中華民國第 63 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

050416

圓形畢露:--利用「cyclos」得到常見基本幾何作圖結果之探討

學校名稱：桃園市立武陵高級中等學校

作者：	指導老師：
高二 李家勝 高二 廖芯洋 高二 邱昱睿	蔡森任

關鍵詞：五心、平面幾何

摘要

本作品主要研究一種作圖工具「cyclos」，其規則如下：在平面上，可以以兩點距離為直徑作過此兩點的圓、以不共線三點作圓或在圓上標點。我們盡量避免了使用解析的方法。我們使用了這個工具證明了原題，並進一步作出兩點之中點、三點作三角形之五心以及其他的相關結構的作法。且利用精準繪出長度的方式，導出$a\overline{AB}$，$a\epsilon\{\alpha_0+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\sqrt{i+1}\,|\alpha_0、\alpha_i\epsilon Q,\alpha_i\neq 0\ for\ finitely\ many\}$並給出詳細證明。

壹、研究動機

在為了準備數學競賽而刷題的過程中，我們看到了原題，本題來源於 2023 年 INMO(India National Mathematical Olympiad;印度數學奧林匹亞)的第六題(見[1])：證明給定兩已知點，可以只利用工具「cyclos」作出以其中一點為圓心並通過另一點的圓。我們後來決定延伸探討透過「cyclos」去找外心、內心、重心、九點圓圓心、垂心等基本的心及相關結構，並嘗試了解其作圖的方法。

貳、研究目的

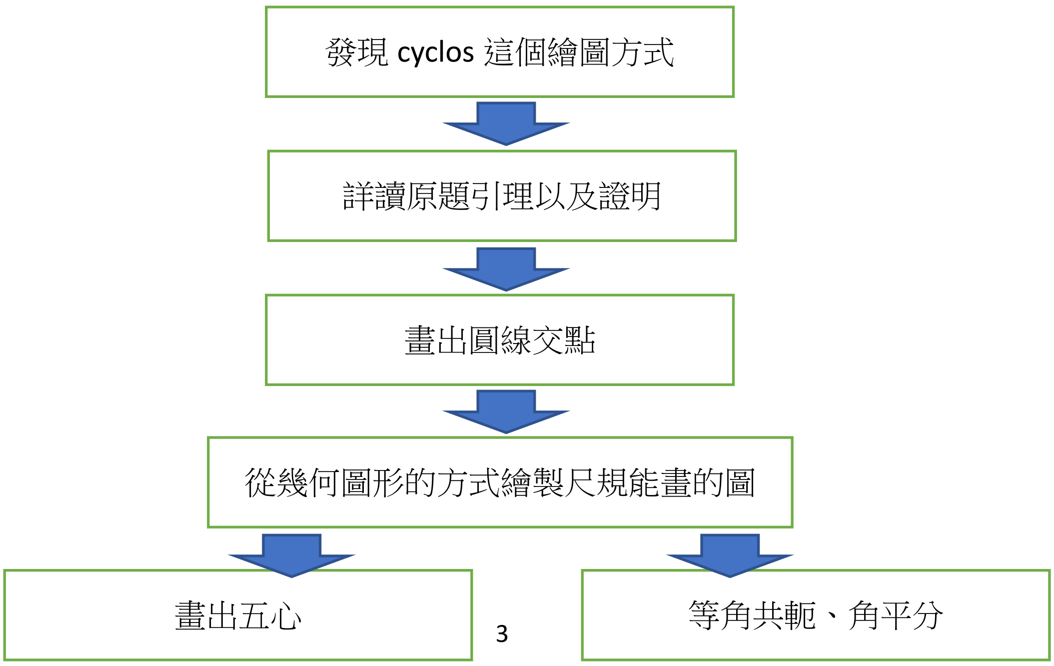
一、利用工具「cyclos」，求出五心以及其他的相關結構的作法。

參、研究設備及器材

紙筆、Geogebra(見[6])。

肆、研究過程及方法

一、研究流程圖



以長度的方式切入

證明出 cyclos 精準畫出長度

二、名詞定義與解釋

（一）cyclos：(見[1])

有一個工具「cyclos」，只允許我們做以下三件事：

I. 給定三個不共線的點 A、B、C，可以作通過此三點的圓，記為(ABC)。

II. 給定兩點 A 和 B，則可以作通過此兩點且以兩點距離為直徑的圓，記為 (AB)

III. 在兩已知圓上標上其交點或在已知圓上標上一個新的點。

（二）反演變換：(見[2])

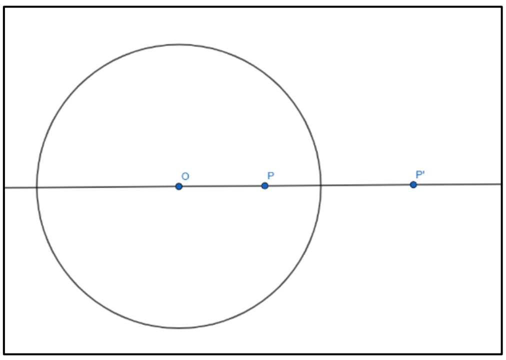
為一種幾何變換，給定平面上一圓 O ，其半徑為 r ，對任意一點 P ，若 P' 在 $\overrightarrow{OP}$ 上滿足 $\overline{OP}\times\overline{OP'}=r^2$，則稱 P' 是 P 關於圓 O 的反演點。(見圖(1))

性質：給定一圖形 F，令 F 上所有點關於 O 的反演點的集合為 F' ，則稱 F' 為 F 的反演像，以下為常見的反演結果：

I. 過 O 的直線 $\rightarrow$ 過 O 的直線

II. 過 O 的圓 $\rightarrow$ 不過 O 的直線

III. 不過 O 的圓 $\rightarrow$ 不過 O 的圓



圖(1) 反演

（三）交比：(見[2])

給定複平面上四點 z_1、z_2、z_3、z_4，則該四點的交比定義為

$$(z_1,z_2;z_3,z_4)=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

性質：給定四點 A,B,C,D，則反演後此四點的交比不變

性質：共線四點 A,B,C,D 滿足 $(A,C;B,D)=-1$ 稱為調和點列

性質：給定共線四點 A,B,C,D 以及不在線上的點 P，則以下四個條件任兩個可以推出其他兩個:

1. $(A,C;B,D)=-1$
2. $\overline{PC}$ 平分 $\angle BPD$（外）
3. $\overline{PA}$ 平分 $\angle BPD$（內）
4. $\overline{PA}\perp\overline{PC}$

性質：給定共圓四點 A,B,C,D 滿足 $(A,C;B,D)=-1$，則該四點稱為調和四邊形，以下為常見的調和四邊形：

ΔABC 中，K 為共軛重心，$\overrightarrow{AK}$與 (ABC) 另一交點 K_A ，則

$A,\ K_A,B,C$為一調和四邊形

性質：若圓 Γ 上的四點 A,B,C,D 為一調和四邊形，則 Γ 在B,C 處切線交在 $\overleftrightarrow{AD}$ 上

（四）位似變換：(見[3])

位似變換是一種幾何變換，由一點 S 和一個非零常數 λ 決定。S 稱為位似中心，而 λ 稱為位似比。位似變換滿足對任意點 M，有

$$M\rightarrow\ S+\lambda\overrightarrow{SM}$$

（五）旋似變換：(見[2])

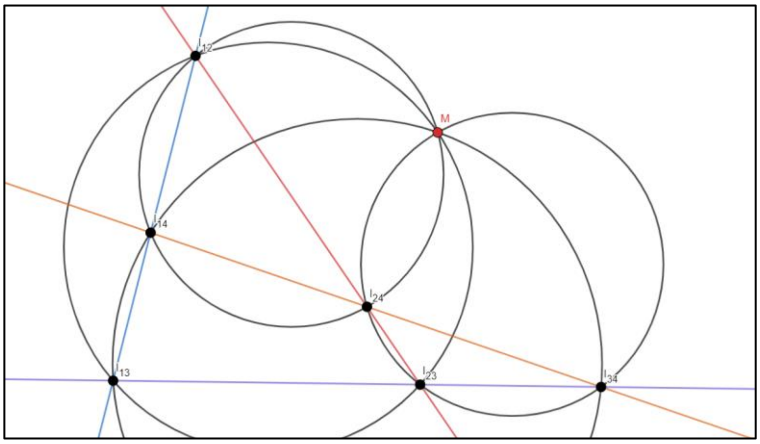
旋轉以及位似變換的合成。

（六）完全四線形的密克點：(見[3])

給定平面上四條線 l_1,l_2,l_3,l_4，令 $l_i\cap l_j=\ l_{ij}$ ，其中 $1\le i<j\le 4$ ，則

$(l_{12}l_{14}l_{24})$、$(l_{12}l_{13}l_{23})$、$(l_{13}l_{14}l_{34})$、$(l_{24}l_{23}l_{34})$ 共於一點 M。

（見圖(2)）



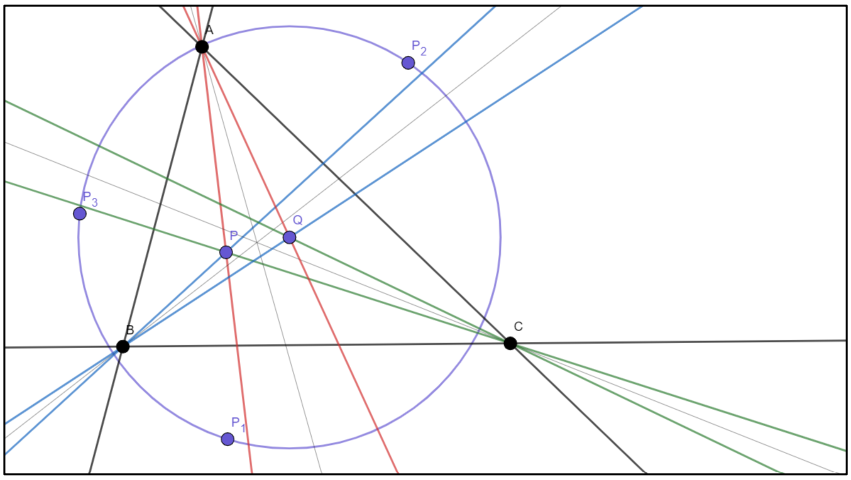
圖(2) 完全四線形的密克點

（七）等角共軛點：(見[2])

平面上，設點 P 是三角形 ABC 平面上且不在三邊上的一點，作直線 $\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 和 $\overline{PC}$ 分別關於角 A、B 和 C 的平分線的反射，這三條反射線必然交於一點 Q，此時稱 Q 為 P 關於三角形 ABC 的等角共軛點。(見圖(3))

性質：令 P_1、P_2、P_3 是 P 關於 ABC 三邊的對稱點，則 Q 為 $(P_1P_2P_3)$的圓心

證明：注意到 A 是 (PP_2P_3) 的圓心且 $\overline{AQ}\perp\overline{P_2P_3}$，故 $\overline{AQ}$ 是 $\overline{P_2P_3}$ 的中垂線，其餘類似，從而得證



圖(3) 等角共軛點

（八）對徑點：

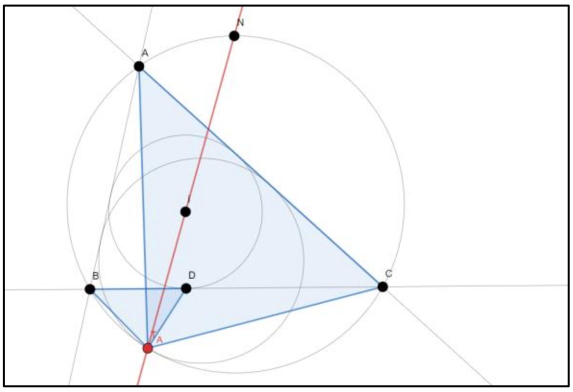
圓 O 上一點 A 關於 O 的對稱點稱為 A 在 O 上的對徑點

（九）偽內切圓：(見[4])

$\triangle$ABC 中，存在一圓使得該圓在 (ABC) 內且與 (ABC)、$\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 相切(令其為 ω_A)，稱 ω_A 為 $A-$偽內切圓，類似的有 ω_B、ω_C，令 T_A、T_B、T_C 分別為該三圓與 (ABC) 之切點

性質：ΔABC 中，令 N 為弧 BAC 的中點，I 為內心，D 為內切圓與 $\overline{BC}$ 切點，則(見圖(4))

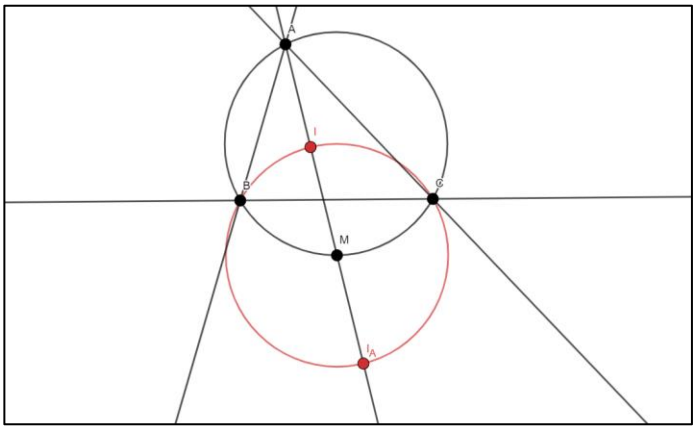
1. T_A、I、N 共線
2. $\triangle\, T_ABD$ 相似 $\triangle\, T_AAC$



圖(4)

（十）雞爪定理：(見[5])

ΔABC 中，令 M 為弧 BC (不含 A)的中點，I 為內心，I_A 為 A－旁心，則 B、I、C、I_A 四點共圓(見圖(5))



圖(5)

（十一） 九點圓：

三角形ΔABC中，其三邊的中點、三高的垂足、頂點到垂心的三條線段的中點共圓，並稱該圓為九點圓。

性質:九點圓圓心在歐拉線上，且是垂心與外心的中點。

（十二） 旁心：

ΔABC中，一角之內角平分線和另外兩個角的外角平分線的交點稱為該點所對之旁心。

性質:三角形ΔABC中，設內心為I，A－旁心為I_A，則I、I_A關於$\overline{BC}$的垂足關於$\overline{BC}$中點對稱。

（十三）cyclos 數：

定義 cyclos 數為能用正整數和加減乘除以及根號表示之數。

三、研究內容

（一）原題(見[1])

敘述：給定兩點 A、B，可以作以 A 為圓心、$\overline{AB}$ 為半徑的圓。

證明：(引理證明見附錄)

引理 1-1：給定不共線三點A、B、C，則可繪出ΔABC的九點圓。

引理 1-2：給定兩點A、B，則可繪出$\overline{AB}$的中點。

引理 1-3：給定每三點皆不共線之四點A、B、C、D，則可以繪出$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$。

引理 1-4：給定不共線三點A、B、C，則可繪出ΔABC的外心。

引理 1-5：給定一圓Γ，圓上一點A，則可做B使得$\overline{AB}$為Γ的切線。

引理 1-6：給定一圓Γ，圓上一點A，一點B不在Γ上，則可做$C = \overleftrightarrow{AB} \in \Gamma \neq A$。

引理 1-7：給定不共線三點A、B、C，則可繪出A對$\overleftrightarrow{BC}$的對稱點A'。

引理 1-8：給定兩點A、B，則可做出A對B的對稱點A'。

所以半徑圓可作。(以下定義$(A, \overline{BC})$為以 A 為圓心$\overline{BC}$為半徑的圓)

（二）圓線交點

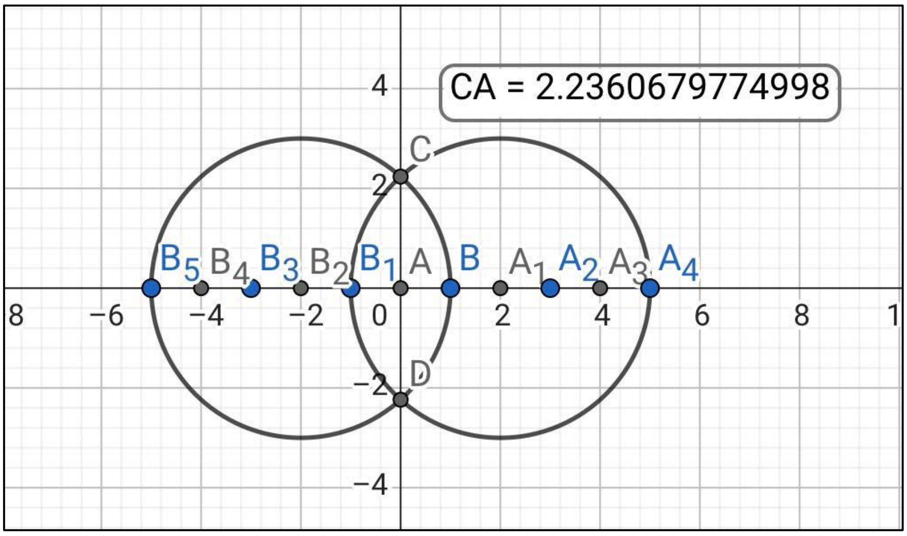
敘述：給定一圓Γ，其圓心為A及給定B、C兩點，若Γ和$\overline{BC}$有交點則可以標出其交點。

引理 2-1：已知兩點 A、B，可做C使得$\overline{CA} \perp \overline{AB}$，$\overline{AC} = \sqrt{n} \times \overline{AB}$，$\mathrm{n} \in \mathrm{N}$。

證明：

如果$n > 1$，一直往右做對稱使得$\overline{AB} = \overline{A_1B} = \overline{A_2A_1} = \cdots = \overline{A_{n-2}A_{n-1}}$，如圖所示，左方同理做對稱至$B_n$，再做$(B_1A_{n-1}) \cap (B_nB)$於$C$、$D$兩點即為所求。

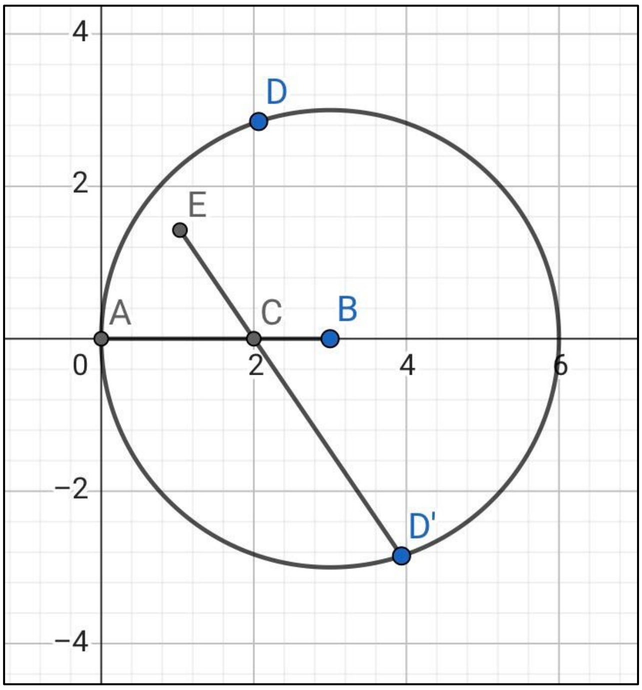
如果$n = 1$，由上可知$n = 4$成立，即$\overline{AC} = 2$，作$\overline{AC}$中點即為所求。(見圖(6))



圖(6)，以$n=5$為例子

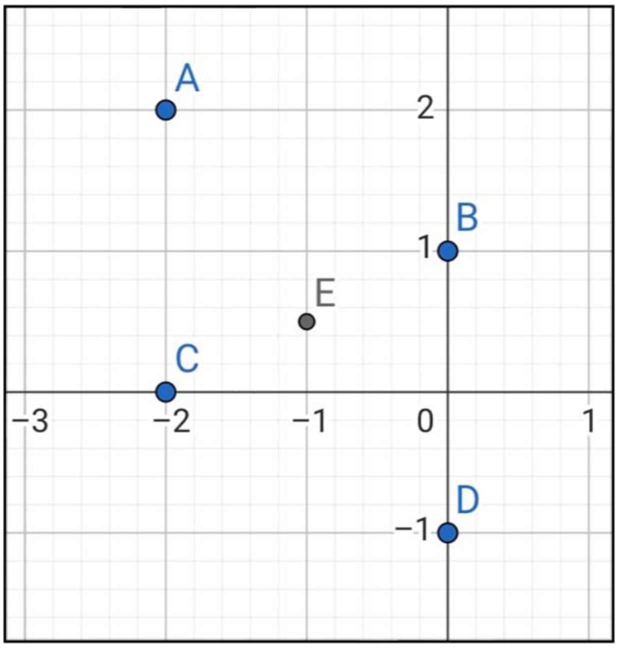
引理 2-2：給定A、B兩點，則可以做C使得 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CB}$

證明：以B為圓心，$\overline{AB}$為半徑畫圓，令此圓為Γ，在Γ上取三點，其中不和$\overline{AB}$共線的點稱為D，根據引理 1-8 做D對B對稱D'，再根據引理 1-2 做D、A中點E，根據引理 1-3 做$\overline{D'E}$交$\overline{AB}$於C，因為C是$\Delta ADD'$的重心，所以$\overline{AC}$:$\overline{CB}=2$: 1，C點即為所求。(見圖(7))



圖(7)

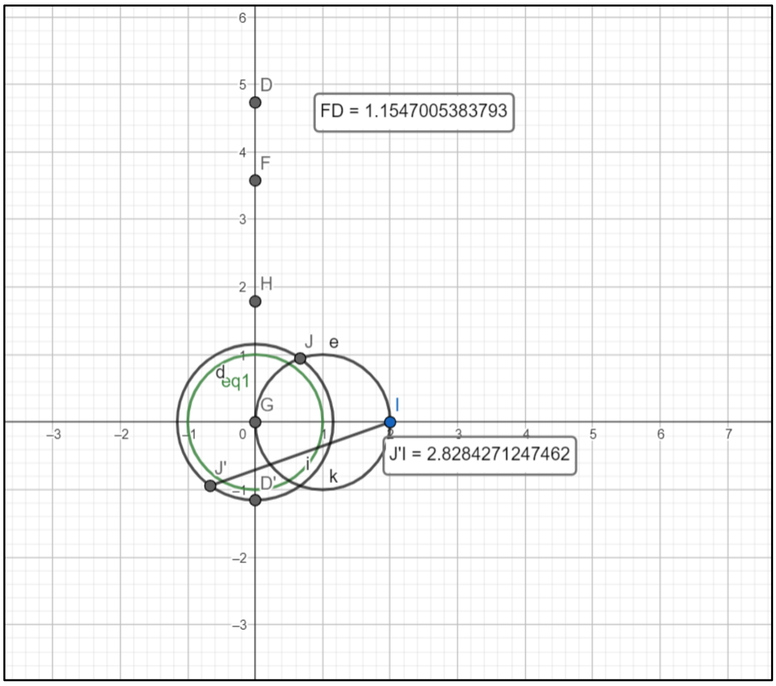
引理 2-3：給定不共線A、B、C三點，則可以畫出D使得$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$
證明：根據引理 1-2 做出$\overline{BC}$的中點E再根據引理 1-8 做A對E的對稱點D即為所求。(見圖(8))



圖(8)

引理 2-4：給定一圓C，圓心為A，半徑為q，及一點異於圓心的點B，線段$\overline{AB}=p$，則可以做出一段線段長度為$\sqrt{p^2+4q^2}$，其中$\mathrm{p}>\frac{4}{3}q$。

證明：在圓C上取一點，根據引理 2-1，向外做對稱以畫出$\sqrt{12}q$，再利用引理 2-2 畫出$\overline{FD}=\frac{\sqrt{12}}{3}q$，再利用引理 2-3 將此線段的一段移至$A$點，若另一端為$X$，以$\overline{AX}$為半徑，$A$為圓心畫圓，交$(AI)$於$J$，根據引理 1-8，做$J$對$A$之對稱點$J'$，$\overline{IJ'}$即為所求。(見圖(9))

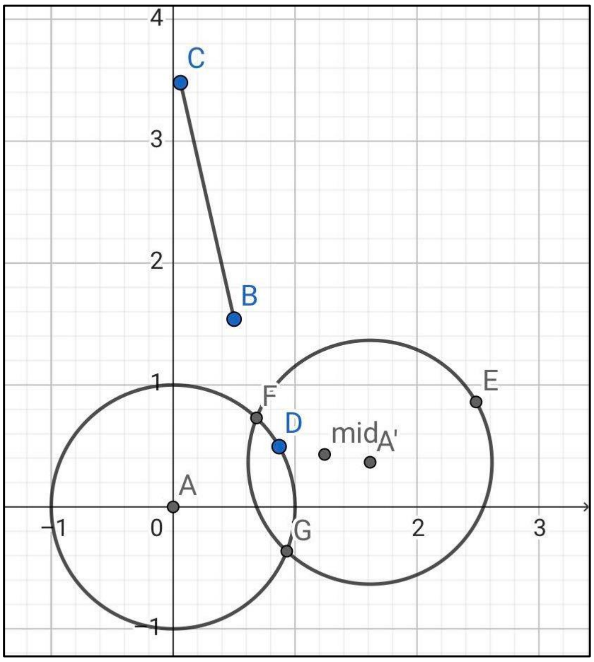


圖(9)

回到原題，我們給出證明。

情況一：A、B、C不共線

則根據引理 1-7 可以做出A對$\overline{BC}$的對稱點A'，並在圓上標一點D，再以引理 2-3，做$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'E}$，以$A'$為圓心$\overline{A'E}$為半徑畫圓交$\Gamma$於$F$、$G$即為所求。(見圖(10))

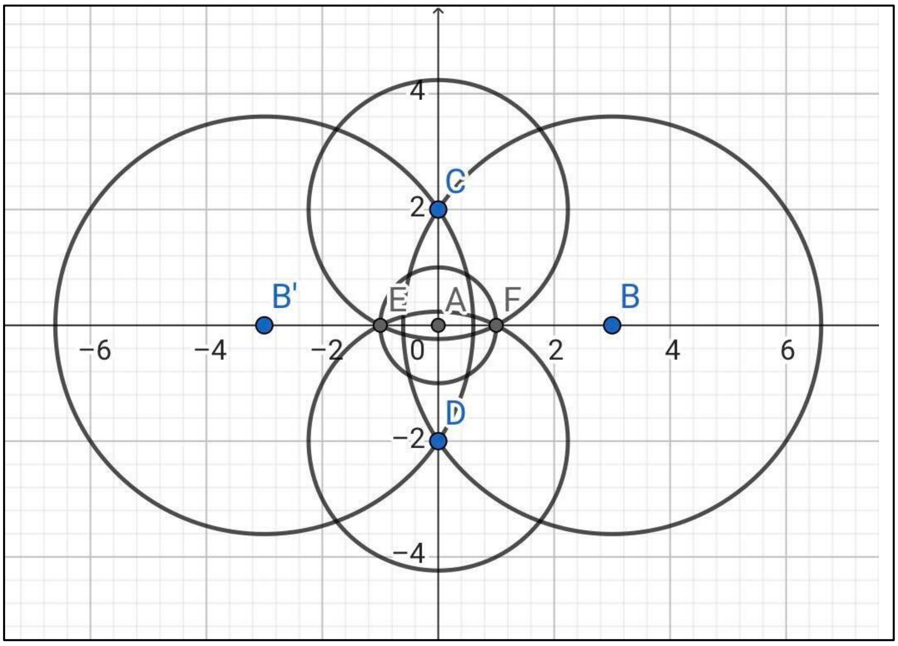


圖(10)

情況二：若A、B、C共線（此時忽略C點）

證明一：依據引理 1-8 做B對A的對稱點B'，然後依據引理 2-4 做出該線段$\sqrt{p^2+4q^2}$，再以引理 2-3 將該線段移至B、B'點並以它為半徑，分別以B、B'為圓心畫圓交於C、D並以引理 2-1 畫出$\sqrt{5q}$並以引理 2-3 移至C、D兩點，

以$\sqrt{5q}$為半徑，C、D兩點為圓心畫圓交於E、F即所求。(見圖(11))



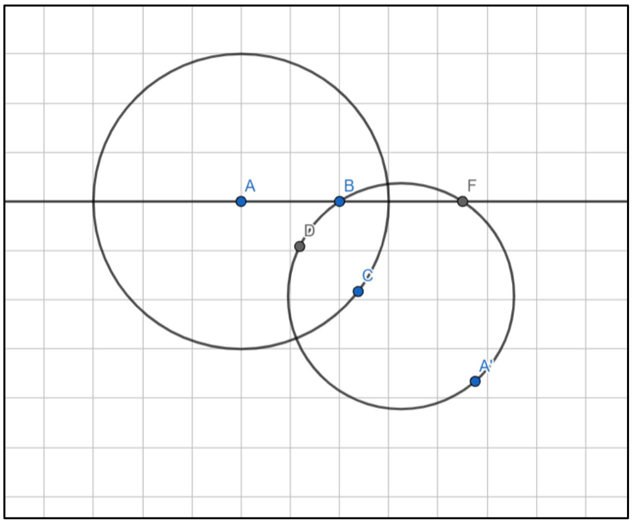
圖(11)

證明二：

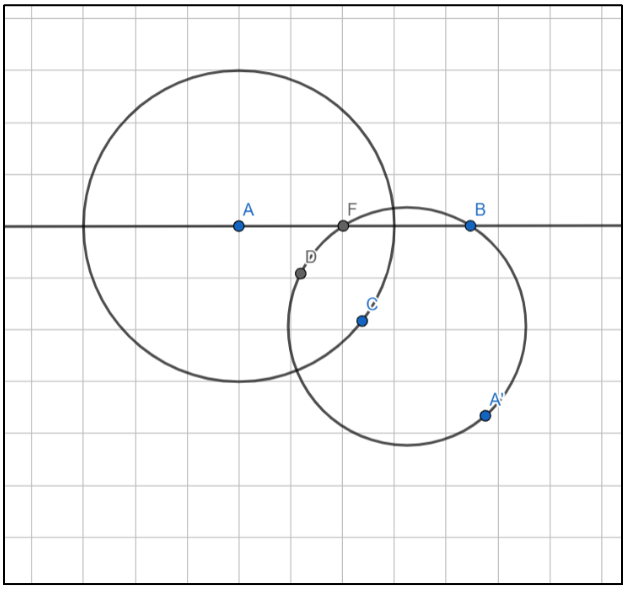
引理 2-5：有一圓Γ其圓心A，一任意點B，則可以做出F使得F為B對Γ的反演點。

證明：圓A上任取 3 點（避免取到$\overline{AB}$上的點)，令不和$\overline{AB}$共線的點為C，$\overline{AC}$中點為D，A對C對稱為A'，做$(DA'B)$，依據圓線交點情況一，做$F=(DA'B)$交$\overline{AB}$即所求。

因為$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{AD}\times\overline{AE}=r^2$，即證之。(見圖(12)、圖(13))

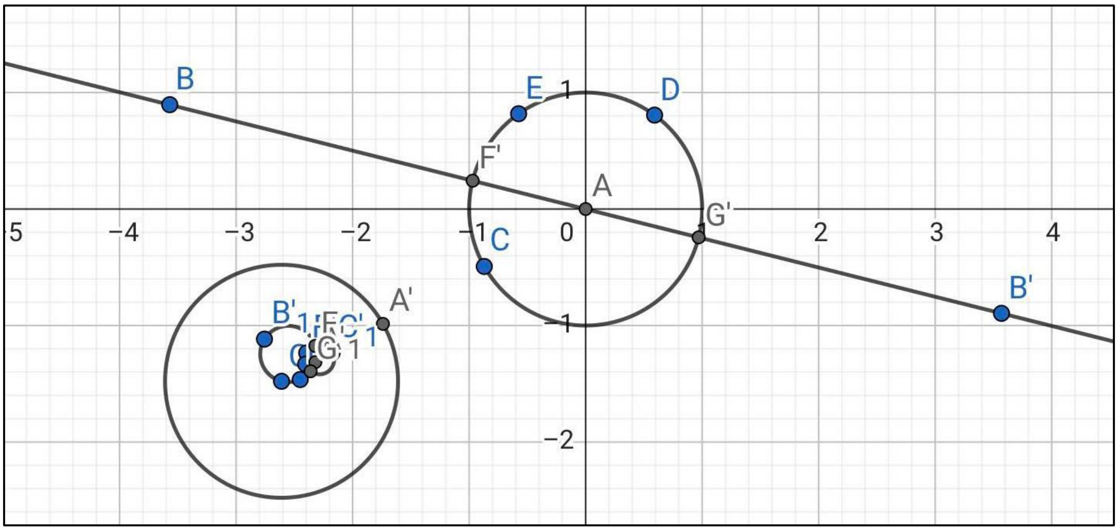


圖(12)



圖(13)

回到原題，在Γ上取三點，不和$\overline{AB}$共線的點稱為C，根據引理 1-8，做A對C的對稱點A'，C對A'做對稱點C'，以C'為圓心，$\overline{C'A'}$為半徑畫圓Γ'（也就是做一個圓心不在直線$\overline{AB}$的圓），將A、B、B'做Γ'的反演的三點做三點圓Γ_1，再取圓Γ上三個點做Γ'的反演的三點做三點圓Γ_2，$\Gamma_1\Gamma_2$交於F、G，將F、G做對圓Γ'的反演點F'、G'，根據反演的性質，F'、G'即為所求。(見圖(14))



圖(14)

（三）以基本圖形切入

1. 內心

敘述：給定三點A、B、C，可以作ΔABC之內心。(其中O為ΔABC的外心)

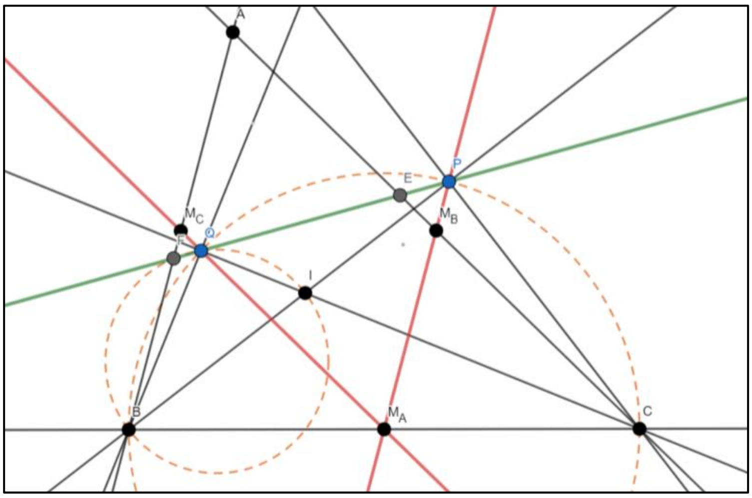
證明：

引理 3-1:給定ΔABC，其三邊中點為M_A、M_B、M_C；內心I、P、$Q \in \overline{BI}$、$\overline{CI}$使得$\overline{CP} \perp \overline{BI}, \overline{BQ} \perp \overline{CI}$，則$\overleftrightarrow{PQ}$即為$\overleftrightarrow{EF}$，並且$Q$，$P$分別在$\overline{M_A M_B}$、$\overline{M_A M_C}$上。

證明 3-1：由B、Q、P、C在圓$(M_A, \overline{M_A B})$上，有$\angle QM_AB = 2\angle ICB = \angle ABC = \angle M_C M_A B$，從而$M_A$、$Q$、$M_C$共線，同理有$M_A$、$P$、$M_B$共線，得證。(見圖(15))

2. 由I、Q、F、B共圓和B、Q、P、C共圓，有$\angle FQI = 180^{\circ} - \angle IBF = 180^{\circ} - \angle CBP = 180^{\circ} - \angle IQP$，

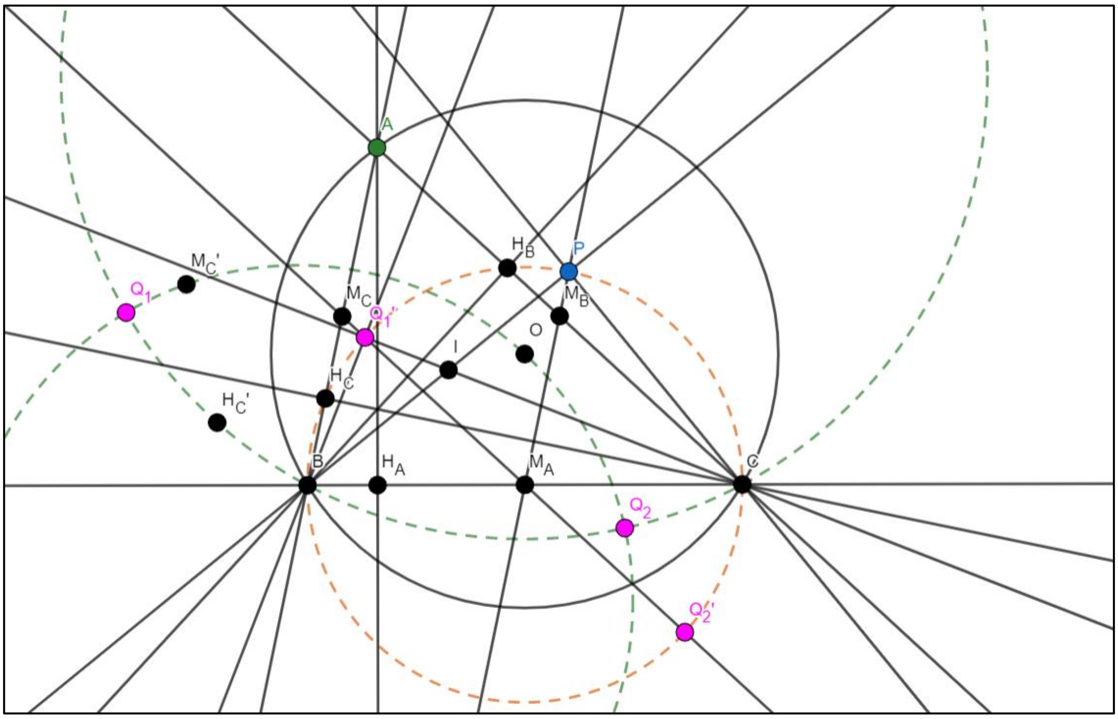
從而F、Q、P共線，同理有E、Q、P共線，得證。



圖(15)

（以下定義X^*為X的反演點）

回到原題，令H_a、H_b、H_c為A、B、C至對邊的垂足，則B、C、H_b、H_c共圓（因為$\angle BH_bC$=$\angle BH_cC$=90^o），且P、$Q \in$ (B、C、H_b、H_c)（因為$\angle BPC$=$\angle BQC$=90^o），由引理 2-5 可做$\overline{MaMc}$對(ABC)的反演$\Gamma =$ $(OMa^*\ Mc^*)$（做M_a、M_c的中點後這三個點做反演）和(B、C、H_b、H_c)對(ABC)的反演$\boldsymbol{\tau}$($BCH_b^*H_c^*$)，令Q_1、Q_2為$\Gamma \cap \tau$ ，做Q_1^*、Q_2^*，由引理 3-1Q_1^*、Q_2^*中必有一個在$\overline{CI}$上，取該點後同理可做（引理 3-1）P，又$\overleftrightarrow{PQ}$即為$\overleftrightarrow{EF}$，根據引理 1-3 可以做出$\overleftrightarrow{EF} \cap \overline{AB}$、$\overline{AC}$，同理做出其他邊在引理 1-4 畫出這三點外心即為所求。



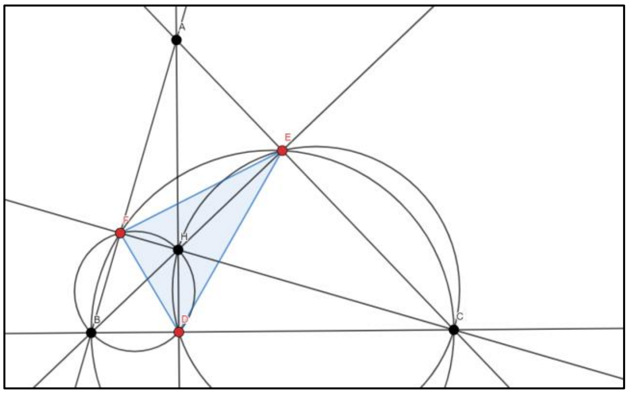
圖(16)

2. 垂心

敘述：給定三點A、B、C，可以作ΔABC之垂心。

引理 3-2：給定三點A、B、C，ΔABC的垂心是其三垂足構成之三角形的內心。

證明：$\because FHDB$、$DHEC$、$FECB$共圓$\therefore \angle FDH = \angle FBH = \angle FBE = \angle FCE = \angle HCE = \angle HDE$，可知$\overline{DH}$平分$\angle FDE$，其他同理，故$H$是$\Delta DEF$的內心。（見圖(17)）



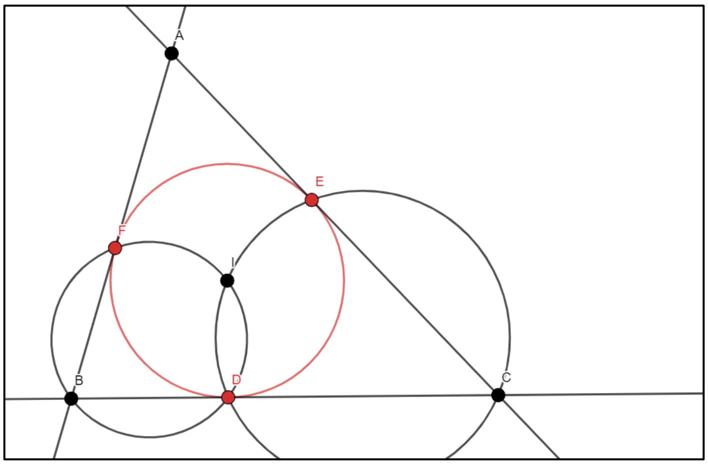
圖(17)

回到原題，畫出$D = (AB) \cap (AC) \neq A$、$E = (AB) \cap (BC) \neq B$、$F = (BC) \cap (AC) \neq C$，由第一個證明畫出$\Delta DEF$之內心即可證之。

3. 內切圓

敘述：給定三點A、B、C，可以作ΔABC之內切圓。

證明一：令$D = (IB) \cap (IC) \neq I$，類似的，也可作出$E$、$F$，作$DEF$外接圓即為$\Delta ABC$之內切圓。(見圖(18))



圖(18)

證明二：(見圖(19))

令M、N是弧BC、弧BAC的中點，T_A 是 $A-$偽內切圓切點

引理 3-3：ΔABC中，$\Gamma = (ABC)$，令$S = (AI) \cap \Gamma \neq A$，則$D \in (SIT_A) \cap \overline{BC}$

證明：

引理 3-4：令DEF為ΔABC與其內切圓的三個切點，$P \in \overline{EF}$使得$\overline{DP} \perp \overline{EF}$，則$I$、$P$、$S$共線。

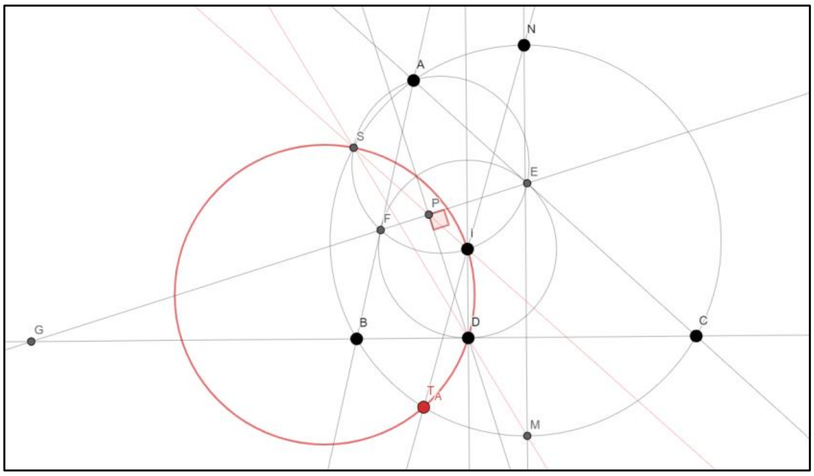
證明 3-4：對內切圓反演，則$\Gamma \rightarrow \Delta DEF$的九點圓，令此圓為$\omega$，而$A \rightarrow \overline{EF}$中點，故$S$為$\omega$、$EF$交點(非中點)即$P$。

引理 3-5：$\overline{DP}$平分$\angle BPC$

證明：令$G = \overline{EF} \cap \overline{BC}$，則$(G, D; B, C) = -1$且$\overline{GP} \perp \overline{PD}$，由調和性質可知$\overline{DP}$平分$\angle BPC$

故$\Delta BFP \sim \Delta CEP$，可知$\frac{\overline{FP}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$（式一）

回到原題，考慮旋似變換$R：(AI) \rightarrow (ABC)$，則由式一，$\Delta SEF \cup \{P\} \sim \Delta SBC \cup \{D\}$，但$S$、$P$、$I$共線，故$S$、$D$、$M$共線，則由$\overline{ID} \parallel \overline{MN}$可知$\angle SDI = \angle SMN = \angle ST_AI$，即$S$、$I$、$D$、$T_A$共圓。

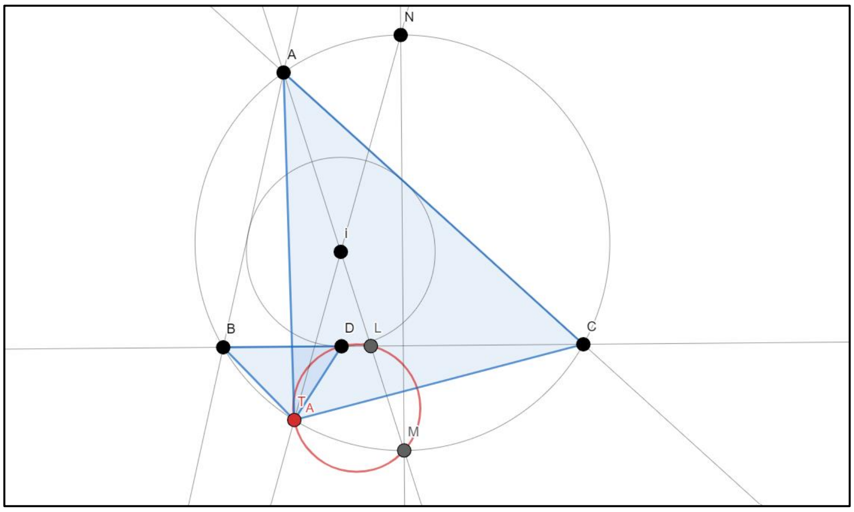


圖(19)

4. 角平分線交點

敘述：給定三點A、B、C，可以作$\angle BAC$平分線和$\overline{BC}$的交點L

證明：令M是弧BC（不含A)的中點則由$\Delta BT_AD \sim \Delta AT_AC$，可知$\angle BDT_A = \angle ACT_A = \angle LMT_A$，即$D$、$L$、$M$、$T_A$共圓。(見圖(20))

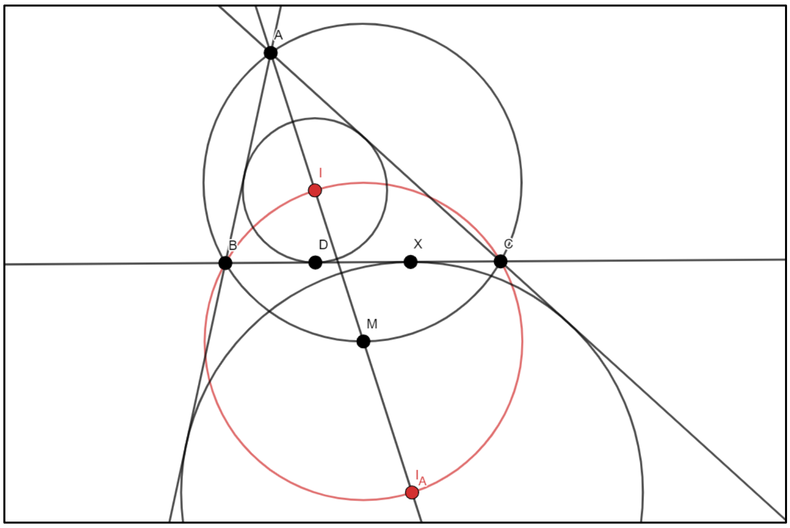


圖(20)

5. 旁心、旁切圓

敘述：給定三點A、B、C，可以作ΔABC之旁心、旁切圓。

證明：作I關於M的對稱點即旁心 I_A(由雞爪定理)，作D關於BC中點對稱點X，則$\overline{BD}=\overline{CX}$且此時易知$X$為旁切圓和$BC$切點，故旁切圓為以 I_A 為圓心，I_A 與X的距離為半徑的圓。(見圖(21))



圖(21)

6. 等角共軛點

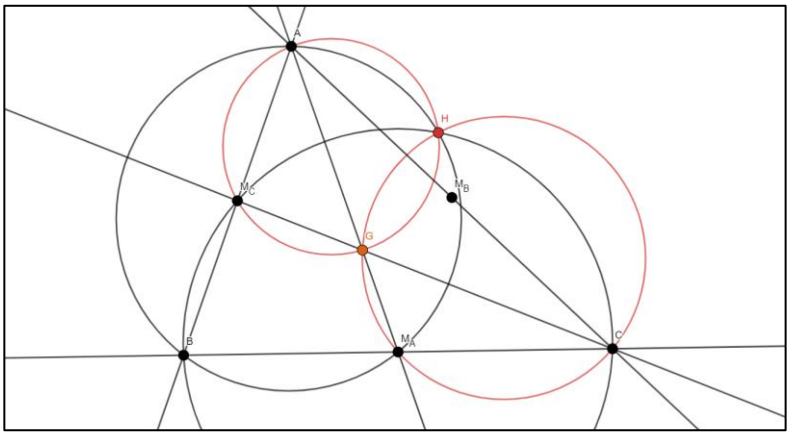
敘述：給定ΔABC、一點P，則可以做P的等角共軛點Q。

證明：作P關於$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$的對稱點P_1、P_2、P_3，則Q是圓$P_1P_2P_3$的圓心。

7. 重心

證明一：

由於可做ΔABC三邊中點M_A、M_B、M_C，現考慮完全四線形$\{\overline{AB},\overline{BC},\overline{AM_A},\overline{CM_C}\}$，考慮$M=(ABM_A)\cap(BCM_C)$，則$M$是該完全四線形之密克點，又顯然$G=\overline{AM_A}\cap\overline{CM_C}$，故做$G=(MAM_C)\cap(MCM_A)$即為所求(見圖(22))



圖(22)

證明二：

宣稱：可作共軛重心K

證明：請看下面的圖形：

引理 3-6：可以做以$\sqrt{\overline{AB}\times\overline{AC}}$為半徑，$A$為圓心的圓

證明：令內心、A所對的旁心分別為I、I_A，I'為I對A做對稱，做(I_AI')並過A做$\overline{I_AI'}$的垂線交(I_AI')於T、T'，由 $\Delta AIB\sim\Delta ACI_A$ 及 $\Delta AI'T\sim\Delta ATI_A$，可得$\overline{AT}^2=\overline{AI'}\times\overline{AI_A}=\overline{AI}\times\overline{AI_A}=\overline{AB}\times\overline{AC}$，故做以$A$為中心，$\overline{AT}$為半徑的圓即為所求。

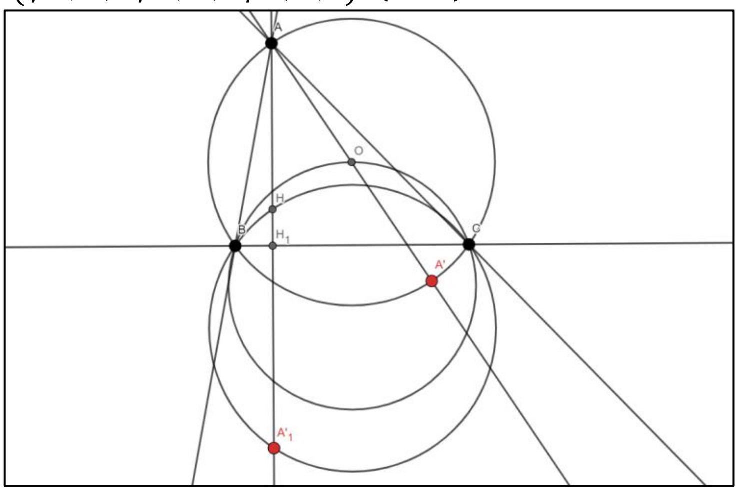
$\mathbb{I}$是以$\sqrt{\overline{AB}\times\overline{AC}}$為半徑$A$為中心的反演變換，而$\mathbb{R}$是以$\angle BAC$的平分線為對稱軸的對稱變換。以下考慮 $\phi=\mathbb{I}\circ\mathbb{R}$

引理 3-7：ϕ ((BOC)) = （BHC）（見圖(23)）

證明：令A關於對徑點A'，因為(O,H)為等角共軛點對

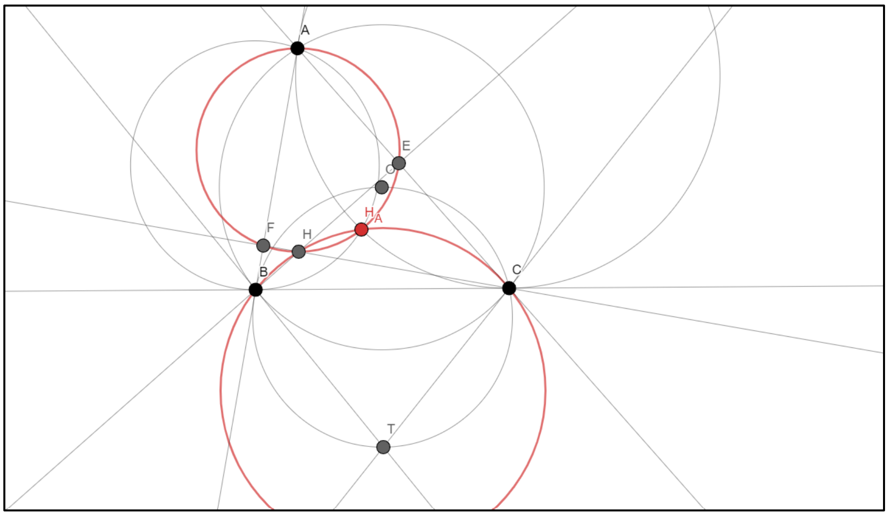
故AO、AH關於$\angle BAC$為等角線而$A'\in$（ABC），於是$\phi(A')\in\overline{AH}\cap\phi(A')\in\overline{BC}$，故令$\overline{AH}\cap\overline{BC}$於$H_1$，則$\phi(A')=H_1$又$O$是$\overline{AA'}$中點，所以$\phi$（$O$）為$A$關於$\overline{BC}$對稱，即$\phi$（$O$）$\in$（$BHC$），故

$\phi\big((BOC)\big)=\big(\phi(B)\,\phi(O)\,\phi(C)\big)=(BHC)$。



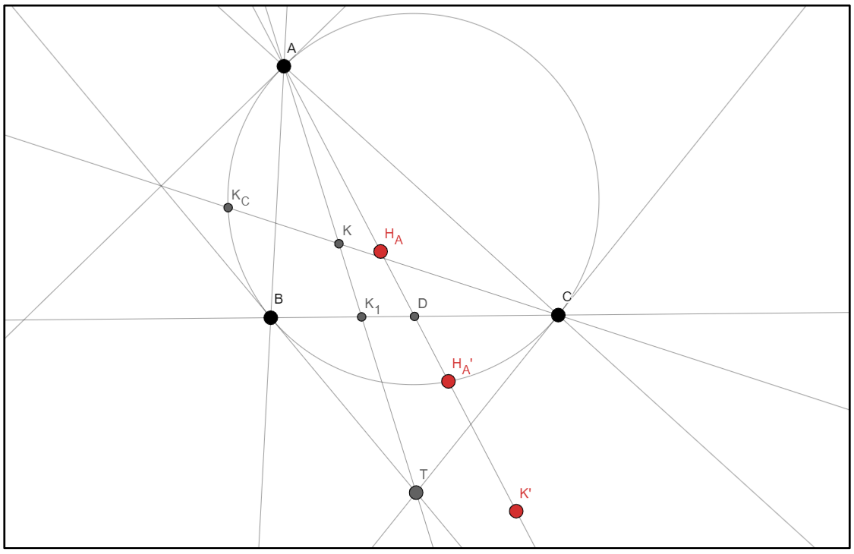
圖(23)

引理 3-8：令C_1、C_2分別是過A且和$\overline{BC}$相切於B、C的圓，令
$H_A = C_1 \cap C_2 \neq A$，則$H_A \in$（$BHC$）$\cap$（$AH$）$\neq H$。(見圖(24))
證明二：考慮變換ϕ，則由H_A之定義易知
$\phi(H_A) = T \in$（BOC），其中 T 為 B、C 在 (ABC) 切線的交點，故由引理 3-7 知$\mathrm{H_A} \in$（BHC），又$\angle H_AHC = \angle H_ABC = \angle H_AAB = \angle H_AAE$，所以
$H_A \in$（AH）。



圖(24)

回到原題，令 $\overline{CK}$ 與 (ABC) 另一交點為 K_C，$\overline{AK}$ 交 $\overline{BC}$ 於 K_1，D 為 $\overline{BC}$ 中點，$\overline{AD}$ 與 (ABC) 另一交點為 $H_A{}'$，由於 CK_CAB 是 (ABC) 上的調和四邊形，故
-1=$(C,K_C;A,B) =$（$\overline{CC} \cap \overline{AK}, \overline{CK_C} \cap \overline{AK}; \overline{CA} \cap \overline{AK}, \overline{CB} \cap \overline{AK}$）=$(T,K;A,K_1)$
(其中 $\overline{CC}$ 為 (ABC) 在 C 處切線)又反演有保交比之性質故
-1=$(T,K;A,K_1) = (\phi(T),\phi(K);\phi(A),\phi(K_1)) = \left(H_A,\phi\text{（}K\text{）};\infty_{AM},H_A{}'\right)$，
於是$H_A\,H_A'$= $H_A'\phi(K)$，而由於可作H，故可作
$H_A = (BHC) \cap (AH) \neq H$，又因$H_A \in (BHC)$且$H_A' \in (ABC)$，於是
H_A' 為H_A關於 D 之對稱，從而 H_A' 可做，故ϕ（K）可做（即H_A關於 H_A' 之對稱點)，最後由引理 1-7 且可做線外一點關於一線之對稱點，所以K可做，接著做等角共軛點即可得G。(見圖(25))



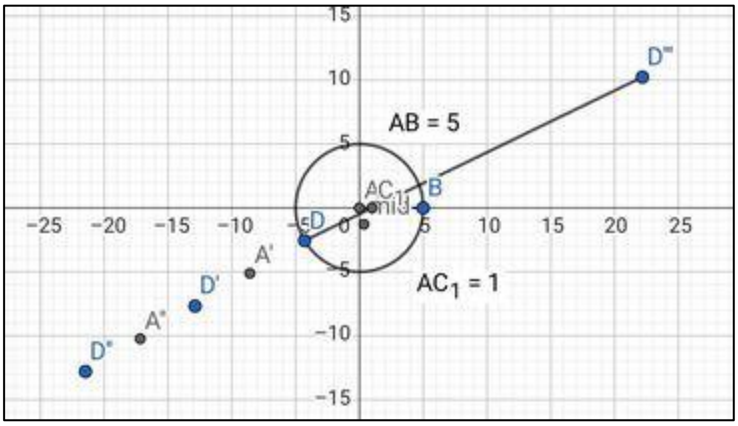
圖(25)

(四)繪製$Q_1+Q_2\sqrt{Q_3}$ (Q_1、Q_2、$Q_3\in Q$)

敘述：給定A、B兩點，則可以作出長度為$a\overline{AB}$，$a\epsilon\{\alpha_0+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\sqrt{i+1}\,|\alpha_0$、$\alpha_i\epsilon Q,\alpha_i\neq 0\ for\ finitely\ many\ "i"s\}$

引理 4-1：給定A、B兩點，則可做C使得$n\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$，$n\in N$。

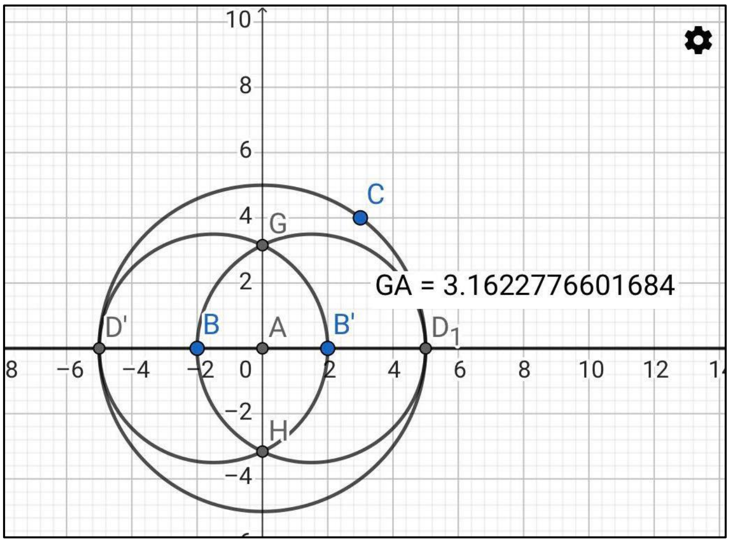
以A為圓心$\overline{AB}$為半徑畫圓，取三點，令不和$\overline{AB}$共線的點為D，依據引理 1-8，一直做A對稱D的點A_1、A_2 ...使得最後一個點為A_n，以引理 2-3 做$\overrightarrow{A_nB}=\overrightarrow{A_1E}$，再以引理 1-3 做$\overline{A_1E}$交$\overline{AB}$於$C$即為所求。(見圖(26))



圖(26)

引理 4-2：給定相異A、B、C三點，則可以做出長度$\sqrt{\overline{AB}}\times\sqrt{\overline{AC}}$。

證明：以A為圓心、$\overline{AC}$為半徑畫圓Γ，依據「圓線交點」畫出D使得D為Γ交直線$\overline{AB}$且不在線段$\overline{AB}$上，做(BC)，作B對A的對稱點B'、D對A的對稱點D'，作(BD)、$(B'D')$交於G、H兩點，$\overline{AG}$、$\overline{AH}$即為所求(見圖(27))



圖(27)

回到原題，$a\overline{AB}$，$a\epsilon\{\alpha_0+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\sqrt{i+1}\,|\alpha_0$ 、$\alpha_i\epsilon Q,\alpha_i\neq$
$0\ for\ finitely\ many\ \ "i"s\}$

可以簡化成分母為整數，又每段都可以利用繪出$\sqrt{n}$後根據引理 2-3 相加，故得證。

伍、結論

1. cyclos 能做出許多圖形，包含了九點圓、內切圓、外切圓、半徑圓、重心、角平分線、等角共軛等等。
2. cyclos 能畫出指定長度，也就是cyclos數。

陸、未來展望

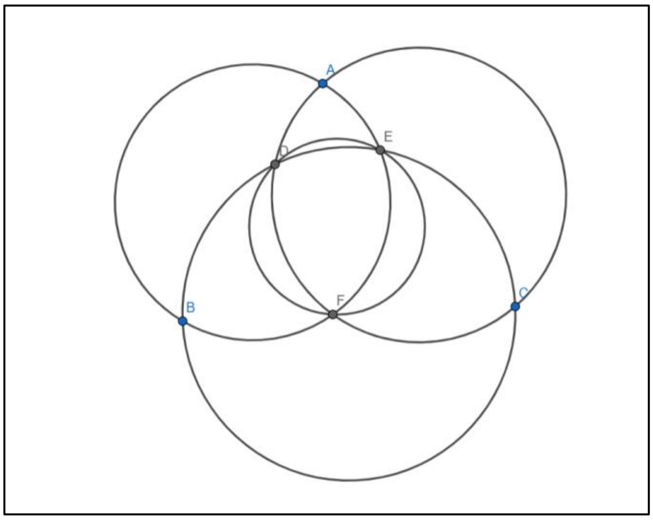
cyclos 經過我們沒日沒夜的研究後，終於做出許多我們滿意的圖形，例如五花八門的圓和三角形的關係、單一角的變化等等，雖然不能自由的用尺讓人有點抓狂，但是最後終於利用時間，繪出很多很多的圖形讓人有一種無法形容的舒暢，也希望以後能做出更多意想不到的圖形。

柒、附錄

一、原題引理證明(見[1])

引理 1-1：給定不共線三點A、B、C，則可繪出ΔABC的九點圓。

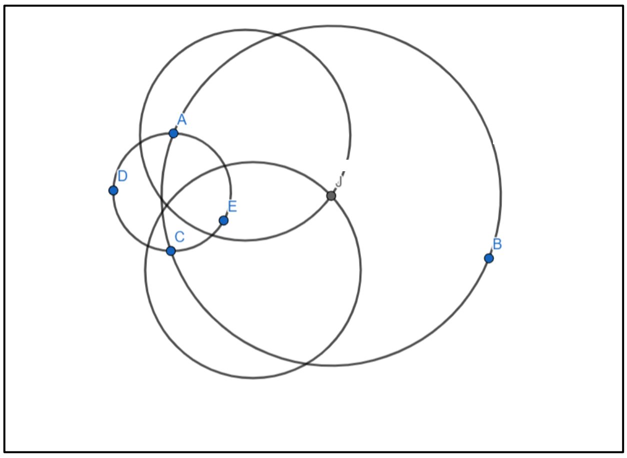
證明 1-1:做(AB)、(AC)，取其異於A的交點E、另外兩邊同理做D、F，因為九點圓通過三邊中垂、做(DEF)即所求(見圖(28))



圖(28)

引理 1-2：給定兩點A、B，則可繪出$\overline{AB}$的中點。

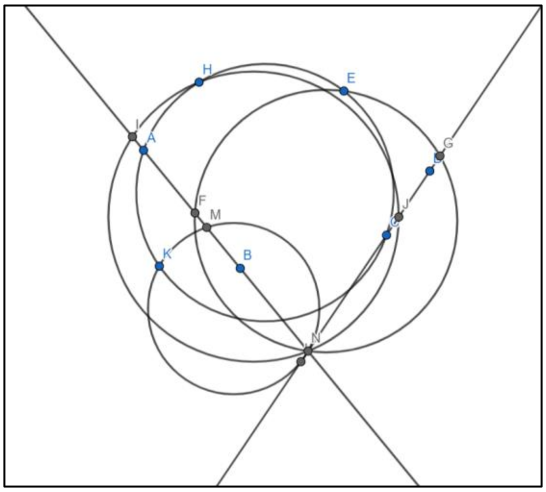
證明 1-2：畫出(AB)，在(AB)上取一點C，再做(BC)，在(BC)上取異於B、C且對$\overline{AB}$垂足不一樣的點為D、E、K，做ΔADB、ΔABE、ΔABK的九點圓交於J即所求(見圖(29))



圖(29)

引理 1-3：給定每三點皆不共線之四點A、B、C、D，則可以繪出$\overleftrightarrow{AB}\cap\overleftrightarrow{CD}$。

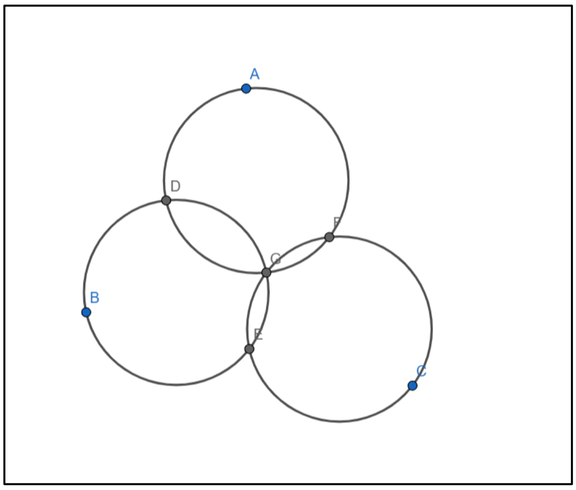
證明 1-3：作(AC)、並取一點(這個點不能在$\overleftrightarrow{AB}$或$\overleftrightarrow{CD}$)上，所以最多會取到五個)然後做這一點對$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$的垂足，做這三點的圓。重複此步驟兩(或三次以避免這三個圓共軸)次，取這三個圓的交點N即所求。(見圖(30))



圖(30)

引理 1-4：給定不共線三點A、B、C，則可繪出ΔABC的外心。

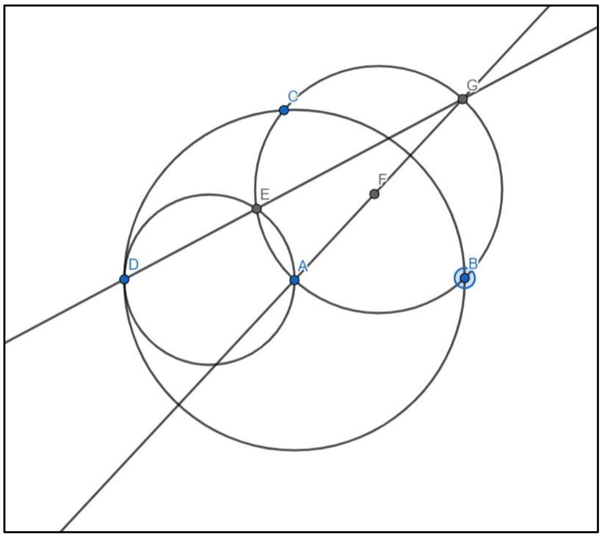
證明 1-4：根據引理 1-2 畫出$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$中點D、E、F，再做(ADF)、(BDE)、(CFE)交點即所求(見圖(31))



圖(31)

引理 1-5：給定一圓Γ，圓上一點B，則可做G使得$\overline{GB}$為Γ的切線。

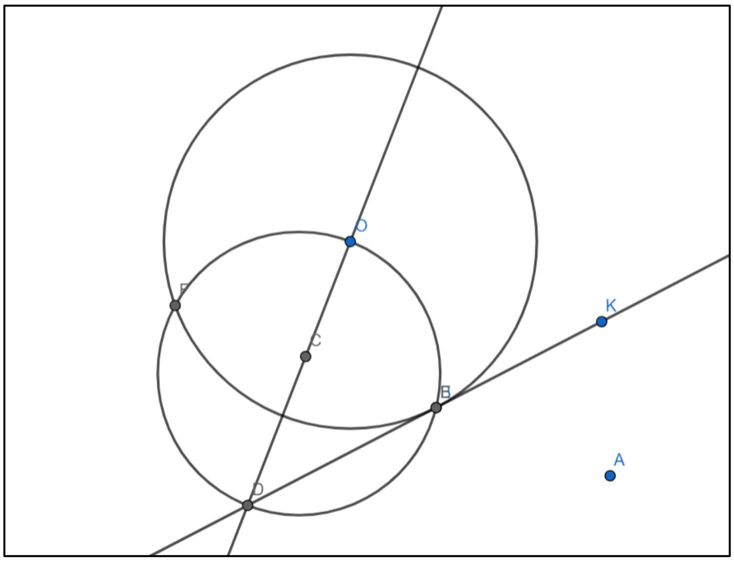
證明 1-5：根據引理 1-4 畫出圓心A，再在圓Γ取一點C，取一點D，做(ABC)、(AD)並取其異於A的交點E(若無此點，再取兩次依據鴿籠原理會取到符合的點)，再根據引理 1-2 得到F為B、C中點，根據引理 1-3 做$\overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{AF}$於$G$即所求(見圖(32))



圖(32)

引理 1-6：給定一圓O，圓上一點B，一點A不在Γ上，則可做$F = \overleftrightarrow{AB} \in \Gamma \neq B$。

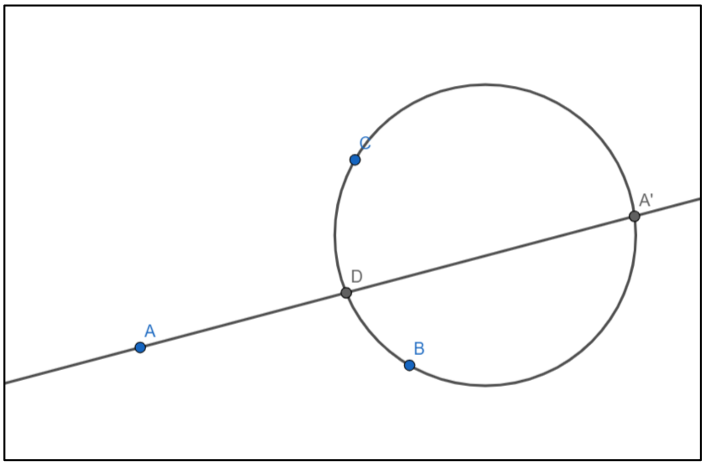
證明 1-6：根據引理 1-5 做K使得$\overleftrightarrow{BK}$為圓O過B的切線，做O對$\overleftrightarrow{AB}$的垂足$C((AO) \cap (BO))$，根據引理 1-3 做$\overleftrightarrow{BK} \cap \overleftrightarrow{CO}$於$D$，做$(BDO)$ $\cap$圓O異於B的點於F即為所求。(見圖(33))



圖(33)

引理 1-7：給定不共線三點A、B、C，若ΔABC不為直角三角形，則可繪出A對$\overleftrightarrow{BC}$的對稱點A'。

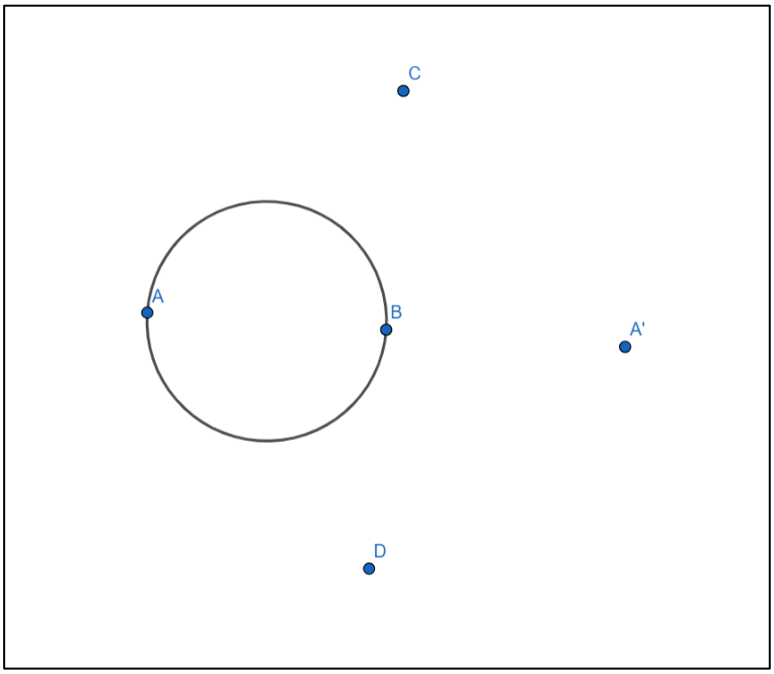
證明 1-7：做ΔABC的垂心D(利用各邊直徑圓交點找各邊垂足後利用引理 1-3 得出)，做(DBC) $\cap\overleftrightarrow{AD}$即所求。(見圖(34))



圖(34)

引理 1-8：給定兩點A、B，則可做出A對B的對稱點A'。

證明 1-8：做(AB)，依據引理 1-5 畫出不同的兩點C、D使得$\overleftrightarrow{BD}$、$\overleftrightarrow{BC}$切圓於B，再根據引理 1-7 畫出A對$\overleftrightarrow{CD}$的對稱A'即所求。(見圖(35))



圖(35)

捌、參考資料

[1] 原題目 https://artofproblemsolving.com/community/c6h2995081p26888633

[2] Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L. *Geometry Revisited.* Washington, DC: Math. Assoc. Amer.

[3] H.S.M. Coxeter, "Introduction to geometry" , Wiley (1961)

[4]A Guessing Game: Mixtilinear Incircles by Evan Chen

[5]金磊. 鸡爪定理. 《數學中的小問題大定理》叢書（第六輯）
[6]Geogebra 網址：https://www.geogebra.org/?lang=zh-TW
[7]尺規作圖的代數面：張老師的尺規作圖
https://ghresource.mt.ntnu.edu.tw/uploads/1676707929033sxUYLdZ0.pdf?fbclid=IwAR31Gg-HOzKtALoE19ExTgjvSMdaVirJd-ve8K5d6RjZwdH0Q5hvr1OuuVo
[8]Q 的二次擴張:Dummit foot ： Dummit, D. & Foote, R. Abstract Algebra Vol. 1
(Wiley, 2004).
[9]無尺作圖：
https://www.sec.ntnu.edu.tw/uploads/asset/data/625641a3381784d09345bfcd/1999-218-05(23-37).pdf

【評語】050416

本作品探討一種作圖法 cyclos：給定平面上三點，可做通過此三點的圓；給定平面上二點，可做以此二點為直徑的圓；在兩個已知圓上標上交點或在已知圓上標上一個新的點。利用此作圖法，作者能畫出五心、九點圓等幾何項目，也可標記 $p+q\sqrt{r}$ 的長度。過程中適當應用反演變換及交比等工具。可惜的是，此方法與圓規直尺作圖類似，作品創新不多。

作品海報

摘要

本作品主要研究一種數學繪圖工具「cyclos」：在平面上，我們可以且只可以：

1.用已知三點作經過此三點的圓。

2.用已知兩點為直徑作過此二點之圓。

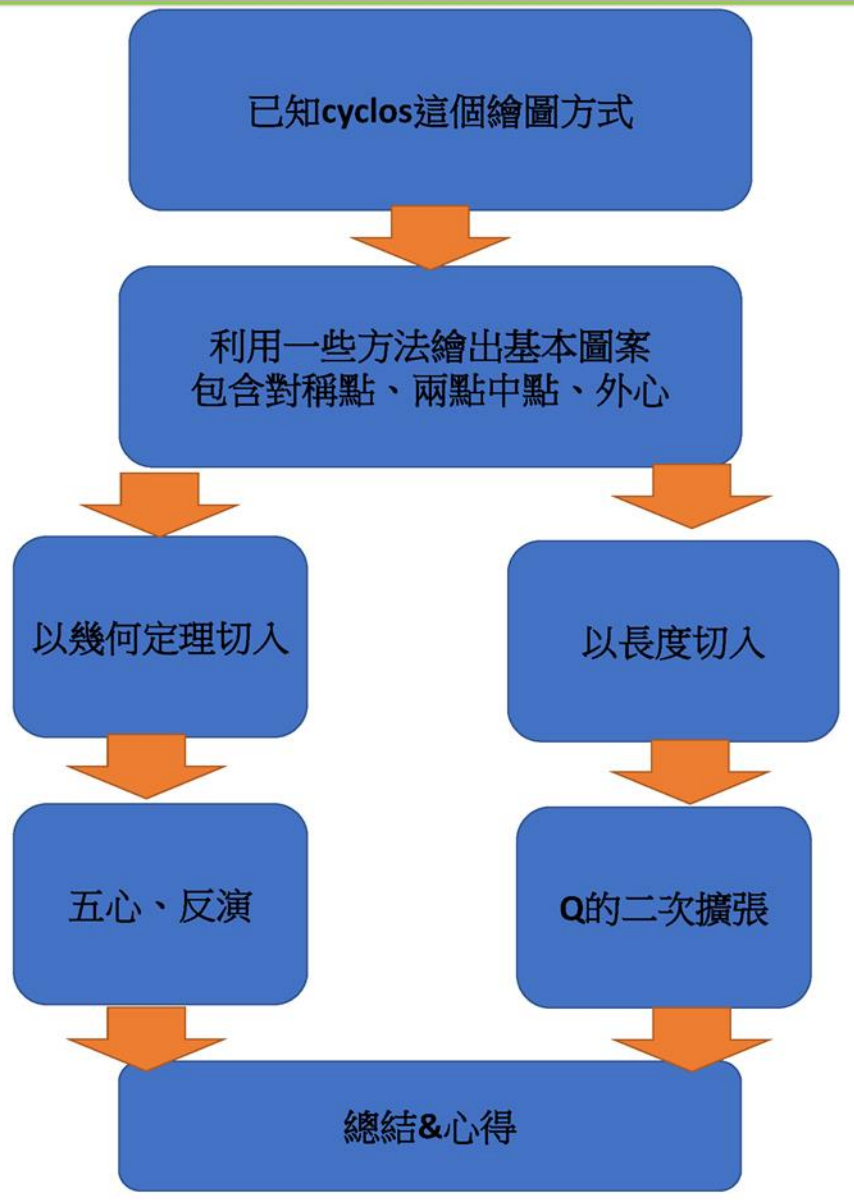
3.在已知兩圓上標上其交點或在一已知圓上標上一個新的點

其中，我們盡量避免了使用解析的方法。我們使用了這個工具證明了原題，並進一步作出兩點之中點、三點作三角形之五心以及其他的相關結構的作法，且利用精準繪出長度的方式，導出我們可做$\alpha\overline{AB}$，$\alpha\epsilon\{\alpha_0+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\sqrt{i+1}\,|\alpha_0、\alpha_i\epsilon Q,\alpha_i\neq 0\ for\ finitely\ many\ "i"s\}$

研究動機

就在我們刷數奧題目時，cyclos這個全新的作圖方式引起了我們的興趣，所以我們就挑戰我們是否能畫出我們認識的幾個基本幾何圖形。

研究流程及架構



cyclos原題的證明

cyclos是什麼?

(一)來源

cyclos出自於2023年INMO (Indian National Mathematical Olympia)的第六題。

(二)原題敘述

給定一繪圖工具「cyclos」，給定兩點A、B，須證明可做以A為圓心，$\overline{AB}$為半徑之圓

(三)原題證明-引理1~8

由於版面原因，這裡僅列出證明原題所需之8個引理的敘述，證明請參見參考資料[1]。

引理1：給定不共線三點A、B、C，則可繪出ΔABC的九點圓。

(註)九點圓：ΔABC中，其三邊的中點、三高的垂足、頂點到垂心的三條線段的中點共圓，並稱該圓為九點圓。

性質:九點圓圓心在歐拉線上，且是垂心與外心的中點。

引理2：給定兩點A、B，則可繪出$\overline{AB}$的中點。

引理3：給定每三點皆不共線之四點 A、B、C、D，則可以繪出$\overleftrightarrow{AB}\cap\overleftrightarrow{CD}$。

引理4：給定不共線三點A、B、C，則可繪出ΔABC的外心。

引理5：給定一圓Γ，圓上一點A，則可做B使得$\overline{AB}$為Γ的切線。

引理6：給定一圓Γ，圓上一點A，一點B不在Γ上，則可做$C=\overleftrightarrow{AB}\in\Gamma\neq A$。

引理7：給定不共線三點A、B、C，則可繪出A對$\overleftrightarrow{BC}$的對稱點A'。

引理8：給定兩點A、B，則可做出A對B的對稱點A'。

研究過程

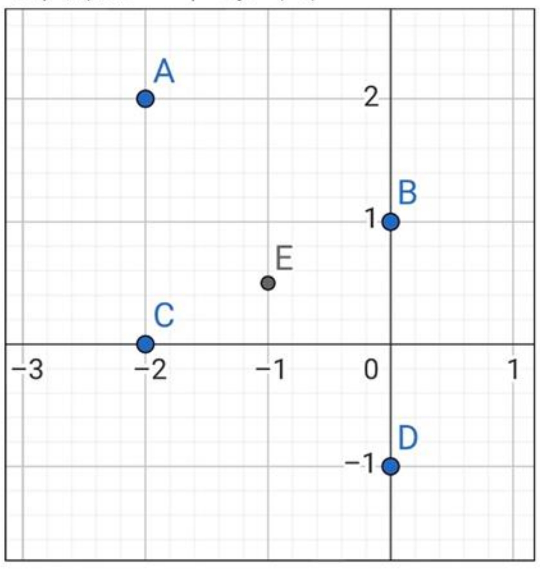
一、可標已知圓與已知線之交點

敘述：給定一圓Γ，其圓心為A及給定B、C兩點，若Γ和$\overline{BC}$有交點則可以標出其交點。

(一)引理

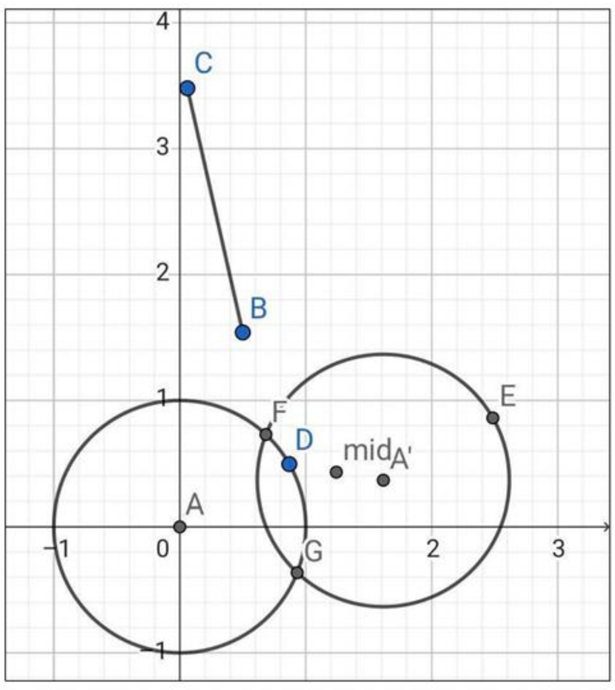
引理9：給定不共線A、B、C三點，則可以畫出D使得$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

證明：根據引理2做出$\overline{BC}$的中點E再根據引理8做A對E的對稱點D即為所求。



(二)若A、B、C不共線

根據引理7可以做出A對$\overline{AB}$的對稱點A'，並在圓上標一點D，再以引理9，做$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'E}$，以$A'$為圓心$\overline{A'E}$為半徑畫圓交$\Gamma$於$F$、$G$即為所求。



(三)反演

(註)反演變換

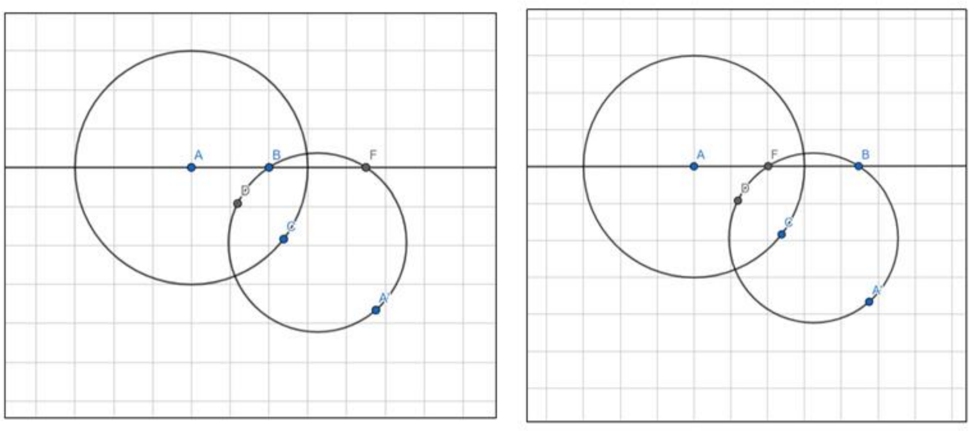
為一種幾何變換，給定平面上一圓 O ，其半徑為 r ，對任意一點 P ，若 P' 在 $\overrightarrow{OP}$ 上滿足 $\overline{OP}\times\overline{OP'}=r^2$ ，則稱 P' 是 P 關於圓 O 的反演點。

敘述：有一圓Γ其圓心A，一任意點B，則可以做出B'使得B'為B對Γ的反演點。(以下將X的反演點稱作X^*)

證明：圓A上任取3點（避免取到$\overline{AB}$上的點），令不和$\overline{AB}$共線的點為C，$\overline{AC}$中點為D，A對C對稱為A'，做$(DA'B)$，依據可標已知圓與已知線之交點(二)，做$(DA'B)$交$\overline{AB}$即所求。

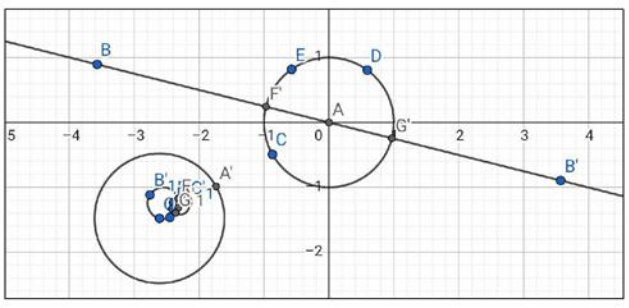
因為$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{AD}\times\overline{AE}=r^2$，即證之。。

(下圖為反演點在圓內和圓外的情況)



(四)若A、B、C共線

在Γ上取三點，不和$\overline{AB}$共線的點稱為C，根據引理8，做A對C的對稱點A'，C對A'做對稱點C'，以C'為圓心，$\overline{C'A'}$為半徑畫圓Γ'（也就是做一個圓心不在直線$\overline{AB}$的圓），將A、B、B'做Γ'的反演的三點做三點圓Γ_1，再取圓Γ上三個點做Γ'的反演的三點做三點圓Γ_2，設$\Gamma_1\Gamma_2$交於F、G，將F、G做對圓Γ'的反演點F^*、G^*，根據反演的性質，F^*、G^*即為所求。



二、做圖結果(因版面不夠，在此僅舉例幾個)

(一)內心

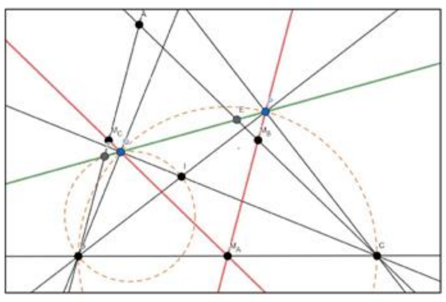
敘述：給定三點A、B、C，可以作ΔABC之內心。(其中O為ΔABC的外心)

證明：

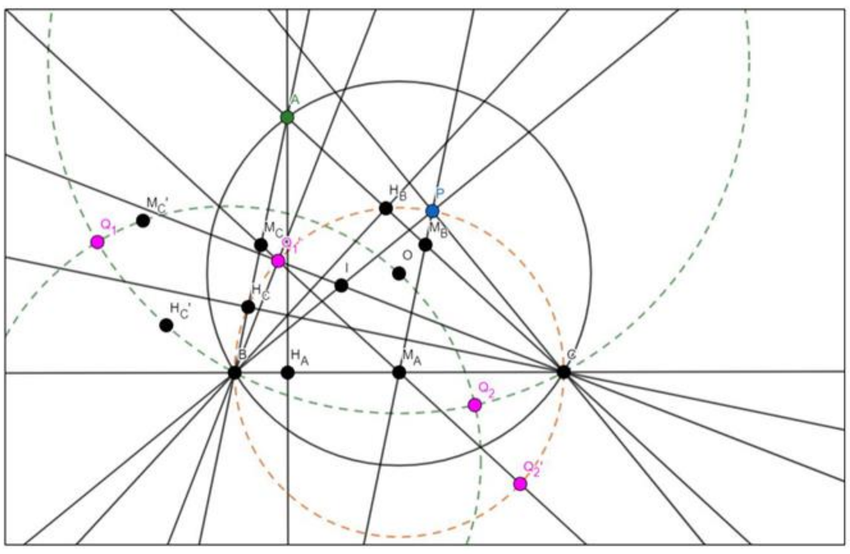
引理10:給定ΔABC，其三邊中點為M_A、M_B、M_C；內心I、P、$Q\in\overline{BI}$、$\overline{CI}$使得$\overline{CP}\perp\overline{BI},\overline{BQ}\perp\overline{CI}$，則$\overleftrightarrow{PQ}$即為$\overleftrightarrow{EF}$，並且$Q$，$P$分別在$\overline{M_AM_B}$、$\overline{M_AM_C}$上。

引理10之證明：由B、Q、P、C在圓$(M_A,\overline{M_AB})$上，有$\angle QM_AB=2\angle ICB=\angle ABC=\angle M_CM_AB$，從而$M_A$、$Q$、$M_C$共線，同理有$M_A$、$P$、$M_B$共線，得證。(見圖(15))

2. 由I、Q、F、B共圓和B、Q、P、C共圓，有$\angle FQI=180^o-\angle IBF=180^o-\angle CBP=180^o-\angle IQP$，從而$F$、$Q$、$P$共線，同理有$E$、$Q$、$P$共線，得證。



回到原題，令H_a、H_b、H_c為A、B、C至對邊的垂足，則B、C、H_b、H_c共圓(因為$\angle BH_bC=\angle BH_cC=90^o$)，且$P$、$Q\in(B$、$C$、$H_b$、$H_c)$(因為$\angle BPC=\angle BQC=90^o$)，又可做$\overline{MaMc}$對$(ABC)$的反演$\Gamma=(OM_a^*M_c^*)$(做$M_a$、$M_c$的中點後這三個點做反演)和$(B$、$C$、$H_b$、$H_c)$對$(ABC)$的反演$\boldsymbol{\tau}(BCH_b^*H_c^*)$，令$Q_1$、$Q_2$為$\Gamma\cap\boldsymbol{\tau}$，做$Q_1^*$、$Q_2^*$，由引理10，$Q_1^*$、$Q_2^*$中必有一個在$\overline{CI}$上，取該點後同理可做(引理10)P，又$\overleftrightarrow{PQ}$即為$\overleftrightarrow{EF}$，根據引理3可以做出$\overleftrightarrow{EF}\cap\overline{AB}$、$\overline{AC}$，同理做出其他邊再依引理4畫出這三點外心即為所求。



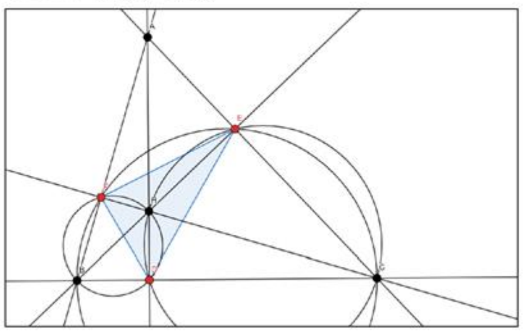
(二)垂心

敘述：給定三點A、B、C，可以作ΔABC之垂心。

引理11：給定三點A、B、C，ΔABC的垂心是其三垂足構成之三角形的內心。

證明：$\because FHDB$、$DHEC$、$FECB$共圓

$\therefore\angle FDH=\angle FBH=\angle FBE=\angle FCE=\angle HCE=\angle HDE$，可知$\overline{DH}$平分$\angle FDE$，其他同理，故$H$是$\Delta DEF$的內心。



回到原題，畫出$D=(AB)\cap(AC)\neq A$、$E=(AB)\cap(BC)\neq B$、$F=(BC)\cap(AC)\neq C$，再畫出ΔDEF之內心即可證之。

(三)旁心、旁切圓

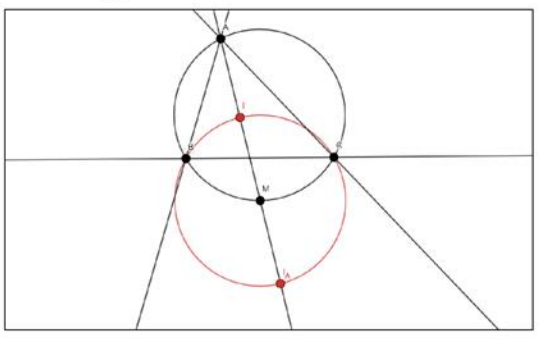
(註)旁心：

ΔABC中，一角之內角平分線和另外兩個角的外角平分線的交點稱為該點所對之旁心。

性質:三角形ΔABC中，設內心為I，$A-$旁心為I_A，則I、I_A關於$\overline{BC}$的垂足關於$\overline{BC}$中點對稱。

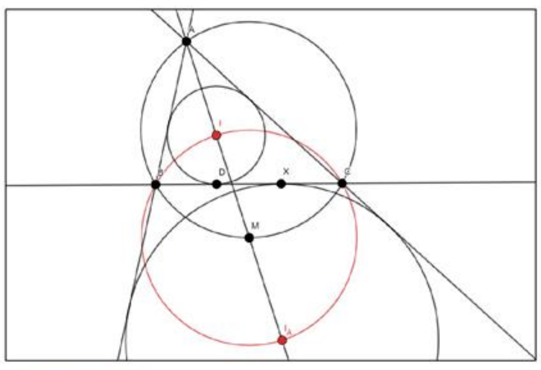
(註)雞爪定理：

ΔABC中，令M為弧BC（不含A）的中點，I為內心，I_A為$A-$旁心，則B、I、C、I_A四點共圓



敘述：給定三點A、B、C，可以作ΔABC之旁心、旁切圓。

證明：作I關於M的對稱點即旁心I_A(由雞爪定理)，作D關於$\overline{BC}$中點對稱點X，則$\overline{BD}=\overline{CX}$且此時易知為旁切圓和$BC$切點，故旁切圓為以$I_A$為圓心，$I_A$與$X$的距離為半徑的圓。



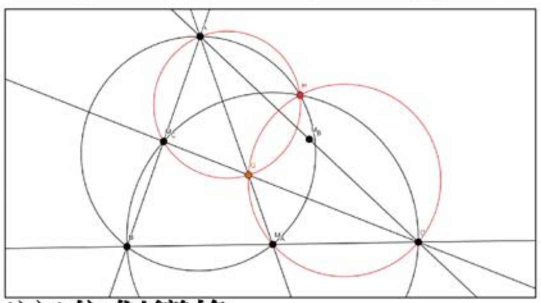
(四)重心

(註)**完全四線形與密克點：**

給定平面上四條線l_1,l_2,l_3,l_4，令$l_i\cap l_j=l_{ij}$，其中$1\le i<j\le 4$，則$(l_{12}l_{14}l_{24})$、$(l_{12}l_{13}l_{23})$、$(l_{13}l_{14}l_{34})$、$(l_{24}l_{23}l_{34})$共於一點M。

證明一：

由於可做ΔABC三邊中點M_A、M_B、M_C，現考慮完全四線形$\{\overline{AB},\overline{BC},\overline{AM_A},\overline{CM_C}\}$，考慮$M=(ABM_A)\cap(BCM_C)$，則$M$是該完全四線形之密克點，又顯然$G=\overline{AM_A}\cap\overline{CM_C}$，故做$G=(MAM_C)\cap(MCM_A)$即為所求



(註)**位似變換**

位似變換是一種幾何變換，由一點S和一個非零常數λ決定。S稱為位似中心，而λ稱為位似比。位似變換滿足對任意點M，有

$$M\rightarrow S+\lambda\overrightarrow{SM}$$

(註)**旋似變換**

即旋轉以及位似變換的合成。

(註)**交比**

給定複平面上四點z_1、z_2、z_3、z_4，則該四點的交比定義為

$$(z_1,z_2;z_3,z_4)=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

性質：給定四點A,B,C,D，則反演後此四點的交比不變

定義：共線四點A,B,C,D滿足$(A,C;B,D)=-1$稱為調和點列

性質：給定共線四點A,B,C,D以及不在線上的點P，則以下四個條件任兩個可以推出其他兩個:

$$(A,C;B,D)=-1$$

$\overline{PC}$平分$\angle BPD$(外夾角)

$\overline{PA}$平分$\angle BPD$(內夾角)

$$\overline{PA}\perp\overline{PC}$$

定義：給定共圓四點A,B,C,D滿足$(A,C;B,D)=-1$，則該四點稱為調和四邊形，以下為常見的調和四邊形：

ΔABC中，K為共軛重心，$\overline{AK}$與(ABC)另一交點K_A，則A,K_A,B,C為一調和四邊形

性質：若圓Γ上的四點A,B,C,D為一調和四邊形，則Γ在B,C處切線交在$\overline{AD}$上

證明二：

宣稱：可作共軛重心K

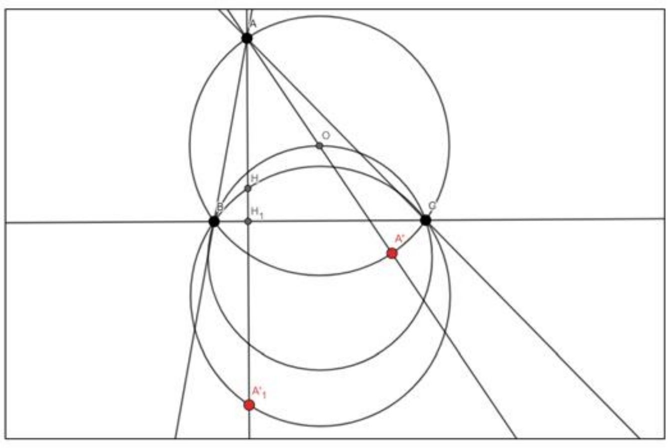
證明：請看下面的圖形：

$\mathbb{I}$ 是以$\sqrt{\overline{AB}\times\overline{AC}}$為半徑$A$為中心的反演變換，而 $\mathbb{R}$ 是以$\angle BAC$的平分線為對稱軸的對稱變換。以下考慮 $\phi=\mathbb{I}\circ\mathbb{R}$

引理12：$\phi((BOC))=(BHC)$

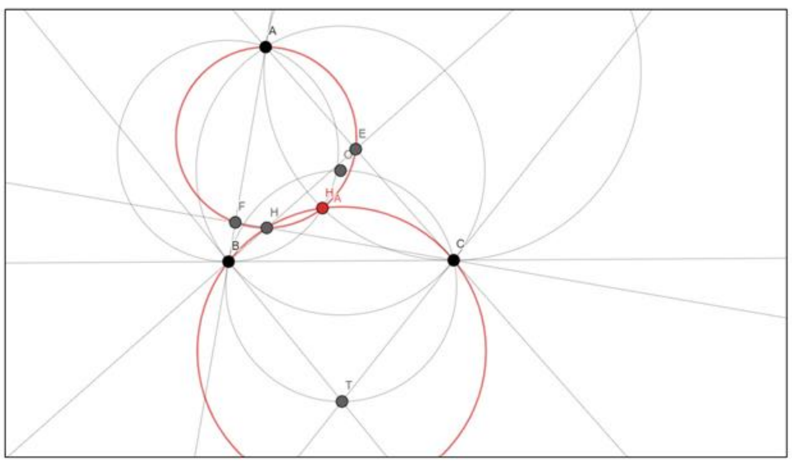
證明：令A關於對徑點A'，因為(O,H)為等角共軛點對

故$\overline{AO}$、$\overline{AH}$關於$\angle BAC$為等角線而$A'\in(ABC)$，於是$\phi(A')\in\overline{AH}\cap\ \phi(A')\in\overline{BC}$，故令$\overline{AH}\cap\overline{BC}$於$H_1$，則$\phi(A')=H_1$又$O$是$\overline{AA'}$中點，所以$\phi(O)$為$A$關於$\overline{BC}$對稱，即$\phi(O)\in(BHC)$，故 $\phi((BOC))=(\phi(B)\phi(O)\phi(C))=(BHC)$。



引理13：令C_1、C_2分別是過A且和BC相切於B、C的圓，令$H_A=C_1\cap C_2\neq A$，則$H_A\in(BHC)\cap(AH)\neq H$。

證明二：考慮變換ϕ，則由H_A之定義易知 $\phi(H_A)=T\in(BOC)$，其中T為B、C在(ABC)切線的交點，故由引理12知$H_A\in(BHC)$，又$\angle H_AHC=\angle H_ABC=\angle H_AAB=\angle H_AAE$，所以$H_A\in(AH)$。



回到原題，令$\overline{CK}$與(ABC)另一交點為K_C，$\overline{AK}$交$\overline{BC}$於K_1，D為$\overline{BC}$中點，$\overline{AD}$與(ABC)另一交點為H_A'，由於CK_CAB是(ABC)上的調和四邊形，故

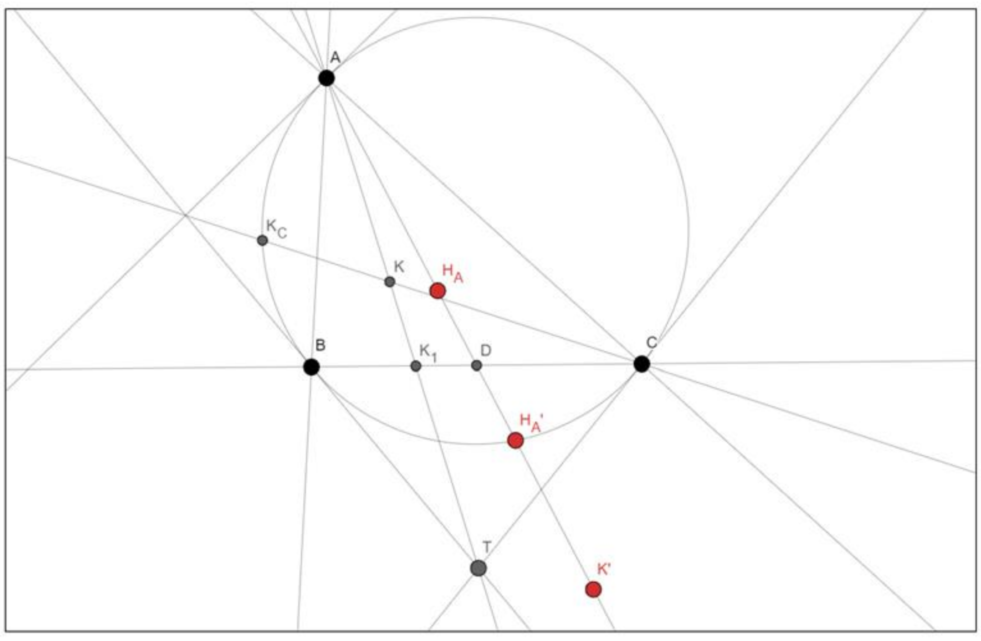
$-1=(C,K_C;A,B)=(\overline{CC}\cap\overline{AK},\overline{CK_C}\cap\overline{AK};\overline{CA}\cap\overline{AK},\overline{CB}\cap\overline{AK})=(T,K;A,K_1)$

（其中$\overline{CC}$為(ABC)在C處切線）

又反演有保交比之性質，故

$-1=(T,K;A,K_1)=(\phi(T),\phi(K);\phi(A),\phi(K_1))=(H_A,\phi(K);\infty_{AM},H_A')$，

於是$H_A H_A'=H_A'\phi(K)$，而由於可作H，故可作$H_A=(BHC)\cap(AH)\neq H$，又因$H_A\in(BHC)$且$H_A'\in(ABC)$，於是H_A'為H_A關於D之對稱，從而H_A'可做，故$\phi(K)$可做（即H_A關於H_A'之對稱點），最後又可做線外一點關於一線之對稱點，所以K可做，接著作反演即可做出G。

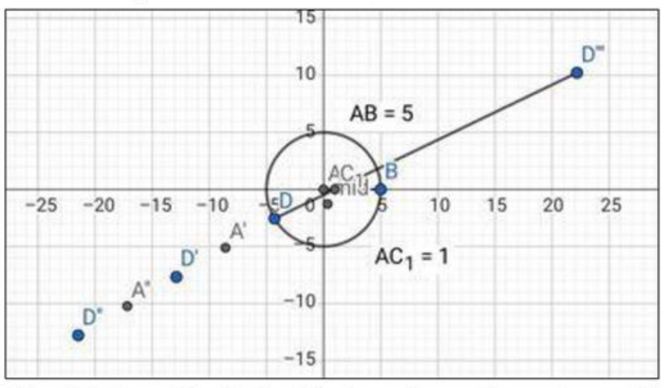


(四)可繪製$Q_1+Q_2\sqrt{Q_3}$ (Q_1、Q_2、$Q_3\in Q$)

敘述：給定A、B兩點，則可以作出長度為$a\overline{AB}$，$a\epsilon\{\alpha_0+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\sqrt{i+1}\,|\alpha_0、\alpha_i\epsilon Q,\alpha_i\neq 0\ for\ finitely\ many\ "i"s\}$[5]

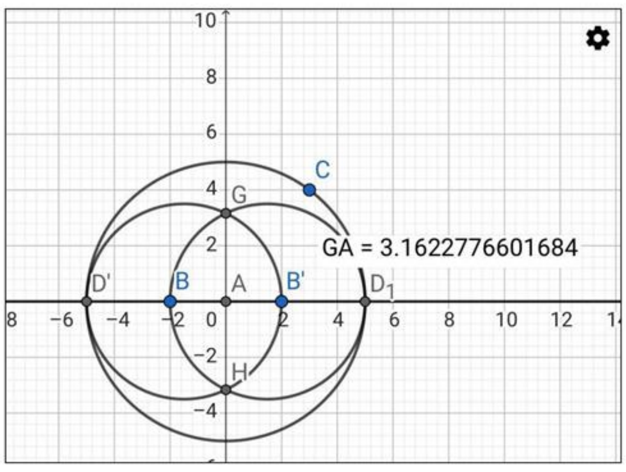
引理14：給定A、B兩點，則可做C使得$n\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$，$n\in N$。

以A為圓心$\overline{AB}$為半徑畫圓，取三點，令不和$\overline{AB}$共線的點為D，依據引理8，一直做A對稱D的點A_1、A_2...使得最後一個點為A_n，以引理9做$\overrightarrow{A_nB}=\overrightarrow{A_1E}$，再以引理3做$\overrightarrow{A_1E}$交$\overline{AB}$於$C$即為所求。



引理15：給定相異A、B、C三點，則可以做出長度$\sqrt{\overline{AB}}\times\sqrt{\overline{AC}}$。

證明：以A為圓心、$\overline{AC}$為半徑畫圓Γ，依據「可繪已知圓與已知線之交點」畫出D使得D為Γ交直線$\overline{AB}$且不在線段$\overline{AB}$上，做(BC)，作B對A的對稱點B'、D對A的對稱點D'，作(BD)、$(B'D')$交於G、H兩點，$\overline{AG}$、$\overline{AH}$即為所求



回到原題，$a\overline{AB}$，$a\epsilon\{\alpha_0+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\sqrt{i+1}\,|\alpha_0、\alpha_i\epsilon Q,\alpha_i\neq 0\ for\ finitely\ many\ "i"s\}$可以簡化成分母為整數，又每段都可以利用繪出$\sqrt{n}$後根據引理9相加，故得證

結論

1、cyclos 能做出許多圖形，包含了九點圓、內切圓、外接圓、半徑圓、五心、角平分線與線段交點、等角共軛點、反演點。

2、cyclos能畫出能用正整數加減乘除及根號所表示之數。

未來展望

cyclos 經過我們沒日沒夜的研究後，終於做出許多我們滿意的圖形，例如五花八門的圓和三角形的關係、單一角的變化等等，雖然不能自由的用尺讓人有點抓狂，但是最後終於利用時間，繪出很多很多的圖形讓人有一種無法形容的舒暢，也希望以後能做出更多意想不到的圖形。

參考資料及文獻

[1] 原題目 https://artofproblemsolving.com/community/c6h2995081p26888633

[2] Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L. Geometry Revisited. Washington, DC: Math. Assoc. Amer.

[3] H.S.M. Coxeter, "Introduction to geometry" , Wiley (1961)

[4]A Guessing Game: Mixtilinear Incircles by Evan Chen

[5]Q的二次擴張:Dummit foot ： Dummit, D. & Foote, R. Abstract Algebra Vol. 1(Wiley, 2004).