

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組 物理與天文學科

051801

偏心馬達振動對物體運動速度之影響

學校名稱：臺北市立麗山高級中學

作者： 高二 董道衡 高二 鄧歲遠	指導老師： 吳明德 許永昇
-------------------------	---------------------

關鍵詞：向心力、摩擦力、閃頻測速

摘 要

本研究探討振動體運動。調控馬達轉速帶動離心錘旋轉。閃頻同步測量轉動頻率，並追蹤軟體分析運動軌跡，各頻率下平移速度。

離心錘逆時針旋轉高於 24Hz 開始運動，移動速率與旋轉頻率關係：理論值 26~47Hz 轉一圈向右移動，47~56Hz 轉兩圈向左，56~65Hz 轉三圈向右，並以起跳至著地空中時段，合力向右或左比例，分析運動方向。

力圖分析列出水平驅動力、正向力、摩擦力等時間函數建構理論模型。由 Desmos 軟體計算水平移動速率，藉頻率調控正向力、摩擦力，計算得各頻率下振動體速度，進行理論與實驗比對後，幾乎完全吻合，驗證此理論模型正確性。

安裝加速規得垂直加速度與時間關係，類似鋸齒波與正弦組合，似乎可由振動體底座為具彈性珍珠板加以解釋。

壹、前言

切割金屬、玻璃或硬脆固體材料時，可藉高頻振動加工技術。或者切割鬆軟物體時，例如蛋糕等食品可利用聲波振動防止刀具沾黏，都是利用高頻振動減少刀具與被切割物體間的摩擦力。常見的家用聲波電動牙刷，雖然原理不盡相同，也是期望減少食物殘渣附著在牙齒。可見振動減少摩擦有許多重要的應用領域。

本研究探討旋轉振動體運動，同時採用實驗法與理論模擬法。而實驗法除了以慢動作高速錄影，運動分析之外，還以加速規結合 Arduino 讀取數據進行分析。

探討使用馬達轉動離心錘產生振動，離心錘旋轉需向心力 $mR\omega^2$ ，對馬達則是由向心力的反作用力，或簡稱為「離心力」產生的振動。此反作用力可以區分成水平分力與垂直分力，所以增加離心錘質量 m 、半徑 R 與振動力量成正比，其中角頻率平方 ω^2 與振動力量成正比，所以藉由提高轉動頻率是增加振動力量的最有效方式。

本研究的振動頻率設定的範圍，考慮到觀測頻率與錄製旋轉振動體運動，是使用手機的慢動作錄影，每秒可達 240 張影格(240FPS)，而每個週期內至少要有六個取樣，所以本研究選擇 0~40Hz 較低頻率範圍作研究，進行實驗與理論分析。當然為了能在低頻率下，才能明顯呈現此裝置振動，就需要盡可能減低總質量，所以馬達的底座是利用質輕的厚珍珠板。

一、研究動機

在高中物理課程中，學到簡諧運動可視為圓周運動的投影，也學到作用力與反作用力定律。馬達透過連桿帶動離心錘轉動，離心錘進行圓周運動需要向心力，而對於馬達而言則受到此「離心力」，若馬達的質量很輕，就有可能會發生振動。

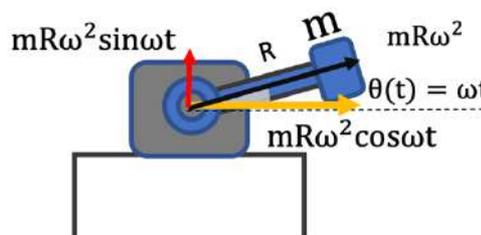


圖 1. 向心力之反作用力（暫稱之為離心力）在旋轉時的分力情形

由右圖中力圖分析可瞭解，此馬達會發生振動的原因，此離心力可分解為水平分量與垂直分量，其垂直分量會影響正向力。摩擦力與正向力有關，而水平分量若超過摩擦力，就有可能會讓此裝置左右移動。向心力公式 $mR\omega^2$ 得知，頻率對此旋轉振動體運動影響很大，或者說旋轉振動體的運動可藉由調控頻率而改變。

二、文獻回顧

回顧歷屆科展關於「振動」的研究相關文獻時，會發現有些研究是在討論阻尼震盪或是耦合振動。而振動會使正向力產生隨時間變化，也就有可能改變最大摩擦力的大

小。但加上「振動」與「摩擦力」兩關鍵字，搜尋得到的參考文獻十分稀少。事實上摩擦力與正向力有密切的關係。

下列前兩篇科展作品，是將關鍵字改為「刷刷車」搜尋得到的。在 2007 年的國小科展《前進！車》，就缺乏討論刷刷車的馬達轉動「頻率」。而 2014 年的高中科展《衝吧！震動向前的龍爪草》，雖然有討論頻率，但僅藉聲波在共鳴管內，讓龍爪草運動簡易實驗，沒有建立理論模型，也欠缺進一步的計算分析。

物理學研究，會先簡化模型，期望研究成果能拓展各領域。所以本研究不會採用刷刷車上難以規格化的刷毛，也期望馬達帶動旋轉錘產生振動效果更明顯，帶動旋轉錘馬達下方底座，是貼上光滑鋁板的輕質厚珍珠板，在貼上光滑的鋁板上運動。而查詢 2004 年交大機械系論文，雖找到振動與減少阻力嚴謹計算與推導，但使用的計算工具過於複雜，也並未進行實驗證實理論的正確性。

表 1.歷年在科學展覽與論文研究振動與摩擦力議題

年份	單位	題目	內容簡介
2014	中小學科學展覽會	衝吧！震動向前的龍爪草	探討龍爪草在各聲音頻率下是否運動及倒刺構造對其運動速率影響，但缺乏理論值計算
2007	中小學科學展覽會	前進！車	考慮電池和馬達位置、旋臂長度和重量、刷毛長度和排列方式等因素，缺乏最重要的「頻率」
2004	交大機械系論文	振動狀態下摩擦力降低效應之研究	考慮垂直/平行振動及潤滑接觸影響，但缺乏實驗驗證。

三、 初步振動摩擦實驗

本團隊早期的振動減阻實驗，是利用交流電訊號輸入喇叭，利用喇叭內的線圈產生的交流磁場推動磁鐵紙盆振動，如圖 2，有振幅不足加上隨喇叭頻率增加時振幅銳減的問題，

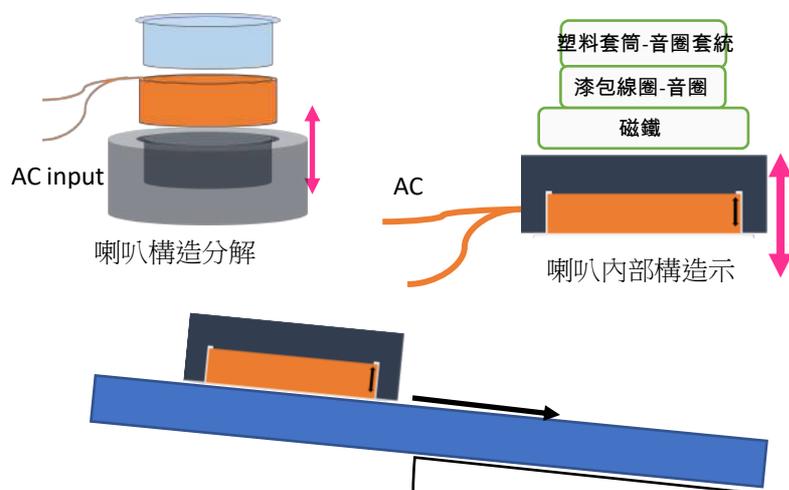


圖 2. 測量振動摩擦係數實驗裝置圖。調整傾斜面角度，直到讓各振動頻率喇叭開始下滑

所以本研究改為馬達帶動旋轉錘，以圓周運動方式來解決振幅不足，以及振幅無法控制等諸多問題。

四、 實驗目的

改變早期研究裝置，由喇叭改為偏心馬達轉動產生的振動，本研究著重建立理論模型，並藉助閃頻法觀測轉速，影像追蹤運動軌跡分析速度。研究在各轉速頻率下，振動與摩擦之間的關聯性，並由深入理論分析。當旋轉振動體達到一定頻率時，甚至會發生起跳，脫離地面的現象。綜合以上所述，下列為本研究目的：

- (一) 由理論計算輔以實驗比較當旋轉振動體從靜止開始移動的「門檻轉速」。
- (二) 調整馬達轉動頻率，觀測旋轉振動體產生移動速度並與理論進行比較。
- (三) 若旋轉振動體會起跳，以理論探究離心錘會在空中轉幾圈才落下。
- (四) 利用旋轉振動體起跳至落地的空中的時段，「離心力」的水平分量左右比重來判斷運動方向的向左或向右。
- (五) 利用加速規量測鉛直加速度以驗證理論值。

貳、研究設備及器材

一、 振動減阻實驗裝置

電源輸入馬達帶動離心錘轉動，產生的向心力之反作用力（暫稱之為離心力）使旋轉振動體前進，以閃頻法監測轉速，並微調電壓到轉速至設定頻率，如圖 3。

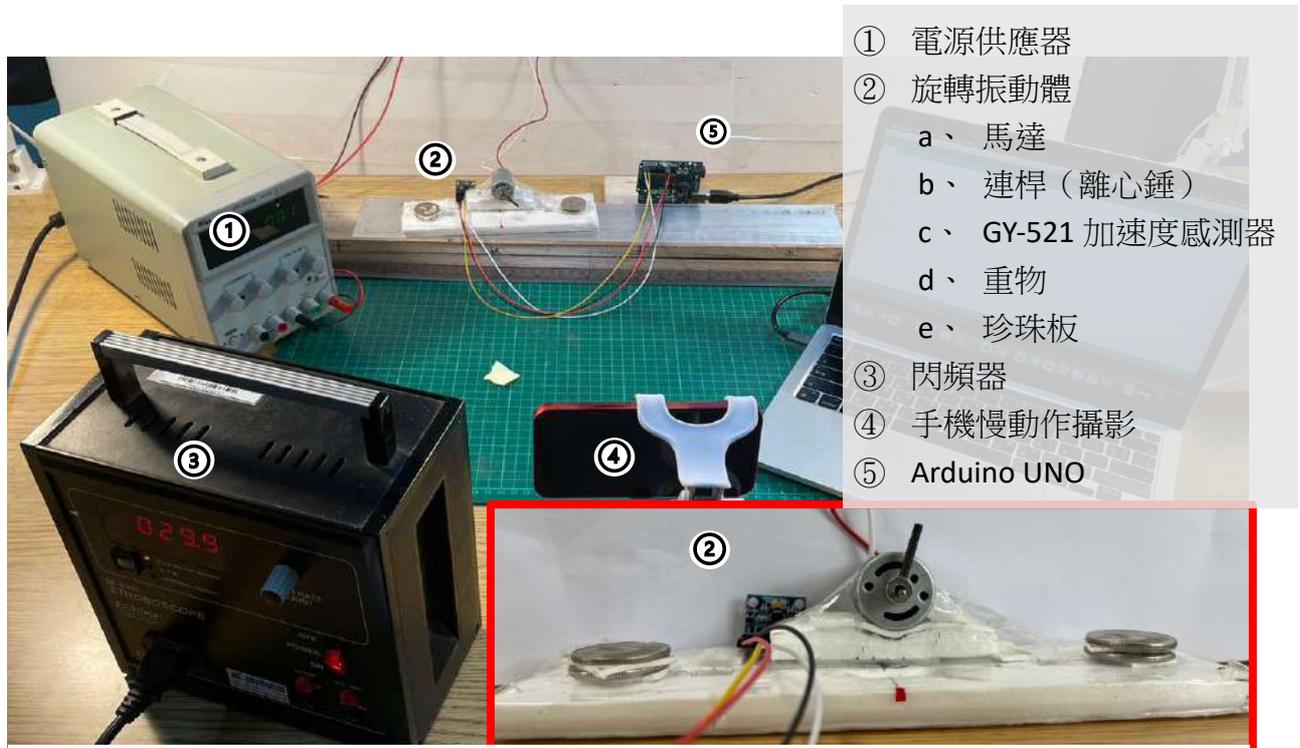


圖 3. 實驗裝置圖總照

(一) 閃頻軟體偵測轉速達到既定頻率

如圖 4，閃頻同步技術測量轉動頻率，是藉由週期性閃光照射在週期運動物體上，當兩者頻率相同或成倍數頻率時，能以肉眼觀測此週期運動物體像是靜止，或是極緩慢轉動，彷彿是被凍結狀態。

這種視覺現象稱為同步 (Synchronize)，本研究採用「Stroboscope 2」App，並非採週期性閃光，而是調整手機錄影的每秒幀率(Frame Per Second, FPS)，當每秒幀率與週期運動物體同步時，此手機的每秒幀率即為週期運動物體的頻率。

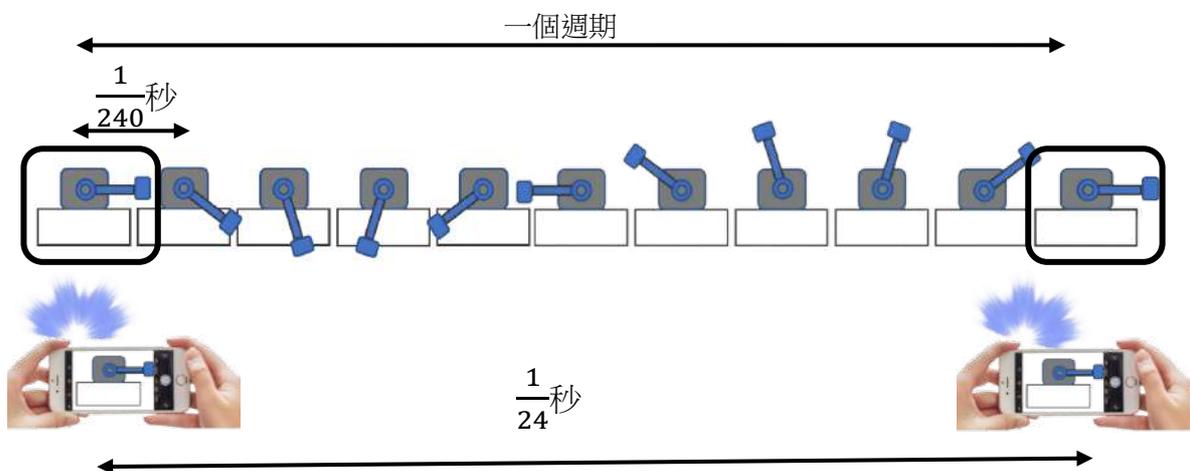
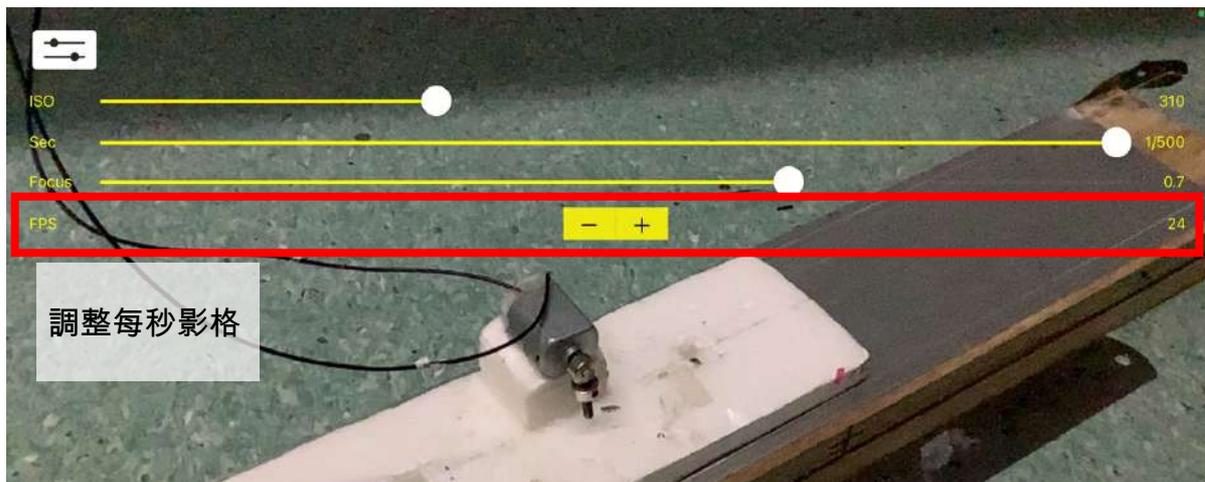


圖 4.以馬達轉速 24 R.P.S.為例：將閃頻軟體設定為 24FPS，則 1 秒會拍 24 張，接著調整馬達電壓直到畫面中馬達靜止不動，馬達轉速即為 24 R.P.S.。

(二) 運動軌跡追蹤

本研究使用在 iOS 系統的「Video Physics」 App，設定原點、座標軸與尺規後，還有自動追蹤運動軌跡(Auto Track)，能快速將影片中的運動物體，轉換成為位置、速度與時間的關係圖。如果還要分析上述函數關係，再將軌跡資料匯入「Vernier Graphical Analysis」App，進行細節資訊分析。

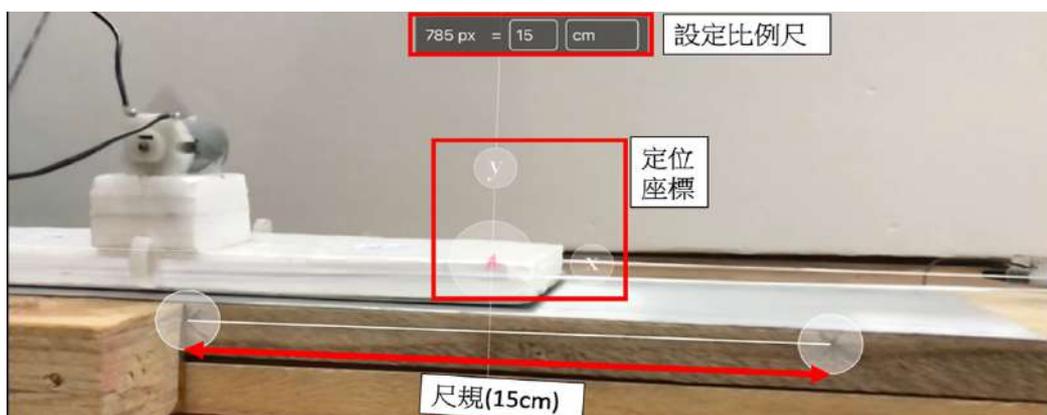


圖 5. 在木板上先量好一段長度，並在欲追蹤物體上放置一明顯標記物，拖曳軟體中的尺規工具使其吻合先前量的長度，並將比例尺設定為量好的長度，再把座標對準標記物並調整調整角度使 x 軸與前進方向平行。

(三) Vernier Graphical Analysis 數據分析

是一個類似 Excel 表格的實驗數據分析軟體，由於該公司主要在做科學實驗設備，此軟體分析來自硬體儀器的數據，圖 6 為 對 Video Physics 匯入 Graphical，得到之運動軌跡的 X 軸位移做線性擬合，出 X 軸位移的斜率乘以影片攝影倍速即為該次實驗的速度。

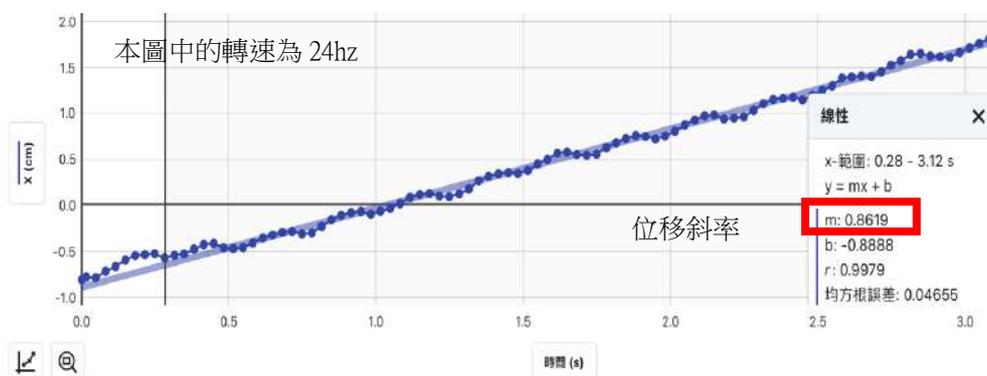


圖 6. 本實驗採用 8 倍速 240fps 縮時攝影
慢動作攝影位移斜率 × 攝影倍數 = 實際平移速度

(四) Desmos 繪圖計算軟體

本研究的理論計算中，除了重力是定值之外，水平驅動力源自旋轉錘離心力的水平分量，是隨著時間作週期變化。而摩擦力的計算要考慮正向力，而正向力受旋轉錘離心力的垂直分量影響，也是隨著時間呈現週期變化。由於計算過程略為複雜，不方便使用手算解析，需要能設定各變量方程式，還需要呈現隨時間變化函數關係的軟體。

採用 Desmos 這軟體的原因，是它可以在行動載具如 iPad，或是能在 Windows 或 Mac 的電腦上執行。除了可以繪製方程和不等式之外，它還能列表、圖表、圖形限制、分段函數圖形，函數所圍面積即為此函數積分，等各項進階功能。

Desmos 軟體的左側欄位為自定義函數方程式，右側則呈現此函數的圖形。

在圖 7 中列出三個函數關係，舉例說明 Desmos 能呈現力與時間關係函數：

1. 紅色的直線為鉛直合力
2. 綠色的週期變化線條，為受旋轉錘離心力（暫稱之為離心力）的垂直分量（正弦函數）
3. 藍色週期變化線條為正向力，正向力大小為重力減去離心力的垂直分量（週期函數）

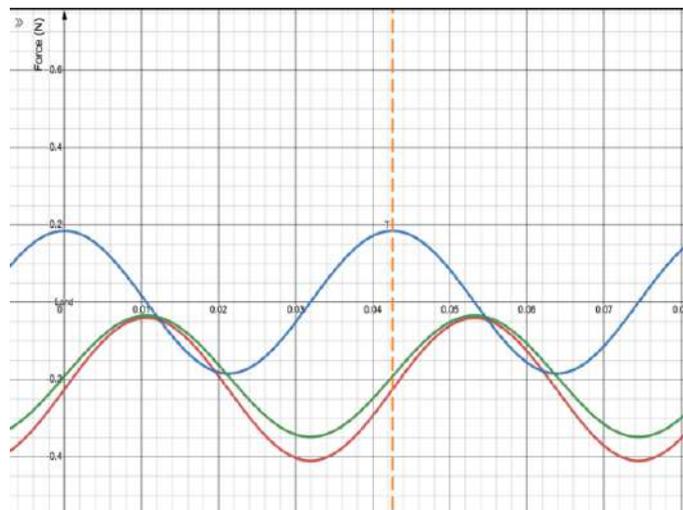


圖 7. Desmos 軟體呈現紅色重力常數函數，紅色為離心錘離心力的垂直分量，藍色為旋轉錘離心力的水平分量。

參、研究過程或方法

一、 研究方法

本研究探討振動減阻，同時採取「實驗法」與「理論計算法」兩種方式，並且最後將此兩種的研究方法產生的圖表結果，疊圖後加以比較兩者，應證理論模型的假設，能否可以解釋真實物理實驗的現象。

(一) 實驗法

調控小馬達帶動離心錘的轉動頻率，採用常見的 USB 電源，經過可調電壓直流轉直流電源，調控馬達轉動頻率。採用閃頻同步 (Stroboscope2) 技術測量此轉動頻率。

本研究採用「Stroboscope 2」App，並非採週期性閃光，而是調整手機錄影的每秒幀率 (Frame per Second，縮寫為 FPS)，當每秒幀率與週期運動同步時，此手機的每秒幀率即為週期運動的頻率。

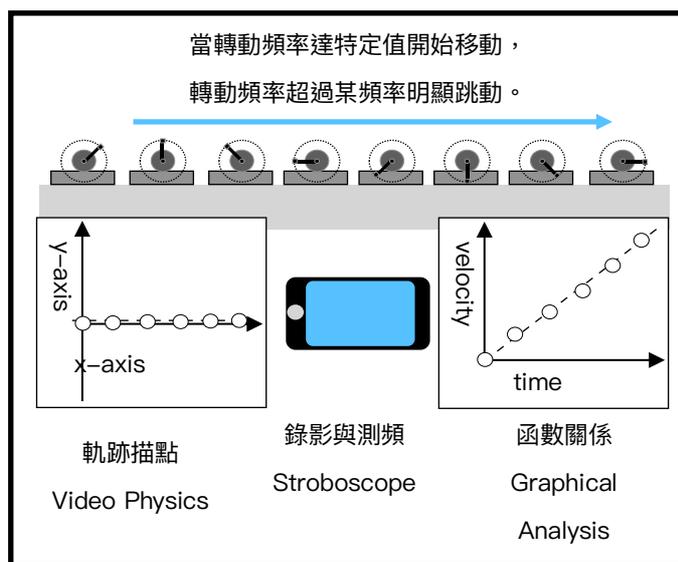


圖 8. 實驗法分別以錄影描點圖分析運動函數，以及調控轉速藉閃頻同步測頻

與運動相關的實驗方法中，最常採用錄影分析運動軌跡。本研究使用在 iOS 系統的「Video Physics」App，設定原點、座標軸與尺規後，還有自動追蹤運動軌跡 (Auto Track)，能快速將影片中的運動物體，轉換成為位置、速度與時間的關係圖。如果還要分析上述函數關係，再將軌跡資料匯入「Vernier Graphical Analysis」App，能得如速度與時間的變化率為加速度，請參見圖 8。

本研究探討旋轉振動體運動，同時採用實驗法與理論模擬法。而實驗法除了以慢動作高速錄影，運動分析之外，還以加速規結合 Arduino 讀取數據進行分析。

(二) 理論計算法

理論計算要先建立以數學公式、物理定律為基礎的「理論模型」。在本研究中，為解釋偏心馬達轉動時會產生振動，要進行下列 4 項步驟。

1. 必須先繪製力圖：質量為 m 的離心錘進行圓周運動時，所受的向心力為 $mR\omega^2$ ，其中 R 為旋轉半徑， ω 為角頻率。其離心力拉動旋轉振動體整體朝向外，此反作用力可以分解為水平分力 $mR\omega^2\cos\omega t$ 。水平分力在角頻率 ω 逐漸增加後能克服摩擦力，帶動旋轉振動體作水平運動。
2. 要運動必須克服最大靜摩擦力，此摩擦力與正向力有關係，而正向力又與前述離心力的垂直分力 $mR\omega^2\sin\omega t$ 有關，並列出函數式。
3. 代入離心錘的質量 m ，馬達與其底座質量 M ，旋轉半徑 R 等實際實驗時振動裝置的數值。並且調控在各角頻率下的函數關係。
4. 計算流程如下，



圖 9.利用理論模型計算旋轉振動體水平速度的理論計算流程圖

二、 研究過程

計算旋轉振動體的理論平移速度 $v_{\parallel}(t)$ ，要先得知水平合力 $F_{\parallel}(t)$ ，離心力水平分量為 $mR\omega^2\cos\omega t$ ，摩擦力為 f ，初速為 v_0 ，並令初速 $v_0 = 0$ ：

$$v_{\parallel}(t) = v_0 + \Delta v(t) = v_0 + \int \frac{F_{\parallel}(t)}{M} dt = v_0 + \int \frac{mR\omega^2\cos\omega t - f}{M} dt = \int \frac{mR\omega^2\cos\omega t - f}{M} dt$$

(一) 力圖分析

如圖 10，馬達帶動離心錘旋轉，對於離心錘而言。受到來自連桿方向的向心力，對於整體系統而言，受到了向心力之反作用力 $mR\omega^2$ （暫稱之為離心力），其中，離心力的鉛直分量 $mR\omega^2\sin\omega t$ 與重力 Mg 相疊加。在地面狀態下，會產生正向力 $N(t)$ 來作為平衡力將其抵消，而正向力 $N(t)$ 會以摩擦係數公式、 $f = \mu N$ 週期性的改變摩擦力 $f(t)$ ，作為當下離心力之水平分量 $mR\omega^2\cos\omega t$ 的平衡力大小極限，突破後便開始產生加速度運動，直到下次低於當下摩擦力時，

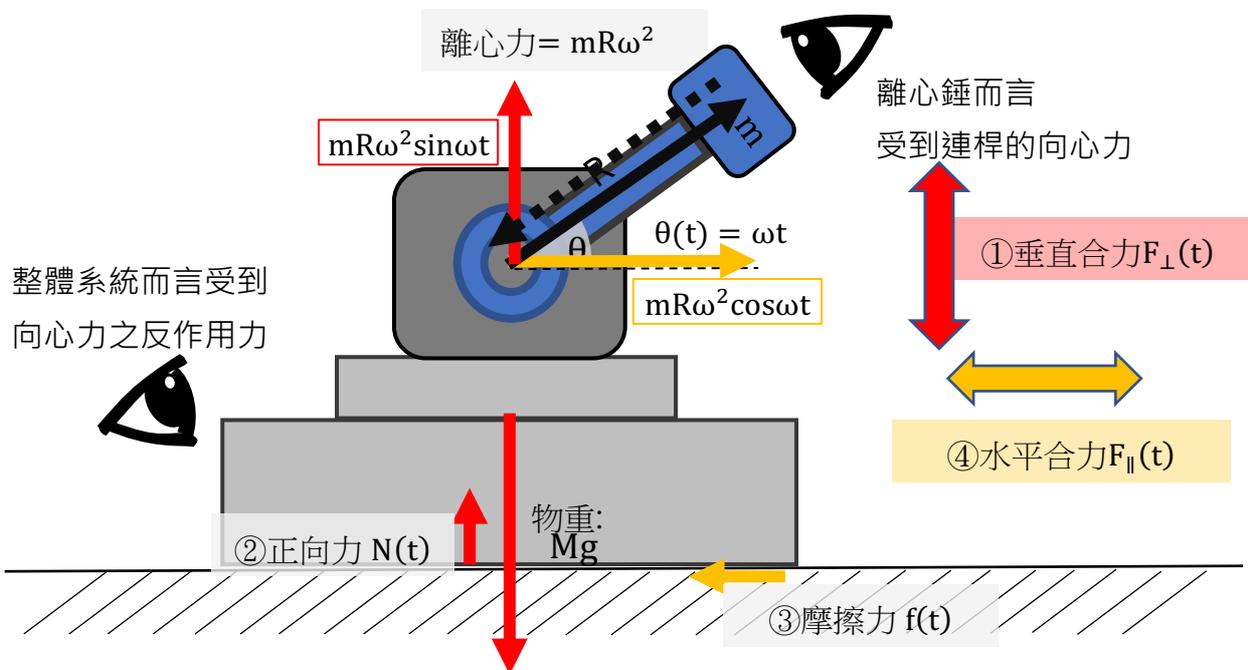


圖 10. 為馬達帶動離心錘運轉時，旋轉振動體的分力情形

再度靜止。

$$F_{\perp}(t) = mR\omega^2\sin\omega t - Mg + N(t)$$

$$N(t) = \begin{cases} Mg - mR\omega^2\sin(\omega(t + t_c)), & 0 \geq h(t) \\ 0, & h(t) < 0 \end{cases}$$

$$f_{\parallel}(t) = \mu N(t)$$

$$F_{\parallel}(t) = \begin{cases} |mR\omega^2\cos\omega t| - |f|, & |mR\omega^2\cos\omega t| - |f| \geq 0 \\ 0, & |mR\omega^2\cos\omega t| - |f| < 0 \end{cases}$$

(二) 旋轉振動體開始移動的門檻

對於旋轉振動體開始移動的門檻的推測，首先最直覺的是：只要有離心力水平分量大於摩擦力大小（絕對值）的時機。就會在某些時機產生滑動。這是對的，但是。若以一個始終持續貼合於地面，不離地的旋轉振動體而言，他的力學函數情形。只會左右振動而已。宏觀上並不會有實際的平移。

隨著離心錘旋轉，如圖 11，藍線驅動力與綠線摩擦力隨時變，當驅動力（離心力之水平分量）克服當下的摩擦力時，旋轉振動體水平合力不為零，產生水平加速運動。

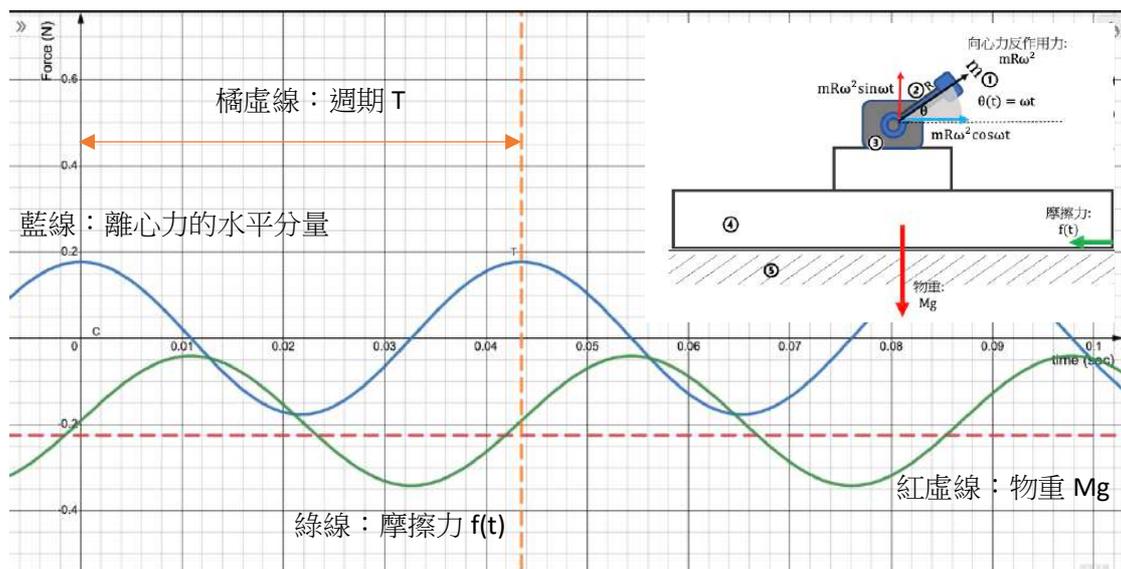


圖 11. Desmos 模擬計算振動減阻裝置之紅虛線為物重 Mg (常數函數)，藍線為離心力的水平分量 $m\omega^2 R \cos\omega t$ 、綠線為摩擦力 $\mu(m\omega^2 R \sin\omega t + Mg)$ 隨時變函數關係圖。代入 $M = 0.023 \text{ kg}$ 、 $m = 0.00113 \text{ kg}$ 、 $R = 0.0075 \text{ m}$ 、 $\omega = 147.6 \text{ rad/s}$

比較摩擦力 $f(t)$ 與離心力之水平分量 $m\omega^2 R \cos\omega t$ 數值的大小（利用絕對值），分辨旋轉振動體滑動與否，如圖 12，當藍色驅動力克服綠色摩擦力時（即紅框區塊所示），合力使旋轉振動體水平加速滑動，當驅動力低於摩擦力時，旋轉振動體是靜止的，灰色部分為合力為零的靜止狀態。

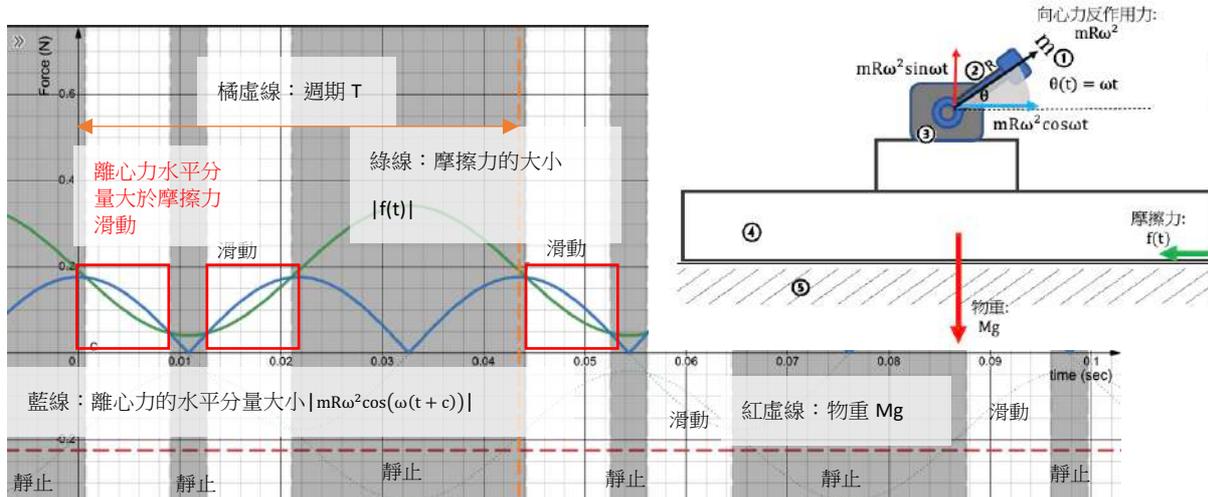


圖 12. 紅框區塊為旋轉振動體開始左右滑動，灰色部分為合力為零的靜止狀態

由於現在是旋轉振動體不會起跳的狀態，此時的正向力 $N(t)$ 即為離心力鉛直分力 $mR\omega^2 \sin\omega t$ 與重力 Mg 合力的平衡力。導致摩擦力 $f(t)$ 隨時變：

$$f(t) = \mu N(t) = \mu(Mg - mR\omega^2 \sin\omega t)$$

目前水平合力 $F_{\parallel}(t)$ 函數如下：

$$F_{\parallel}(t) = \begin{cases} |mR\omega^2 \cos\omega t| - |f|, & |mR\omega^2 \cos\omega t| - |f| \geq 0 \\ 0, & |mR\omega^2 \cos\omega t| - |f| < 0 \end{cases}$$

如圖 13，滑動時，合力的方向必須與 $mR\omega^2\cos(\omega(t + t_c))$ 驅動力同向，所以水平合力須乘以 sgn 符號函數 $\text{sgn}(mR\omega^2\cos\omega t)$ 代表驅動力之方向（+向左、-向右）如下式。

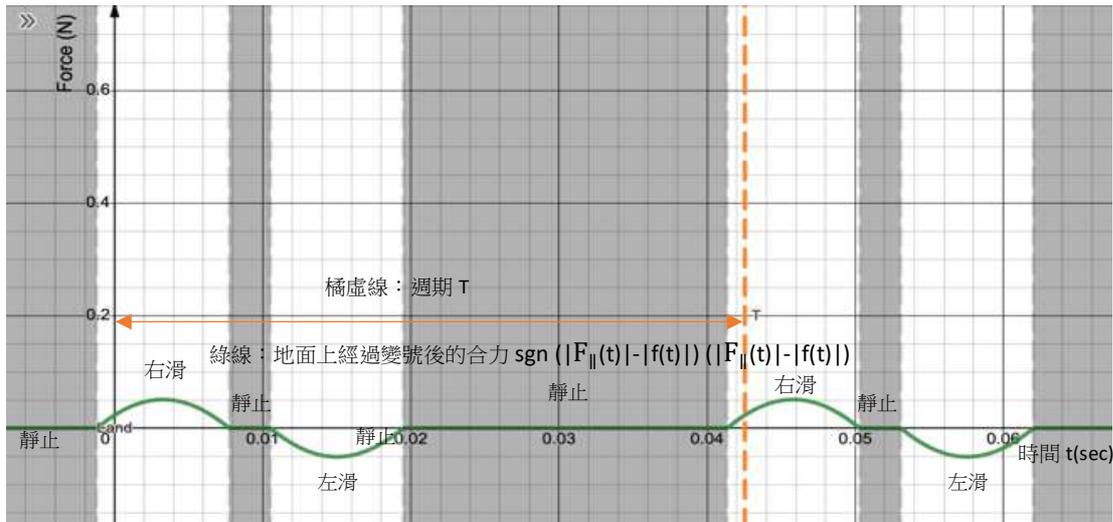


圖 13. 在未起跳狀態，即使水平分力能短暫克服摩擦力，也只能讓旋轉振動體來回左右滑動，並不能產生移動

$$F_{\parallel}(t) = \begin{cases} (|mR\omega^2\cos(\omega(t + t_c))| - |f|)\text{sgn}(mR\omega^2\cos(\omega(t + t_c))), & |mR\omega^2\cos\omega t| - |f| \geq 0 \\ 0, & |mR\omega^2\cos\omega t| - |f| < 0 \end{cases}$$

如下式，做一個週期 T 的定積分便可知平均速度，在未起跳狀態，即使水平分力能短暫克服摩擦力，也只能讓旋轉振動體來回左右滑動，並不能產生移動（也可以從觀察圖 15 的函數得知，面積會上下抵銷）。所以單就未起跳的地面運動狀態而言，無法解釋旋轉振動體在實驗中會平移運動的現象。接下來要加以考慮起跳狀態來計算平移速度。

$$v_{\parallel} = \int_0^T \frac{F_{\parallel}(t)}{M} dt = 0$$

1. 旋轉振動體起跳的轉速

旋轉振動體水平分力即整體的水平合力，在地面，會受到正向力，進而產生摩擦力，限制旋轉振動體的運動，他們在每個週期裡面的佔比與出現時機，會導致向左和向右的水平合力不對稱，進而造成水平移動，所以何時起跳，何時落地是十分重要的。

假設旋轉振動體從時間 $t = 0$ 的時候從第一象限開始旋轉，要得知第一次起跳的時間點 t_c ，需進行以下圖 14 計算。

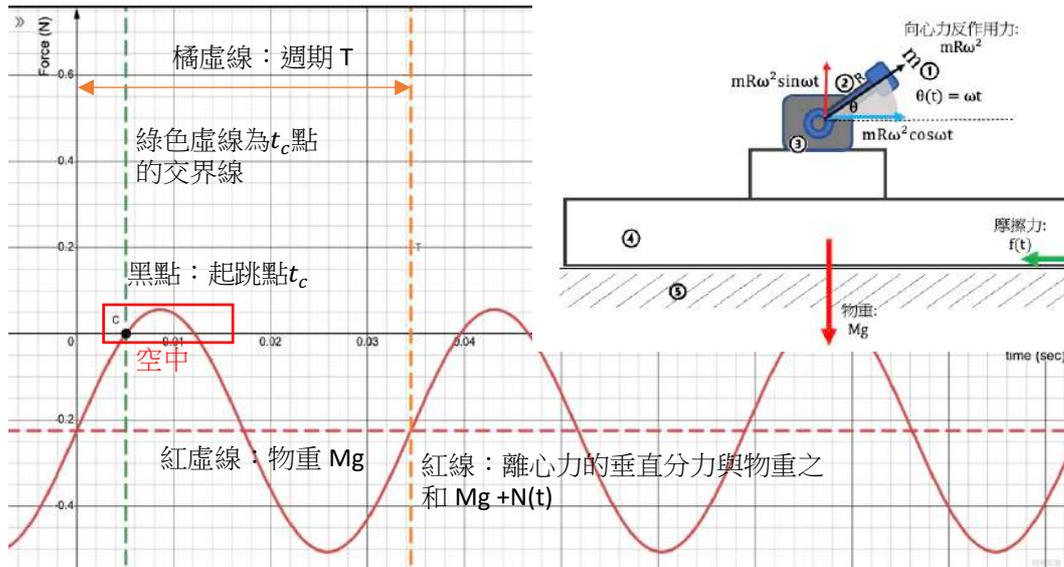


圖 14. 離心力的垂直分量與物重之和 $mR\omega^2 \sin\omega t - Mg$ ，當其值大於 0 時，旋轉振動體開始起跳在空中。

將脫離地面起跳瞬間設為 t_c ，此時，離心力垂直分量與重力的合力為 0。

$$mR\omega^2 \sin\omega t_c - Mg = 0$$

移項得起跳的時間 t_c 如下式

$$t_c = \frac{\sin^{-1}\left(\frac{Mg}{mR\omega^2}\right)}{\omega}$$

要有起跳的狀態，其條件為在週期內，必須有垂直合力 >0 的區間， $\max()$ 為括號內函數最大值

$$\max(mR\omega^2\sin\omega t) - Mg > 0$$

當離心力大於重力時起跳

$$mR\omega^2 > Mg$$

又 $\omega = 2\pi f$ 可得理論起跳門檻頻率為

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Mg}{mR}}$$

代入旋轉振動體質量 $M=0.023\text{kg}$ 、離心錘質量 $m=0.00113\text{kg}$ 、旋轉半徑 $R=0.0075\text{m}$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(0.023 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{(0.00113 \text{ kg})(0.0075 \text{ m})}}$$

由理論得到開始移動門檻頻率約為 **26(Hz)**，實際起跳頻率為 24hz，理論與實驗相近。

(三) 旋轉振動體的垂直運動情形

1. 將起跳瞬間設為週期的一開始

為了方便之後水平加速度積分的處理，將起跳瞬間 t_c 為設定初始時間，也就是說，第一個起跳時間會被固定成原點，如圖 15：

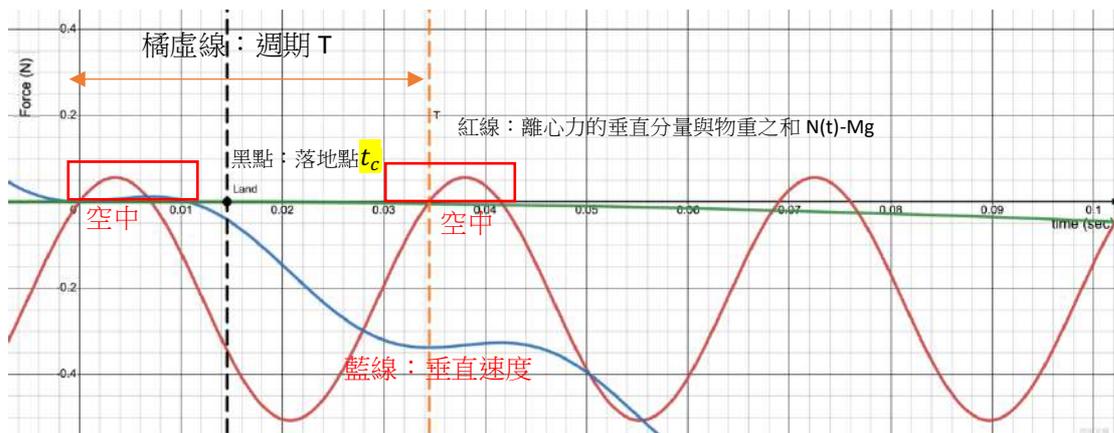


圖 15 . Desmos 模擬計算振動減阻裝置之重力 Mg 、離心力的水平分量 $m\omega^2 R \cos \omega t$ 、摩擦力 $\mu(m\omega^2 R \sin \omega t + Mg)$ 隨時變函數關係圖。

$M = 0.023 \text{ kg}$ 、 $m = 0.00113 \text{ kg}$ 、 $R = 0.0075 \text{ m}$ 、 $\omega = 169.6 \text{ rad/s}$

當旋轉振動體離地的瞬間，鉛直分量之力產生之加速度變為

$$a(t) = \frac{m\omega^2 R \sin(\omega(t + t_c))}{M} - g$$

對時間做積分一次，當旋轉振動體離地的瞬間，旋轉振動體的垂直速度變為

$$v_1(t) = \frac{-m\omega R \cos(\omega(t + t_c)) + m\omega R \cos(\omega t_c)}{M} - gt$$

再對時間做積分一次，當旋轉振動體離地的瞬間，旋轉振動體的位移（高度）變為

$$h(t) = \frac{-mR \sin(\omega(t + t_c)) + tm\omega R \cos(\omega t_c) + mR \sin(\omega t_c)}{M} - \frac{1}{2}gt^2$$

2. 計算騰空時間

旋轉振動體從原點起跳，下一次高度 $h(t) = 0$ 時，表示落地，落地當下，鉛直分力中的所有鉛直的速度或者合力都被歸零，因為都被當下產生的正向力給抵消了，高度 $h(t)$ 保持為零，直到下一次鉛直合力大於重力之後，再次繼續下一次的起跳。

以下函數其意義為： $h(t)$ 大於 0 的部分即為 1、 $h(t)$ 小於 0 的部分即為 0，如圖 16

$$\frac{\text{sgn}(h(t)) + 1}{2}$$

由於大於 $h(t)$ 的部分皆為 1， $h(t)$ 除了騰空的時間之外，也沒有其他部分大於 0，所以他的積分即為騰空時間

高度 $h(t)$

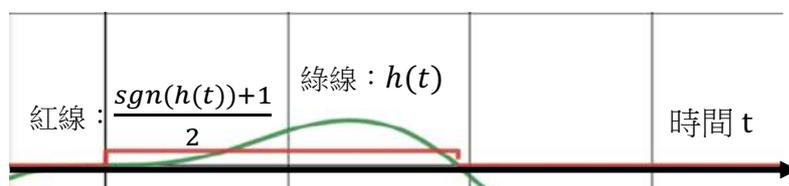


圖 16. 為旋轉振動體高度 $h(t)$ 、 $\frac{\text{sgn}(h(t))+1}{2}$ (紅) 與時間關係圖

$$T_k = \int_0^{\infty} \frac{\text{sgn}(h(t) + 1)}{2} dt$$

由於原點就是起跳的瞬間，做以下的轉換

當在地面的時候，會受到正向力

$$N(t) = \begin{cases} Mg - mR\omega^2 \sin(\omega(t + t_c)), & 0 = h(t) \\ 0, & h(t) > 0 \end{cases}$$

騰空時間一結束，就會著地，開始受到正向力

$$N(t) = \begin{cases} Mg - mR\omega^2 \sin(\omega(t + t_c)), & t \geq T_k \\ 0, & t < T_k \end{cases}$$

(四) 旋轉振動體的水平運動情形

掌握了騰空時間 T_k ，也就意味著掌握整個旋轉振動體何時起跳、何時落地(如圖 17)，那麼這樣就可以來定義隨時變的正向力，由於之前已經將首次起跳的時間固定在原點。結合得到的騰空時長便可得知，從原點到騰空時間結束這段時間為空中狀態，不會受到來自地面的平衡力--正向力，所以正向力 $N(t) = 0$ 。落地到下次起跳前，正向力為重量 Mg 離心力之鉛直分量 $F_{\perp}(t)$ 的平衡力，以摩擦力公式得知隨時變的摩擦力。水平合力如同下式

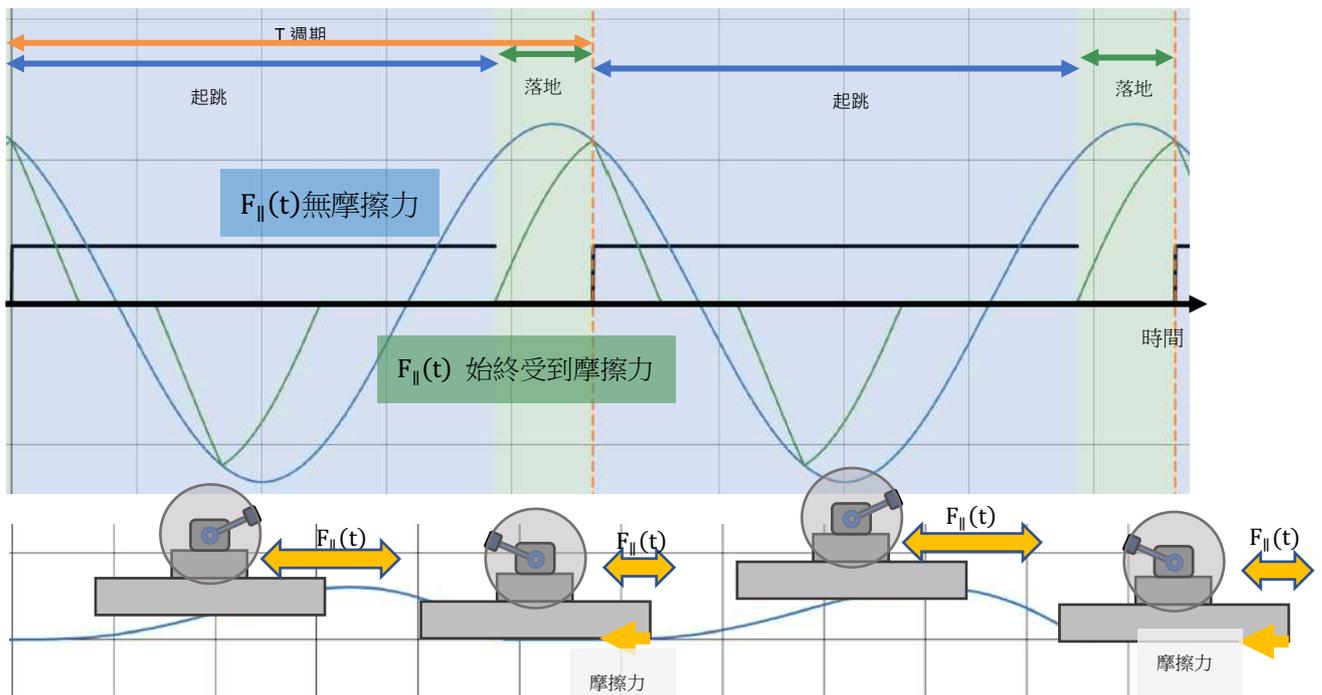


圖 17. 藍線 $F_{\parallel}(t)$ 不受摩擦力影響，此情形發生在騰空狀態。綠線 $F_{\parallel}(t)$ 始終受到摩擦力的影響，此情形發生在地面狀態。所以當高度函數得知之後。就知道何時受到摩擦力，何時沒有受到摩擦力，進而得出條件函數 $N(t)$ 。

$$N(t) = \begin{cases} Mg - mR\omega^2 \sin(\omega(t + t_c)), & t \geq T_k \\ 0, & t < T_k \end{cases}$$

$$f(t) = \mu N(t)$$

水平合力如下式，若要求出平均平移速度 v_{\parallel} ，需要對水平合力 $F_{\parallel}(t)$ 產生之加速度做定積分，接下來要討論積分的範圍(...)

$$F_{\parallel}(t) = \begin{cases} (|mR\omega^2 \cos(\omega(t + t_c))| - |f(t)|) \operatorname{sgn}(mR\omega^2 \cos(\omega(t + t_c))), & |mR\omega^2 \cos\omega t| - |f(t)| \geq 0 \\ 0, & |mR\omega^2 \cos\omega t| - |f(t)| < 0 \end{cases}$$

$$v_{\parallel} = \int_0^{\infty} a(t) dt$$

1. 論計算空中旋轉圈數

不同於地面狀態，不能直接進行一個週期 T 的積分，因為旋轉振動體可能在空中轉 2 圈才落下，或是轉 3 圈才落下。

在單位周期內，加速度的積分就是速度（的變化量，不過之前已經定義 $v_0 = 0$ ），由於騰空的時間可能會超過一個週期，所以實際積分的範圍也取決於旋轉振動體「跳動」的週期，之前也將旋轉振動體固定在原點時起跳，所以單次騰空時間 T_k 一結束，就是落地瞬間，到下一次起跳前的瞬間即為定積分的範圍。簡單來說，就是將騰空時間 T_k 與週期 T 的比值，無條件進位到週期整數倍。以下為舉例：

狀況 A：單次騰空總時長介於 $1T$ 和 $2T$ （轉了 1 圈但不到 2 圈）之間，落地之後碰到第 2 個周期線之後起跳，須求 2 週期的積分：

$$T = 1.8, \quad v(t) = \frac{\int_0^{2T} F_{\parallel}(t) dt}{2M}$$

狀況 B：單次騰空時間總長介於 $2T$ 和 $3T$ （轉了 2 圈但不到 3 圈）之間，落地之後碰到的 3 個週期線之後起跳，須求 3 週期的積分：

$$T = 2.33, \quad v(t) = \frac{\int_0^{3T} F_{\parallel}(t) dt}{3M}$$

(1) 以取整函數 $\text{floor}(t)$ 的方式來表示積分範圍

整理前面所述，得知積分時段應為旋轉週期的整數倍（兩次起跳間的時段），以取整函數「 $\text{floor}(t)$ 」的方式來表示積分範圍， T_k 為騰空時間， T 為離心錘旋轉週期，經 $\text{floor}(t)$ 整數函數計算後，無條件進位為週期的整數倍。

$$\text{floor}\left(\frac{T_k}{T}\right) + 1$$

下式即為旋轉振動體的理論水平速度：

$$v_{\parallel}(t) = \frac{\int_0^{(\text{floor}(\frac{T_k}{T})+1)T} F_{\parallel}(t) dt}{M (\text{floor}(\frac{T_k}{T}) + 1)}$$

肆、研究結果

一、由理論計算輔以實驗比較當旋轉振動體從靜止開始移動的「門檻轉速」

實驗值頻率在 24Hz 開始移動，理論計算為 26Hz

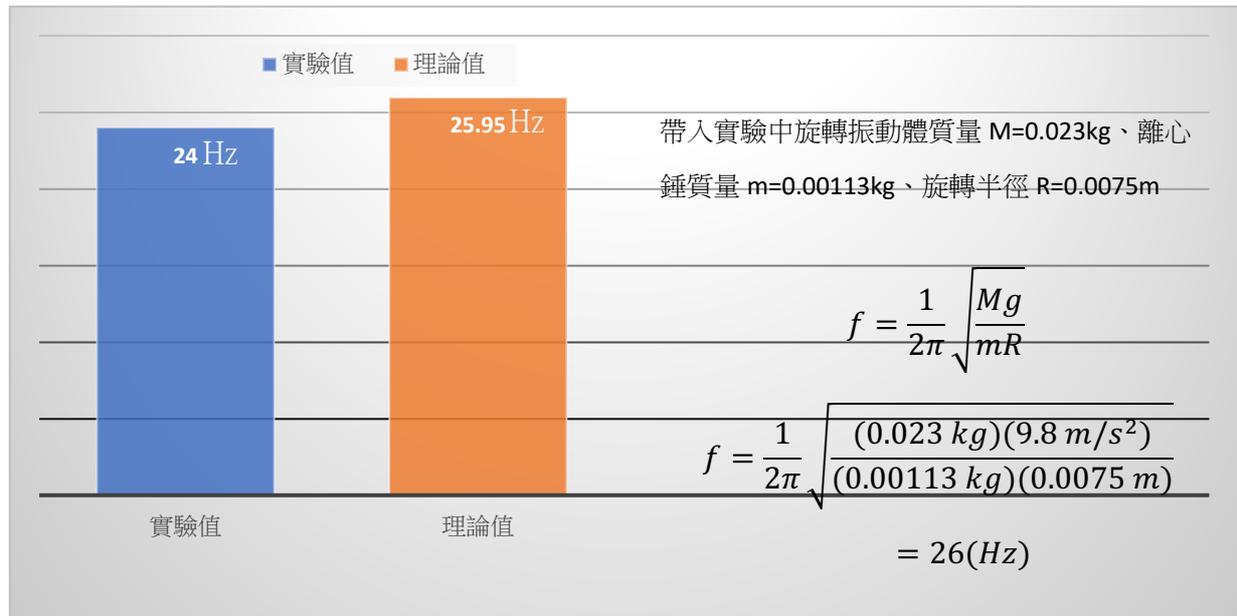


圖 18. 旋轉振動體從靜止開始移動的「門檻轉速」實驗值頻率在 24Hz 開始移動，理論計算為 26Hz

二、 調整馬達轉動頻率，觀測旋轉振動體產生移動速度並與理論進行比較

在實驗中，逐漸提高轉速，小馬達出現了短暫的折返的現象，來不及測量便燒毀，為了穩定呈現旋轉振動體折返的現象，以遙控飛機大馬達代替小馬達，成功呈現「隨著旋轉振動體折返」的現象，圖（19、20）為理論值與實際值的對照

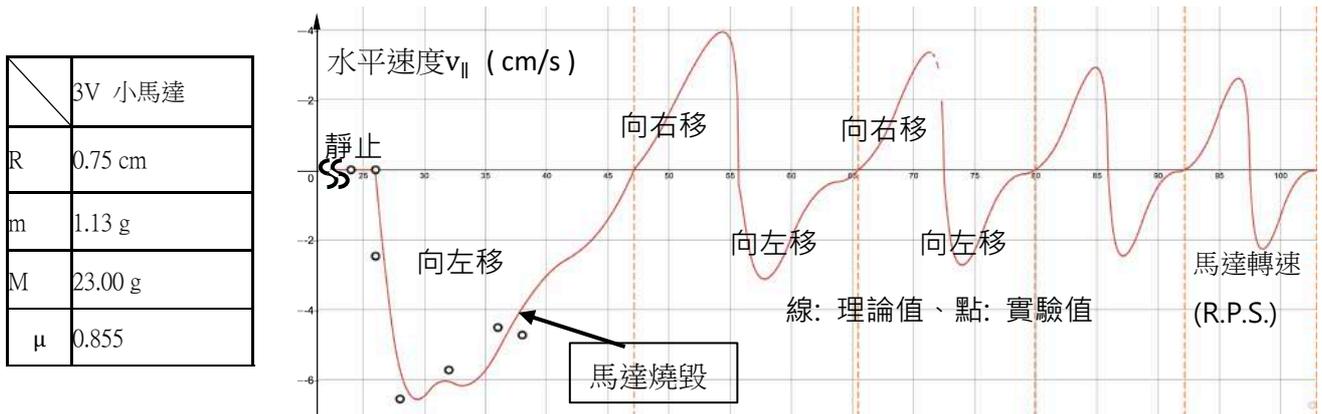


圖 19. 旋轉振動體移動速度與離心錘旋轉頻率之關係。理論值為 26.4~47.1Hz 向左移動 3V 小馬達約在 24Hz 開始向左運動但小馬達達到 36Hz 後轉

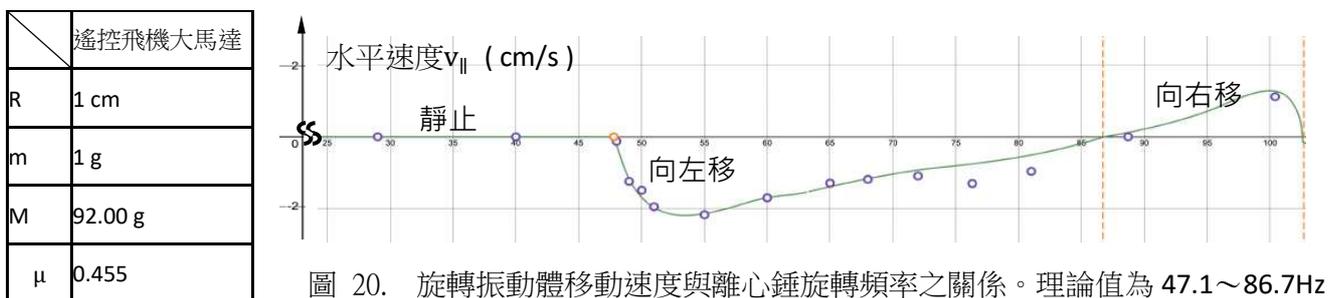


圖 20. 旋轉振動體移動速度與離心錘旋轉頻率之關係。理論值為 47.1~86.7Hz 向左移動，86.7~102.5Hz 向右移動。大馬達約在 47.6Hz 開始向左移動，在 88.6Hz 開始向右移動。

三、若旋轉振動體會起跳，以理論探究離心錘會在空中轉幾圈才落下

如圖 22，隨著離心錘旋轉頻率增加，逐漸使旋轉振動體移動，由本模型的理論值得知頻率範圍約為：26~47Hz 轉動一圈向右移動，47~56Hz 轉動兩圈向左移動，56~65.5Hz 轉動三圈向右移動，以此類推。

在實驗中圖 (22、23)，有小馬達與大馬達的旋轉振動體，隨著轉速提高，旋轉振動體最初向右運動，接著向左運動，接下來又向右運動情形發生，小馬達短暫呈現折返線向後便燒毀，大馬達能穩定呈現第一次折返的情形。

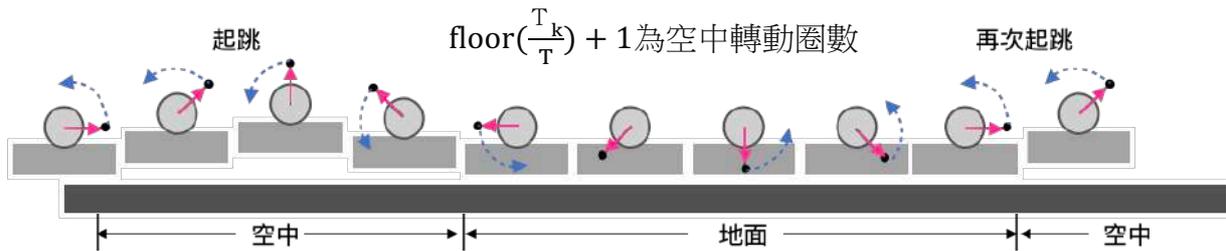


圖 21. 兩次起跳的時距為週期整數倍，藍虛線箭頭為離心錘運動軌跡，紅箭頭為離心力方向，當方向朝上，垂直分力大於重力才開始起跳。

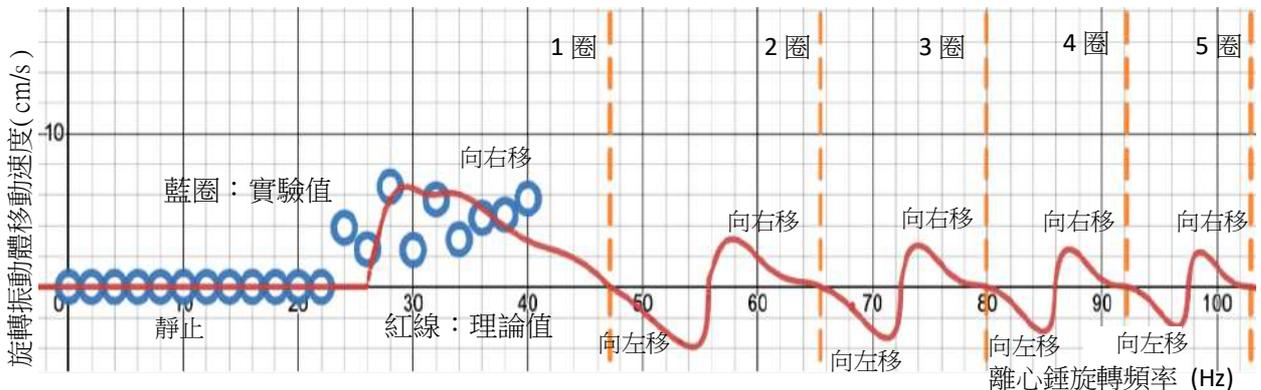
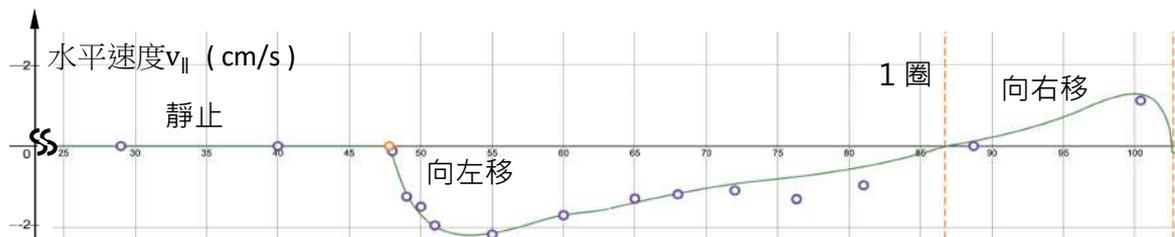


圖 22. 旋轉振動體移動速率與離心錘旋轉頻率之關係，理論值約為：26~47Hz 轉動一圈向右移動，47~56Hz 轉動兩圈向左移動，56~65.5Hz 轉動三圈向右移動，以此類推。



圖(23). 旋轉振動體移動速度與離心錘旋轉頻率之關係。理論值為 47.1~86.7Hz 向左移動，86.7~102.5Hz 向右移動。大馬達約在 47.6Hz 開始向左移動，在 88.6Hz 開始向右移動。

四、 利用旋轉振動體起跳至落地的空中的時段，「離心力」的水平分量左右比重來判斷運動方向的向左或向右

當旋轉振動體在空中（藍色範圍）時，向左比重大於向右比重，當旋轉振動體在地面（橘色範圍）時，向右比重大於向左比重，得知旋轉振動體向左受到阻力較小，旋轉振動體向右受到阻力較大，固整個旋轉振動體向左移動

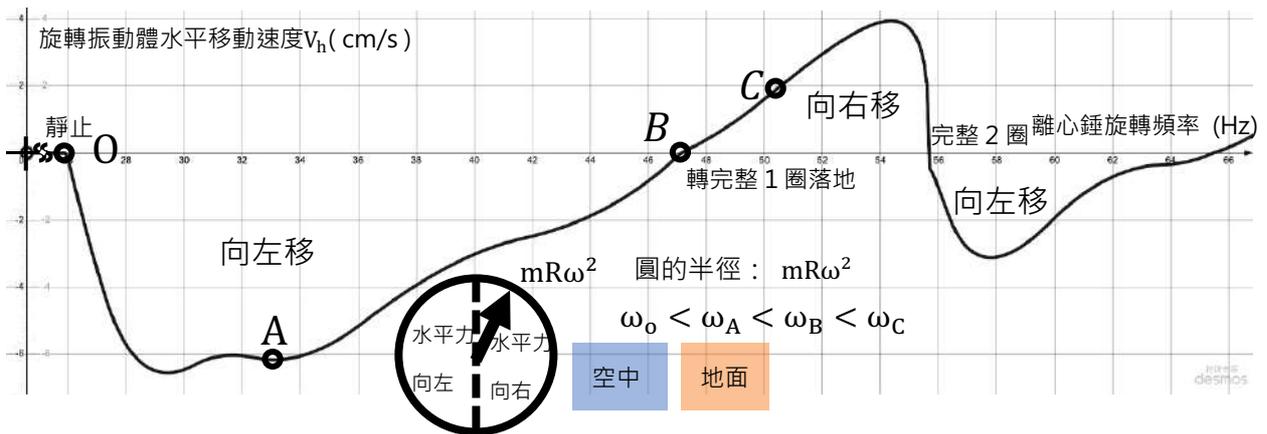


圖 26. 旋轉震動體移動速度與頻率的關係圖，以下擷取 O、A、B、C 四點並詳細分析他們的運動狀況。

O 點為起跳臨界頻率，如圖 26 在離心錘轉至最高處的時，離心力才完全抵銷重力，只有一瞬間，騰空時間趨近於 0。如之前 圖 13 所述，在未起跳狀態，即使水平分力能短暫克服摩擦力，也只能讓旋轉振動體來回左右滑動，並不能產生移動。

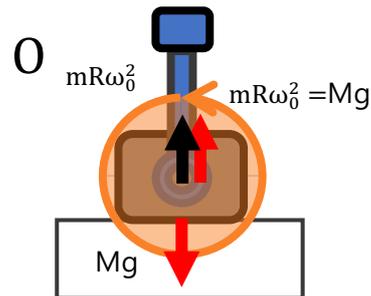


圖 26. 離心錘最高的瞬間，就是開始運動的門檻頻率

如圖 27，當離心錘旋轉至 θ 角時，鉛直分量完全抵銷重力，進入空中狀態，當旋轉振動體在空中（藍色範圍）時，向左比重大於向右比重，當旋轉振動體在地面（橘色範圍）時，向右比重大於向左比重，得知，旋轉振動體向左受到摩擦力較小，旋轉振動體向右受到阻力較大，故整個旋轉振動體向左移動。

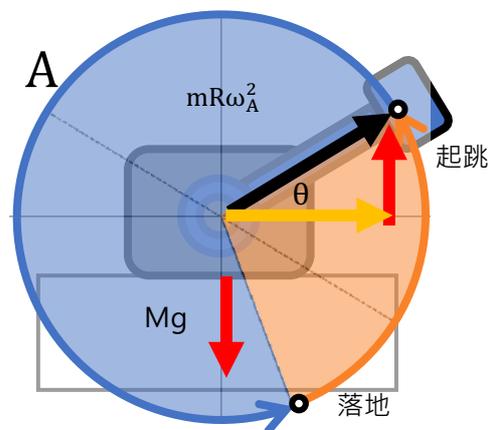


圖 27. 橘色為地面區間，藍色為在空中區間，旋轉振動體向左移動。

如圖 28，轉速增加，離心力隨之增加(在此以半徑 R 表示離心力大小)，可得知，比起低轉速，在更低的角度時，其離心力之鉛直分量就能完全抵銷重力，進入起跳狀態，但是在 B 頻率下，發現起跳至下一次落地的瞬間剛好與起跳角度相同，在理論值中，旋轉振動體觸地時間幾乎為 0，始終保持在空中，如此一來，向左的水平合力與向右的水平合力與位移會互相抵銷，不會產生移動。

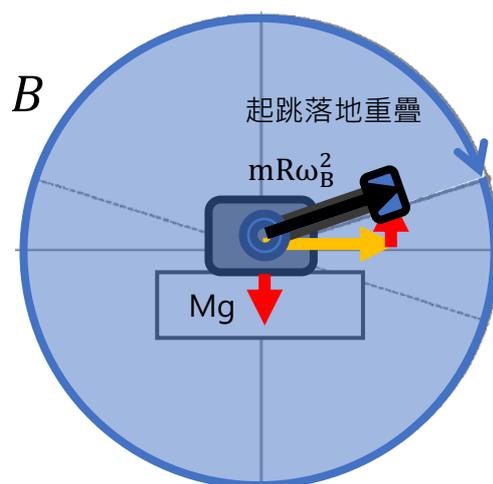


圖 28. 一四象限與二三象限比重相同，所以向右與向左的力一樣。

如圖 29，再將轉速提高至 C ，導致旋轉振動體在極低角度時就開始起跳，而且有著更高的騰空時間，此時騰空時間已經超過一個週期，錯過了一次起跳的時機，要到下一個週期線才再次起跳。在這這循環中，旋轉振動體在空中(藍色範圍)的向右比重大於向左比重，旋轉振動體在地面(橘色範圍)的向左比重大於向右比重，得知旋轉振動體向左受到阻力較大，旋轉振動體向右受到阻力較小，故整個旋轉振動體向右移動。

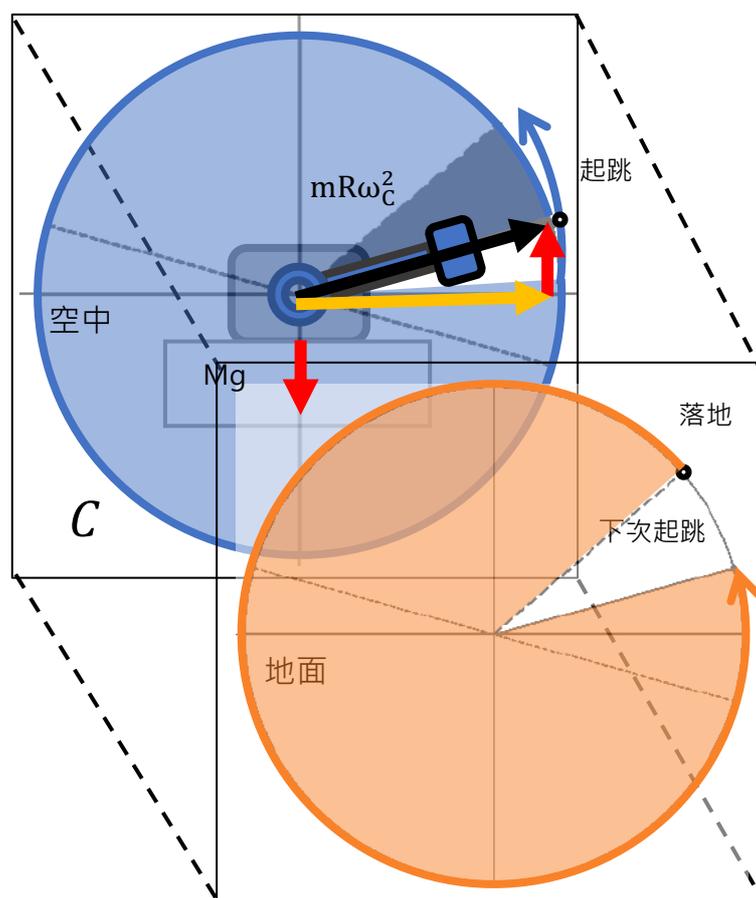


圖 29. 兩次起跳之間，空中區間向右分量比重較多，地面區間向向左比重較多，受到更多的摩擦力，物塊向右移動。

伍、討論

一、 利用加速規量測鉛直加速度以驗證理論值

為了量測實際鉛直合力隨時變的情形，將 GY-521 的 MPU6050 晶片作為加速規，用 Arduino 控制測量鉛直加速度，在加速度上有限制，取樣率也不足，無法測量大範圍頻率，只好在低頻下進行測試，圖 24 為在發現取樣點加速度向上(t_A)時非常疏鬆，代表向上加速歷時很短，在加速度向下(t_A)時非常密集，代表向下加速歷時很長。

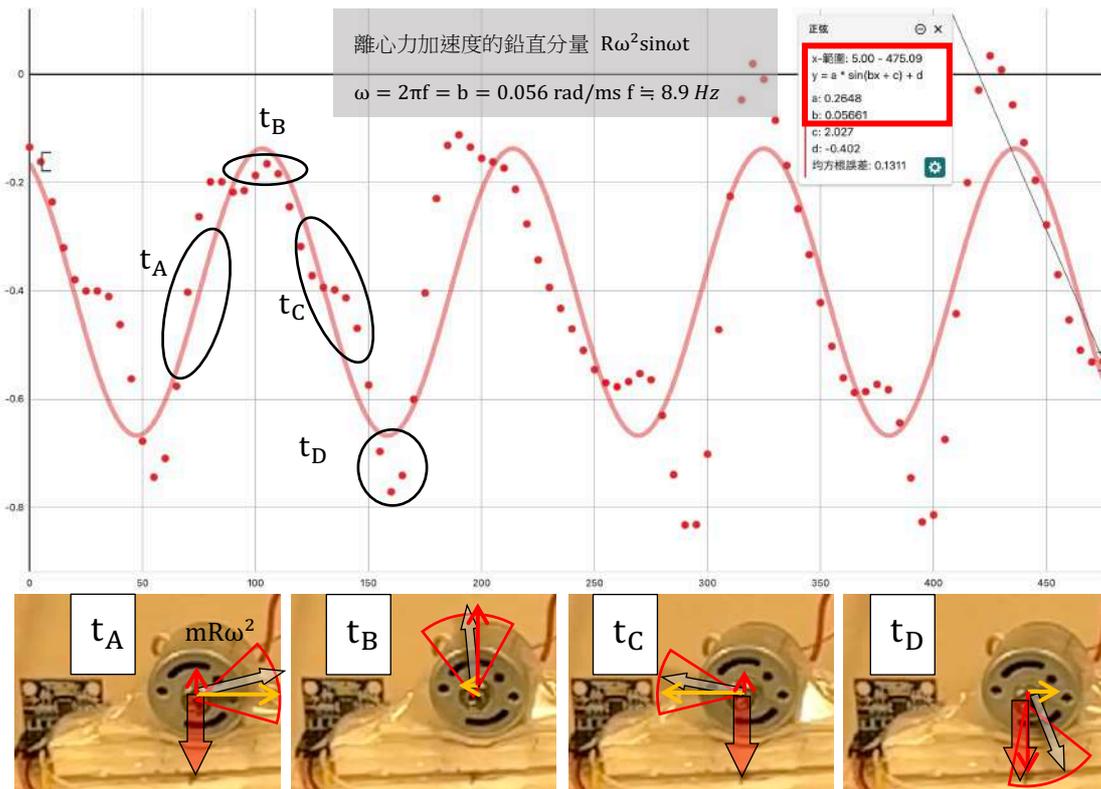


圖 24. 利用 Graphical 進行正弦函數擬合，實驗函數不完全符合正弦關係時間單位是毫秒，所以擬合出的頻率為 $1000((0.0566)/2\pi)=8.9$ Hz，實際頻率為 8 Hz。

離心力 $mR\omega^2$
 重力 Mg

在此，推測加速度不對稱的原因是由珍珠板彈性所造成的，這需要再進一步的計算才能對此現象加以解釋，如圖 25，加速規測量之結果與一個鋸齒波和正弦波的疊加相近。

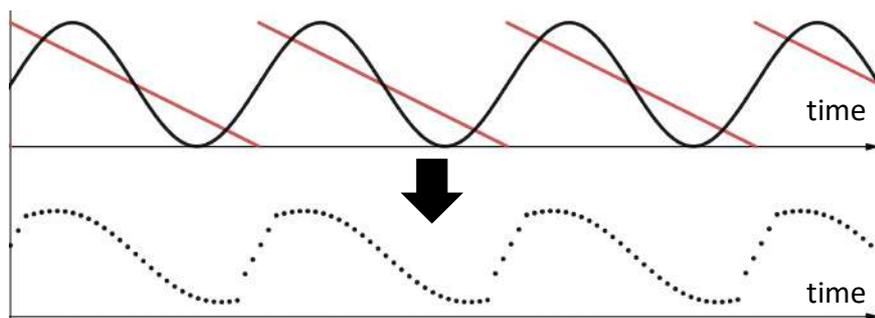


圖 25. 加速規測量之結果與一個鋸齒波和正弦波的疊加相近

陸、結論

- 一、3V 小馬達即使提高轉速，僅能達到 40Hz，為穩定觀測到運動方向改變，須至少提高到 50Hz 以上，更換可以達到 100Hz 轉速飛機用大馬達後，能以閃頻器測量轉速，並觀測物塊運動方向改變。
- 二、用 Desmos 建立了一個理論模型，能透過調整各項參數，繪製運動狀態之函數圖形，得知起跳與運動方向改變的頻率。小馬達起跳頻率理論值為 26.4 Hz 向左移動，大馬達起跳頻率理論值為 47.1Hz 向左移動。
- 三、實驗中也有觀測到隨著轉速上升，旋轉振動體會出現運動方向改變的現象，理論值及實驗值接呈現在 47.1~86.7Hz 向左移動，86.7~102.5Hz 向右移動。大馬達約在 47.6Hz 開始向左移動，在 88.6Hz 開始向右移動。
- 四、用 Desmos 理論模型，觀察離心錘在空中旋轉時四個象限的暫時時間比，解釋為何向左或向右運動。
- 五、加速規結合 Arduino 讀取數據進行分析，得垂直加速度與時間關係，類似鋸齒波與正弦組合，似乎可由振動體底座為具彈性珍珠板加以解釋。

柒、參考文獻資料

- ◆ 蔡鎮竹, & 曾錦煥. (2003). 振動狀態下摩擦力降低效應之研究(Doctoral dissertation).
- ◆ 謝安珩, & 呂冠蓉(2014). 衝吧！震動向前的龍爪草 (中小學科學展覽會)
- ◆ 簡孟瀚 等 (2007) 前進！車 (中小學科學展覽會)
- ◆ 吳明德 (2020, Oct 29). 湯匙擲球器
[影片]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=Myk7yAcYXtw&t=187s>.
- ◆ Desmos 繪圖計算機 使用手冊
取自 https://desmos.s3.amazonaws.com/Desmos_User_Guide_ZH-TW.pdf
- ◆ 吳明德(2021, Jul 28). 閃頻法測轉速
[影片]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=rjN_JLE0n6Q&t=2s.
- ◆ 趙英傑(2020, Mar 12) arduino 互動設計入門
- ◆ 龍騰選修物理 I(全)力學一 CH5-2簡諧運動

【評語】 051801

此研究探討振動體運動，透過調控馬達轉速帶動離心錘旋轉，以閃頻同步測量轉動頻率，並用追蹤軟體分析運動軌跡，各頻率下平移速度。力圖分析列出水平驅動力、正向力、摩擦力等時間函數建構理論模型。實驗設計完整，唯理論模型的論述要加強。

作品海報

前言

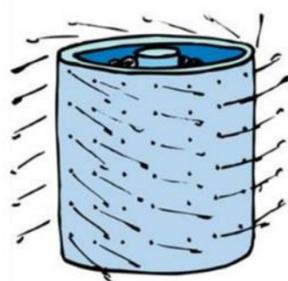
日常生活觀察到當脫水機高速運轉時產生的振動會使脫水機產生跳動和位移，進一步了解發現是因為重量分布不均導致旋轉時產生偏移，使它振動並產生運動。

工業上也有利用振動減少摩擦切削的技術，透過給刀具或工件以適當的方向、一定的頻率和振幅的振動來改善其切削功效的脈衝切削。改良刷刷車將底座換成平面減少刷毛的不確定因素。

單位	題目	內容簡介
2014 中小學科學展覽會	衝吧！震動向前的龍爪草	探討龍爪草在各聲音頻率下是否運動及倒刺構造對其運動速率影響，但缺乏理論值計算。
2007 中小學科學展覽會	前進！車	考慮電池和馬達位置、旋臂長度和重量、刷毛長度和排列方式等因素，缺乏最重要的「頻率」。
2004交大機械系論文	振動狀態下摩擦力降低效應之研究	考慮垂直/平行振動及潤滑接觸影響，缺乏實驗驗證。

研究目的

- 測量旋轉振動體轉速。
- 利用加速規量測旋轉振動體的振動波型是否為正弦波
- 建立理論模型，透過Desmos計算並繪製理論值。
- 調整馬達頻率，觀測速度，並與理論值比較。

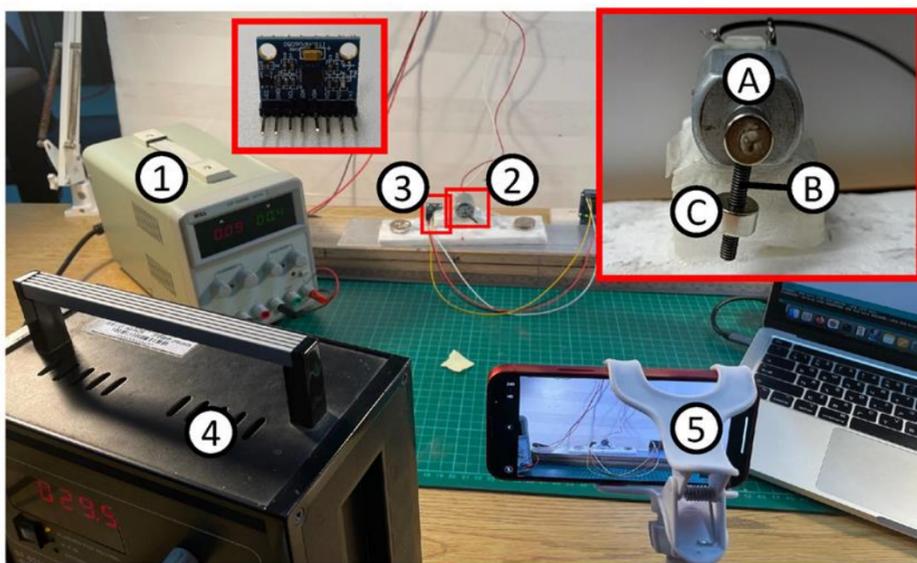


脫水槽運轉時產生振動
<https://sliceplayer.com/slice/9510166/>



高頻超聲波切割蛋糕
<https://www.sonics.com/food-cutting/>

實驗裝置及方法

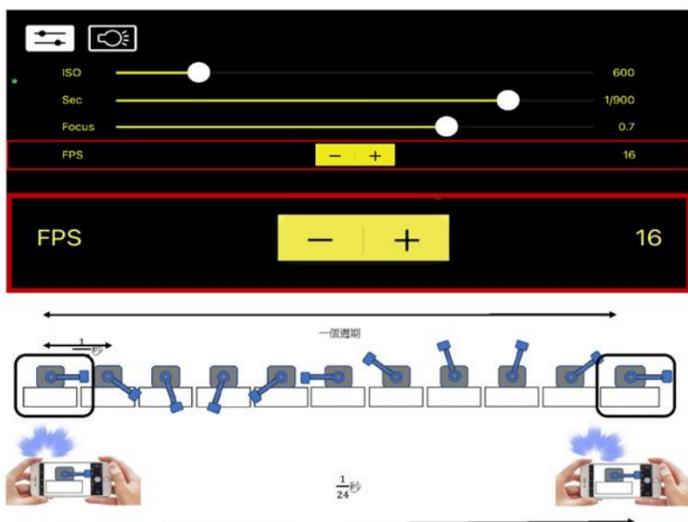


- ① 直流電源供應器
- ② 旋轉振動體
 - Ⓐ 馬達
 - Ⓑ 連桿
 - Ⓒ 離心錘
- ③ 加速規
- ④ 閃頻器
- ⑤ Video Physics 追蹤物塊、繪製軌跡
- ⑥ Graphical 擬合平均加速度、速率

實驗過程

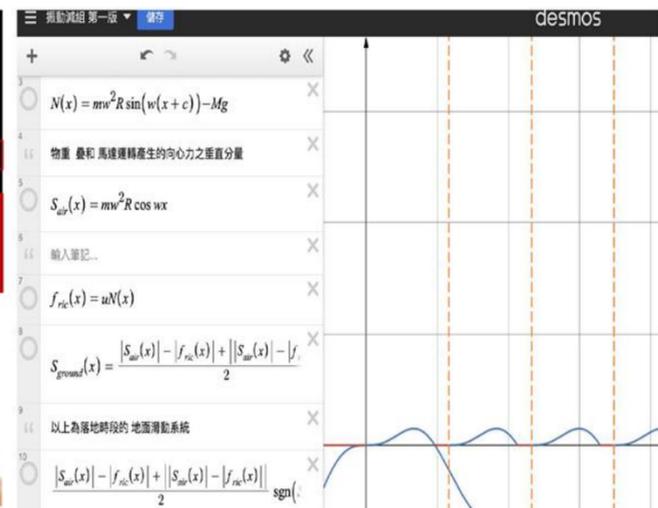
直流電源輸入馬達，帶動離心錘旋轉使旋轉振動體產生振動，閃頻軟體StroboScope監測轉速，Video Physics軟體追蹤並繪製運動軌跡，再匯入Graphical進行數據分析。

StroboScope閃頻軟體



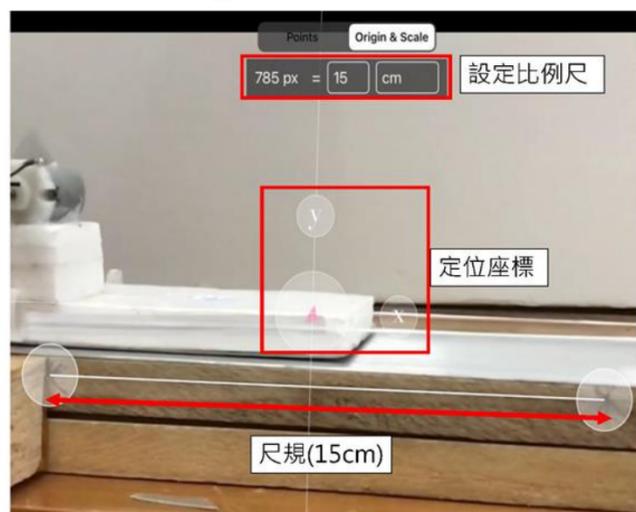
當畫面中物體靜止不動時，StroboScope的每秒幀率即為週期運動物體的頻率。

Desmos繪圖計算機



由於計算過程略為複雜，需要能設定各變量方程式且能呈現隨時間變化函數關係的Desmos軟體。

Video Physics影像追蹤軟體



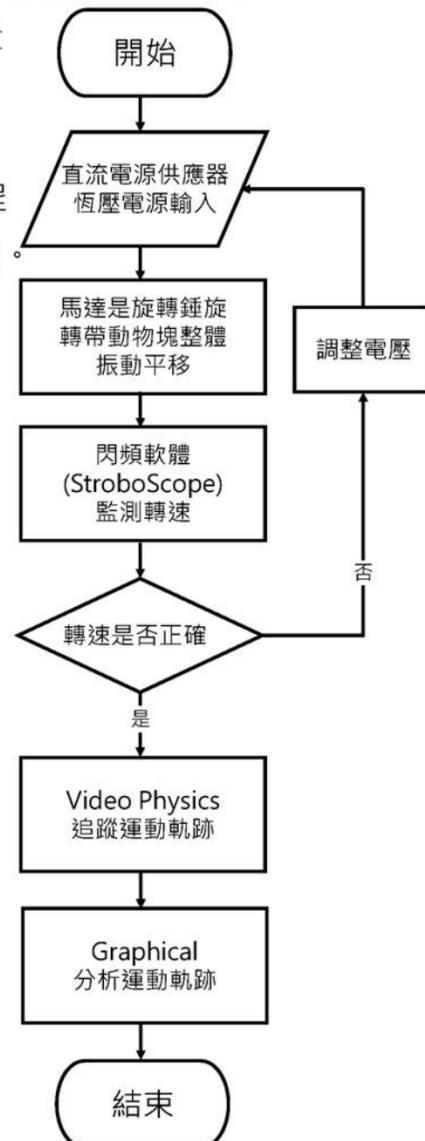
使用Video Physics軟體，能追蹤並繪製物體的運動軌跡。

Graphical圖形分析軟體



Video Physics的數據匯入至Graphical，得到其運動軌跡的X軸位移並進行線性擬合。

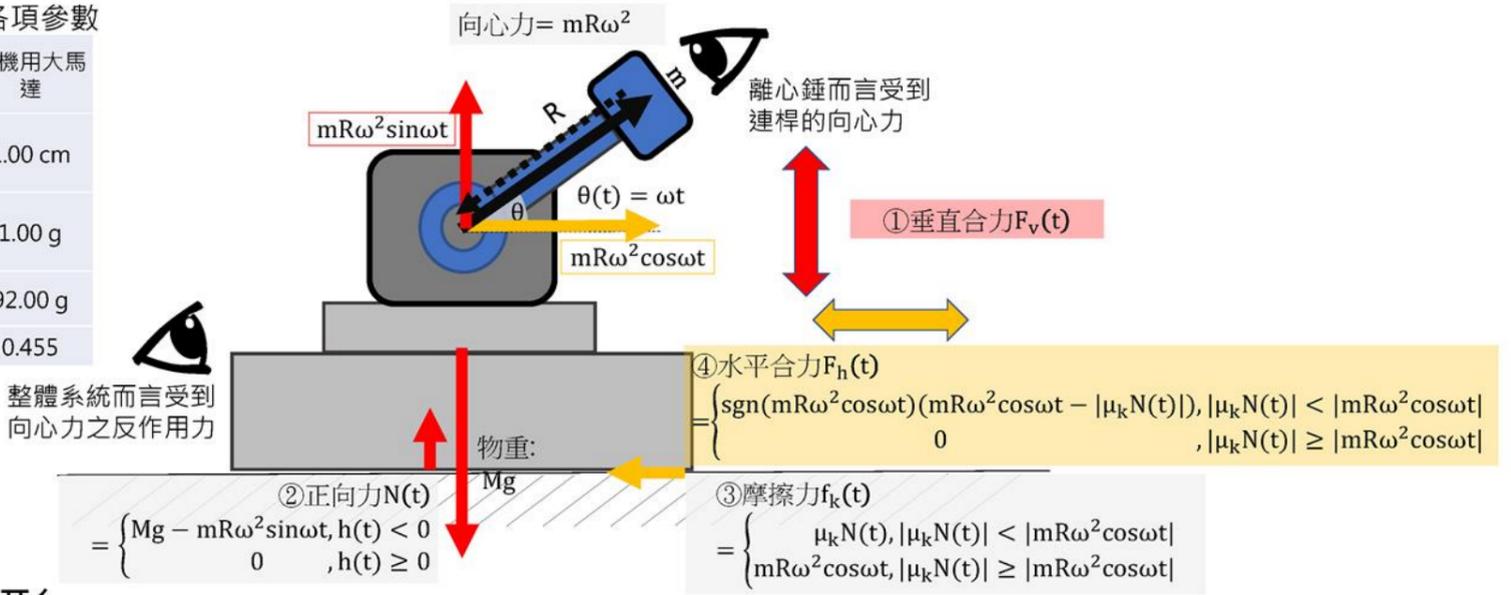
實驗流程圖



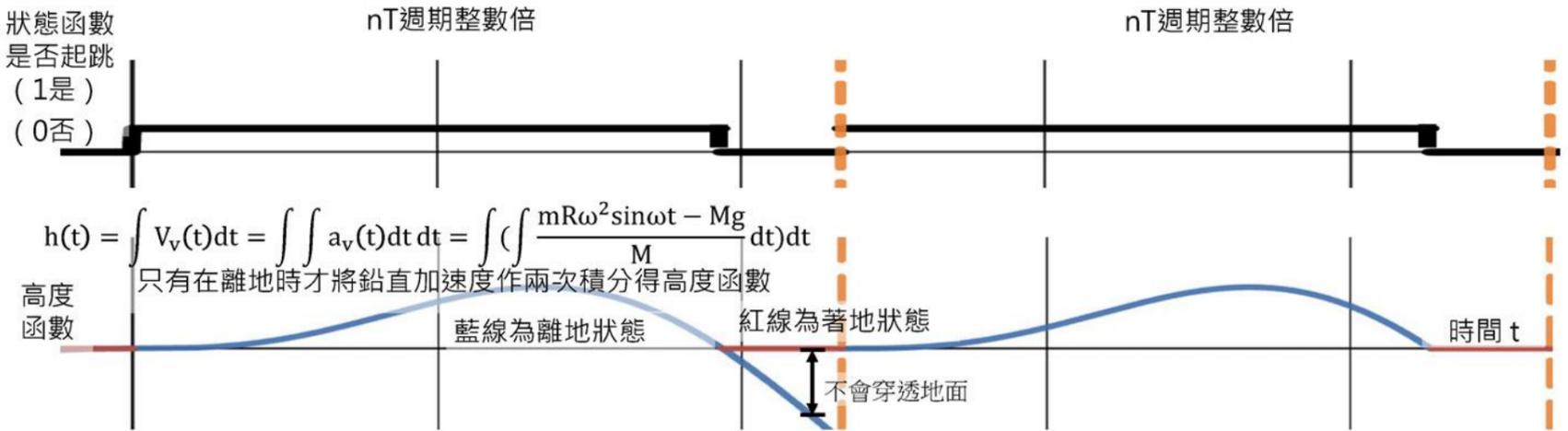
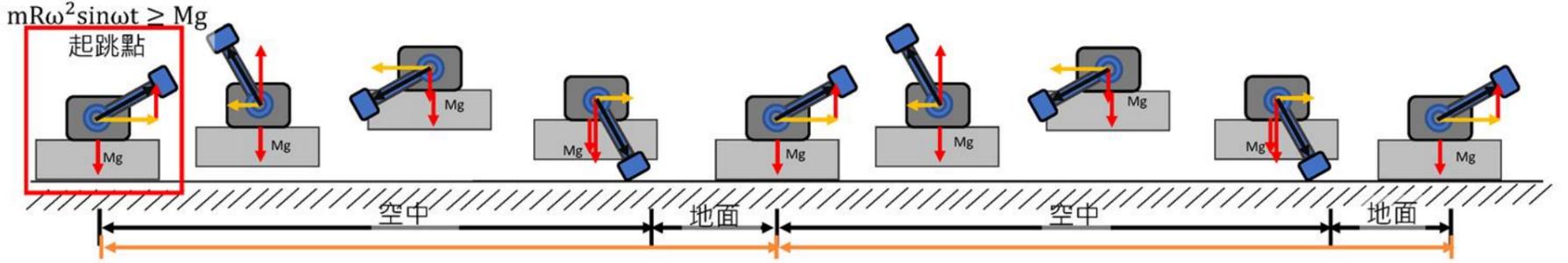
力圖分析

表1. 旋轉振動體的各项參數

	飛機用大馬達
離心錘半徑 R	1.00 cm
離心錘質量 m	1.00 g
總質量 M	92.00 g
界面摩擦係數 μ_k	0.455



垂直運動情形



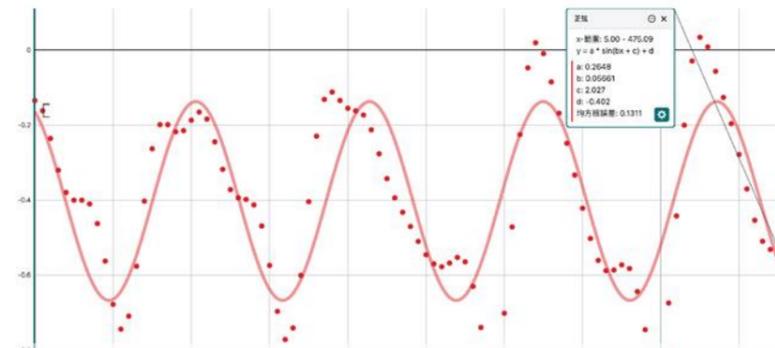
上圖是馬達各時段的運動狀態。 中圖為狀態函數，1為在空中，0為在地面

下圖為高度函數是鉛直加速度對時間的兩次積分，僅需對在空中的運動狀態做區段積分。

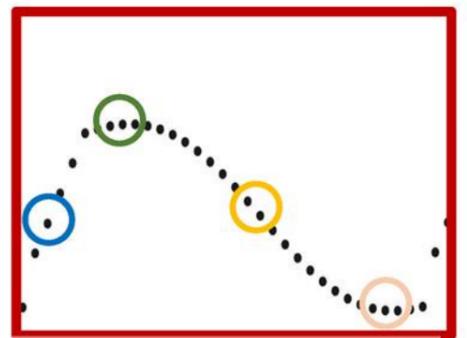
加速規測量垂直加速度



利用 Graphical 進行正弦函數擬合，實驗函數不完全符合正弦



利用 Graphical 進行正弦函數擬合，實驗函數不完全符合正弦關係，時間單位是毫秒，擬合出的頻率為 8.9 Hz，實際閃頻法測得頻率為 8 Hz。

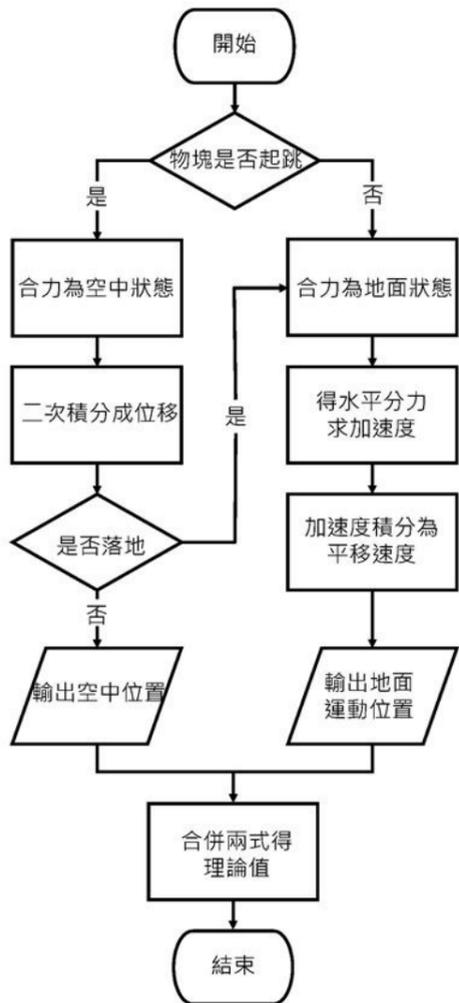


離心錘向上，底座壓縮少

離心錘向右，底座中等壓縮

離心錘向左，底座中等壓縮

離心錘向下，底座壓縮大



加速規測量之結果與一個鋸齒波和正弦波的疊加相近。

