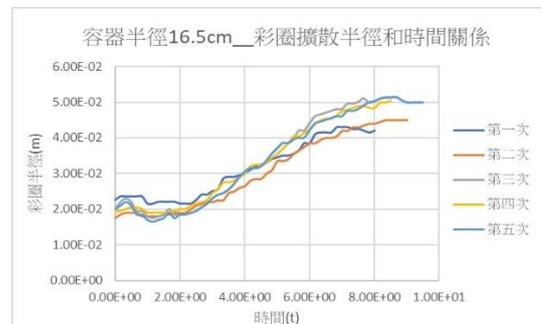
(圖四十三)



(圖四十四)



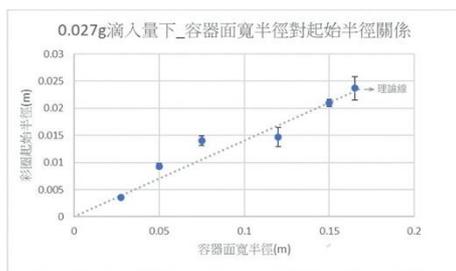
(圖四十五)



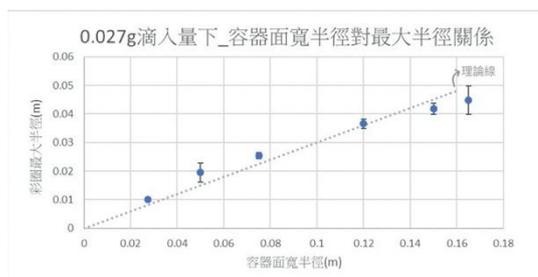
(圖四十六)

由上六張圖可知擴散半徑和時間關係、初始半徑、最大半徑、慢速擴張速率，在容器半徑為 2.75、5、7.5、12、15、16.5 公分時皆非常相似。

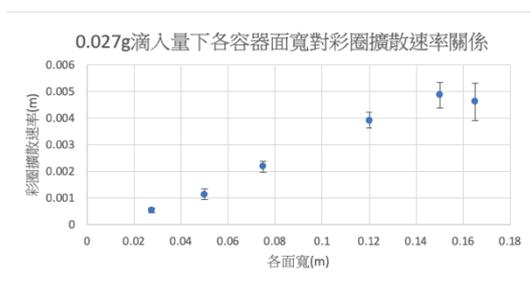
(二) 各面寬對彩圈起始、最大半徑及彩圈擴張速率關係



(圖四十七)



(圖四十八)



(圖四十九)

由(圖四十七、四十八、四十九)可看出不同面寬下彩圈在擴張階段時的運動狀態，會因為面寬大小的不同而在起始半徑、最大半徑、和彩圈擴張速率上都呈現隨面寬變化的狀態，其中，起始半徑和最大半徑與面寬具有線性關係。

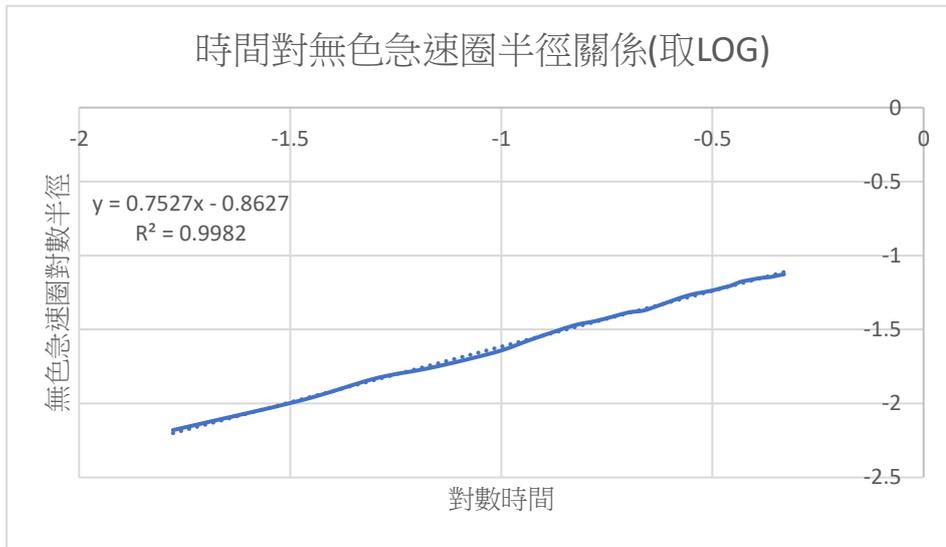
為了確保數據真的具有相關，且和深度一同做對比，故此處即使數據看似已具有關係依然使用 T 檢定來檢測，發現每筆數據的 p 值都遠小於 0.05，由此可知容器寬度對彩圈起始半徑、最大半徑、擴張速率有影響。

組	個數	總和	平均	變異數		
r2.75	4	0.0021	0.000525	9.17E-09		
r5	5	0.0057	0.00114	4.3E-08		
r7.5	5	0.0109	0.00218	4.7E-08		
r12	5	0.0196	0.00392	8.7E-08		
r15	5	0.0244	0.00488	2.37E-07		
r16.5	5	0.0231	0.00462	4.92E-07		
ANOVA						
變源	SS	自由度	MS	F	P-值	臨界值
組間	8.01E-05	5	1.6E-05	100.9554	7.24E-15	2.639999
組內	3.65E-06	23	1.59E-07			
總和	8.38E-05	28				

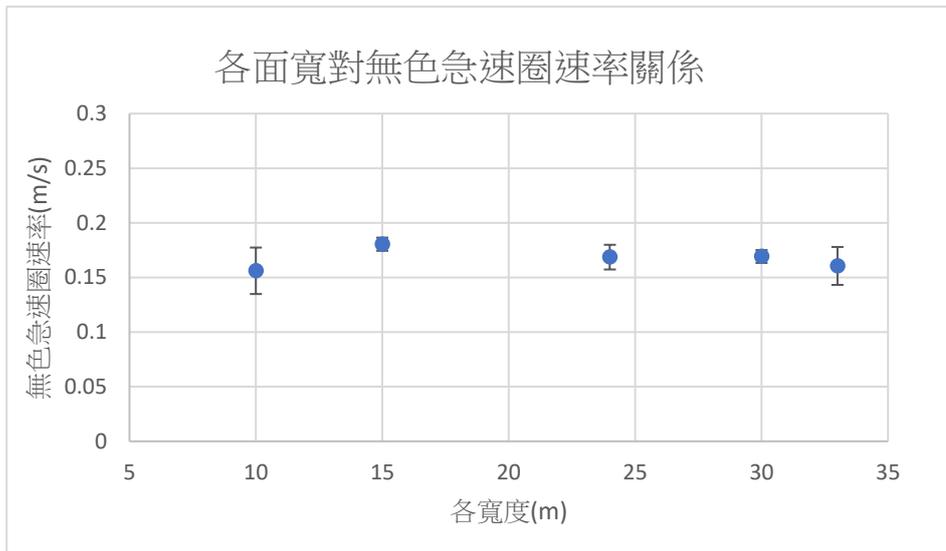
(圖五十)

四、急速圈擴散速率

(一) 急速圈擴散半徑對時間關係



(圖五十一)



(圖五十二)

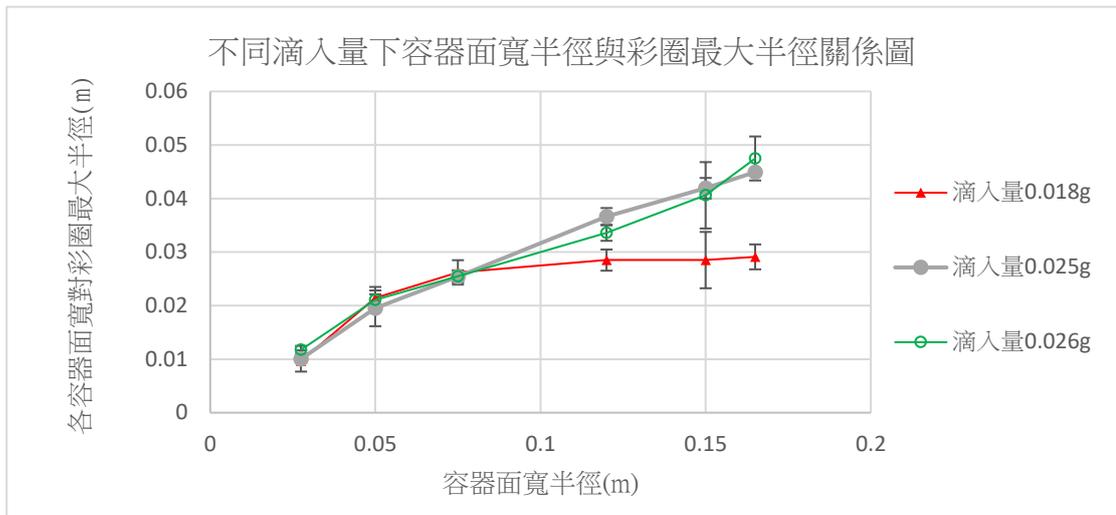
由(圖五十一、五十二)可看出無色急速圈不論在各深度、容器面寬條件下變化並未呈現明顯趨勢，而其半徑對時間變化和參考文獻中呈現之關係相同，與時間成 3/4 次方關係(如下參考文獻中之經驗式)。

$$r(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{S}{\sqrt{\rho_1\mu_1 + \rho_2\mu_2}}\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{4}} \quad \therefore r(t) \propto t^{\frac{3}{4}}$$

經驗式中， ρ 為流體密度、 μ 為黏滯係數、 s 為表面張力

五、探討滴入量對彩圈擴散行為關係

(一) 各滴入量對彩圈最大半徑關係

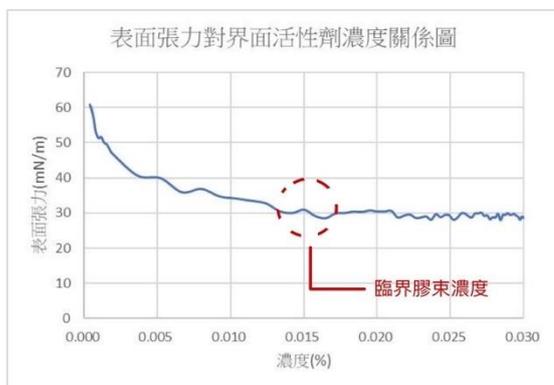


圖(五十三)

由(圖五十三)可看出在半徑 0.075 公尺內，各滴入量對於彩圈最大半徑幾乎沒有影響，但在半徑 0.12 公尺處出現了明顯分歧，其中，小滴入量的彩圈最大半徑不隨面寬變大而增大，剩下兩滴入量大者彩圈半徑則隨面寬增大而一同增大。

伍、討論

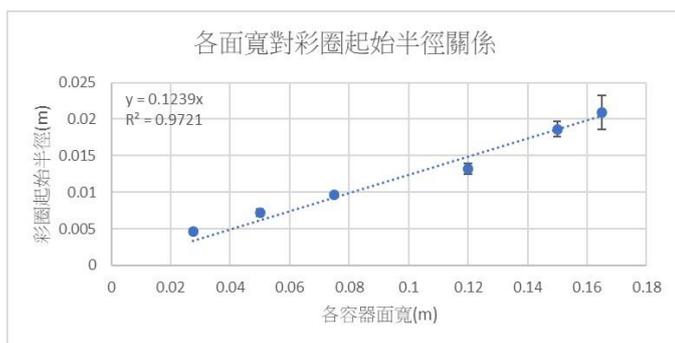
一、臨界膠束濃度 (CMC)



(圖五十四)

由(圖五十四)可發現，在紅圈處以後表面張力基本不受界面活性劑影響，因此，我們定義紅圈處濃度即為此界面活性劑之臨界膠束濃度(CMC)。

二、各面寬對彩圈起始、最大半徑關係



(圖五十五)

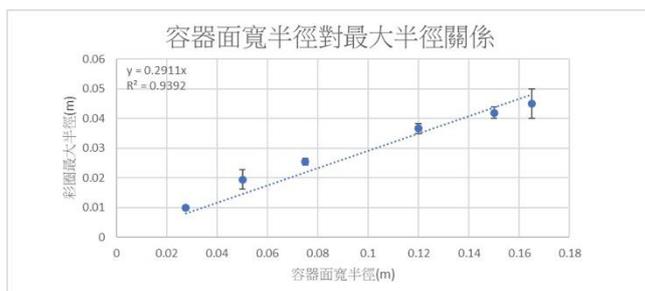
由(圖五十五)發現，在滴入量足的情況下，容器面寬和彩圈起始半徑呈線性關係，得出經驗式：

$$AR = r_0$$

，A為一常數(即為(圖五十五)中的斜率)

其中R為容器半徑、 r_0 為彩圈起始半徑

故可知面寬和彩圈起始半徑成正比



(圖五十六)

由(圖五十六)發現，在滴入量足夠的情況下，容器面寬和彩圈最大半徑呈線性關係，得出經驗式如下：

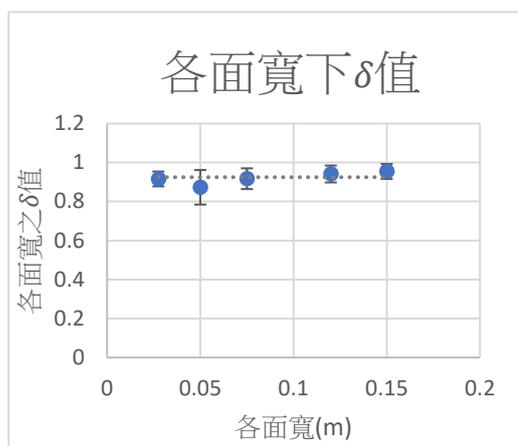
$$BR = r_{max}$$

，B為一常數(即為(圖五十六)中斜率)

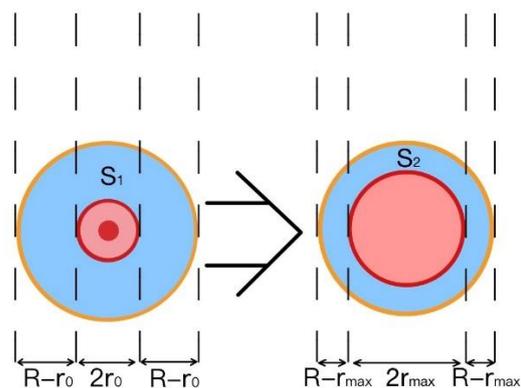
其中R為容器半徑、 r_{max} 為彩圈初始半徑

故可知面寬和彩圈最大半徑亦成正比。

三、各面寬的 δ 值



(圖五十七)



(圖五十八)

由於馬倫哥尼對流會在彩圈起始圈（即 r_0 ）外形成一對流阻止彩圈內外界面活性劑分子的交換，因此彩圈外部水表面的界面活性劑分子數量固定（圖五十八左側淺藍色區域 S_1 ，和右側淺藍色區域 S_2 水體中所含界面活性劑分子數相同），又我們假設在彩圈初形成時，彩圈外的界面活性劑濃度為 δ 倍臨界膠束濃度（CMC），其中 δ 值為小於1的常數；而在彩圈擴張時，外圍面積會隨時間而減少，進而使外圈濃度上升至臨界膠束濃度（CMC），此時彩圈內外皆達臨界膠束濃度（CMC），彩圈內外的表面張力差消失，彩圈的擴張力消失將達 r_{max} 。根據我們所建立的模型，彩圈外部水表面的界面活性劑濃度就會與彩圈外部面積成反比，得出以下關係式。

S_1 為(圖五十八)左側淺藍色水體的表面積：

$$S_1 = \pi(R^2 - r_0^2)$$

S_2 為(圖五十八)右側淺藍色水體的表面積：

$$S_2 = \pi(R^2 - r_{max}^2)$$

由於界面活性劑濃度和彩圈外側水體表面積成反比，故推得關係式：

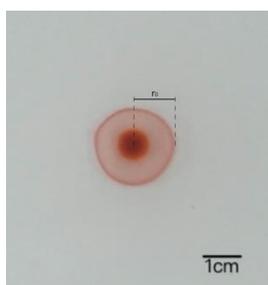
$$\frac{\delta \times C^*}{C^*} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi(R^2 - r_{max}^2)}{\pi(R^2 - r_0^2)}$$

C^* 為CMC，經實驗得 δ 約為0.92（圖五十七）

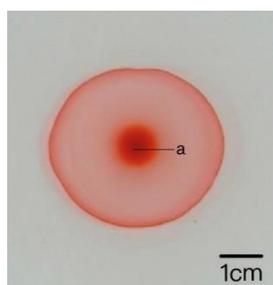
四、彩圈運動過程推論

我們將觀察到的彩圈運動細分為：無色急速圈、有色區域形成、色圈形成、色圈擴張、色圈擴張停滯、色圈收縮幾點討論，實驗中為求方便觀察所加入的紅色色素不能絕對代表該處界面活性劑分子的分佈程度（因界面活性劑分子重量較大，在起始彩圈形成之後從側面觀察，發現邊界堆積的界面活性劑分子圈有略低於水面的現象(如圖十四)），則我們認為顏色深可能部分是因為界面活性劑分子不只在水面堆積，在略低於水面處亦有堆積的情況，所以只能將顏色深的區域視為界面活性劑相對較濃的區域參考，不過由於臨界膠束濃度(CMC)下，色素在水面上的濃度無法被肉眼觀察，所以如果該處顏色在肉眼可以辨別的情況之下（如彩圈起始半徑、最大半徑、半徑內有色區域、滴入點），則可認為該處界面活性劑分子濃度已達臨界膠束濃度(CMC)的狀態。

首先在第一個無色急速圈下，高濃度的界面活性劑分子滴入水中後滴入點與周圍的純水之間的巨大表面張力差使得界面活性劑快速且均勻分布到容器水面的各處，且在水面上形成處處表面張力皆相等但仍未達臨界膠束濃度(CMC)的狀態，而因表面張力差引起容器內流體的對流則將未被帶離的界面活性劑分子和染料向外推送，形成一個隨時間而改變大小的有色區域（如圖五十九）。



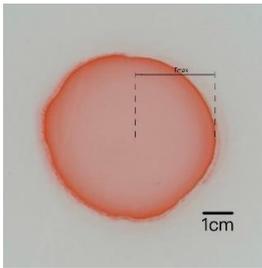
(圖五十九)



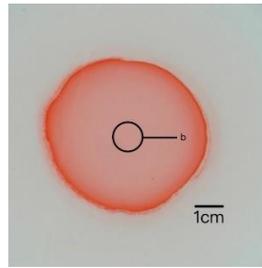
(圖六十)

而在有色區域的最外側，因為其兩側（即有色區域內外）的表面張力差，而在有色區域的外側形成小型的馬倫哥尼對流（如圖十二），將染劑和大部分界面活性劑分子阻擋在有色區域內，堆積成一圈色彩明顯的彩圈（圖六十）。

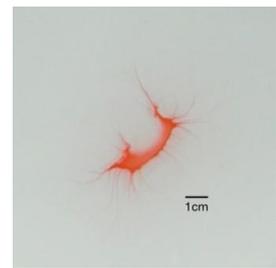
因色圈外的水面尚未達到臨界膠束濃度（CMC），故其表面張力仍大於彩圈的表面張力，驅動對流使彩圈隨對流運動而穩定擴張，在彩圈擴張的同時，因對流而由水體底部抽上來的含少量界面活性劑分子的水不斷將中心的高濃度界面活性劑分子團稀釋（即 a 點位置，圖六十）。



(圖六十一)



(圖六十二)



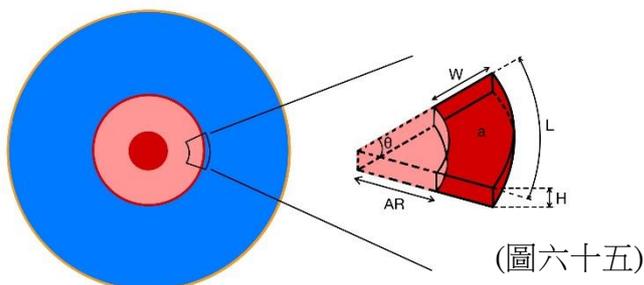
(圖六十三)

當所滴入的高濃度界面活性劑分子團（a 點）稀釋至一定程度、或彩圈外界面活性劑濃度已達臨界膠束濃度(CMC)時，有色區塊中心區域界面活性劑分子濃度開始低於臨界膠束濃度(CMC)，此時即是彩圈擴張的最大極限（圖六十二），彩圈則停止運動進入停滯狀態。

界面活性劑濃度低於臨界膠束濃度(CMC)的色塊中心區域（即 b 區域，如圖六十二），其和外圍有色區塊相比表面張力較大，故會形成反向流動的對流，將整個彩圈往中心區域急速收縮，最終將顏料和過量的界面活性劑分子隨對流帶入水面之下（如圖六十三）。

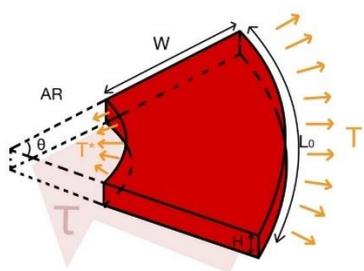
五、穩定擴張階段(微等速區)理論式建立

由(圖二十)可以發現，在彩圈擴張的過程中，會有一段似乎像等速區的擴張階段，因此我們試圖搭配建立的模型及推得的關係式，來解釋彩圈穩定擴張時速度與時間之關係。

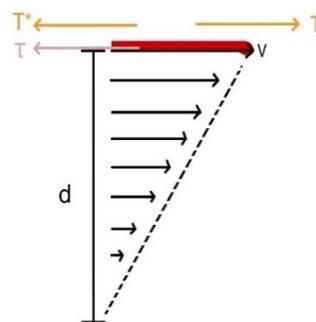


(圖六十五)

為了將推導式簡化，在彩圈處取一塊角度為 θ (設為極小)的扇形(如圖六十四)，因 θ 角度極小且 W 數量級也取較小，並假設其為定值(根據觀察彩圈外圍結果將 W 取 $10^{-3}m$)，故環形區域內外弧長視為相等，然後細部的討論深紅色區域(下稱為環形薄層)所受的的表面張力， τ 為剪應力(圖六十五)。



(圖六十五)



(圖六十六)

由(圖六十五)可以發現，環形區域所受之表面張力外部較內部大，因此，會形成一向外拉動彩圈的力，而(圖六十六)則呈現了彩圈在擴張時的水深對流速變化。(由於先前在參考文獻中看到探討類似現象需要使用到柱座標形式的那維史托克方程、連續方程、對流擴散方程，但因其大量的偏微分解聯立超出我們目前能力所及，因此本模型只著重探討表面張力差造成的二維平面運動)

再由合力等於動量時變率列式可得：

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_{\text{合力}} &= \frac{dP}{dt} \\ \Rightarrow (T - T^*)L_0 - a\tau &= \frac{dP}{dt} \\ \Rightarrow (T - T^*)L_0 - a\tau &= m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \end{aligned} \quad (1)$$

再來將(1)式中所有和時間相關的物理量代換成對時間的顯函數形式如下：

$$\Rightarrow r = AR + vt \quad (2)$$

(2)代入後得環形層外弧(L_0)長(內外弧長視為相等)：

$$\Rightarrow L_0 = (r + W)\theta = (AR + vt + W)\theta \quad (2)'$$

整合上各式又可得環形面積(a)、質量(m)(其中 ρ 為流體密度)：

$$\Rightarrow a = \frac{(AR + vt + W)\theta \times W}{2} \quad (2)''$$

$$\Rightarrow m = \frac{\rho H [(AR + vt + W)\theta \times W]}{2} \quad (2)'''$$

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = \rho HW\theta v \quad (2)''''$$

因為我們只有表面張力(T)對濃度(C)的關係，因此藉由(C)對時間(t)的關係來表達(T)對時間(t)的關係如下：

由於馬倫哥尼對流的影響，彩圈外部的介面活性劑分子數保持相對固定，因此彩圈外部界面活性劑濃度(C)和彩圈至容器邊緣的水面面積成反比，故可將(C)化作時間的函數式：

$$\Rightarrow C = \delta C^* \left(\frac{R^2 - A^2 R^2}{R^2 - r^2} \right) = \delta C^* \left[\frac{R^2 - A^2 R^2}{R^2 - (AR + vt)^2} \right] \quad (3)$$

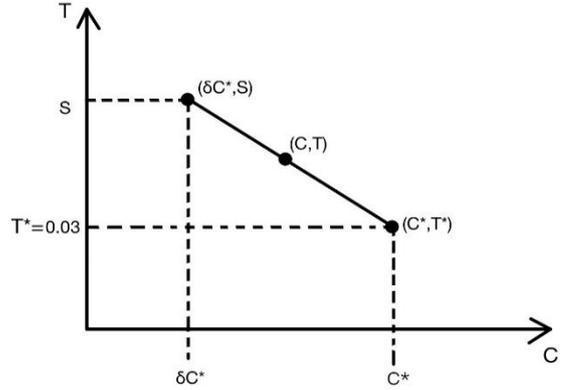
而其中 $\delta = \frac{1-B^2}{1-A^2}$ (在討論三中有提到)

又因彩圈外部表面張力(T)和濃度(C)相關，且 δC 增加至 C^* 變化甚微，因此我們先將(T)對(C)關係視為線性關係(圖六十七)，並列出關係式：

(由(圖五十四)可知根據實驗結果臨界膠束濃度下表面張力量值為 0.03N/m)

由於(圖六十七)中 $\delta = \frac{(1-B^2)}{(1-A^2)}$ ，因此斜率：

$$\begin{aligned} \Rightarrow m &= \frac{(0.03 - S)}{C^* - \frac{1-B^2}{1-A^2}C^*} \\ &= \frac{(1-A^2)(0.03 - S)}{(B^2 - A^2)C^*} \quad (4) \end{aligned}$$



將(4)式代入可知(T)隨(C)的變化關係為：

$$\Rightarrow T = \frac{(1-A^2)(0.03 - S)}{(B^2 - A^2)C^*}(C - C^*) + 0.03 \quad (5) \quad (\text{圖六十七})$$

再將(3)式代入(5)式便得出(T)對(t)的關係式為：

$$\begin{aligned} \Rightarrow T &= \frac{(1-A^2)(0.03 - S)}{(B^2 - A^2)C^*} \times \left[\frac{1-B^2}{1-A^2}C^* \times \frac{R^2 - A^2R^2}{R^2 - (AR + vt)^2} - C^* \right] \\ &= \frac{(1-A^2)(0.03 - S)}{(B^2 - A^2)} \times \left[\frac{1-B^2}{1-A^2} \times \frac{R^2 - A^2R^2}{R^2 - (AR + vt)^2} - 1 \right] \\ &= \frac{(1-A^2)(0.03 - S)}{(B^2 - A^2)} \times \left[\frac{(1-B^2)R^2}{R^2 - (AR + vt)^2} - 1 \right] \quad (6) \end{aligned}$$

將(2)、(2)'、(2)''、(2)'''、(2)''''及(6)式帶入(1)式可以發現，理論式仍相當複雜，但因穩定擴張階段速率很小，推測其造成的剪應力對彩圈此時運動影響較小，所以(1)式中剪應力主導項應該可以略去，下為剪應力主導項的估算：

(下式中 μ 為水的黏滯係數即 $10^{-3}\text{Pa}\cdot\text{s}$ 、速率 $v = 0.004\text{m/s}$ 、影響水深 $z = 5 \times 10^{-4}\text{m}$)

$$\Rightarrow a\tau = a \left(\mu \frac{dv}{dz} \right) = r\theta \times W \times \left(\mu \frac{dv}{dz} \right) \quad (W \text{ 為環形區域寬取 } 10^{-3}\text{m})$$

$$\Rightarrow a\tau \approx r\theta \times 4 \times 10^{-6} \quad \text{N} \quad (7)$$

而因表面張力差造成的拉力計算如下：

$$\Rightarrow (T - T^*)r\theta \approx r\theta \times 3 \times 10^{-3} \quad \text{N} \quad (8)$$

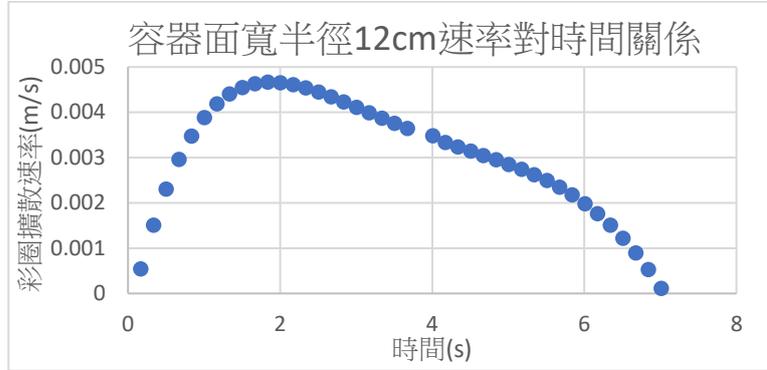
比較(7)式、(8)式將 $r\theta$ 刪除後發現(7)式遠小於(8)式，故將其省略，重新列為(1)'式：

$$\Rightarrow (T - T^*)L_0 = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \quad (1)'$$

重新得出(1)'式後，呈現非線性微分方程的型態，又因穩定擴張階段幾近等速，故推測

$m \frac{dv}{dt}$ 項其數量級應較 $v \frac{dm}{dt}$ 項小許多，應該可以略去，以下是我們的估算，計算採用

容器半徑 12cm 下彩圈的運動為數據來源：



(圖六十八)

(假設質量為定值：彩圈厚度 $5 \times 10^{-4}m$ 、 $r = 0.0248m$ 、 $W = 10^{-3}m$)

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0.001276372m/s^2$ 即為微等速區的斜率，約為(圖六十八)中 2 秒至 6 秒

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = 5 \times 10^{-4} \frac{[(0.0248 + 10^{-3})^2 \theta \times 10^{-3}]}{2} \times 0.00000229$$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} \approx 3.5 \times 10^{-11} \theta \quad N \quad (9)$$

而 $v \frac{dm}{dt}$ 項之計算如下：

(v 取(圖六十八)微等速區之速率中位數即 $0.004m/s$ 、 $K(W \times H) = 10^{-9}m^2$)

$$\Rightarrow v \frac{dm}{dt} = 1000Kv^2\theta$$

$$\Rightarrow v \frac{dm}{dt} \approx 8 \times 10^{-9} \theta \quad N \quad (10)$$

比較(9)式、(10)式將 θ 刪除後發現(9)式數量級和(10)式相差較大，故合理將其省略，

再重新列(1)''式：

$$\Rightarrow (T - T^*)L_0 = v \frac{dm}{dt} \quad (1)''$$

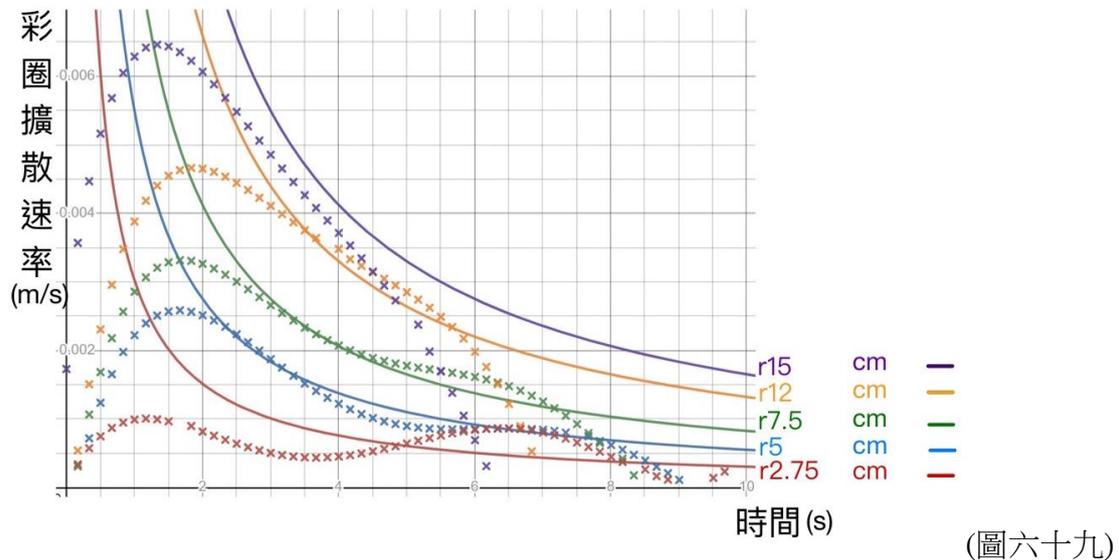
將(6)、(2)'和(2)''''式代入(1)''得(11)式

$$\Rightarrow \frac{(1 - A^2)(0.03 - S)}{(B^2 - A^2)} \times \left[\frac{(1 - B^2)R^2}{R^2 - (AR + vt)^2} - 1 \right] (AR + vt + W) = 1000Kv^2 \quad (11)$$

(11)式即為穩定擴張階段速率與時間及其他相關變因之關係式

(一)理論式對實驗結果的擬合情形

利用 desmos 程式將(11)式輸入並給定各變數後，呈現出在各個面寬下擬合之微等速區對比實驗結果，(圖六十九)中由 y 軸向外依序為容器半徑 2.75、5、7.5、12、15cm 之擬合線對實驗結果情形



上圖中各參數代入如下(圖中實線為擬合線、X 狀虛線為實驗結果)

($A = 0.12$ 、 $B = 0.22$ 、 $K = 10^{-9}(m^2)$ 、 $S = 0.0334(N/m)$ 、 R 隨各面寬改變)

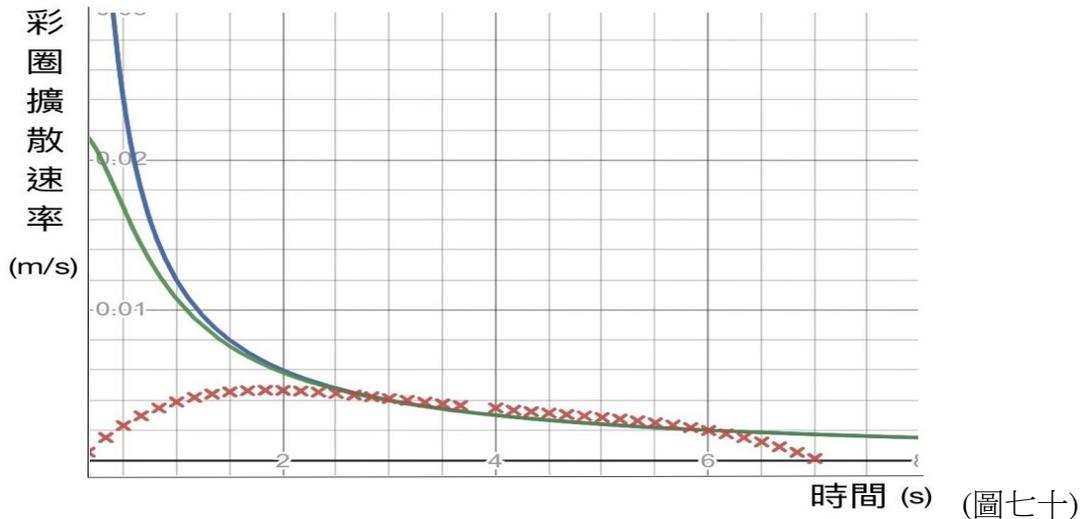
因半徑 16.5cm 面寬與前面寬相差較小，擬合線相當靠近，加入後會導致不易判讀，因此(圖六十九)僅呈現至面寬半徑 15cm 的擬合情形。

可以發現，在中等面寬下，擬合的最好，但所有面寬在前段與後段擬合結果皆較差，都出現了理論線無法貼合的實際實驗數據呈現的的加速、減速狀況。

猜測造成最小面寬擬合結果不佳的原因可能是因為在小面寬下擴張過程較短、速率較小，且容器整體體積較小侷限了對流的尺度，使得其它濃度擴散或對流等三維行為影響增大，致使結果較不符合預期。

而大面寬下推測是因為剪應力主導項的 (a) 會和起始半徑成正相關，且起始半徑又和面寬成正相關，所以在面寬大時剪應力主導項 $(a\tau)$ 會變大，而 $(a\tau)$ 會使彩圈擴散速率下降，如若刪去便會使擬合的微等速區稍微高於實驗結果，觀察紫線(容器半徑 15cm)發現在微等速區確實有擬合線略高於實驗結果的現象。

(二)參數 K 、 B 對理論式的影響



(圖七十)中呈現了改變 K 值數量級之後對擬合線造成的變化，原本 K 值取 $10^{-9}m^2$ 乃因環形薄層寬(W) $10^{-3}m$ 、厚(H)則取與參考文獻中相同的數量級 $10^{-6}m$ ，而下面討論部分皆只針對厚度(H)做討論，寬(W)維持 $10^{-3}m$

藍線為 $K = 10^{-12}m^2$ ，可以發現和原使用之 K 值呈現結果幾乎相等

綠線為 $K = 10^{-4}m^2$ ，雖然微等速區呈現結果大致相同，但數量級並不實際

根據上述討論，由於厚度(H)目測不應為大於 $10^{-3}m$ 數量級的數，即使綠線結果符合也不應採用，而藍線 K 值則太低，即便結果幾乎相等但厚度(H)會過薄，亦不應採用，所以我們決定維持使用和參考文獻中相同的厚度值即 $H \approx 10^{-6}m$

此外， B 值我們使用 0.22 而非討論二所測算的 0.29，猜測是因在彩圈擴張過程尾段，會因為慣性關係使彩圈繼續向外移動一段距離，而根據 B 值定義，必須為彩圈內外表面張力差相等時之 $\frac{r_{max}}{R}$ ，然而紀錄實驗結果時常會將慣性擴張後之彩圈半徑一併測入，造成討論二 B 值為 0.29 大於擬合最適當的 B 值 0.22。

陸、結論

- 一、由上面資料可知，表面張力隨著界面活性劑濃度的增加而減少，且在到達一定的數值後就幾乎不再下降。
- 二、我們發現深度對彩圈運動行為沒有明顯趨勢的影響，說明主要影響彩圈行為的因素並非是深度。
- 三、寬度是我們的實驗中最主要的影響，我們發現假如在滴入量足夠的情況下圓盤的半徑越大，起始半徑的長度就越大，但小滴入量所測得實驗的數據卻和大滴入量的實驗數據在容器半徑 12 公分下出現了明顯分歧，小滴入量似乎在容器半徑 7.5 公分左右處存在一個最大半徑的臨界值，我們由此進而推斷滴入量也是一個不可忽視的變因。
- 四、在觀察不同滴入量對於最大半徑的影響時，我們發現在滴入量小於 0.02 克（即為小滴入量）時在大面寬下彩圈最大半徑與容器面寬不成線性關係，而大於 0.02 克的滴入量（即為大滴入量）則一直到我們實驗所能的最大面寬處皆未發生分歧，無奈手邊器材不夠理想，無法精準計算出各面寬下所能支持彩圈擴至理論最大值的必要滴入量。
- 五、我們發現除了滴入界面活性劑後會有紅色彩圈外，在最外面會有一圈無色的急速圈，為了方便觀察，我們利用藍色色素先將水表面染色，以便觀察無色急速圈，接著滴入染了紅色色素的界面活性劑觀察，發現了無色急速圈速率並不會因為容器面寬變大而增加，反而是維持在一定的區間內，而彩圈的運動方式則不同，會因為容器面寬的變大而使擴散速率上升。
- 六、根據討論三，我們認為不管在任何容器面寬下，只要彩圈形成瞬間，彩圈外圍水體表面的界面活性劑濃度約為 0.92 倍的臨界膠束濃度(CMC)。
- 七、根據討論五，在彩圈擴張的某些階段和條件下，我們可以利用簡單模型，解釋或說明彩圈運動行為，此外，我們推測討論二的 B 值(0.29)會大於擬合結果的 B 值(0.22)，是因為實際情況下 B 值會受到慣性擴張的影響，而較擬合的 B 值大。
- 八、於討論五中探討的彩圈擴張階段微等速區討論，並未深入且加入全面的影響因素進行探討，僅著重在二維度上因表面張力差產生的擴散現象建立理論式，盡可能在相對簡單的方式下解釋我們的實驗結果。

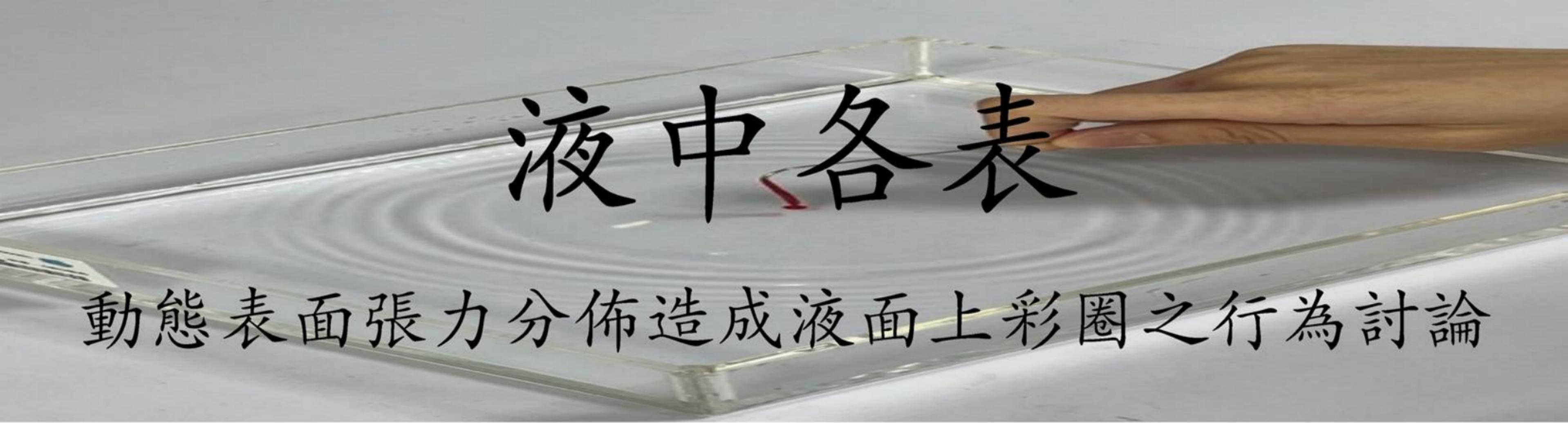
柒、參考文獻資料

- 一、Roché, M., Li, Z., Griffiths, I. M., Roux, S. le, Cantat, I., Saint-jalmes, A., & Stone, H. A. (2014). Marangoni Flow of Soluble Amphiphiles. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 112(208302), 5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.208302>
- 二、Kim, H., Muller, K., Shardt, O., Afkhami, S., & Stone, H. A. (2017). Solutal Marangoni Flows of Miscible Liquids Drive Transport without Surface Contamination. *Nature Physics*, 13(1105 – 1110), 7. <https://doi.org/10.1038/NPHYS4214>
- 三、Berga□, S. (n.d.). Marangoni-Driven Spreading along Liquid-Liquid Interfaces. *PHYSICS OF FLUIDS*, 21(032105 □), 13. <https://doi.org/10.1063/1.3086039>
- 四、A steady dissolving drop method for studying the pure Marangoni effect. *Chemical Engineering Science*, Volume 25, Issue 8, p. 1249-1254. [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(70\)80001-X](https://doi.org/10.1016/0009-2509(70)80001-X)

【評語】 051802

此作品探討界面活性劑在液體表面因動態表面張力分佈造成液面上彩圈之擴散行為。探討的題材是一個表面張力加上流體的問題，作品集中分析表面張力的影響。本實驗在設計、數據、分析上能顯現所要探討議題，唯理論分析要加強。

作品海報

A hand holding a wooden stick over a tray of water with a red ring on the surface.

液中各表

動態表面張力分佈造成液面上彩圈之行為討論

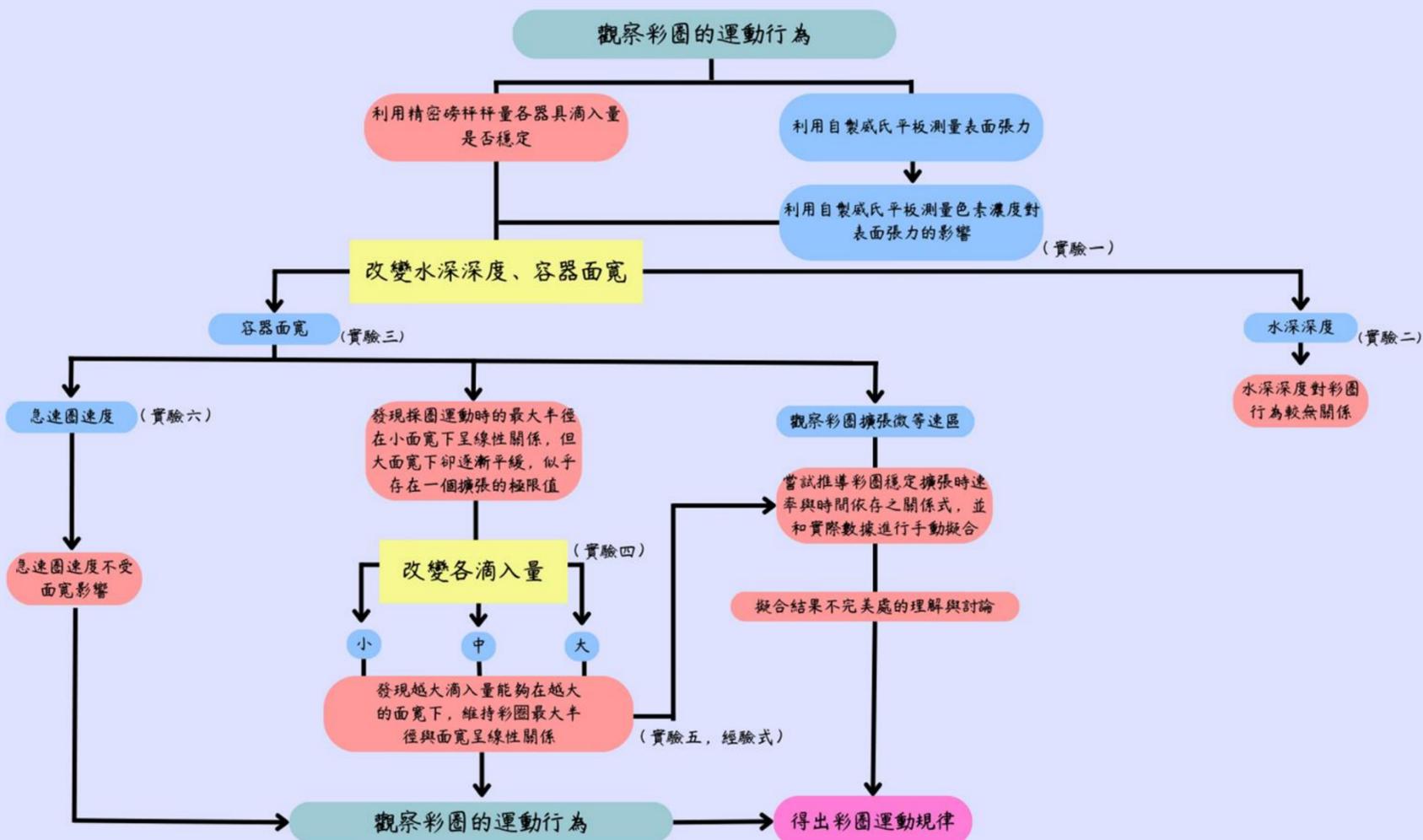
壹、研究動機

老師有天向我們展示了界面活性劑滴入水中的實驗，要我們觀察界面活性劑會產生什麼現象並猜猜看此現象的原因，而我們在水上放入小船觀察界面活性劑滴入水面時會使小船產生的行為，我們覺得非常有趣，所以開始想辦法觀察界面活性劑在水面上的分佈行為，為了方便觀察，我們將6號色素加入界面活性劑中並實驗，發現原來會形成一圈彩圈，且會持續擴大。在更仔細的觀察後，觀察到彩圈會有漲縮等行為，這讓我們非常有興趣，點燃我們對研究的熱忱，並開始向彩圈的方向做觀察。

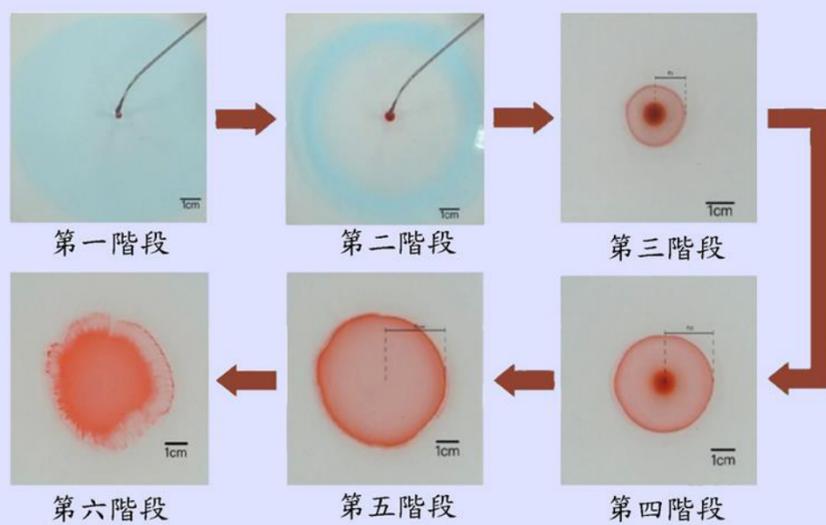
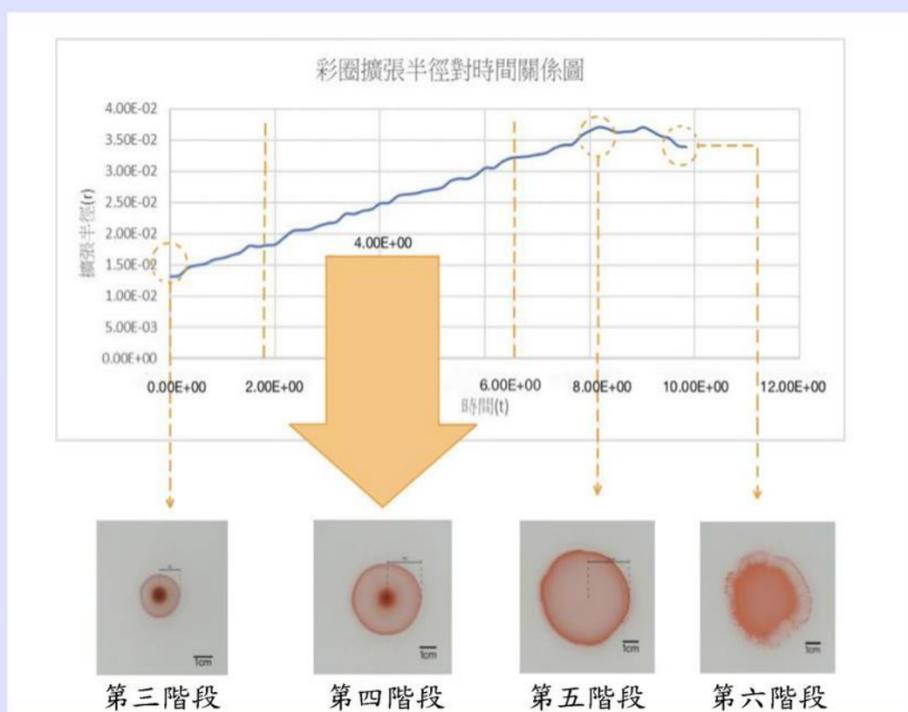
貳、研究目的

- (一) 探討界面活性劑濃度與表面張力之關係
- (二) 探討容器面寬、深度、滴入量對界面活性劑的運動的影響
- (三) 探討不同容器面寬對急速圈速度的影響
- (四) 探討彩圈擴散速率對時間關係

參、研究過程及方法



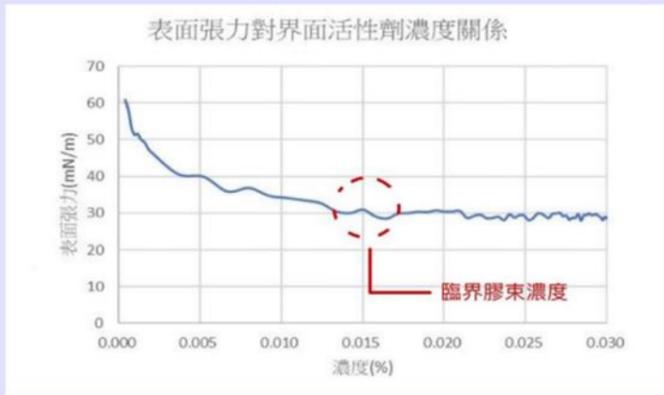
肆、彩圈形成過程及名詞解釋



- 第一階段：界面活性劑初滴入 $t=0$
- 第二階段：界面活性劑滴入且無色急速圈擴張
- 第三階段：彩圈初形成 $t = t_0$ 、 $r = r_0$
- 第四階段：彩圈穩定擴張 $r=r(t)$
- 第五階段：彩圈達最大 $t = t_{max}$ 、 $r = r_{max}$
- 第六階段：彩圈收縮

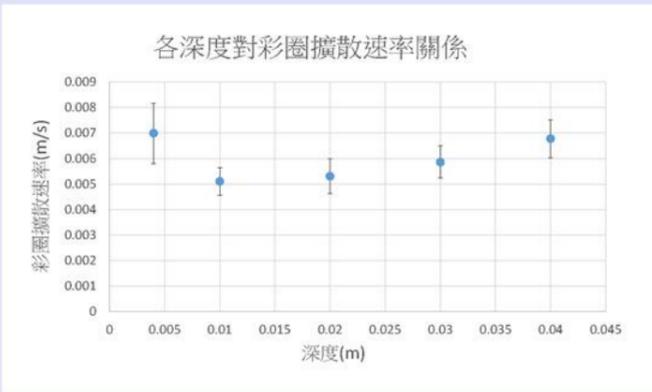
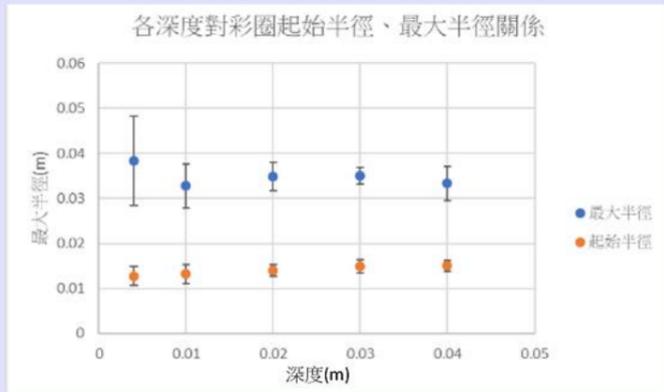
伍、研究結果

實驗一、界面活性劑濃度對表面張力關係



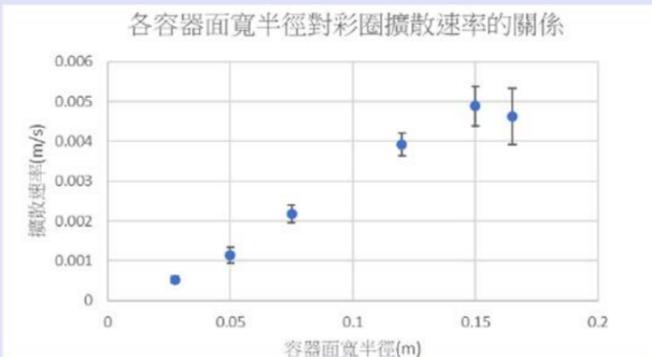
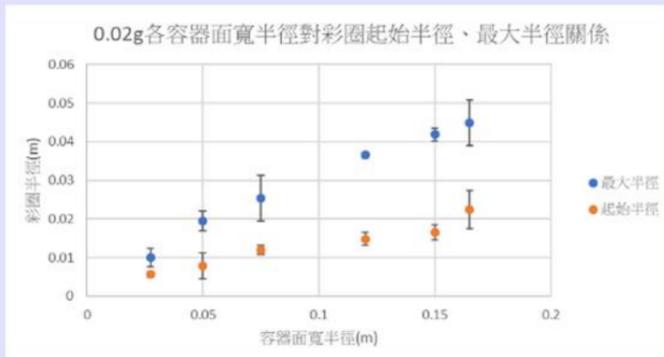
根據我們的實驗結果，當界面活性劑濃度上升到定值後，表面張力漸不隨界面活性劑濃度上升而下降(即圖中紅圈處)，因此，我們將紅圈所對應的界面活性劑濃度值定為我們所使用的界面活性劑的**臨界膠束濃度(CMC)**
此濃度對表面張力關係可以幫助我們建立討論二的模型推導及討論三的微等速區理論式

實驗二、水深對彩圈起始半徑、最大半徑、擴散速率的關係



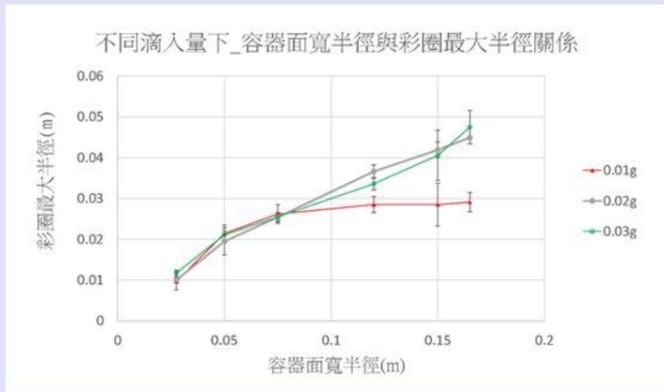
結果顯示深度對彩圈不論是在起始半徑、最大半徑、平均速率上影響皆不明顯。

實驗三、容器面寬對起始半徑、最大半徑、擴散速率的關係



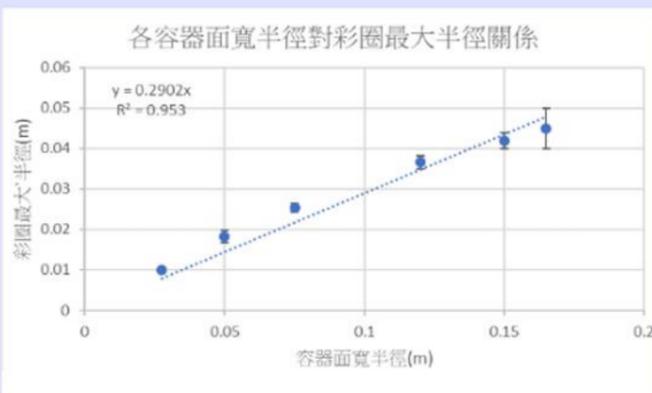
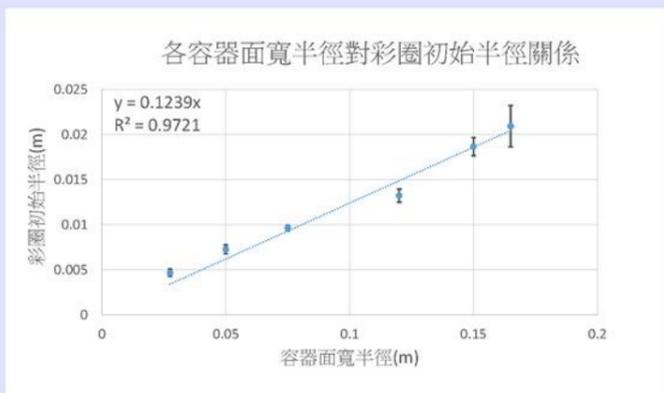
在滴入量足夠的情況下(如右圖中0.02g滴入量)，彩圈運動的部分物理量(起始半徑、最大半徑、擴散速率)皆會和容器面寬呈線性關係。
但隨著面寬漸大，彩圈的擴散速率和最大半徑會因滴入量相對面寬而言變少而下降進而導致彩圈擴散速率與面寬不成線性關係

實驗四、不同滴入量下容器面寬與彩圈擴張最大半徑的關係



可看出在容器面寬半徑0.075公尺內，各滴入量對於彩圈最大半徑幾乎沒有影響，但在容器面寬半徑0.12公尺處出現了明顯分歧，其中，小滴入量的彩圈最大半徑不會和面寬呈線性關係，另外兩個滴入量大者則會使彩圈最大半徑和面寬保持線性關係

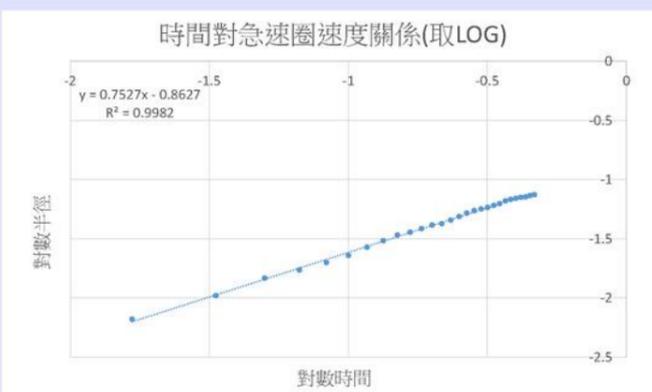
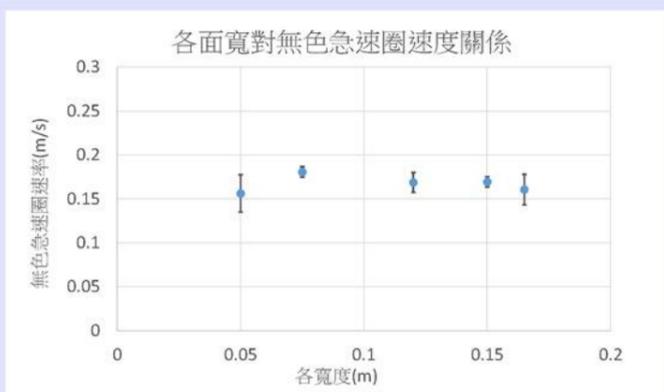
實驗五、滴入量足夠下容器面寬對彩圈起始半徑、最大半徑的關係



由左圖可發現，在滴入量足的情況下，容器面寬和彩圈起始半徑成線性關係可得關係式： $AR = r_0$ ，A為一常數
(即圖中斜率，約為0.12)
其中R為容器半徑、 r_0 為彩圈起始半徑

由右圖可發現，在滴入量足的情下，容器面寬和彩圈最大半徑亦成線性關係可得關係式： $BR = r_{max}$ ，B為一常數
(即圖中斜率，約為0.29)
其中R為容器半徑、 r_{max} 為彩圈最大半徑

實驗六、各面寬與急速圈速度的關係

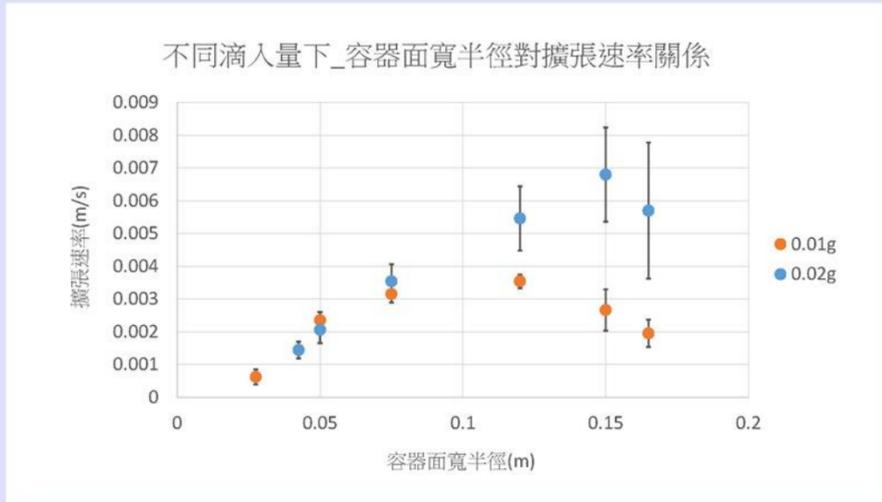


實驗結果顯示不論面寬多大，急速圈速度大致相同，故推測容器面寬和急速圈速度較無明顯關係而我們實驗中所測的的數據對比參考文獻中所提供的經驗式之後，發現皆顯示急速圈半徑和時間呈現 $\frac{3}{4}$ 次方關係，參考經驗式如下：

$$r(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{S}{\sqrt{\rho_1 \mu_1} + \sqrt{\rho_2 \mu_2}}\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{4}}$$

$$\therefore r(t) \propto t^{\frac{3}{4}}$$

一、滴入量對彩圈最大半徑、擴散速率的影響



小滴入量下：

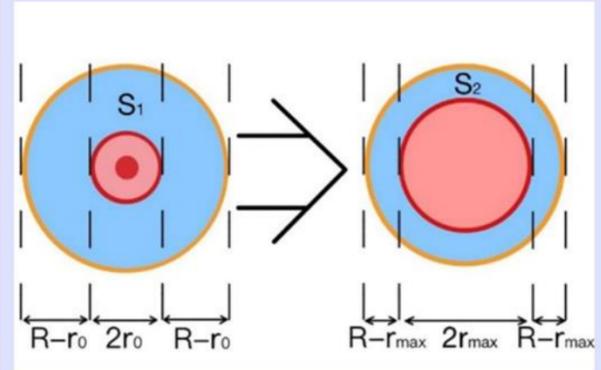
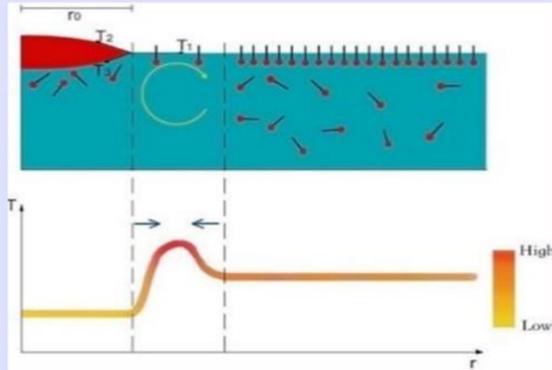
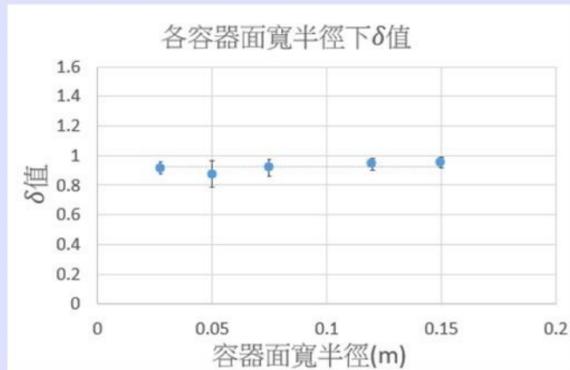
彩圈半徑存在極限的成因主要是由於彩圈內部的介面活性劑分子不足以讓彩圈擴張至使外圍濃度達CMC的大小，在擴張途中彩圈內部濃度便已小於CMC，開始收縮。由於彩圈擴散的時間較大面寬少，所以受表面張力影響時間小，故速率較小面寬小。

(因為大面寬下需要花更多的介面活性劑分子來達成起始半徑大小，所以能被擴散稀釋時間較少)

大滴入量下：

因為介面活性劑分子數夠多，所以能夠支持彩圈擴張至最大半徑(彩圈外部濃度達CMC)，亦因如此，才能使速率與容器面寬關係依然維持線性。

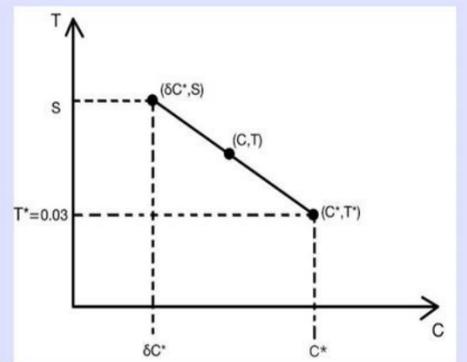
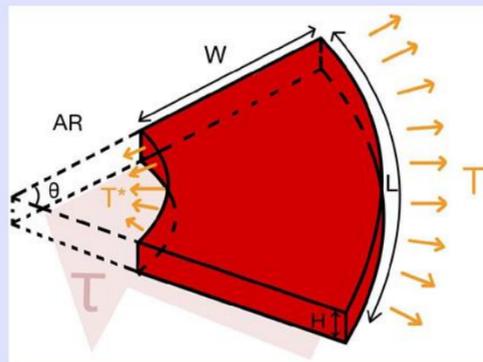
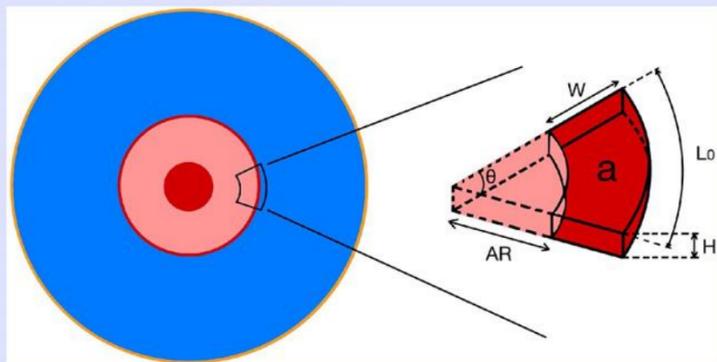
二、 δ 值的定義與計算



假設在彩圈初形成時，彩圈外的介面活性劑濃度為 δ 倍臨界膠束濃度(CMC)，其中 δ 為小於1的常數；而在彩圈擴張時，外圍面積會隨時間而減少，進而使外圍濃度上升至臨界膠束濃度(CMC)，此時彩圈內外皆達臨界膠束濃度(CMC)，彩圈內外的表面張力差消失，彩圈的擴張力道消失將達 r_{max} 根據我們所建立的模型，那彩圈外部水表面的介面活性劑濃度就會與彩圈外部面積成反比得出以下關係式：

$$\Rightarrow \frac{\delta \times C^*}{C^*} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi(R^2 - r_{max}^2)}{\pi(R^2 - r_0^2)} = \frac{1 - B^2}{1 - A^2} \quad (C^* \text{ 為 CMC, 經實驗得 } \delta \text{ 約為 } 0.92)$$

三、微等速區理論式建立



將彩圈取一區環形薄層區域做受力分析，應可分為向外的表面張力 T 、向內的表面張力 T^* 及剪應力 τ ，故得(1)式：

$$\Rightarrow (T - T^*)L_0 - a\tau = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \quad (1)$$

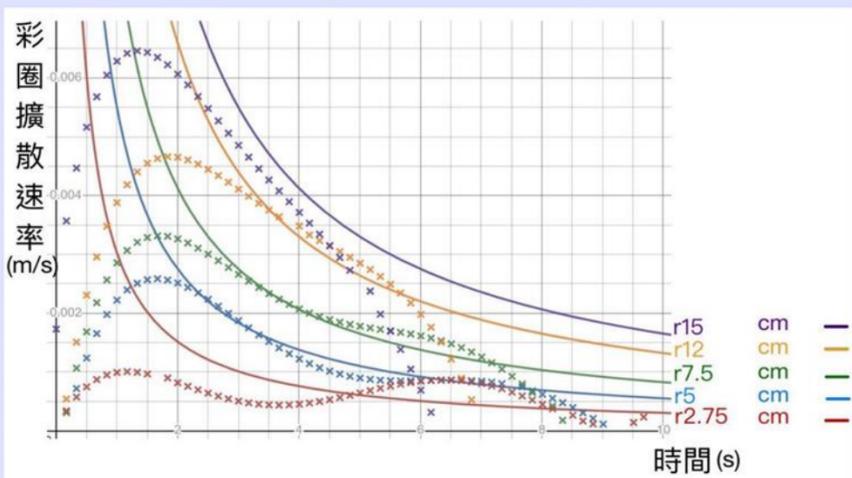
而在微等速區時，因速率較小，因此剪應力項 τ 可以省略，此外，由於此式在推論幾近等速的區域故 $m \frac{dv}{dt}$ 項應較 $v \frac{dm}{dt}$ 小，故一樣省略。

透過討論二可以發現彩圈外部介面活性劑濃度(C)和彩圈至容器邊緣的水面面積成反比，故可將(C)化作時間的函數式，得(2)式：

$$\Rightarrow C = \delta C^* \left(\frac{R^2 - A^2 R^2}{R^2 - r^2} \right) = \delta C^* \left[\frac{R^2 - A^2 R^2}{R^2 - (AR + vt)^2} \right] \quad (2) \quad \Rightarrow T = \frac{(1 - A^2)(0.03 - S)}{(B^2 - A^2)C^*} (C - C^*) + 0.03 \quad (3)$$

最後合併(1)式及(3)式得(4)式：

$$\Rightarrow \frac{(1 - A^2)(0.03 - S)}{(B^2 - A^2)} \times \left[\frac{(1 - B^2)R^2}{R^2 - (AR + vt)^2} - 1 \right] (AR + vt + W) = 1000Kv^2 \quad (4) \quad (K \text{ 值為 } W \times H)$$



左圖呈現了(4)式在帶入各項參數後對實驗數據的擬合情形 ($A = 0.12$ 、 $B = 0.22$ 、 $K = 10^{-9}(m^2)$ 、 $S = 0.0334(N/m)$ 、 R 隨各面寬改變)

可以發現，在中等面寬下，擬合的最好，但所有面寬在前段與後段擬合結果皆較差。

猜測造成最小面寬擬合結果不佳的原因可能是因為在小面寬下擴張過程較短、速率較小，且容器整體體積較小侷限了對流的尺度。

大面寬下推測是因為剪應力主導項的(a)會和起始半徑成正相關，且起始半徑又和面寬成正相關，所以在面寬時剪應力主導項($a\tau$)會變大，而($a\tau$)會使彩圈擴散速率下降，刪去後使擬合線略高於實驗結果。

柒、結論

- 一、深度與彩圈運動較無相關。
- 二、在足夠滴入量下，面寬和彩圈運動的部分物理量呈線性關係。
- 三、我們初步認為不管面寬大小，只要彩圈起始半徑形成，彩圈外圍溶液表面的介面活性劑濃度約為0.92倍的臨界膠束濃度(CMC)。
- 四、急速圈速度約等於彩圈擴散速率的數十倍，雖然兩者皆是透過表面張力差所傳播的，但其各自的表面張力差量值卻相差巨大，使兩者速率相距甚遠。
- 五、在特定條件下彩圈運動應該可以用簡單的模型來解釋或說明，且討論三的 B 值(0.29)會大於擬合結果的 B 值(0.22)，推測是因為實際情況下 B 值會受到慣性擴張的影響，而較擬合的 B 值大。

捌、參考資料

1. Roché, M., Li, Z., Griffiths, I. M., Roux, S. le, Cantat, I., Saint-jalmes, A., & Stone, H. A. (2014). Marangoni Flow of Soluble Amphiphiles. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 112(208302), 5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.208302>
2. Kim, H., Muller, K., Shardt, O., Afkhami, S., & Stone, H. A. (2017). Solutal Marangoni Flows of Miscible Liquids Drive Transport without Surface Contamination. *Nature Physics*, 13(1105-1110), 7. <https://doi.org/10.1038/NPHYS4214>
3. Berga, S. (n.d.). Marangoni-Driven Spreading along Liquid-Liquid Interfaces. *PHYSICS OF FLUIDS*, 21(032105),
4. A steady dissolving drop method for studying the pure Marangoni effect. *Chemical Engineering Science*, Volume 25, Issue 8, p. 1249-1254. [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(70\)80001-X](https://doi.org/10.1016/0009-2509(70)80001-X)