中華民國第 63 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

050415

拾級而上~從 Jonah 公式談矩形堆疊問題

學校名稱：國立潮州高級中學

作者：	指導老師：
高二 鄭宇紘	洪育祥
高二 林秉皞	楊勝惠
高二 洪鈺翔	

關鍵詞：格子路徑、矩形堆疊、Jonah 公式

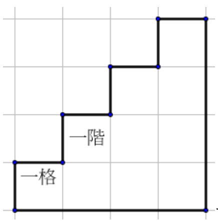
摘要

多數人購房會要求生活空間的最大利用，其中樓梯間的置物櫃設計就是其中一例，本文是由置物櫃排列所發展的數學問題。

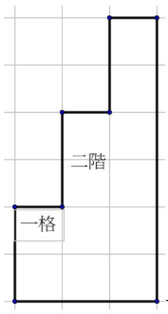
(圖片來源：壹讀。民109年4月20日)

假設在樓梯下裝設矩形櫃子，並允許每行的櫃子最多只有兩種樣式：一種是該行的每個櫃子都是單位高度，另一種是該行最多只有一個超過單位高度的櫃子；而排列方式則是最高櫃子位於最下方且最底層的高度則是逐行高於或等於前一行的櫃子，我們將這樣的問題稱為「矩形堆疊」。

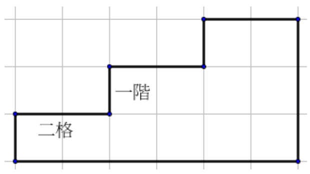
透過動手實作發現「矩形堆疊」與路徑數有關，於是建立與路徑的一一對應關係，並研究路徑問題。經由Jonah’s公式發展路徑問題後，再回來解決「矩形堆疊」問題；此外也研究變化不固定的路徑問題，對於特殊結構例如拋物線下「矩形堆疊」，都有不錯的結果。



一格一階



一格二階

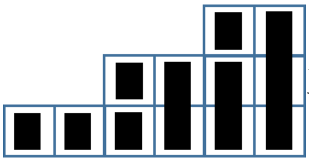
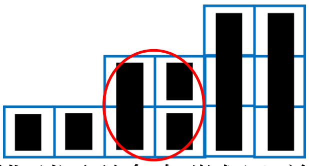


二格一階

壹、前言

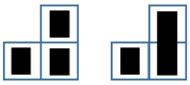
一、研究動機

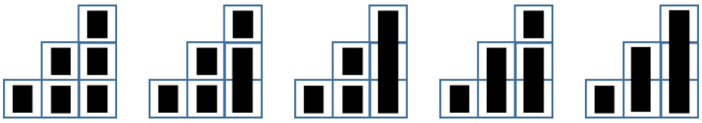
在階梯圖形內堆疊單位寬度的矩形，假設每行的矩形最多只有兩種樣式：一種是每個都是單位高度的矩形；另一種是每行最多一個高度大於 1 的矩形其餘都是單位高度。而排列方式則是將最高矩形置於最下方且最底層的矩形高度是逐行高於或等於前一行的矩形。以下我們列舉正確與錯誤的排法：

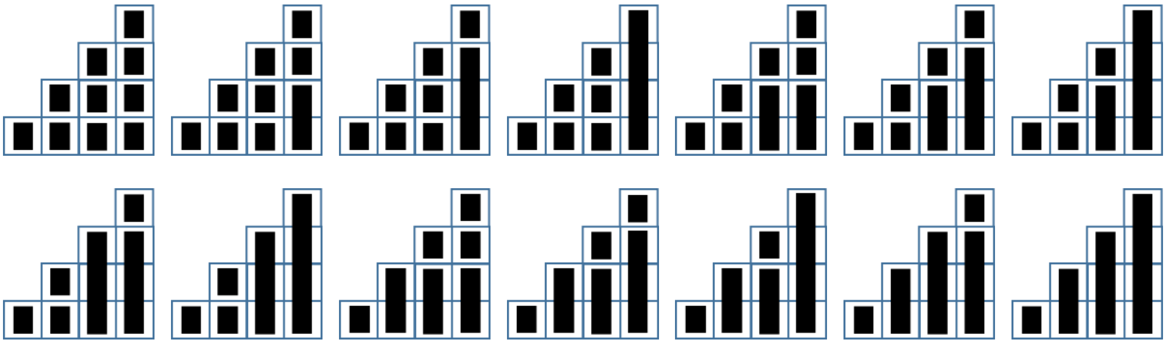

正確的排列方法

錯誤的排列方法

我們研究的主題是在上述的條件下，可能的排列圖形會有幾個？首先將階梯限制在「一格一階」的條件下，經過繪製幾層的圖形後，發現排列個數與卡塔蘭數有關(62 屆全國科展)，於是先建立圖形與路徑的一一對應關係，再透過路徑問題的研究，以解決我們的堆疊問題。

一層 

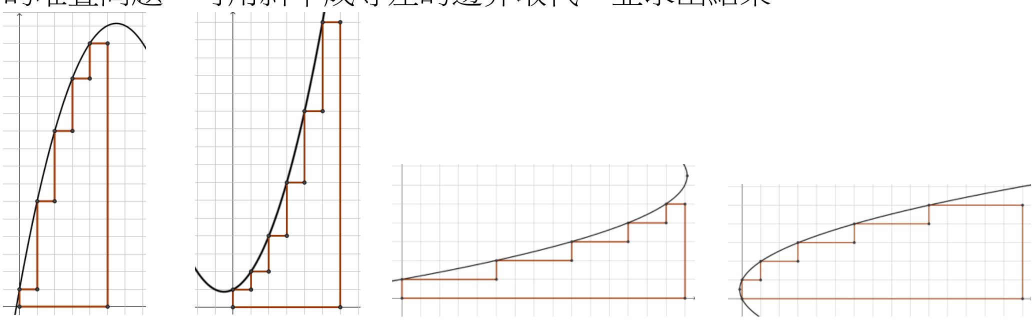
二層 

三層 

四層 

對於路徑的研究，有鑑於之前推導遞迴關係複雜，以 Jonah’s Theorem(Peter Hilton, Jean Pedersen, 1990)，(林晉宏，2011)處理斜率等於 1 的情形，變得簡潔許多。其次研究斜率大於 1 的正整數情形，以一般化的 Jonah’s Theorem(Peter Hilton, Jean Pedersen, 1991)處理。接著研究斜率是單位分數的情形，將 Jonah’s Theorem 應用推廣。再來研究斜率是有理數的特殊情形，參考 Spitzer’s Lemma(Christian Krattenthaler, Lattice Path Enumeration)。最後針對變化呈嚴格遞增或嚴格遞減的例子，提出一般化的操作方法。

將堆疊問題分類後，套用適當的路徑公式，可以得到不錯的結果。過程中發現兩個經鏡射、旋轉是全等的圖形，但在堆疊問題中，卻需選擇不同的路徑公式來得到對應的方法數；另外也找到特殊型的堆疊問題，可用邊界斜率為有理數的路徑問題解決；最後也發現以拋物線為邊界的堆疊問題，可用斜率成等差的邊界取代，並求出結果。



二、研究目的：

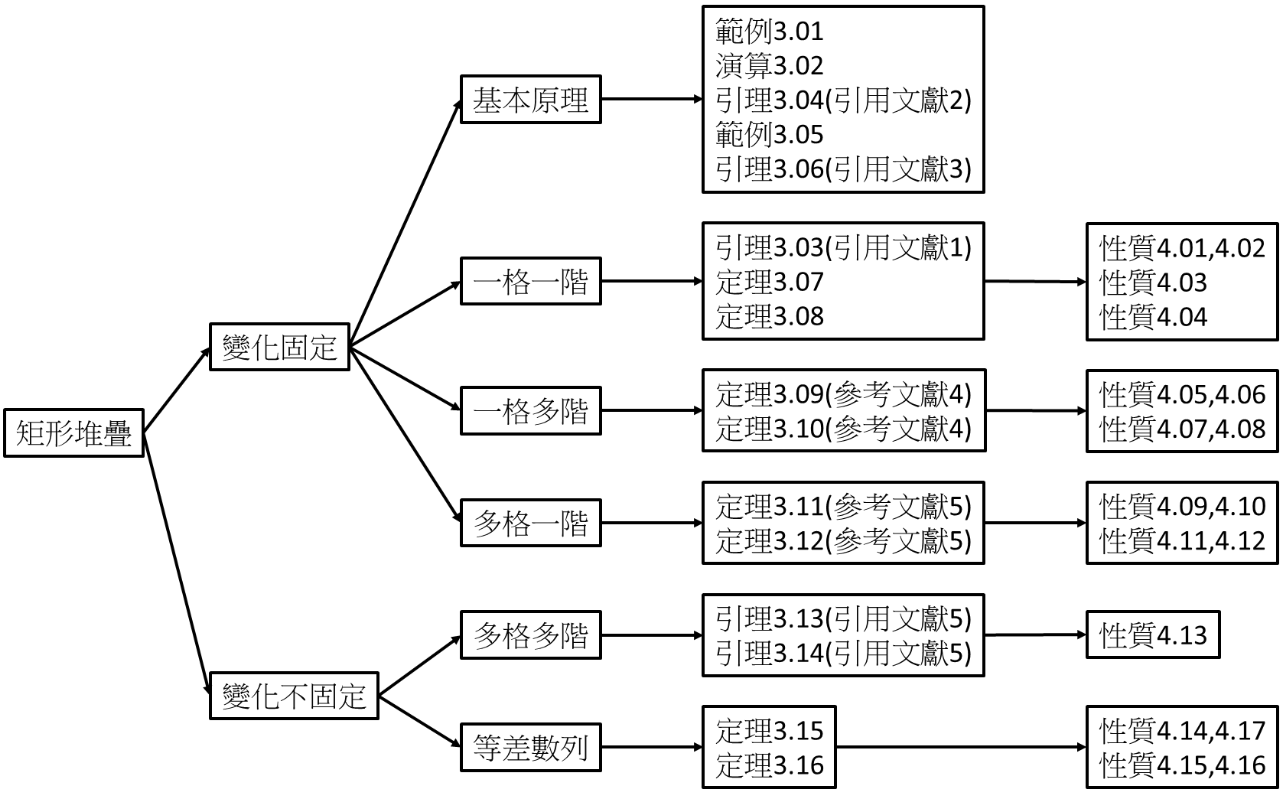
(一)研究斜率固定的路徑問題。

(二)研究變化固定的堆疊問題。

(三)研究斜率不固定的路徑問題。

(四)研究變化不固定的堆疊問題。

三、研究架構



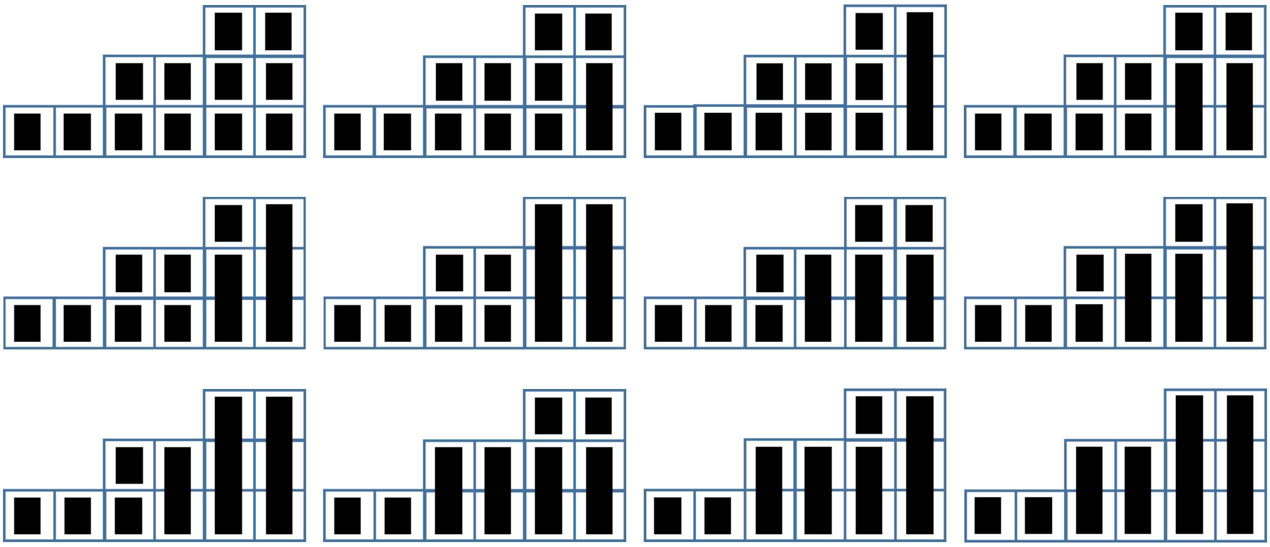
貳、研究設備及器材

一、筆、格子紙。

二、電腦、Word 軟體、Excel 軟體、GeoGebra 繪圖軟體、程式。

參、研究過程或方法

範例 3.01：對於「二格一階」的樓梯，假設橫坐標表示格數，縱坐標表示階數，則 6 格的矩形堆疊共有 12 種可能的排列方法，如圖所示。



為了方便計算矩形堆疊的排列個數，我們建構一個模型來說明，原理則是將圖形與格子路徑建立一一對應關係，則格子路徑有幾條，對應的圖形個數就會有幾個。

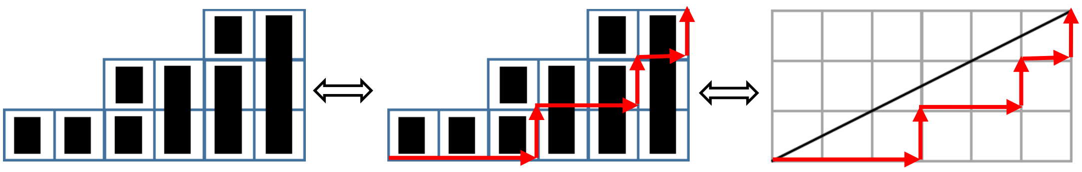
演算 3.02：對於「 μ 格 r 階」的階梯有 n 層，我們建構一個演算法，將堆疊問題對應至格子路徑，其建構方法步驟如下：

步驟 1：從點 $(0,0)$ 開始，每次一格一格往右移動。

步驟 2：如果前一格停在點 (i,j) 且下一格矩形的最大高度在 $y=t$ 的位置，則先將路徑從 (i,j) 鉛直往上延伸至 $(i,t-1)$ ，然後再水平往右延伸至 $(i+1,t-1)$ ，作為下一個矩形高度的起點。當 $i<\mu n$ ，重複步驟 2。

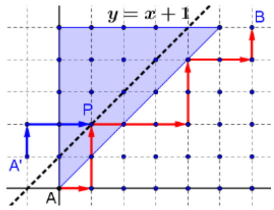
步驟 3：當 $i=\mu n$ ，則從 $(\mu n,t-1)$ 鉛直往上延伸至 $(\mu n,rn)$ 完成路徑。

我們以範例 3.01 的第 8 個圖為例，應用演算法 3.02 可得一條紅色的格子路徑；在「二格一階」的條件下，就對應至到在邊界條件 $2y\le x$ 下的格子路徑問題。



為了方便說明，我們以符號 $|L:(0,0)\to(n+h,rn+k);\{y\le rx+k\}|$ 表示從原點 $(0,0)$ 至終點 $(n+h,rn+k)$ ，在邊界條件下 $y\le rx+k$ 的路徑數；特別一提，由 $(0,0)$ 出發，終點在邊界條件上時，例如 $|L:(0,0)\to(n,rn+k);\{y\le rx+k\}|$ ，以符號 $d_{(n,rn+k)}^{y\le rx+k}$ 來表示。

引理 3.03：假設 $n \in N, h \in N \cup \{0\}$



(1)試證：$\left|L:(0,0) \to (n+h,n);\{y \le x\}\right| = \dfrac{h+1}{n+h+1} C_n^{2n+h}$

(2)試證：$\left|L:(0,0) \to (n,n);\{y \le x\}\right| = \dfrac{1}{n+1} C_n^{2n}$

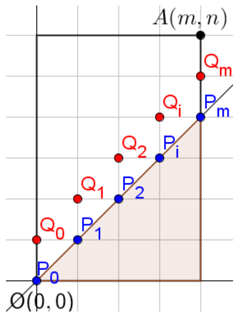
證　　明：(1)假設 $B(n+h,n)$ 不是 $y=x$ 上的點且 $h>0$ ，對於 $A(0,0)$ 至 $B(n+h,n)$ 的路徑中，若紅線 L 為超出邊界的路徑，假設 P 為 L 上第一次穿過 $y=x$ 的路徑且與 $y=x+1$ 的交點。令原點 A 對於 $y=x+1$ 的對稱點為 $A'(-1,1)$ ，由 André's reflection principle 知， A' 至 B 的路徑數與 A 至 B 超出邊界的路徑數相等且為

$C_{n+h+1}^{(n+h)+n} = \dfrac{((n+h+1)+(n-1))!}{(n+h+1)!(n-1)!}$ ，

因此符合條件的路徑數為 A 至 B 的所有路徑數 $C_{n+h}^{(n+h)+n} = \dfrac{(2n+h)!}{(n+h)!n!}$ 減去超出邊界的路徑數，亦即 $C_{n+h}^{2n+h} - C_{n+h+1}^{2n+h} = \dfrac{h+1}{n+h+1} C_n^{2n+h}$ ($h>0$)。

(2)當 $h=0$ 時，由(1)可得 $\left|L\left((0,0) \to (n,n);\{y \le x\}\right)\right| = \dfrac{1}{n+1} C_n^{2n}$ ，此數又稱為卡塔蘭數 Catalan Numbers，以符號 $c_n = \dfrac{1}{n+1} C_n^{2n}$ 表示。

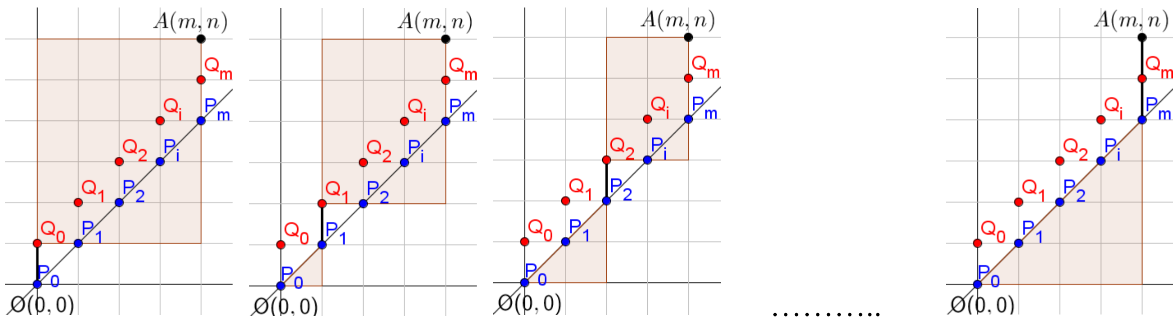
引理 3.04：假設 $m,n \in N, n>m$



試證：$\left|L:(0,0) \to (m,n)\right| = C_m^{m+n} = \sum_{k=0}^{m} c_k \times C_{m-k}^{m+n-1-2k}$

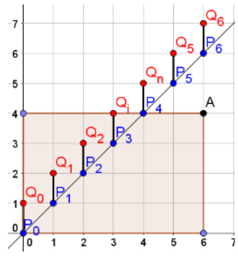
證　　明：令集合 S 為所有 $O(0,0)$ 至 $A(m,n)$ 的捷徑，將其分成 m 類，分別以 $S_k, k=0,1,2,\ldots,m$ 表示，對於同時穿過 P_k, Q_k 的路徑，將其歸類在集合 S_k ，如圖所示。不難發現 $S_i \cap S_j = \phi$ ，即

$\{S_0, S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ 為集合 S 的一個分割，故得 $C_m^{m+n} = \sum_{k=0}^{m} c_k \times C_{m-k}^{m+n-1-2k}$ 。



S_0　　S_1　　S_2　　S_m

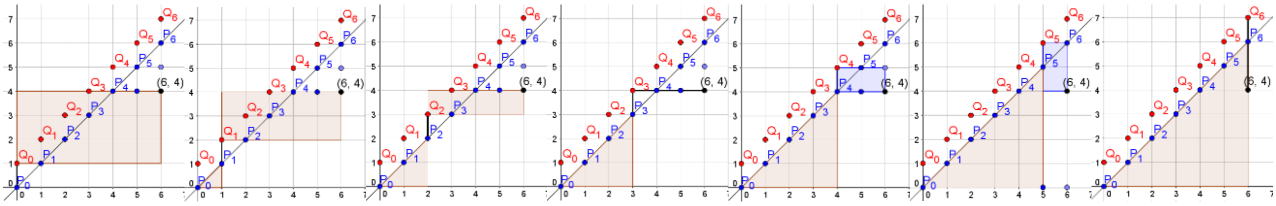
若我們的邊界條件是 $y \le x$，則以上路徑都會穿過 $y = x$ 這條線，所以都是不符合條件的路徑。底下我們看看如何應用分類的觀念，應用在計算符合 $y \le x$ 條件的方法。



範例 3.05：$C_6^{10} = c_0 \times C_6^9 + c_1 \times C_5^7 + c_2 \times C_4^5 + c_3 \times C_3^3 + c_4 \times C_2^1 + c_5 \times C_1^{-1} + c_6 \times C_0^{-3}$

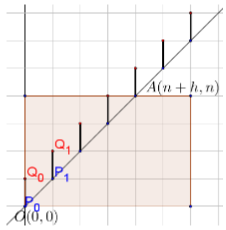
$$210 = 1\times 84 + 1\times 21 + 2\times 5 + 5\times 1 + \underbrace{14\times 0 + 42\times(-1) + 132\times 1}_{|L:(0,0)\to(6,4);\{y\le x\}|}$$

證　　明：令集合 S 為所有 O 至 $A(6,4)$ 的捷徑，將其分成以下七類(如圖所示)，分別以 $S_k, k = 0,1,2,3,4,5,6$ 表示，可得



S_0　S_1　S_2　S_3　S_4　S_5　S_6

觀察可知，C_6^{10} 為所有捷徑數，$S_0 \sim S_3$ 為不合理路徑，故 $S_4 \sim S_6$ 為邊界條件 $y \le x$ 下的路徑數。特別的是 $C_k^n = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, n \in Z, k \ge 0$，例如 $C_3^{-3} = \dfrac{(-3)(-4)(-5)}{3!} = -10$。



引理 3.06：(Jonah Formula) 假設 $n, h \in N$

已知 $C_{n+h}^{2n+h} = c_0 \times C_{n+h}^{2n+h-1} + c_1 \times C_{n+h-1}^{2n+h-3} + \ldots + c_{i-1} \times C_{n+h-(i-1)}^{2n+h-(2i-1)} + \ldots + c_{n+h} \times C_0^{-h-1}$，

則 $|L:(0,0) \to (n+h,n);\{y \le x\}| = C_{n+h}^{2n+h} - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \times C_{n+h-i}^{(2n+h)-(2i+1)} = \sum_{i=n}^{n+h} c_i \times C_{n+h-i}^{(2n+h)-(2i+1)}$

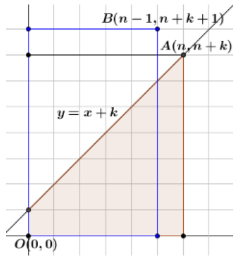
證　　明：已知

$$C_{n+h}^{2n+h} = c_0 \times C_{n+h}^{2n+h-1} + c_1 \times C_{n+h-1}^{2n+h-3} + \ldots + c_{i-1} \times C_{n+h-(i-1)}^{2n+h-(2i-1)} + \ldots + c_{n+h} \times C_0^{-h-1}$$

由範例 3.05 知 C_{n+h}^{2n+h} 為所有捷徑數，$S_0 \sim S_{n-1}$ 為不合理路徑，故 $S_n \sim S_{n+h}$ 為邊界條件在 $y \le x$ 下的路徑數。故

$$|L:(0,0) \to (n+h,n);\{y \le x\}| = C_{n+h}^{2n+h} - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \times C_{n+h-i}^{(2n+h)-(2i+1)} = \sum_{i=n}^{n+h} c_i \times C_{n+h-i}^{(2n+h)-(2i+1)}$$

定理 3.07：假設 $n,k\in N$



試證：$\left|L:(0,0)\to(n,n+k);\{y\le x+k\}\right|=\dfrac{k+1}{n+k+1}C_n^{2n+k}$

證　　明：設 $(0,0)$ 至直線 $y=x+k$ 上的格子點 $(n,n+k)$ 且滿足 $y\le x+k$ 條件下的路徑數為 $d_{(n,n+k)}^{y\le x+k}$，如右圖，則

原點至點 $A(n,n+k)$：

$$C_n^{2n+k}=d_{(0,k)}^{y\le x+k}\times C_n^{2n-1}+d_{(1,1+k)}^{y\le x+k}\times C_{n-1}^{2n-3}+\ldots+d_{(i,i+k)}^{y\le x+k}\times C_{n-i}^{2n-1-2i}+\ldots+d_{(n-1,n-1+k)}^{y\le x+k}\times C_1^1+d_{(n,n+k)}^{y\le x+k}\times C_0^{-1}$$

原點至點 $B(n-1,n+k+1)$：

$$C_{n-1}^{2n+k}=d_{(0,k)}^{y\le x+k}\times C_{n-1}^{2n-1}+d_{(1,1+k)}^{y\le x+k}\times C_{n-2}^{2n-3}+\ldots+d_{(i,i+k)}^{y\le x+k}\times C_{n-i-1}^{2n-1-2i}+\ldots+d_{(n-1,n-1+k)}^{y\le x+k}\times C_0^1$$

因 $C_{n-i}^{2n-1-2i}=C_{(2n-1-2i)-(n-i)}^{2n-1-2i}=C_{n-i-1}^{2n-1-2i}$ (剩餘定理)，故

$$C_n^{2n+k}=\left(d_{(0,k)}^{y\le x+k}\times C_{n-1}^{2n-1}+d_{(1,1+k)}^{y\le x+k}\times C_{n-2}^{2n-3}+\ldots+d_{(i,i+k)}^{y\le x+k}c_{i,k}\times C_{n-i-1}^{2n-1-2i}+\ldots+d_{(n-1,n-1+k)}^{y\le x+k}\times C_0^1\right)+d_{(n,n+k)}^{y\le x+k}\times C_0^{-1}$$

$$=C_{n-1}^{2n+k}+d_{(n,n+k)}^{y\le x+k}$$

又 $C_{n-1}^{2n+k}=\dfrac{(2n+k)!}{(n-1)!(n+k+1)!}=\dfrac{n}{n+k+1}\times\dfrac{(2n+k)!}{n!(n+k)!}=\dfrac{n}{n+k+1}C_n^{2n+k}$

$$d_{(n,n+k)}^{y\le x+k}=C_n^{2n+k}-C_{n-1}^{2n+k}=C_n^{2n+k}-\frac{n}{n+k+1}C_n^{2n+k}=\frac{k+1}{n+k+1}C_n^{2n+k}$$

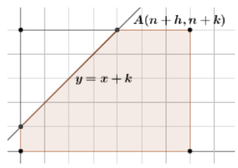
定理 3.08：假設 $n,k,h\in N$，已知

$$C_{n+h}^{2n+h+k}=d_{(0,k)}^{y\le x+k}\times C_{n+h}^{2n+h-1}+d_{(1,1+k)}^{y\le x+k}\times C_{n+h-1}^{2n+h-3}+\ldots+d_{(i,i+k)}^{y\le x+k}\times C_{n+h-i}^{2n+h-(2i+1)}+\ldots+d_{(n-1,n-1+k)}^{y\le x+k}\times C_{h+1}^{h+1}+\ldots+d_{(n+h,n+h+k)}^{y\le x+k}\times C_0^{-h-1}$$

，則

$$\left|L:(0,0)\to(n+h,n+k);\{y\le x+k\}\right|=C_{n+h}^{2n+h+k}-\sum_{i=0}^{n-1}d_{(i,i+k)}^{y\le x+k}\times C_{n+h-i}^{(2n+h)-(2i+1)}$$

$$=\sum_{i=n}^{n+h}d_{(i,i+k)}^{y\le x+k}\times C_{n+h-i}^{(2n+h)-(2i+1)}$$



證　　明：由定理 3.07 得

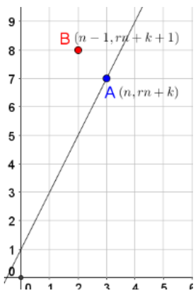
$$C_{n+h}^{2n+h+k}=d_{(0,k)}^{y\le x+k}\times C_{n+h}^{2n+h-1}+d_{(1,1+k)}^{y\le x+k}\times C_{n+h-1}^{2n+h-3}+\ldots+d_{(i,i+k)}^{y\le x+k}\times C_{n+h-i}^{2n+h-(2i+1)}+\ldots+d_{(n-1,n-1+k)}^{y\le x+k}\times C_{h+1}^{h+1}+\ldots+d_{(n+h,n+h+k)}^{y\le x+k}\times C_0^{-h-1}$$

由範例 3.05 知 C_{n+h}^{2n+h} 為所有捷徑數，$S_0\sim S_{n-1}$ 為不合理路徑，故 $S_n\sim S_{n+h}$ 為邊界條件 $y\le x+k$ 下的路徑數。故

$$\left|L:(0,0)\to(n+h,n+k);\{y\le x+k\}\right|=C_{n+h}^{2n+h+k}-\sum_{i=0}^{n-1}d_{(i,i+k)}^{y\le x+k}\times C_{n+h-i}^{(2n+h)-(2i+1)}$$

$$=\sum_{i=n}^{n+h}d_{(i,i+k)}^{y\le x+k}\times C_{n+h-i}^{(2n+h)-(2i+1)}$$

定理 3.09：假設$r,n\in N,k\in N\cup\{0\}$，



(1)試證：

$$\left|L:(0,0)\to(n,rn+k);\{y\le rx+k\}\right|=\frac{k+1}{rn+k+1}C_n^{(r+1)n+k}$$

(2)試證：$\left|L:(0,0)\to(n,rn);\{y\le rx\}\right|=d_{(n,rn)}^{y\le rx}=\dfrac{1}{rn+1}C_n^{(r+1)n}$

證　　明：(1)原點至點$A(n,rn+k)$：

$$C_n^{(r+1)n+k}=d_{(0,k)}^{y\le rx+k}\times C_n^{(r+1)n-1}+d_{(1,r+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n-1}^{(r+1)n-1-(r+1)}+\ldots+d_{(i,ri+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n-i}^{(r+1)n-1-i(r+1)}+\ldots$$
$$+d_{(n-1,r(n-1)+k)}^{y\le rx+k}\times C_1^{r}+d_{(n,rn+k)}^{y\le rx+k}\times C_0^{-1}$$

原點至點$B(n-1,rn+k+1)$：

$$C_{n-1}^{(r+1)n+k}=d_{(0,k)}^{y\le rx+k}\times C_{n-1}^{(r+1)n-1}+d_{(1,r+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n-2}^{(r+1)n-1-(r+1)}+\ldots+d_{(i,ri+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n-i-1}^{(r+1)n-1-i(r+1)}+\ldots$$
$$+d_{(n-1,r(n-1)+k)}^{y\le rx+k}\times C_0^{r}$$

因$C_{n-i}^{(r+1)n-1-i(r+1)}=C_{n-i}^{(n-i)(r+1)-1}$

故$C_{n-i-1}^{(n-i)(r+1)-1}=\dfrac{((n-i)(r+1)-1)!}{(n-i-1)!((n-i)r)!}=\dfrac{(n-i)}{(n-i)r}\times\dfrac{((n-i)(r+1)-1)!}{(n-i)!((n-i)r-1)!}=\dfrac{1}{r}C_{n-i}^{(n-i)(r+1)-1}$

可得

$$C_n^{(r+1)n+k}=\left(\begin{array}{l}d_{(0,k)}^{y\le rx+k}\times C_n^{(r+1)n-1}+d_{(1,r+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n-1}^{(r+1)n-1-(r+1)}+\ldots+d_{(i,ri+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n-i}^{(r+1)n-1-i(r+1)}+\ldots\\+d_{(n-1,r(n-1)+k)}^{y\le rx+k}\times C_1^{r}\end{array}\right)$$
$$+d_{(n,rn+k)}^{y\le rx+k}\times C_0^{-1}$$
$$=r\left(\begin{array}{l}d_{(0,k)}^{y\le rx+k}\times C_{n-1}^{(r+1)n-1}+d_{(1,r+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n-2}^{(r+1)n-1-(r+1)}+\ldots+d_{(i,ri+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n-i-1}^{(r+1)n-1-i(r+1)}+\ldots\\+d_{(n-1,r(n-1)+k)}^{y\le rx+k}\times C_0^{r}\end{array}\right)$$
$$+d_{(n,rn+k)}^{y\le rx+k}$$
$$=rC_{n-1}^{(r+1)n+k}+d_{(n,rn+k)}^{y\le rx+k}$$

又$C_{n-1}^{(r+1)n+k}=\dfrac{((r+1)n+k)!}{(n-1)!(rn+k+1)!}=\dfrac{n}{rn+k+1}\times\dfrac{((r+1)n+k)!}{n!(rn+k)!}=\dfrac{n}{rn+k+1}C_n^{(r+1)n+k}$

$$\left|L:(0,0)\to(n,rn+k);\{y\le rx+k\}\right|$$
$$=d_{(n,rn+k)}^{y\le rx+k}=C_n^{(r+1)n+k}-rC_{n-1}^{(r+1)n+k}=C_n^{(r+1)n+k}-\frac{rn}{rn+k+1}C_n^{(r+1)n+k}=\frac{k+1}{rn+k+1}C_n^{(r+1)n+k}$$

(2)由(1)知

當$k=0$時，可得$\left|L:(0,0)\to(n,rn);\{y\le rx\}\right|=d_{(n,rn)}^{y\le rx}=\dfrac{1}{rn+1}C_n^{(r+1)n}$

定理 3.10：假設 $r,n,h\in N, k\in N\cup\{0\}$

$$C_{n+h}^{(r+1)n+h+k}=d_{(0,k)}^{y\le rx+k}\times C_{n+h}^{(r+1)n+h-1}+d_{(1,r+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n+h-1}^{(r+1)n+h-1-(r+1)}+\ldots$$
$$+d_{(i,ri+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n+h-i}^{(r+1)n+h-1-i(r+1)}+\ldots+d_{(n-1,r(n-1)+k)}^{y\le rx+k}\times C_{h+1}^{h+r}+\ldots+d_{(n+h,r(n+h)+k)}^{y\le rx+k}\times C_{0}^{-rh-1}$$

則，

(1) $$\left|L:(0,0)\to(n+h,rn+k);\{y\le rx+k\}\right|=C_{n+h}^{(r+1)n+h+k}-\sum_{i=0}^{n-1}d_{(i,ri+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n+h-i}^{(r+1)n+h-1-i(r+1)}$$

$$=\sum_{i=n}^{n+h}d_{(i,ri+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n+h-i}^{(r+1)n+h-1-i(r+1)}$$

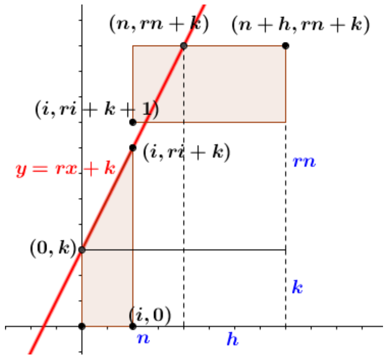
(2) $$\left|L:(0,0)\to(n+h,rn);\{y\le rx\}\right|=C_{n+h}^{(r+1)n+h}-\sum_{i=0}^{n-1}d_{(i,ri)}^{y\le rx}\times C_{n+h-i}^{(r+1)n+h-1-i(r+1)}$$

$$=\sum_{i=n}^{n+h}d_{(i,ri)}^{y\le rx}\times C_{n+h-i}^{(r+1)n+h-1-i(r+1)}$$

證　　明：(1)已知

$$C_{n+h}^{(r+1)n+h+k}=d_{(0,k)}^{y\le rx+k}\times C_{n+h}^{(r+1)n+h-1}+d_{(1,r+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n+h-1}^{(r+1)n+h-1-(r+1)}+\ldots+d_{(i,ri+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n+h-i}^{(r+1)n+h-1-i(r+1)}+\ldots$$
$$+d_{(n-1,r(n-1)+k)}^{y\le rx+k}\times C_{h+1}^{h+r}+\ldots+d_{(n+h,r(n+h)+k)}^{y\le rx+k}\times C_{0}^{-h-1}$$

可知 $C_{n+h}^{(r+1)n+h+k}$ 為所有捷徑數， $S_0\sim S_{n-1}$ 為不合理路徑，故 $S_n\sim S_{n+h}$ 為邊界條件 $y\le rx+k$ 下的路徑數。故



$$\left|L:(0,0)\to(n+h,rn+k);\{y\le rx+k\}\right|$$
$$=C_{n+h}^{(r+1)n+h+k}-\sum_{i=0}^{n-1}d_{(i,ri+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n+h-i}^{(r+1)n+h-1-i(r+1)}$$
$$=\sum_{i=n}^{n+h}d_{(i,ri+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n+h-i}^{(r+1)n+h-1-i(r+1)}$$

(2)由(1)知

當 $k=0$ 時，可得

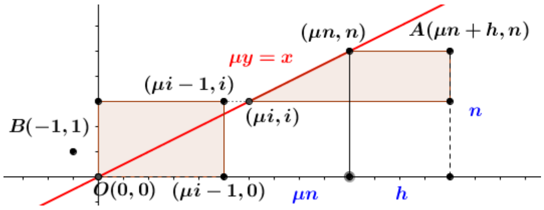
$$\left|L:(0,0)\to(n+h,rn);\{y\le rx\}\right|=C_{n+h}^{(r+1)n+h}-\sum_{i=0}^{n-1}d_{(i,ri)}^{y\le rx}\times C_{n+h-i}^{(r+1)n+h-1-i(r+1)}$$
$$=\sum_{i=n}^{n+h}d_{(i,ri)}^{y\le rx}\times C_{n+h-i}^{(r+1)n+h-1-i(r+1)}$$

定理 3.11：假設 $\mu,n\in N, h\in N\cup\{0\}$

(1)試證：$\left|L:(0,0)\to(\mu n+h,n);\{\mu y\le x\}\right|=\dfrac{h+1}{\mu n+h+1}C_{n}^{(\mu+1)n+h}$

(2)試證：

$\left|L(0,0)\to(\mu n,n);\{\mu y\le x\}\right|=\dfrac{1}{\mu n+1}C_{n}^{(\mu+1)n}$



證　　明：(1)原點至點 $A(\mu n+h,n)$：

$$C_{n}^{(\mu+1)n+h}=\sum_{i=1}^{n}\left(C_{i}^{(\mu+1)i-1}\times\left|L:(\mu i,i)\to(\mu n+h,n);\{\mu y\le x\}\right|\right)+\left|L:(0,0)\to(\mu n+h,n);\{\mu y\le x\}\right|$$

點 $B(-1,1)$ 至點 $A(\mu n+h,n)$：

$$C_{n-1}^{(\mu+1)n+h}=\sum_{i=1}^{n}\left(C_{i-1}^{(\mu+1)i-1}\times\left|L:(\mu i,i)\to(\mu n+h,n);\{\mu y\le x\}\right|\right)$$

因 $C_{i}^{(\mu+1)i-1}=\dfrac{((\mu+1)i-1)!}{i!(\mu i-1)!}=\dfrac{\mu i}{i}\times\dfrac{((\mu+1)i-1)!}{(i-1)!(\mu i)!}=\mu C_{i-1}^{(\mu+1)i-1}$

可得

$$C_{n}^{(\mu+1)n+h}=\sum_{i=1}^{n}\left(C_{i}^{(\mu+1)i-1}\times\left|L:(\mu i,i)\to(\mu n+h,n);\{\mu y\le x\}\right|\right)+\left|L:(0,0)\to(\mu n+h,n);\{\mu y\le x\}\right|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\mu C_{i-1}^{(\mu+1)i-1}\times\left|L:(\mu i,i)\to(\mu n+h,n);\{\mu y\le x\}\right|\right)+\left|L:(0,0)\to(\mu n+h,n);\{\mu y\le x\}\right|$$

$$=\mu C_{n-1}^{(\mu+1)n+h}+\left|L:(0,0)\to(\mu n+h,n);\{\mu y\le x\}\right|$$

故

$$\left|L:(0,0)\to(\mu n+h,n);\{\mu y\le x\}\right|=C_{n}^{(\mu+1)n+h}-\mu C_{n-1}^{(\mu+1)n+h}=\frac{h+1}{\mu n+h+1}C_{n}^{(\mu+1)n+h}$$

(2)由(1)知

當 $h=0$ 時，可得 $\left|L:(0,0)\to(\mu n,n);\{\mu y\le x\}\right|=\dfrac{1}{\mu n+1}C_{n}^{(\mu+1)n}$

定理 3.12：假設 $\mu,n,k\in N, h\in N\cup\{0\}$

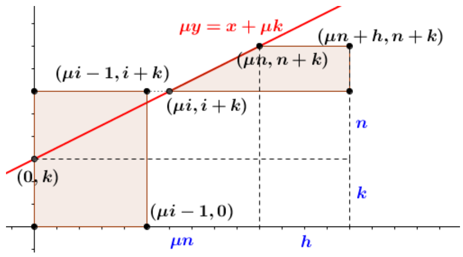
(1)試證：$\left|L:(0,0)\to(\mu n+h,n+k);\{\mu y\le x+\mu k\}\right|$

$$=C_{n+k}^{(\mu+1)n+h+k}-\sum_{i=1}^{n}C_{i+k}^{(\mu+1)i+k-1}\frac{h+1}{\mu(n-i)+h+1}C_{n-i}^{(\mu+1)(n-i)+h}$$

(2)試證：$\left|L;(0,0)\to(\mu n,n+k);\{\mu y\le x+\mu k\}\right|$ 。

$$=C_{n+k}^{(\mu+1)n+k}-\sum_{i=1}^{n}C_{i+k}^{(\mu+1)i+k-1}\frac{1}{\mu(n-i)+1}C_{n-i}^{(\mu+1)(n-i)}$$

證　　明：(1)由 $(0,0)\to(\mu n+h,n+k)$ 的所有路徑為 $C_{n+k}^{(\mu+1)n+h+k}$



假設路徑 S 為 $(0,0)\to(\mu n+h,n+k)$ 的一條路徑，將沿著 S 由 $(\mu n+h,n+k)\to(0,0)$ 返回的路徑稱為 S'，若 S 為不合理路徑，則 S' 必穿過 $\mu y=x+\mu k$ ，不失一般性，假設路徑 S' 穿過 $\mu y=x+\mu x$ 的第一個交點為 $(\mu i,i+k)$ 且 $1\le i\le n$ ，則不合理的路徑可寫成

$|L:(0,0)\to(\mu i-1,i+k)|\times|L:(\mu i,i+k)\to(\mu n+h,n+k);\{\mu y\le x+\mu k\}|$ ：

$|L:(0,0)\to(\mu i-1,i+k)|$ ：表 $(0,0)\to(\mu i-1,i+k)$ 的所有路徑 $=C_{i+k}^{(\mu+1)i+k-1}$

$$|(L:(\mu i,i+k)\to(\mu n+h,n+k);\{\mu y\le x+\mu k\})|=|L:(0,0)\to((n-i)\mu+h,n-i);\{\mu y\le x\}|$$

代入定理 3.11 可得 $\dfrac{h+1}{\mu(n-i)+h+1}C_{n-i}^{(\mu+1)(n-i)+h}$ 。即

$$|L:(0,0)\to(\mu n+h,n+k);\{\mu y\le x+\mu k\}|=$$

$$=C_{n+k}^{(\mu+1)n+h+k}-\sum_{i=1}^{n}|L:(0,0)\to(\mu i-1,i+k)|\times|L:(\mu i,i+k)\to(\mu n+h,n+k);\{\mu y\le x+\mu k\}|$$

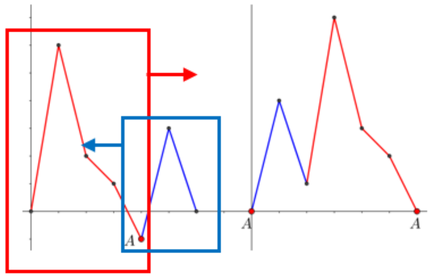
$$=C_{n+k}^{(\mu+1)n+h+k}-\sum_{i=1}^{n}C_{i+k}^{(\mu+1)i+k-1}\frac{h+1}{\mu(n-i)+h+1}C_{n-i}^{(\mu+1)(n-i)+h}$$

故得証

(2)當 $h=0$ 時，可得

$$|L:(0,0)\to(\mu n,n+k);\{\mu y\le x+\mu k\}|=C_{n+k}^{(\mu+1)n+k}-\sum_{i=1}^{n}C_{i+k}^{(\mu+1)i+k-1}\frac{1}{\mu(n-i)+1}C_{n-i}^{(\mu+1)(n-i)}$$

引理 3.13：(Spitzer's Lemma)



(1) $a_1,a_2,...,a_N$ 是實數

(2) $a_1+a_2+...+a_N=0$

(3)任何部分和不為 0，即 $a_j+a_{j+1}+...+a_k\neq 0$

且 $j\leq k,k-j<N$ ，

則存在唯一一組循環排列 $a_i,a_{i+1},...,a_N,a_1,a_2,...,a_{i-1}$ ，使得前任意項的部分和非負

證　　明：將 $a_1,a_2,...,a_N$ 視為 $(1,a_1),(1,a_2),...,(1,a_N)$ 路徑並連接起來，因為

$a_1+a_2+...+a_N=0$ ，可得一條由 $(0,0)$ 出發，而終點為 $(N,0)$ 的路徑。

若路徑(不含始、終點)的最低點高於 x 軸，則此路徑符合所求。

若路徑(不含始、終點)的最低點低於 x 軸，我們將此最低點稱為 A ，把 A 的後半段至終點移至前面，而原點至 A 段移至後半段，如圖所示，可得唯一一條恆在 x 軸上方的路徑。

引理 3.14： $\left|L:(0,0)\to(\mu,r);\{\mu y\leq rx\}\right|=\dfrac{1}{\mu+r}C_r^{\mu+r},(\mu,r)=1$

證　　明：從 $(0,0)\to(\mu,r)$ 的路徑數為 $C_r^{\mu+r}$ ，今分別將每一個水平或鉛直移動，給定一個數值，表成序列。

考慮序列 $a_1,a_2,...,a_{\mu+r}$ ，若第 i 步是水平方向，則令 $a_i=r$ ，若第 i 步是鉛垂方向，

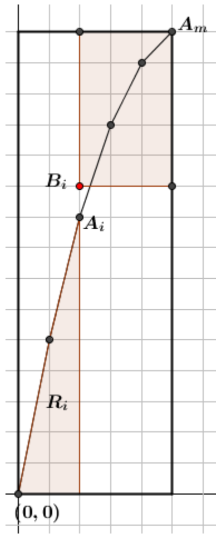
則令 $a_i=-\mu$ ，因為 $(\mu,r)=1$ ，故符合引理 3.13，即 $a_1,a_2,...,a_{\mu+r}=0$ 且沒有任何

部分和是 0，即 $a_j+a_{j+1}+...+a_k\neq 0$ 且 $j\leq k,k-j<\mu+r$ 。

可知符合引理 3.13 (2)(3)的序列 $a_1,a_2,...,a_{\mu+r}$ 只有一個非負的表示法

故方法數 $\dfrac{1}{\mu+r}C_r^{\mu+r}$ ，即證明 $\left|L:(0,0)\to(\mu,r);\{\mu y\leq rx\}\right|=\dfrac{1}{\mu+r}C_r^{\mu+r},(\mu,r)=1$

定理 3.15：(1)已知邊界條件形如，

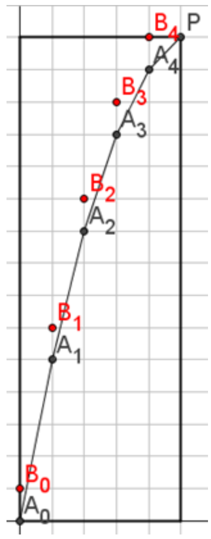


$$R_m:\begin{cases} y\le mx, 0\le x\le 1 \\ \cdots \\ y\le (m-k)x+\dfrac{k(k+1)}{2}, k\le x\le k+1, k=0,\ldots,m-1 \\ \cdots \\ y\le x+\dfrac{m(m-1)}{2}, m-1\le x\le m \end{cases}$$

令 $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(k)=\sum\limits_{i=1}^{k}(m+1-i)=\dfrac{k}{2}(2m+1-k), k\in N \end{cases}$，

則 $\left|L:(0,0)\to(m,f(m));\{R_m\}\right|=C_m^{m+f(m)}-\sum\limits_{i=0}^{m-1}d_{(i,f(i))}^{R_i}\times C_{m-i}^{(m-i)+(f(m)-f(i))-1}$

(2)當 $m=5$ 時，即 $R_5:\begin{cases} y\le 5x, 0\le x\le 1 \\ y\le 4x+1, 1\le x\le 2 \\ y\le 3x+3, 2\le x\le 3 \\ y\le 2x+6, 3\le x\le 4 \\ y\le x+10, 4\le x\le 5 \end{cases}$，令 $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(k)=\dfrac{k}{2}(11-k), k\in N \end{cases}$，



則 $\left|L:(0,0)\to(5,f(5));\{R_5\}\right|=C_5^{5+f(5)}-\sum\limits_{i=0}^{5-1}d_{(i,f(i))}^{R_i}\times C_{5-i}^{(5-i)+(f(5)-f(i))-1}$

證明：(1)由引理 3.06 可推得

$$\left|L:(0,0)\to(m,f(m));\{R_m\}\right|=C_m^{m+f(m)}-\sum_{i=0}^{m-1}d_{(i,f(i))}^{R_i}\times C_{m-i}^{((m-i)+f(m)-f(i))-1}$$

(2)使用迭代方法，依序求得下列各值

$$d_{(0,f(0))}^{R_0}=|L:(0,0)\to(0,f(0));\{R_0\}|=1$$

$$d_{(1,f(1))}^{R_1}=|L:(0,0)\to(1,f(1));\{R_1\}|=C_1^{1+5}-d_{(0,f(0))}^{R_0}\times C_1^{1+4}=1$$

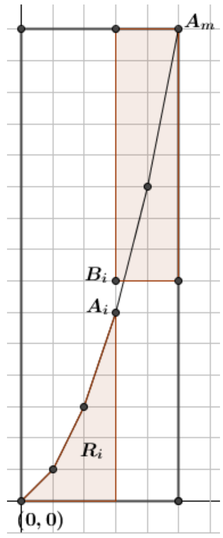
$$d_{(2,f(2))}^{R_2}=|L:(0,0)\to(2,f(2));\{R_2\}|$$
$$=C_2^{2+f(2)}-d_{(0,f(0))}^{R_0}\times C_{2-0}^{(2-0)+(f(2)-f(0))-1}-d_{(1,f(1))}^{R_1}\times C_{2-1}^{(2-1)+(f(2)-f(1))-1}=55-1\times 45-1\times 4=6$$

$$d_{(3,f(3))}^{R_3}=|L:(0,0)\to(3,f(3));\{R_3\}|$$
$$=C_3^{3+f(3)}-d_{(0,f(0))}^{R_0}\times C_{3-0}^{(3-0)+f(3)-f(0)-1}-d_{(1,f(1))}^{R_1}\times C_{3-1}^{(3-1)+f(3)-f(1)-1}-d_{(2,f(2))}^{R_2}\times C_{3-2}^{(3-2)+f(3)-f(2)-1}$$
$$=455-1\times 364-1\times 28-6\times 3=45$$

$$d^{R_4}_{(4,f(4))}=|L:(0,0)\to(4,f(4));\{R_4\}|$$
$$=C_4^{4+f(4)}-d^{R_0}_{(0,f(0))}\times C_4^{17}-d^{R_1}_{(1,f(1))}\times C_3^{11}-d^{R_2}_{(2,f(2))}\times C_2^{6}-d^{R_3}_{(3,f(3))}\times C_1^{2}$$
$$=3060-1\times2380-1\times165-6\times15-45\times2=335$$

$$d^{R_5}_{(5,f(5))}=|L:(0,0)\to(5,f(5));\{R_5\}|$$
$$=C_5^{5+f(5)}-d^{R_0}_{(0,f(0))}\times C_5^{19}-d^{R_1}_{(1,f(1))}\times C_4^{13}-d^{R_2}_{(2,f(2))}\times C_3^{8}-d^{R_3}_{(3,f(3))}\times C_2^{4}-d^{R_3}_{(4,f(4))}\times C_1^{1}$$
$$=15504-1\times11628-1\times715-6\times56-45\times6-335\times1=2220$$

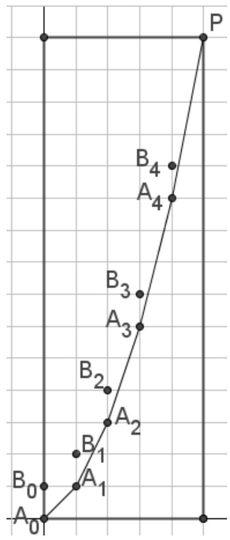
定理 3.16：(1)已知邊界條件形如，



$$R_m:\begin{cases} y\le x, 0\le x\le 1\\ \cdots\\ y\le (k+1)x-\dfrac{k(k+1)}{2}, k\le x\le k+1, k=0,\ldots,m-1\\ \cdots\\ y\le mx-\dfrac{m(m-1)}{2}, m-1\le x\le m\end{cases}$$

令 $g(k)=\sum_{i=0}^{k} i=\dfrac{k(k+1)}{2}$ ，則

$$\left|L:(0,0)\to(m,g(m));\{R_m\}\right|=C_m^{m+g(m)}-\sum_{i=0}^{m-1}d^{R_i}_{(i,g(i))}\times C_{m-i}^{(m-i)+(g(m)-g(i))-1}$$



(2)當 $m=5$ 時，即 $R_5:\begin{cases} y\le x, 0\le x\le 1\\ y\le 2x-1, 1\le x\le 2\\ y\le 3x-3, 2\le x\le 3\\ y\le 4x-6, 3\le x\le 4\\ y\le 5x-10, 4\le x\le 5\end{cases}$ ，令 $g(k)=\dfrac{k(k+1)}{2}$ ，

則 $\left|L:(0,0)\to(5,g(5));\{R_5\}\right|=C_5^{5+g(5)}-\sum_{i=0}^{5-1}d^{R_i}_{(i,g(i))}\times C_{5-i}^{(5-i)+(g(5)-g(i))-1}$

證　　明：(1)由引理 3.06 可推得

$$\left|L:(0,0)\to(m,g(m));\{R_m\}\right|=C_m^{m+g(m)}-\sum_{i=0}^{m-1}d^{R_i}_{(i,g(i))}\times C_{m-i}^{((m-i)+g(m)-g(i))-1}$$

(2)使用迭代方法，依序求得下列各值

$$d^{R_0}_{(0,g(0))}=|L:(0,0)\to(0,g(0));\{R_0\}|=1$$

$$d^{R_1}_{(1,g(1))}=|L:(0,0)\to(1,g(1));\{R_1\}|=C_1^{1+g(1)}-d^{R_0}_{(0,g(0))}\times C_{1-0}^{(1-0)+(g(1)-g(0))-1}=1$$

$$d^{R_2}_{(2,g(2))}=|L:(0,0)\to(2,g(2));\{R_2\}|$$
$$=C_2^{2+g(2)}-d^{R_0}_{(0,g(0))}\times C_{2-0}^{(2-0)+(g(2)-g(0))-1}-d^{R_1}_{(1,g(1))}\times C_{2-1}^{(2-1)+(g(2)-g(1))-1}=10-1\times6-1\times2=2$$

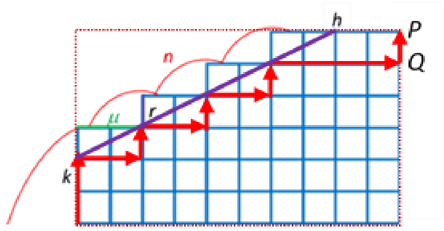
$$
\begin{aligned}
d^{R_3}_{(3,g(3))} &= |L:(0,0)\to(3,g(3));\{R_3\}| \\
&= C_3^{3+g(3)} - d^{R_0}_{(0,g(0))}\times C_{3-0}^{(3-0)+(g(3)-g(0))-1} - d^{R_1}_{(1,g(1))}\times C_{3-1}^{(3-1)+(g(3)-g(1))-1} - d^{R_2}_{(2,g(2))}\times C_{3-2}^{(3-2)+(g(3)-g(2))-1} \\
&= 84-1\times 56-1\times 15-2\times 3=7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d^{R_4}_{(4,g(4))} &= |L:(0,0)\to(4,g(4));\{R_4\}| \\
&= C_4^{4+g(4)} - d^{R_0}_{(0,g(0))}\times C_4^{13} - d^{R_1}_{(1,g(1))}\times C_3^{11} - d^{R_2}_{(2,g(2))}\times C_2^{8} - d^{R_3}_{(3,g(3))}\times C_1^{4} \\
&= 1001-1\times 715-1\times 165-2\times 28-7\times 4=37
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d^{R_5}_{(5,g(5))} &= |L:(0,0)\to(5,g(5));\{R_5\}| \\
&= C_5^{5+g(5)} - d^{R_0}_{(0,g(0))}\times C_5^{19} - d^{R_1}_{(1,g(1))}\times C_4^{17} - d^{R_2}_{(2,g(2))}\times C_3^{14} - d^{R_3}_{(3,g(3))}\times C_2^{10} - d^{R_3}_{(4,g(4))}\times C_1^{5} \\
&= 15504-1\times 11628-1\times 2380-2\times 364-7\times 45-37\times 5=268
\end{aligned}
$$

肆、研究結果

為了方便說明，對於變化固定的矩形堆疊我們定義 $A_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$ 的階梯形狀為 μ 格 r 階記作 $\frac{r}{\mu}$ ，左邊起始高度為 k 、共 n 層，且最上層水平有 h 格，這個圖形的堆疊數則記為 $T_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$ 。對於 $A_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$ ，當 r,μ 固定時，由定義可知，此圖形恰完全位於寬 $(n-1)\mu+h$ 、高 $(n-1)r+k$ 的矩形內。如圖，以 $A_{4,4}^{\frac{1}{2},3}$ 表示結構，以 $T_{4,4}^{\frac{1}{2},3}$ 表示所有可能的堆疊方法。



如何計算 $T_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$ ？堆疊方法數等於根據演算 3.02 所得到的路徑數，故在 $A_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$ 中找到一條最高虛擬路線(紅色箭頭)，順著最高虛擬路線的尖點(向上並往右轉之點)連線，可畫出路徑邊界線(紫色)。以本圖為例，每條路徑都會通過 Q ，再通過 P ，計算至 Q 有公式，故僅計算至 Q ，即 $T_{4,4}^{\frac{1}{2},3}=\left|L:(0,0)\to(10,5);\{2y\le x+4\}\right|$ 。

如何將路徑公式轉換成堆疊公式？首先先定義階梯形狀 $A_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$ ，找到對應定理，再依以下原則代入換算，即可得到堆疊數 $T_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$ 的計算公式：

①k 一律用 $k-1$ 代入

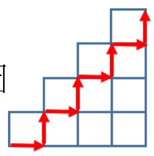
②當 $h=\mu$ 時， n 代原值， h 代入 0

③當 $h>\mu$ 時， n 用 $n-1$ 代入， h 代原值

(一)一格一階

性質 4.01： $T_{n,1}^{\frac{1}{1},1}=\frac{1}{n+1}C_n^{2n}=c_n$ 。

證明：由引理 3.03(2)，可得 $T_{n,1}^{\frac{1}{1},1}=\left|L:(0,0)\to(n,n);\{y\le x\}\right|=\frac{1}{n+1}C_n^{2n}=c_n$

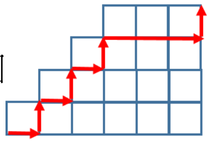
範例 4.01：如圖  ，有多少種可能的堆疊方法？

解答：由性質 4.01 可得 $T_{4,1}^{\frac{1}{1},1}=\frac{1}{4+1}C_4^{2\times4}=14$

性質 4.02： $T_{n,h}^{\frac{1}{1},1}=\dfrac{h+1}{n+h}C_{n-1}^{2n+h-2}$

證明：由引理 3.03(1)知，

$$T_{n,h}^{\frac{1}{1},1}=\left|L:(0,0)\to(n-1+h,n-1);\{y\le x\}\right|=\frac{h+1}{(n-1)+h+1}C_{n-1}^{2(n-1)+h}=\frac{h+1}{n+h}C_{n-1}^{2n+h-2}\text{。}$$

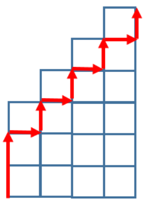
範例 4.02：如圖  ，有多少種可能的堆疊方法？

解法：由性質 4.02 可得 $T_{4,3}^{\frac{1}{1},1}=\dfrac{3+1}{4+3}C_{4-1}^{2\times4+3-2}=48$

性質 4.03： $T_{n,1}^{\frac{1}{1},k}=\dfrac{k}{n+k}C_{n}^{2n+k-1}$

證明：由定理 3.07 知，

$$T_{n,1}^{\frac{1}{1},k}=\left|L:(0,0)\to(n,n+(k-1));\{y\le x\}\right|$$
$$=\frac{(k-1)+1}{n+(k-1)+1}C_{n}^{2n+(k-1)}=\frac{k}{n+k}C_{n}^{2n+k-1}$$

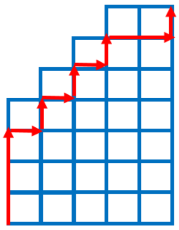
範例 4.03：如圖  ，有多少種可能的堆疊方法？

解法：由性質 4.03 可得 $T_{4,1}^{\frac{1}{1},3}=\dfrac{3}{4+3}C_{4}^{2\times4+3-1}=90$

性質 4.04： $T_{n,h}^{\frac{1}{1},k}=C_{n+h-1}^{2n+k+h-3}-\sum_{i=0}^{n-2}d_{(i,i+k-1)}^{y\le x+k-1}\times C_{n+h-1-i}^{2n+h-3-2i}=\sum_{i=n-1}^{n+h-1}d_{(i,i+k-1)}^{y\le x+(k-1)}\times C_{n+h-1-i}^{2n+h-3-2i}$

證明：由定理 3.08 知 $\left|L:(0,0)\to(n+h,n+k);\{y\le x+k\}\right|=\sum_{i=n}^{n+h}d_{(i,i+k)}^{y\le x+k}\times C_{n+h-i}^{(2n+h)-(2i+1)}$

$$T_{n,h}^{\frac{1}{1},k}=\left|L:(0,0)\to((n-1)+h,(n-1)+(k-1));\{y\le x+(k-1)\}\right|$$
$$=C_{(n-1)+h}^{2(n-1)+h+(k-1)}-\sum_{i=0}^{(n-1)-1}d_{(i,i+(k-1))}^{y\le x+(k-1)}\times C_{(n-1)+h-i}^{(2(n-1)+h)-(2i+1)}$$
$$=C_{n+h-1}^{2n+h+k-3}-\sum_{i=0}^{n-2}d_{(i,i+k-1)}^{y\le x+(k-1)}\times C_{n+h-1-i}^{2n+h-3-2i}=\sum_{i=n-1}^{n+h-1}d_{(i,i+k-1)}^{y\le x+(k-1)}\times C_{n+h-1-i}^{2n+h-3-2i}$$

範例 4.04：如圖  ，有多少種可能的堆疊方法？

解法：由性質 4.04 可得

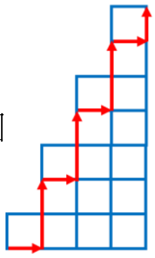
$$T_{4,2}^{\frac{1}{1},4}=C_{4+2-1}^{2\times4+4+2-3}-\sum_{i=0}^{4-2} d_{(i,i+(4-1))}^{y\le x+(4-1)}\times C_{4+2-1-i}^{2\times4+2-3-2i}$$

$$=C_5^{11}-(d_{(0,3)}^{x+3}\times C_5^{7}+d_{(1,4)}^{x+3}\times C_4^{5}+d_{(2,5)}^{x+3}\times C_3^{3})=407$$

(二)一格多階

性質 4.05：$T_{n,1}^{\frac{r}{1},1}=\frac{1}{rn+1}C_n^{(r+1)n}$ 。

證明：由定理 3.09(2)，可得 $T_{n,1}^{\frac{r}{1},1}=\left|L:(0,0)\to(n,rn);\{y\le rx\}\right|=\frac{1}{rn+1}C_n^{(r+1)n}$

範例 4.05：如圖  ，有多少種可能的堆疊方式？

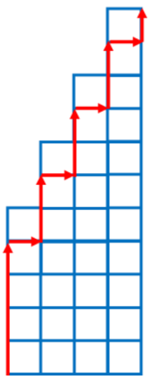
解法：由性質 4.05 可得，$T_{4,1}^{\frac{2}{1},1}=\frac{1}{2\times4+1}C_4^{(2+1)\times4}=55$

性質 4.06：$T_{n,1}^{\frac{r}{1},k}=\frac{k}{rn+k}C_n^{(r+1)n+(k-1)}$

證明：由定理 3.09(1)，可得

$$T_{n,1}^{\frac{1}{1},k}=\left|L:(0,0)\to(n,n+(k-1));\{y\le rx+(k-1)\}\right|$$

$$=\frac{(k-1)+1}{rn+(k-1)+1}C_n^{(r+1)n+(k-1)}=\frac{k}{rn+k}C_n^{(r+1)n+k-1}$$

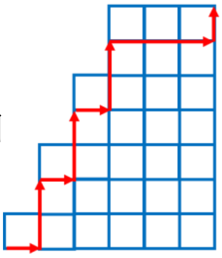
範例 4.06：如圖  ，有多少種可能的堆疊方法？

解法：由性質 4.06 可得，$T_{4,1}^{\frac{2}{1},5}=\frac{5}{2\times4+5}C_4^{(2+1)4+(5-1)}=\frac{5}{13}C_4^{16}=700$

性質 4.07：$T_{n,h}^{\frac{r}{1},1}=C_{n+h-1}^{(r+1)(n-1)+h}-\sum_{i=0}^{n-2}d_{(i,ri)}^{y\le rx}\times C_{n+h-1-i}^{(r+1)(n-1)+h-1-i(r+1)}$

證明：由定理 3.10(2)，可得

$$
\begin{aligned}
T_{n,h}^{\frac{r}{1},1}&=\left|L:(0,0)\to((n-1)+h,r(n-1));\{y\le rx\}\right|\\
&=C_{(n-1)+h}^{(r+1)(n-1)+h}-\sum_{i=0}^{(n-1)-1}d_{(i,ri)}^{y\le rx}\times C_{(n-1)+h-i}^{(r+1)(n-1)+h-1-i(r+1)}\\
&=C_{n+h-1}^{(r+1)(n-1)+h}-\sum_{i=0}^{n-2}d_{(i,ri)}^{y\le rx}\times C_{n+h-1-i}^{(r+1)(n-1)+h-1-i(r+1)}\\
&=\sum_{i=n-1}^{n-1+h}d_{(i,ri)}^{y\le rx}\times C_{n+h-1-i}^{(r+1)(n-1)+h-1-i(r+1)}
\end{aligned}
$$
。

範例 4.07：如圖 ，有多少種可能的堆疊方法？

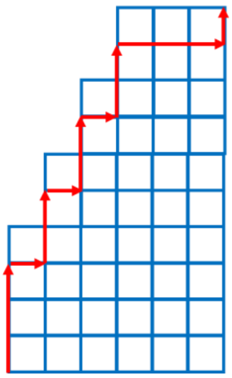
解法：由性質 4.07 可得，

$$
\begin{aligned}
T_{4,3}^{\frac{2}{1},1}&=C_{(4-1)+3}^{(2+1)(4-1)+3}-\sum_{i=0}^{4-2}d_{(i,2i)}^{y\le 2x}\times C_{(4-1)+3-i}^{(2+1)(4-1)+3-1-i(2+1)}=C_6^{12}-\left(d_{(0,0)}^{y\le 2x}\times C_6^{11}+d_{(1,2)}^{y\le 2x}\times C_5^{8}+d_{(2,4)}^{y\le 2x}\times C_4^{5}\right)\\
&=924-(1\times462+1\times56+3\times5)=391
\end{aligned}
$$

性質 4.08：$T_{n,h}^{\frac{r}{1},k}=C_{n+h-1}^{(r+1)(n-1)+k+h-1}-\sum_{i=0}^{n-2}d_{(i,ri+k-1)}^{y\le rx+k-1}\times C_{n-1+h-i}^{(r+1)(n-1)+h-1-i(r+1)}$

證明：由定理 3.10(1)可得，

$$
\begin{aligned}
T_{n,h}^{\frac{r}{1},k}&=\left|L:(0,0)\to((n-1)+h,r(n-1)+(k-1);\{y\le rx+(k-1)\}\right|\\
&=C_{(n-1)+h}^{(r+1)(n-1)+h+(k-1)}-\sum_{i=0}^{(n-1)-1}d_{(i,ri+(k-1))}^{y\le rx+(k-1)}\times C_{(n-1)+h-i}^{(r+1)(n-1)+h-1-i(r+1)}\\
&=C_{n+h-1}^{(r+1)(n-1)+k+h-1}-\sum_{i=0}^{n-2}d_{(i,ri+k-1)}^{y\le rx+k-1}\times C_{n-1+h-i}^{(r+1)(n-1)+h-1-i(r+1)}\\
&=\sum_{i=n}^{n+h=}d_{(i,ri+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n+h-i}^{(r+1)n+h-1-i(r+1)}
\end{aligned}
$$

範例 4.08：如圖  ，有多少種可能的堆疊方法？

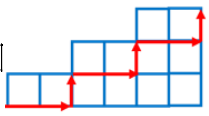
解法：由性質 4.08 可得，

$$T_{4,3}^{\frac{2}{1},4}=C_{(4-1)+3}^{(2+1)(4-1)+(4-1)+3}-\sum_{i=0}^{4-2}d_{(i,2i+(4-1))}^{y\le 2x+(4-1)}\times C_{(4-1)+3-i}^{(2+1)(4-1)+3-1-i(2+1)}$$
$$=C_{6}^{15}-\left(d_{(0,3)}^{y\le 2x+3}\times C_{6}^{11}+d_{(1,5)}^{y\le 2x+3}\times C_{5}^{8}+d_{(2,7)}^{y\le 2x+3}\times C_{4}^{5}\right)$$
$$=5005-(1\times 462+4\times 56+18\times 5)=4229$$

(三)多格一階

性質 4.09：$T_{n,\mu}^{\frac{1}{\mu},1}=\dfrac{1}{\mu n+1}C_{n}^{(\mu+1)n}$ 。

證明：由定理 3.11(2)，可得 $T_{n,\mu}^{\frac{1}{\mu},1}=\left|L:(0,0)\to(\mu n,n);\{\mu y\le x\}\right|=\dfrac{1}{\mu n+1}C_{n}^{(\mu+1)n}$

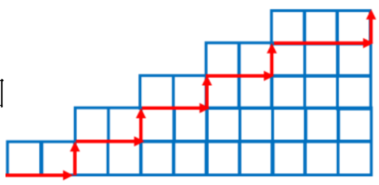
範例 4.09：如圖  ，有多少種可能的堆疊方法？

解法：由性質 4.09 可得，$T_{3,2}^{\frac{1}{2},1}=\dfrac{1}{2\times 3+1}C_{3}^{(2+1)3}=12$

性質 4.10：$T_{n,h}^{\frac{1}{\mu},1}=\dfrac{h+1}{\mu(n-1)+h+1}C_{n-1}^{(\mu+1)(n-1)+h}$

證明：由定理 3.11(1)，可得

$$T_{n,h}^{\frac{1}{\mu},1}=\left|L:(0,0)\to(\mu(n-1)+h,n-1);\{\mu y\le x\}\right|=\frac{h+1}{\mu(n-1)+h+1}C_{n-1}^{(\mu+1)(n-1)+h}$$

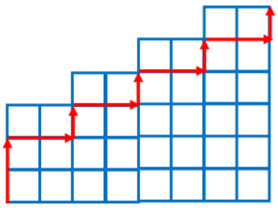
範例 4.10：如圖  ，有多少種可能的堆疊方法？

解法：由性質 4.10 可得，$T_{5,3}^{\frac{1}{2},1}=\dfrac{3+1}{2\times(5-1)+3+1}C_{5-1}^{(2+1)\times(5-1)+3}=455$

性質 4.11： $T_{n,\mu}^{\frac{1}{\mu},k}=C_{n+(k-1)}^{(\mu+1)n+(k-1)}-\sum_{i=1}^{n}C_{i+(k-1)}^{(\mu+1)i+(k-1)-1}\dfrac{1}{\mu(n-i)+1}C_{n-i}^{(\mu+1)(n-i)}$

證明：由定理 3.12(2)，可得

$$
\begin{aligned}
T_{n,\mu}^{\frac{1}{\mu},k}&=\left|L:(0,0)\to(\mu n,n+(k-1));\{\mu y\le x+\mu(k-1)\}\right|\\
&=C_{n+(k-1)}^{(\mu+1)n+(k-1)}-\sum_{i=1}^{n}C_{i+(k-1)}^{(\mu+1)i+(k-1)-1}\frac{1}{\mu(n-i)+1}C_{n-i}^{(\mu+1)(n-i)}
\end{aligned}
$$

範例 4.11：如圖  ，有多少種可能的堆疊方法？

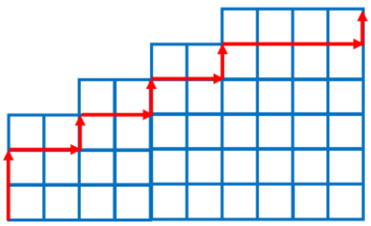
解法：由性質 4.11 可得，

$$
\begin{aligned}
T_{4,2}^{\frac{1}{2},3}&=C_{4+(3-1)}^{(2+1)(4-1)+(3-1)}-\sum_{i=1}^{4}C_{i+(3-1)}^{(2+1)i+(3-1)-1}\frac{1}{2(4-i)+1}C_{4-i}^{(2+1)(4-i)}\\
&=C_{6}^{14}-\left(C_3^4\times\frac{1}{2\times3+1}C_3^{3\times3}+C_4^7\times\frac{1}{2\times2+1}C_2^{3\times2}+C_5^{10}\times\frac{1}{2\times1+1}C_1^{3\times1}+C_6^{13}\times\frac{1}{2\times0+1}C_0^{3\times0}\right)\\
&=C_6^{14}-\left(d_{(0,2)}^{0.5x+2}c_0\times C_6^{13}+d_{(1,)}^{2}\times C_5^{10}+d_{2,0}^{2}\times C_4^{7}+d_{3,0}^{2}\times C_3^{4}\right)=882
\end{aligned}
$$

性質 4.12： $T_{n,h}^{\frac{1}{\mu},k}=C_{(n-1)+(k-1)}^{(\mu+1)(n-1)+h+(k-1)}-\sum_{i=1}^{n-1}C_{i+(k-1)}^{(\mu+1)i+(k-1)-1}\dfrac{h+1}{\mu((n-1)-i)+h+1}C_{(n-1)-i}^{(\mu+1)((n-1)-i)+h}$

證明：由定理 3.12(1)可得，

$$
\begin{aligned}
T_{n,h}^{\frac{1}{\mu},k}&=\left|L:(0,0)\to(\mu(n-1)+h,(n-1)+(k-1));\{\mu y\le x+\mu(k-1)\}\right|\\
&=C_{(n-1)+(k-1)}^{(\mu+1)(n-1)+h+(k-1)}-\sum_{i=1}^{n-1}C_{i+(k-1)}^{(\mu+1)i+(k-1)-1}\frac{h+1}{\mu((n-1)-i)+h+1}C_{(n-1)-i}^{(\mu+1)((n-1)-i)+h}
\end{aligned}
$$

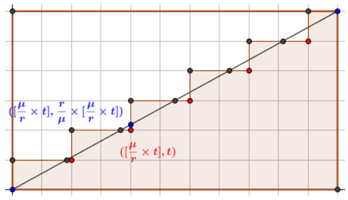
範例 4.12：如圖  ，有多少種可能的堆疊方法？

解法：由性質 4.12 可得，

$$
\begin{aligned}
T_{4,4}^{\frac{1}{2},3}&=C_{(4-1)+(3-1)}^{(2+1)(4-1)+4+(3-1)}-\sum_{i=1}^{4-1}C_{i+(3-1)}^{(2+1)i+(3-1)-1}\frac{4+1}{2((4-1)-i)+4+1}C_{(4-1)-i}^{(2+1)((4-1)-i)+4}\\
&=C_5^{15}-\left(C_3^4\times\frac{5}{9}\times C_2^{10}+C_4^7\times\frac{5}{7}\times C_1^7+C_5^{10}\times\frac{5}{5}\times C_0^4\right)=2476
\end{aligned}
$$

(四)多格多階

對於多格多階的矩形堆疊我們僅以符號 A 表示其階梯形狀，以 T 表示堆疊數。



性質 4.13：已知一矩形 $\mu\times r$ 且 $\mu>r,(\mu,r)=1$，若滿足下列條件

$x=\left\lceil \frac{\mu}{r}\times(t-1)\right\rceil \sim \left\lceil \frac{\mu}{r}\times t\right\rceil, y=t, t=1,2,\dots,r$ 之整數，可得一階梯形狀 A，則 $T=\frac{1}{\mu+r}C_{r}^{\mu+r}$

證明：對於任意矩形 $\mu\times r$ 且 $\mu>r,(\mu,r)=1$，

滿足 $x=\left\lceil \frac{\mu}{r}\times(t-1)\right\rceil \sim \left\lceil \frac{\mu}{r}\times t\right\rceil, y=t, t=1,2,\dots,r$ 之整數，可得一階梯形狀 A 如圖，

根據演算 3.02，可得一條最高虛擬路徑，

對於最高虛擬路徑的(紅色)尖點 $(\left\lceil \frac{\mu}{r}\times t\right\rceil, t)$ $y=t, t=1,2,\dots,r$ 整數，

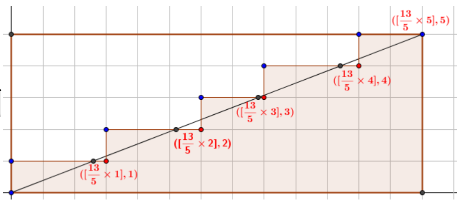
而(藍色)點 $(\left\lceil \frac{\mu}{r}\times t\right\rceil, \frac{r}{\mu}\times\left\lceil \frac{\mu}{r}\times t\right\rceil), t=1,2,\dots,r$ 整數，則在直線 $\mu y=rx$ 上

由 $\lceil x\rceil$ 的定義知，$x\le\lceil x\rceil$，故得 $t=\left(\frac{\mu}{r}\times t\right)\times\frac{r}{\mu}\le\left\lceil \frac{\mu}{r}\times t\right\rceil\times\frac{r}{\mu}, t=1,2,\dots,r$ 整數

即階梯形狀 A 的最高虛擬路徑恆在 $\mu y\le rx$ 的範圍內，

由引理 3.14 知，當 $\mu>r,(\mu,r)=1$ 時，$T=\left|L:(0,0)\to(\mu,r);\{\mu y\le rx\}\right|=\frac{1}{\mu+r}C_{r}^{\mu+r}$

範例 4.13：如圖



，有多少種可能的堆疊方法？

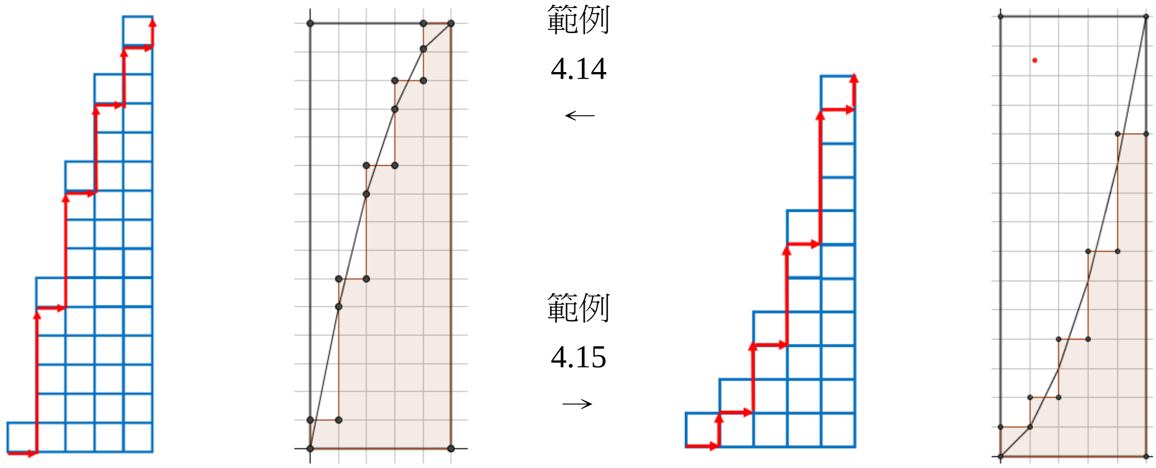
解法：由性質 4.13 可得 $T=\frac{1}{13+5}C_{5}^{13+5}=476$

(五)一格多階，階數成等差

將 $A_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$ 的定義延伸，以 $A_{n,h}^{\frac{<r_i>}{1},1}$ 表示起始高度 1 階且最上層水平有 h 格，每右移一格增加的階數所形成的一個 $n-1$ 項數列 $\langle r_i\rangle$ 的階梯形狀。例如，以 $A_{5,1}^{\frac{<r_i>}{1},1},\left(<r_i>_{i=1}^{4}=5,4,3,2\right)$，表示範例 4.14；以 $A_{5,1}^{\frac{<r_i>}{1},1},\left(<r_i>_{i=1}^{4}=1,2,3,4\right)$，表示範例 4.15。

範例 4.14：如左下圖，有多少種可能的堆疊方法？

解法：本例圖形為 $A_{5,1}^{\frac{<r_i>}{1},1},\left(<r_i>_{i=1}^{4}=5,4,3,2\right)$，可知其所對應的路徑圖如左下兩圖所示，由定理 3.15(2)可得，$T_{5,1}^{\frac{<r_i>}{1},1},\left(<r_i>_{i=1}^{4}=5,4,3,2\right)=2220$



範例 4.15：如右上圖，有多少種可能的堆疊方法？

解法：本例圖形為 $A_{5,1}^{\frac{<r_i>}{1},1},\left(<r_i>_{i=1}^{4}=1,2,3,4\right)$，可知其所對應的路徑圖如右上兩圖所示，

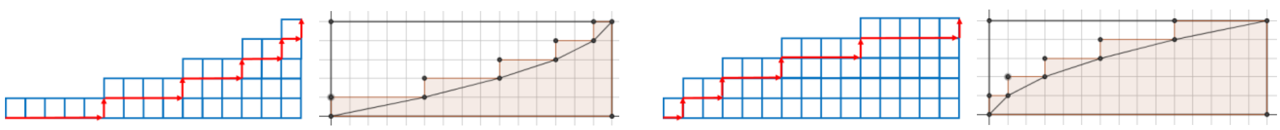
由定理 3.16(2)可得，$T_{5,1}^{\frac{<r_i>}{1},1},\left(<r_i>_{i=1}^{4}=1,2,3,4\right)=268$

(六)多格一階，格數成等差

同理(五)，以 $A_{n,h}^{\frac{1}{<\mu_i>},1}$ 表示起始高度 1 階且最上層水平有 h 格，每上升一階增加的格數所形成的一個 $n-1$ 項數列 $\langle\mu_i\rangle$ 的階梯形狀。例如，以 $A_{5,1}^{\frac{1}{<\mu_i>},1},\left(<\mu_i>_{i=1}^{4}=5,4,3,2\right)$，表示範例 4.16；以 $A_{5,5}^{\frac{1}{<\mu_i>},1},\left(<\mu_i>_{i=1}^{4}=1,2,3,4\right)$，表示範例 4.17。

範例 4.16：如左下圖，有多少種可能的堆疊方法？

解法：本例圖形為 $A_{5,1}^{\frac{1}{<\mu_i>},1},\left(<\mu_i>_{i=1}^{4}=5,4,3,2\right)$，可知其所對應的路徑圖如左下兩圖所示，而此圖與定理 3.16(2)之路徑圖面積相等，可得 $T_{5,1}^{\frac{1}{<\mu_i>},1},\left(<\mu_i>_{i=1}^{4}=5,4,3,2\right)=268$



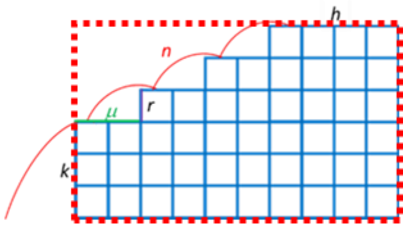
範例 4.16　　　　範例 4.17

範例 4.17：如右上圖，有多少種可能的堆疊方法？

解法：本例圖形為 $A_{5,5}^{\frac{1}{<\mu_i>},1},\left(<\mu_i>_{i=1}^{4}=1,2,3,4\right)$，可知其所對應的路徑圖如右上兩圖所示，而此圖與定理 3.15(2)之路徑圖面積相等，可得 $T_{5,5}^{\frac{1}{<\mu_i>},1},\left(<\mu_i>_{i=1}^{4}=1,2,3,4\right)=2220$

伍、討論

一、對於 $A_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$

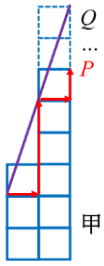


(一)當 r,μ 固定時，由定義可知，此圖形恰完全位於寬 $(n-1)\mu+h$ 、高 $(n-1)r+k$ 的矩形內。

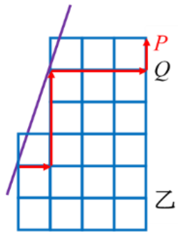
(二) $\mu=h=1$ 或 $r=k=1$ 都可直接代路徑公式

(三)利用演算法畫出「最高虛擬路徑」，可以幫助我們找到對應路徑計算 $T_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$ 。

二、公式與實際路徑、計算路徑的關係



甲



乙

(一) $\mu=1,r\geq1$(一格一階或一格多階)時

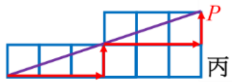
(1)若 $h=\mu$ ，由甲圖可知，實際路徑的終點為 P

①當 $r=1$ 時邊界恰過 P ，代入終點在邊界的公式

②當 $r>1$ 時邊界未通過 P 但通過 Q ，而通過 P 後往上至 Q 的路徑數皆相同，代入計算至 Q 的公式

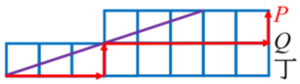
(2)若 $h>\mu$ ，由乙圖可知，經演算法所得每條路徑都會通過 Q ，再通過 P ，計算至 Q 有公式，故僅計算至 Q

(二) $\mu>1,r=1$(多格一階)時



丙

(1)若 $h=\mu$ ，由丙圖可知邊界恰過 P ，代入終點在邊界的公式

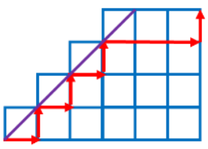


丁

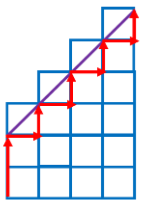
(2)若 $h>\mu$ ，由丁圖可知，與(一)(2)同，所得每條路徑都會通過 Q ，再通過 P ，計算至 Q 有公式，故僅計算至 Q

三、圖形結構相同時，堆疊方法數可能不同

(一)一格一階

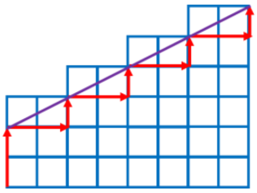


由性質 4.02，可得 $T_{4,3}^{\frac{1}{1},1}=\dfrac{3+1}{4+3}C_{4-1}^{2\times4+3-2}=48$



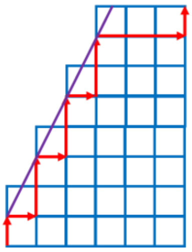
由性質 4.03，可得 $T_{4,1}^{\frac{1}{1},3}=\dfrac{3}{4+3}C_{4}^{2\times4+3-1}=90$

(二)多格一階⇔一格多階



由性質 4.11 可得，

$$T_{4,2}^{\frac{1}{2},3}=C_{4+(3-1)}^{(2+1)(4-1)+(3-1)}-\sum_{i=1}^{4}C_{i+(3-1)}^{(2+1)i+(3-1)-1}\frac{1}{2(4-i)+1}C_{4-i}^{(2+1)(4-i)}=882$$



性質 4.08 可得，

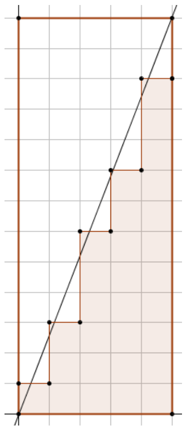
$$T_{4,3}^{\frac{2}{1},2}=C_{(4-1)+3}^{(2+1)(4-1)+(2-1)+3}-\sum_{i=0}^{4-2}d_{(i,2i+(2-1))}^{y\le 2x+(2-1)}\times C_{(4-1)+3-i}^{(2+1)(4-1)+3-1-i(2+1)}=1107$$

四、多格多階

已知一矩形 $\mu\times r$ 且 $\mu<r,(\mu,r)=1$，若滿足下列條件

$$\begin{cases}x=0\sim 1,\ y=1\\ x=t\sim t+1,\ y=\left\lceil \dfrac{r}{\mu}\times t\right\rceil,t=1,2,\ldots,\mu-1\text{之整數}\end{cases}$$

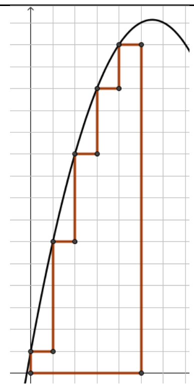
，可得一階梯形狀 A，則



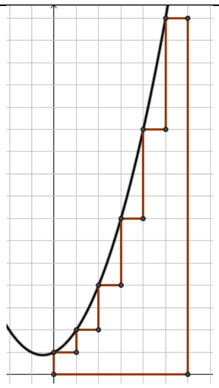
$$T=\frac{1}{\mu+r}C_r^{\mu+r}$$

範例：如圖 $T=\dfrac{1}{13+5}C_5^{13+5}=476$

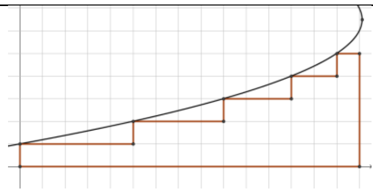
五、範例 4.14~4.17 的四個圖形，其頂點恰在拋物線上，所以部分以曲線為邊界條件的堆疊問題，也可以用變動的一格多階或多格一階的方法達成。



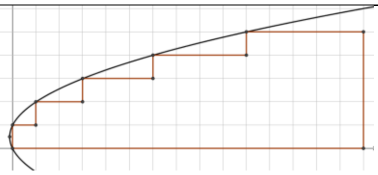
$y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{11}{2}x+1$



$y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+1$

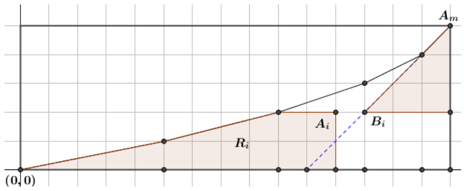


$x=-\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{13}{2}y-6$



$x=\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{1}{2}y$

六、定理：已知邊界條件形如



$$R_m:\begin{cases}\mu_1 y+k_1\le x,0\le y\le 1\\ \mu_2 y+k_2\le x,1\le y\le 2\\ \mu_3 y+k_3\le x,2\le y\le 3\\ \ldots\ldots\\ \mu_m y+k_m\le x,m-1\le y\le m\end{cases},$$

其中 $\mu_1>\mu_2>\mu_3>...>\mu_m$ 且 $r_i,i=1,2,...,m$ 為整數，則

$$\left|L:(0,0)\to(m\mu_m+k_m,m);\{R_m\}\right|$$
$$=\sum_{i=0}^{m-1}\left|L:(0,0)\to(i\mu_m+k_m-1,i);\{R_i\}\right|\times\frac{1}{\mu_m(m-i)+1}C_{m-i}^{(\mu_m+1)(m-i)}$$

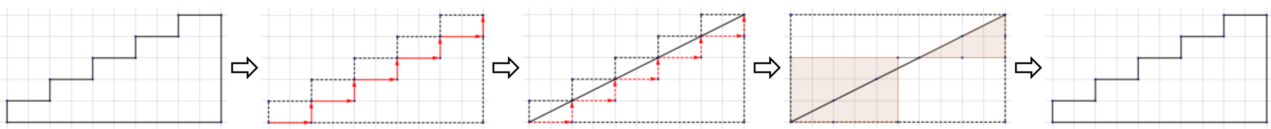
證　　明：由定理3.11可推得

$$\left|L:(0,0)\to(m\mu_m+k_m,m);\{R_m\}\right|$$
$$=\sum_{i=0}^{m-1}\left(\left|L:(0,0)\to(i\mu_m+k_m-1,i);\{R_i\}\right|\times\left|L:(i\mu_m+k_m-1,i)\to(m\mu_m+k_m,m);\{\mu_m y+k_m\le x\}\right|\right)$$
$$=\sum_{i=0}^{m-1}\left(\left|L:(0,0)\to(i\mu_m+k_m-1,i);\{R_i\}\right|\times\left|L:(0,0)\to((m-i)\mu_m,(m-i));\{\mu_m y\le x\}\right|\right)$$
$$=\sum_{i=0}^{m-1}\left|L:(0,0)\to(i\mu_m+k_m-1,i);\{R_i\}\right|\times\frac{1}{\mu_m(m-i)+1}C_{m-i}^{(\mu_m+1)(m-i)}$$

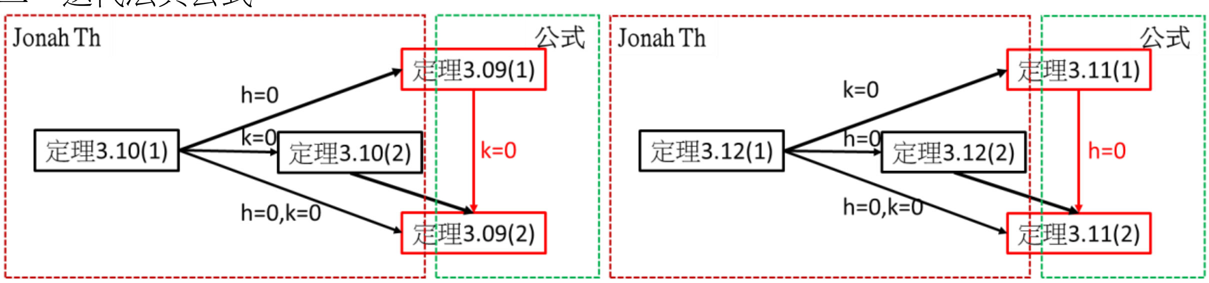
陸、結論

一、Jonah’s 與矩形堆疊

將堆疊問題透過演算法，轉換成路徑問題，利用 Jonah’s 定理，發展路徑公式，再利用路徑公式解決原來的堆疊問題。



二、迭代法與公式



三、堆疊問題

(一)一格一階

(1) $T_{n,1}^{\frac{1}{1},1} = \frac{1}{n+1} C_n^{2n} = c_n$

(2) $T_{n,h}^{\frac{1}{1},1} = \frac{h+1}{n+h} C_{n-1}^{2n+h-2}$

(3) $T_{n,1}^{\frac{1}{1},k} = \frac{k}{n+k} C_n^{2n+k-1}$

(4) $T_{n,h}^{\frac{1}{1},k} = C_{n+h-1}^{2n+k+h-3} - \sum_{i=0}^{n-2} d_{(i,i+k-1)}^{y\le x+k-1} \times C_{n+h-1-i}^{2n+h-3-2i} = \sum_{i=n-1}^{n+h-1} d_{(i,i+k-1)}^{y\le x+(k-1)} \times C_{n+h-1-i}^{2n+h-3-2i}$

(二)一格多階

(1) $T_{n,1}^{\frac{r}{1},1} = \frac{1}{rn+1} C_n^{(r+1)n}$

(2) $T_{n,1}^{\frac{r}{1},k} = \frac{k}{rn+k} C_n^{(r+1)n+(k-1)}$

(3) $T_{n,h}^{\frac{r}{1},1} = C_{n+h-1}^{(r+1)(n-1)+h} - \sum_{i=0}^{n-2} d_{(i,ri)}^{y\le rx} \times C_{n+h-1-i}^{(r+1)(n-1)+h-1-i(r+1)}$

(4) $T_{n,h}^{\frac{r}{1},k} = C_{n+h-1}^{(r+1)(n-1)+k+h-1} - \sum_{i=0}^{n-2} d_{(i,ri+k-1)}^{y\le rx+k-1} \times C_{n-1+h-i}^{(r+1)(n-1)+h-1-i(r+1)}$

(三)多格一階

(1) $T_{n,\mu}^{\frac{1}{\mu},1} = \frac{1}{\mu n+1} C_n^{(\mu+1)n}$

(2) $T_{n,h}^{\frac{1}{\mu},1} = \frac{h+1}{\mu(n-1)+h+1} C_{n-1}^{(\mu+1)(n-1)+h}$

(3) $T_{n,\mu}^{\frac{1}{\mu},k} = C_{n+(k-1)}^{(\mu+1)n+(k-1)} - \sum_{i=1}^{n} C_{i+(k-1)}^{(\mu+1)i+(k-1)-1} \frac{1}{\mu(n-i)+1} C_{n-i}^{(\mu+1)(n-i)}$

(4) $T_{n,h}^{\frac{1}{\mu},k} = C_{(n-1)+(k-1)}^{(\mu+1)(n-1)+h+(k-1)} - \sum_{i=1}^{n-1} C_{i+(k-1)}^{(\mu+1)i+(k-1)-1} \frac{h+1}{\mu((n-1)-i)+h+1} C_{(n-1)-i}^{(\mu+1)((n-1)-i)+h}$

(四)變化固定的圖形，整理如下

範例	層	格	水平	階	高	矩形		直接代公式	邊界過起點	邊界過終點
	n	μ	h	r	k	寬	高			
4.01	4	1	1	1	1	4	4	公式 $\mu=h=1$，$r=k=1$	是$k=1$	是$\mu=h=1$
4.02	4	1	3	1	1	6	4	公式$r=k=1$	是$k=1$	
4.03	4	1	1	1	3	4	6	公式$\mu=h=1$		是$\mu=h=1$
4.04	4	1	2	1	4	5	7			
4.05	4	1	1	2	1	4	7	公式$\mu=h=1$	是$k=1$	* $\mu=h=1$
4.06	4	1	1	2	5	4	11	公式$\mu=h=1$		* $\mu=h=1$
4.07	4	1	3	2	1	6	7		是$k=1$	
4.08	4	1	3	2	4	6	10			
4.09	3	2	2	1	1	6	3	公式$r=k=1$	是$k=1$	是$\mu=h=2$
4.10	5	2	3	1	1	11	5	公式$r=k=1$	是$k=1$	
4.11	4	2	2	1	3	8	6			# $\mu=h=2$
4.12	4	2	4	1	3	10	6			
[註]：*採用邊界過終點的公式。#邊界過終點，但無直接代的公式										

四、多格多階

(一)已知一矩形 $\mu\times r$ 且 $\mu>r,(\mu,r)=1$，若滿足下列條件

$x=\left[\frac{\mu}{r}\times(t-1)\right]\sim\left[\frac{\mu}{r}\times t\right], y=t, t=1,2,\dots,r$之整數，可得一階梯形狀 A，則$T=\frac{1}{\mu+r}C_{r}^{\mu+r}$

(二)已知一矩形 $\mu\times r$ 且 $\mu<r,(\mu,r)=1$，若滿足下列條件

$\begin{cases} x=0\sim1, y=1 \\ x=t\sim t+1, y=\left[\frac{r}{\mu}\times t\right], t=1,2,\dots,\mu-1\text{之整數} \end{cases}$，可得一階梯形狀 A，則$T=\frac{1}{\mu+r}C_{r}^{\mu+r}$

五、斜率為正整數且為等差數列的路徑

(一)已知邊界條件形如，$R_m:\begin{cases} y\le mx, 0\le x\le 1 \\ \dots \\ y\le(m-k)x+\frac{k(k+1)}{2}, k\le x\le k+1, k=0,\dots,m-1 \\ \dots \\ y\le x+\frac{m(m-1)}{2}, m-1\le x\le m \end{cases}$

令$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(k)=\sum_{i=1}^{k}(m+1-i)=\frac{k}{2}(2m+1-k), k\in N \end{cases}$，則

$$\left|L:(0,0)\to(m,\ f(m));\{R_m\}\right| = C_m^{m+f(m)} - \sum_{i=0}^{m-1} d_{(i,f(i))}^{R_i} \times C_{m-i}^{(m-i)+(f(m)-f(i))-1}$$

(二)已知邊界條件形如， $R_m:\begin{cases} y \le x, 0 \le x \le 1 \\ \dots \\ y \le (k+1)x - \dfrac{k(k+1)}{2}, k \le x \le k+1, k = 0,\dots,m-1 \\ \dots \\ y \le mx - \dfrac{m(m-1)}{2}, m-1 \le x \le m \end{cases}$

令 $g(k) = \sum_{i=0}^{k} i = \dfrac{k(k+1)}{2}$ ，則

$$\left|L:(0,0)\to(m,g(m));\{R_m\}\right| = C_m^{m+g(m)} - \sum_{i=0}^{m-1} d_{(i,g(i))}^{R_i} \times C_{m-i}^{(m-i)+(g(m)-g(i))-1}$$

六、斜率為單位分數且為調和數列的路徑

(一)已知邊界條件形如， $R_m:\begin{cases} my \le x, 0 \le y \le 1 \\ \dots \\ (m-k)y + \dfrac{k(k+1)}{2} \le x, k \le y \le k+1, k = 0,\dots,m-1 \\ \dots \\ y + \dfrac{m(m-1)}{2} \le x, m-1 \le y \le m \end{cases}$

令 $\begin{cases} p(0) = 0 \\ p(k) = \sum_{i=1}^{k}(m+1-i) = \dfrac{k}{2}(2m+1-k), k \in N \end{cases}$ ，則

$\left|L:(0,0)\to(p(m),m);\{R_m\}\right|$ 因與五(二)圖形相同，可應用其路徑數計算。

(二)已知邊界條件形如， $R_m:\begin{cases} y \le x, 0 \le y \le 1 \\ \dots \\ (k+1)y - \dfrac{k(k+1)}{2} \le x, k \le y \le k+1, k = 0,\dots,m-1 \\ \dots \\ my - \dfrac{m(m-1)}{2} \le x, m-1 \le y \le m \end{cases}$

令 $q(k) = \sum_{i=0}^{k} i = \dfrac{k(k+1)}{2}$ ，則

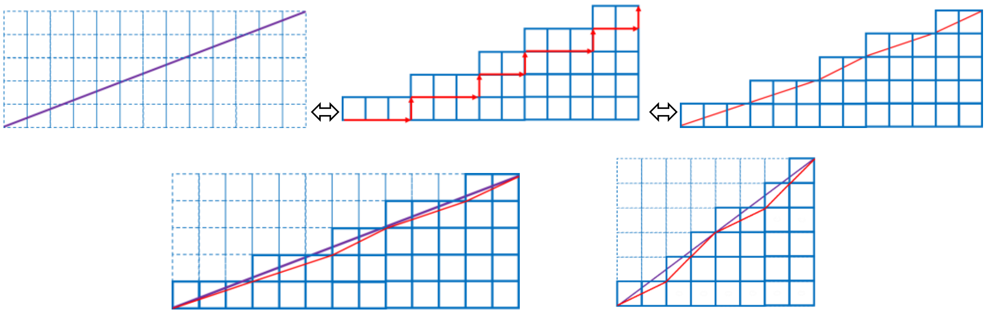
$\left|L:(0,0)\to(q(m),m);\{R_m\}\right|$ 因與五(一)圖形相同，可應用其路徑數計算。

七、堆疊對有理數斜率與變動斜率的連結

(一)已知一矩形 $\mu \times r$ 且 $\mu > r, (\mu, r) = 1$，依性質 4.13 可得一堆疊圖形，其排列方法數相當於不超過斜率為有理數邊界的路徑數。

(二)對(一)的堆疊圖形，同樣存在一條最高虛擬路徑，透過尖點連線，可得一組變動的單位分數斜率邊界，不超過此邊界的路徑數等同堆疊圖形的排列方法數。

(三)部分複雜的變動斜率邊界的路徑數可用有理數邊界計算。同樣地，非互質的有理數邊界，也可找到一組變動斜率的邊界來計算。



柒、參考資料及其他

1.第 62 屆中小學科學展覽會。斜面下相遇的機率。(2022).

2.林晉宏。一般性 Catalan 數的組合意義及其應用。數學傳播季刊，第 35 卷第 1 期, pp. 36-50。(2011)

3.Peter Hilton, Jean Pedersen, The ballot problem and Catalan numbers. Nieuw Archief voor Wiskunde (1990; 8: 209-216.)

4.Peter Hilton, Jean Pedersen, Catalan Numbers, Their Generalization, and Their Uses, The Mathematical Intelligencer ·(March 1991).

5.Christian Krattenthaler, Lattice Path Enumeration https://www.mat.univie.ac.at/~kratt/artikel/encylatt.pdf

6.原來樓梯間也能這麼玩！樓梯間設計對了，等於家裡多出一間房！(民 109 年 4 月 20 日)。壹讀。民 109 年 4 月 20 日，取自：https://read01.com/zy83e24.html

【評語】050415

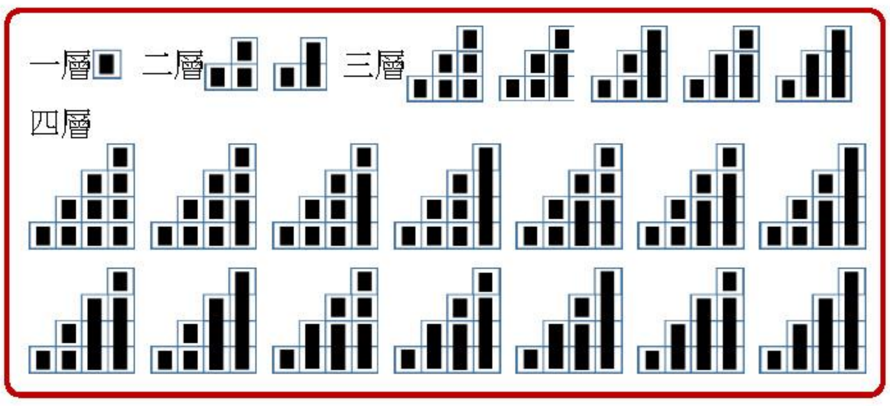
本作品是有關堆疊問題，題目並不算是新穎。主要探討在一個鋸齒狀方形格子點的地圖中，自左下角到右上角走捷徑的方法數。雖然本文提出許多引理做為工具，來解一些特殊例題。然而這些引理大多已出現在參考資料 [5]，例如引理 3.03，是 [5] 中的 Corollary 10.3.2；引理 3.14，是[5]中的 Theorem 10.4.1；定理 3.11 是 [5] 中的 Theorem 10.4.5，還有其他程度不同的類似之處。雖然在特殊結構例如拋物線下「矩形堆疊」，作者獲得很好的結果。然而本作品貢獻，主要還是在於整理和舉例，創新結果不足，比較可惜。

作品海報

壹、前言

一、研究動機

本文研究的主題是階梯下的堆疊圖形會有幾個？我們發現排列個數與卡塔蘭數有關，於是先建立圖形與路徑的一一對應關係，再透過路徑問題，解決我們的堆疊問題。



二、研究目的：

(1)研探斜率固定與不固定的路徑問題。

(2)探討變化固定與不固定的堆疊問題。

三、文獻探討

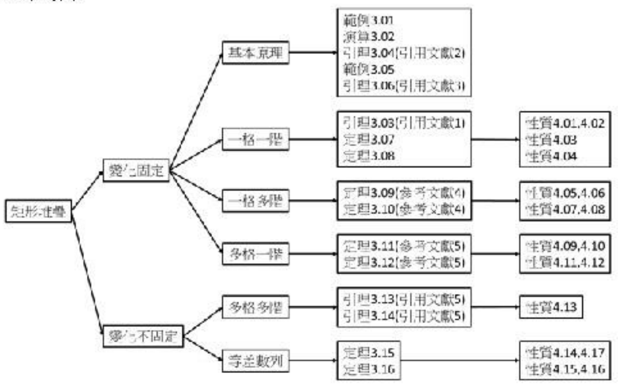
對於路徑的研究，以 Jonah's Theorem(Peter Hilton, Jean Pedersen, 1990)，(林晉宏，2011)處理斜率等於 1 的情形。其次研究斜率大於 1 的正整數情形，以一般化的 Jonah's Theorem(Peter Hilton, Jean Pedersen, 1991)處理。接著研究斜率是單位分數的情形，將 Jonah's Theorem 推廣。再來研究斜率是有理數的特殊情形，參考 Spitzer's Lemma(Christian Krattenthaler, Lattice Path Enumeration)。

貳、研究設備及器材

筆、格子紙、電腦、Word 軟體、Excel 軟體、GeoGebra 繪圖軟體、電腦程式。

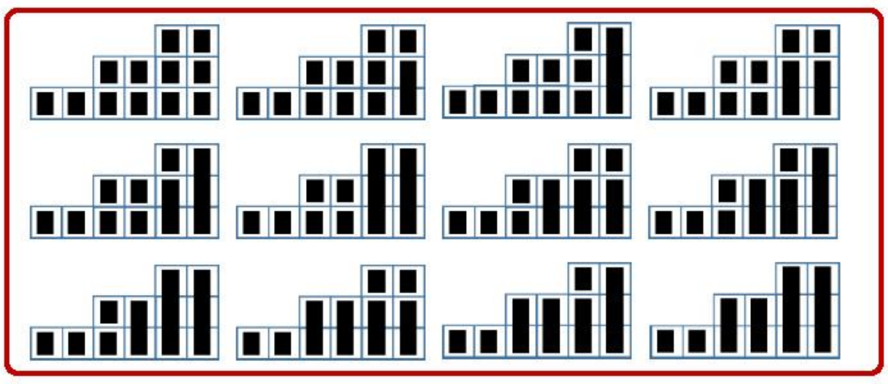
參、研究過程或方法

一、研究架構



二、研究過程

3.01：對於「二格一階」的階梯有三層，其矩形堆疊共有 12 種可能的排列方法，如圖所示。

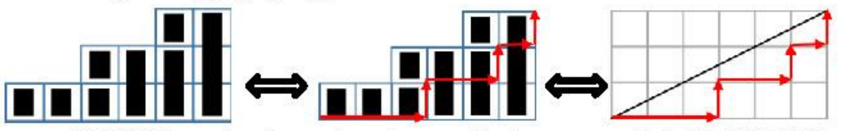


3.02：對於「 μ 格 r 階」的階梯有 n 層，我們建構一個演算法，將堆疊問題對應至格子路徑，方法如下：

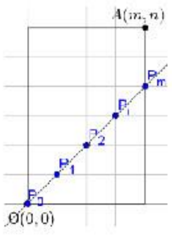
步驟 1：從點 $(0,0)$ 開始，每次一格一格往右移動。

步驟 2：如果前一格停在點 (i,j) 且下一格矩形的最大高度在 $y=t$ 的位置，則先將路徑從 (i,j) 鉛直往上延伸至 $(i,t-1)$，然後再水平往右延伸至 $(i+1,t-1)$，作為下一個矩形高度的起點。當 $i<\mu n$，重複步驟 2。

步驟 3：當 $i=\mu n$，則從 $(\mu n,t-1)$ 鉛直往上延伸至 $(\mu n,rn)$ 完成路徑。

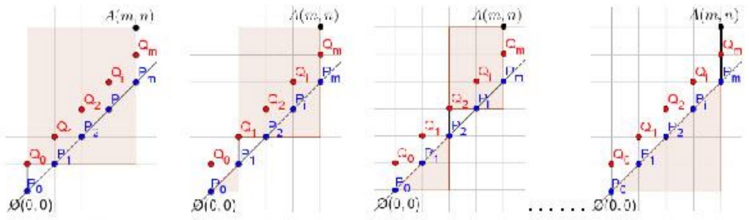


我們以 $|L:(0,0)\to(n+h,rn+k);\{y\le rx+k\}|$ 表示從原點 $(0,0)$ 至終點 $(n+h,rn+k)$，在邊界條件下 $y\le rx+k$ 的路徑數；也會以符號 $d_{(n,rn+k)}^{y\le rx+k}$ 表示從 $(0,0)$ 出發，終點恰在邊界條件上的路徑數。



3.04：假設 $m,n\in N, n>m$

試證：$|L:(0,0)\to(m,n)|=C_m^{m+n}=\sum_{k=0}^{m}c_k\times C_{m-k}^{m+n-1-2k}$

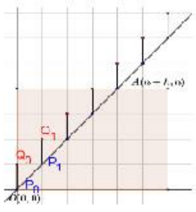


S_0 S_1 S_2 …… S_m

3.06：(Jonah's Formula) 假設 $n,h\in N$

已知 $C_{n+h}^{2n+h}=c_0\times C_{n+h}^{2n+h-1}+c_1\times C_{n+h-1}^{2n+h-3}+\ldots$，則

$+c_{i-1}\times C_{n+h-(i-1)}^{2n+h-(2i-1)}+\ldots+c_{n+h}\times C_0^{-h-1}$



$$|L:(0,0)\to(n+h,n);\{y\le x\}|=C_{n+h}^{2n+h}-\sum_{i=0}^{n-1}c_i\times C_{n+h-i}^{(2n+h)-(2i+1)}$$

證明：已知

$$C_{n+h}^{2n+h}=c_0\times C_{n+h}^{2n+h-1}+c_1\times C_{n+h-1}^{2n+h-3}+\ldots+c_{i-1}\times C_{n+h-(i-1)}^{2n+h-(2i-1)}+\ldots+c_{n+h}\times C_0^{-h-1}$$

由範例 3.05 知 C_{n+h}^{2n+h} 為所有捷徑數，$S_0\sim S_{n-1}$ 為不合理路徑，故 $S_n\sim S_{n+h}$ 為邊界條件在 $y\le x$ 下的路徑數。故

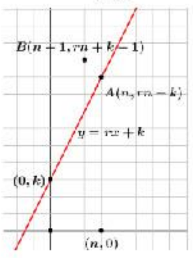
$$|L:(0,0)\to(n+h,n);\{y\le x\}|=C_{n+h}^{2n+h}-\sum_{i=0}^{n-1}c_i\times C_{n+h-i}^{(2n+h)-(2i+1)}$$

3.09：假設 $r,n\in N, k\in N\cup\{0\}$，試證：

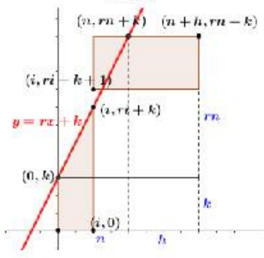
(1) $|L:(0,0)\to(n,rn+k);\{y\le rx+k\}|=\dfrac{k+1}{rn+k+1}C_n^{(r+1)n+k}$

(2) $|L:(0,0)\to(n,rn);\{y\le rx\}|=d_{(n,rn)}^{y\le rx}=\dfrac{1}{rn+1}C_n^{(r+1)n}$

3.09



3.10



3.10：假設 $r,n,h\in N, k\in N\cup\{0\}$，試證：

(1) $|L:(0,0)\to(n+h,rn+k);\{y\le rx+k\}|$

$=C_{n+h}^{(r+1)n+h+k}-\sum_{i=0}^{n-1}d_{(i,ri+k)}^{y\le rx+k}\times C_{n+h-i}^{(r+1)n+h-1-i(r+1)}$

(2) $|L:(0,0)\to(n+h,rn);\{y\le rx\}|$

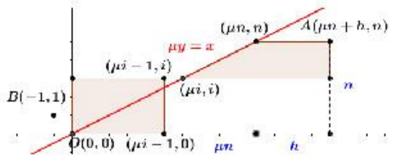
$=C_{n+h}^{(r+1)n+h}-\sum_{i=0}^{n-1}d_{(i,ri)}^{y\le rx}\times C_{n+h-i}^{(r+1)n+h-1-i(r+1)}$

3.11：假設 $\mu,n\in N, h\in N\cup\{0\}$，試證：

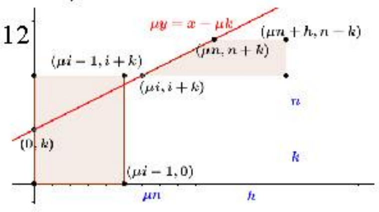
(1) $|L:(0,0)\to(\mu n+h,n);\{\mu y\le x\}|=\dfrac{h+1}{\mu n+h+1}C_n^{(\mu+1)n+h}$

(2) $|L(0,0)\to(\mu n,n);\{\mu y\le x\}|=\dfrac{1}{\mu n+1}C_n^{(\mu+1)n}$

3.11



3.12



3.12：假設 $\mu,n,k\in N, h\in N\cup\{0\}$，試證：

(1) $|L:(0,0)\to(\mu n+h,n+k);\{\mu y\le x+\mu k\}|$

$=C_{n+k}^{(\mu+1)n+h+k}-\sum_{i=1}^{n}C_{i+k}^{(\mu+1)i+k-1}\dfrac{h+1}{\mu(n-i)+h+1}C_{n-i}^{(\mu+1)(n-i)+h}$

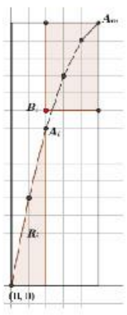
(2) $|L;(0,0)\to(\mu n,n+k);\{\mu y\le x+\mu k\}|$

$=C_{n+k}^{(\mu+1)n+k}-\sum_{i=1}^{n}C_{i+k}^{(\mu+1)i+k-1}\dfrac{1}{\mu(n-i)+1}C_{n-i}^{(\mu+1)(n-i)}$

3.14：$|L:(0,0)\to(\mu,r);\{\mu y\le rx\}|=\dfrac{1}{\mu+r}C_r^{\mu+r},(\mu,r)=1$

3.15：(1)已知邊界條件形如，

$$R_m:\begin{cases}y\le mx, 0\le x\le 1\\ y\le(m-k)x+\dfrac{k(k+1)}{2}, k\le x\le k+1, k=0,\ldots,m-1\\ \ldots\\ y\le x+\dfrac{m(m-1)}{2}, m-1\le x\le m\end{cases}$$



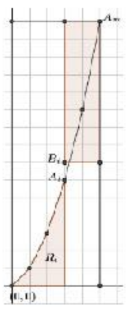
令 $\begin{cases}f(0)=0\\ f(k)=\sum_{i=1}^{k}(m+1-i)=\dfrac{k}{2}(2m+1-k), k\in N\end{cases}$，

則

$$|L:(0,0)\to(m,f(m));\{R_m\}|=C_m^{m+f(m)}-\sum_{i=0}^{m-1}d_{(i,f(i))}^{R_i}\times C_{m-i}^{(m-i)+(f(m)-f(i))-1}$$

3.16：(1)已知邊界條件形如，

$$R_m:\begin{cases}y\le x, 0\le x\le 1\\ y\le(k+1)x-\dfrac{k(k+1)}{2}, k\le x\le k+1, k=0,\ldots,m-1\\ \ldots\\ y\le mx-\dfrac{m(m-1)}{2}, m-1\le x\le m\end{cases}$$

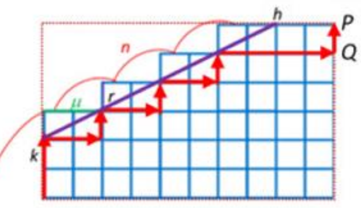


令 $g(k)=\sum_{i=0}^{k}i=\dfrac{k(k+1)}{2}$，則

$$|L:(0,0)\to(m,g(m));\{R_m\}|=C_m^{m+g(m)}-\sum_{i=0}^{m-1}d_{(i,g(i))}^{R_i}\times C_{m-i}^{(m-i)+(g(m)-g(i))-1}$$

肆、研究結果

為了方便說明，對於變化固定的矩形堆疊我們定義 $A_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$ 的階梯形狀為 μ 格 r 階記作 $\frac{r}{\mu}$，左邊起始高度為 k、共 n 層，且最上層水平有 h 格，這個圖形的堆疊數則記為 $T_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$。對於 $A_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$，當 r,μ 固定時，由定義可知，此圖形恰完全位於寬 $(n-1)\mu+h$、高 $(n-1)r+k$ 的矩形內。如圖，以 $A_{4,4}^{\frac{1}{2},3}$ 表示結構，以 $T_{4,4}^{\frac{1}{2},3}$ 表示所有可能的堆疊方法。



如何計算 $T_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$？在 $A_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$ 中找到一條最高虛擬路線(紅色箭頭)，順著最高虛擬路線的尖點(向上並往右轉之點)連線，可畫出路徑邊界線(紫色)。以本圖為例，每條路徑都會通過 Q，再通過 P，計算至 Q 有公式，故僅計算至 Q，即 $T_{4,4}^{\frac{1}{2},3}=\left|L:(0,0)\to(10,5);\{2y\le x+4\}\right|$。

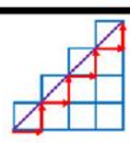
如何將路徑公式轉換成堆疊公式？首先先定義階梯形狀 $A_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$，找到對應定理，再依以下原則代入換算，即可得到堆疊數 $T_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$ 的計算公式：

①k 一律用 $k-1$ 代入
②當 $h=\mu$ 時，n 代原值，h 代入 0
③當 $h>\mu$ 時，n 用 $n-1$ 代入，h 代原值

(一)變化固定

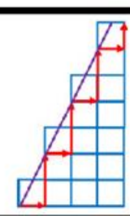
4.01：$T_{n,1}^{\frac{1}{1},1}=\dfrac{1}{n+1}C_n^{2n}=c_n$

解：$T_{4,1}^{\frac{1}{1},1}=\dfrac{1}{4+1}C_4^{2\times4}=14$



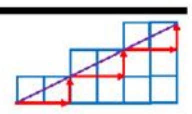
4.05：$T_{n,1}^{\frac{r}{1},1}=\dfrac{1}{rn+1}C_n^{(r+1)n}$

解：$T_{4,1}^{\frac{2}{1},1}=\dfrac{1}{2\times4+1}C_4^{(2+1)\times4}=55$



4.09：$T_{n,\mu}^{\frac{1}{\mu},1}=\dfrac{1}{\mu n+1}C_n^{(\mu+1)n}$

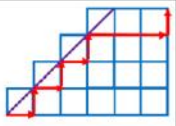
解：$T_{3,2}^{\frac{1}{2},1}=\dfrac{1}{2\times3+1}C_3^{(2+1)3}=12$



4.02：$T_{n,h}^{\frac{1}{1},1}=\dfrac{h+1}{n+h}C_{n-1}^{2n+h-2}$

解：

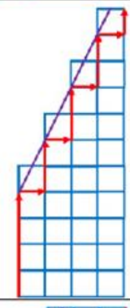
$T_{4,3}^{\frac{1}{1},1}=\dfrac{3+1}{4+3}C_{4-1}^{2\times4+3-2}=48$



4.06：$T_{n,1}^{\frac{r}{1},k}=\dfrac{k}{rn+k}C_n^{(r+1)n+(k-1)}$

解：

$T_{4,1}^{\frac{2}{1},5}=\dfrac{5}{2\times4+5}C_4^{(2+1)4+(5-1)}=\dfrac{5}{13}C_4^{16}=700$

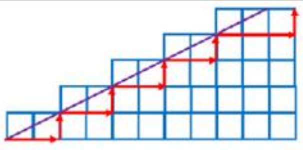


4.10：

$T_{n,h}^{\frac{1}{\mu},1}=\dfrac{h+1}{\mu(n-1)+h+1}C_{n-1}^{(\mu+1)(n-1)+h}$

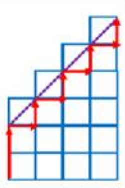
解：

$T_{5,3}^{\frac{1}{2},1}=\dfrac{3+1}{2\times(5-1)+3+1}C_{5-1}^{(2+1)\times(5-1)+3}=455$



4.03：$T_{n,1}^{\frac{1}{1},k}=\dfrac{k}{n+k}C_n^{2n+k-1}$

解：$T_{4,1}^{\frac{1}{1},3}=\dfrac{3}{4+3}C_4^{2\times4+3-1}=90$



4.07：

$T_{n,h}^{\frac{r}{1},1}=$

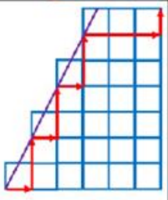
$C_{n+h-1}^{(r+1)(n-1)+h}-\sum_{i=0}^{n-2}d_{(i,ri)}^{y\le rx}\times C_{n+h-1-i}^{(r+1)(n-1)+h-1-i(r+1)}$

解：

$T_{4,3}^{\frac{2}{1},1}=C_{(4-1)+3}^{(2+1)(4-1)+3}-\sum_{i=0}^{4-2}d_{(i,2i)}^{y\le2x}\times C_{(4-1)+3-i}^{(2+1)(4-1)+3-1-i(2+1)}$

$=C_6^{12}-\left(d_{(0,0)}^{y\le2x}\times C_6^{11}+d_{(1,2)}^{y\le2x}\times C_5^{8}+d_{(2,4)}^{y\le2x}\times C_4^{5}\right)$

$=924-(1\times462+1\times56+3\times5)=391$



4.11：

$T_{n,\mu}^{\frac{1}{\mu},k}=C_{n+(k-1)}^{(\mu+1)n+(k-1)}$

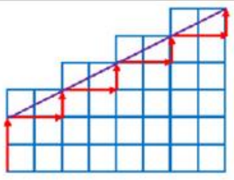
$-\sum_{i=1}^{n}C_{i+(k-1)}^{(\mu+1)i+(k-1)-1}\dfrac{1}{\mu(n-i)+1}C_{n-i}^{(\mu+1)(n-i)}$

解：

$T_{4,2}^{\frac{1}{2},3}=C_{4+(3-1)}^{(2+1)(4-1)+(3-1)}-\sum_{i=1}^{4}C_{i+(3-1)}^{(2+1)i+(3-1)-1}\dfrac{1}{2(4-i)+1}C_{4-i}^{(2+1)(4-i)}$

$=C_6^{14}-\left(\begin{array}{l}C_3^{4}\times\dfrac{1}{2\times3+1}C_3^{3\times3}+C_4^{7}\times\dfrac{1}{2\times2+1}C_2^{3\times2}+\\ C_5^{10}\times\dfrac{1}{2\times1+1}C_1^{3\times1}+C_6^{13}\times\dfrac{1}{2\times0+1}C_0^{3\times0}\end{array}\right)$

$=C_6^{14}-\left(d_{(0,2)}^{0.5x+2}c_0\times C_6^{13}+d_{(1,)}^{2}\times C_5^{10}+d_{2,0}^{2}\times C_4^{7}+d_{3,0}^{2}\times C_3^{4}\right)=882$



4.04：

$T_{n,h}^{\frac{1}{1},k}=C_{n+h-1}^{2n+k+h-3}-$

$\sum_{i=0}^{n-2}d_{(i,i+k-1)}^{y\le x+k-1}\times C_{n+h-1-i}^{2n+h-3-2i}$

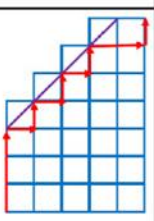
$=\sum_{i=n-1}^{n+h-1}d_{(i,i+k-1)}^{y\le x+(k-1)}\times C_{n+h-1-i}^{2n+h-3-2i}$

解：

$T_{4,2}^{\frac{1}{1},4}=C_{4+2-1}^{2\times4+4+2-3}-\sum_{i=0}^{4-2}d_{(i,i+(4-1))}^{y\le x+(4-1)}\times C_{4+2-1-i}^{2\times4+2-3-2i}$

$=C_5^{11}-(d_{(0,3)}^{x+3}\times C_5^{7}+d_{(1,4)}^{x+3}\times C_4^{5}+d_{(2,5)}^{x+3}\times C_3^{3})$

$=407$



4.08：

$T_{n,h}^{\frac{r}{1},k}=C_{n+h-1}^{(r+1)(n-1)+k+h-1}-$

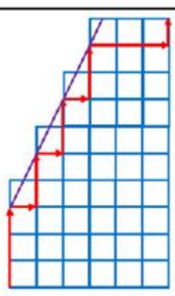
$\sum_{i=0}^{n-2}d_{(i,ri+k-1)}^{y\le rx+k-1}\times C_{n-1+h-i}^{(r+1)(n-1)+h-1-i(r+1)}$

解：

$T_{4,3}^{\frac{2}{1},4}=C_{(4-1)+3}^{(2+1)(4-1)+(4-1)+3}-\sum_{i=0}^{4-2}d_{(i,2i+(4-1))}^{y\le2x+(4-1)}\times C_{(4-1)+3-i}^{(2+1)(4-1)+3-1-i(2+1)}$

$=C_6^{15}-\left(d_{(0,3)}^{y\le2x+3}\times C_6^{11}+d_{(1,5)}^{y\le2x+3}\times C_5^{8}+d_{(2,7)}^{y\le2x+3}\times C_4^{5}\right)$

$=5005-(1\times462+4\times56+18\times5)=4229$



4.12：

$T_{n,h}^{\frac{1}{\mu},k}=C_{(n-1)+(k-1)}^{(\mu+1)(n-1)+h+(k-1)}-$

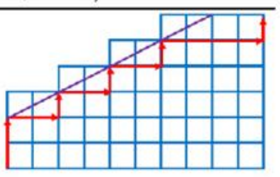
$\sum_{i=1}^{n-1}C_{i+(k-1)}^{(\mu+1)i+(k-1)-1}\dfrac{h+1}{\mu((n-1)-i)+h+1}C_{(n-1)-i}^{(\mu+1)((n-1)-i)+h}$

解：

$T_{4,4}^{\frac{1}{2},3}=C_{(4-1)+(3-1)}^{(2+1)(4-1)+4+(3-1)}-\sum_{i=1}^{4-1}C_{i+(3-1)}^{(2+1)i+(3-1)-1}\dfrac{4+1}{2((4-1)-i)+4+1}C_{(4-1)-i}^{(2+1)((4-1)-i)+4}$

$=C_5^{15}-\left(C_3^{4}\times\dfrac{5}{9}\times C_2^{10}+C_4^{7}\times\dfrac{5}{7}\times C_1^{7}+C_5^{10}\times\dfrac{5}{5}\times C_0^{4}\right)$

$=2476$



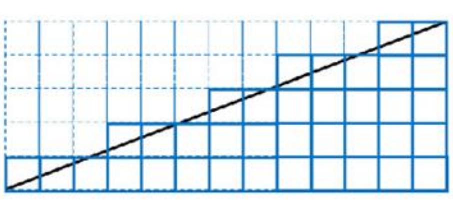
(二)變化不固定

(1)長寬互質的矩形存在一個堆疊圖形

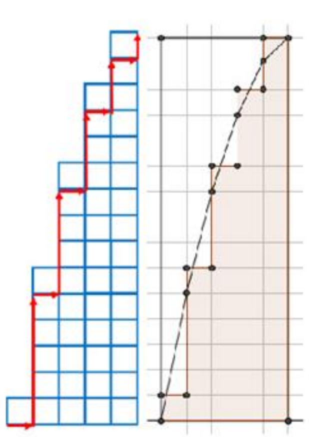
4.13：已知一矩形 $\mu\times r$ 且 $\mu>r,(\mu,r)=1$，若滿足下列條件

$x=\left\lceil\dfrac{\mu}{r}\times(t-1)\right\rceil\sim\left\lceil\dfrac{\mu}{r}\times t\right\rceil,y=t,t=1,2,\dots,r$ 之整數，可得一階梯形狀 A，則 $T=\dfrac{1}{\mu+r}C_r^{\mu+r}$

解：由 4.13 可得 $T=\dfrac{1}{13+5}C_5^{13+5}=476$



(2)階數差或格數差成等差的堆疊圖形



4.14：由定理 3.15(2)知

$\left|L:(0,0)\to(5,f(5));\{R_5\}\right|$

$=C_5^{5+f(5)}-\sum_{i=0}^{5-1}d_{(i,f(i))}^{R_i}\times C_{5-i}^{(5-i)+(f(5)-f(i))-1}$

當 $\begin{cases}f(0)=0\\ f(k)=\dfrac{k}{2}(11-k),k\in N\end{cases}$ 且 $R_5:\begin{cases}y\le5x,0\le x\le1\\ y\le4x+1,1\le x\le2\\ y\le3x+3,2\le x\le3\\ y\le2x+6,3\le x\le4\\ y\le x+10,4\le x\le5\end{cases}$

範例：$A_{5,1}^{\frac{<r_i>}{1},1},\left(<r_i>_{i=1}^{4}=5,4,3,2\right)$，對應的路徑數為 $T_{5,1}^{\frac{<r_i>}{1},1},\left(<r_i>_{i=1}^{4}=5,4,3,2\right)=2220$

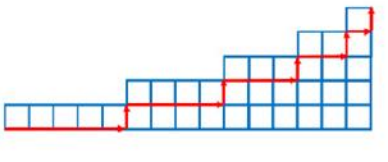
4.16：由定理 3.16(2)知

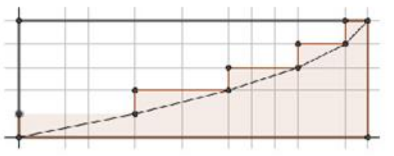
$\left|L:(0,0)\to(5,p(5));\{R_5\}\right|$

$=C_5^{5+p(5)}-\sum_{i=0}^{5-1}d_{(i,p(i))}^{R_i}\times C_{5-i}^{(5-i)+(p(5)-p(i))-1}$

當 $\begin{cases}p(0)=0\\ p(k)=\dfrac{k}{2}(11-k),k\in N\end{cases}$ 且 $R_5:\begin{cases}5y\le x,0\le y\le1\\ 4y+1\le x,1\le y\le2\\ 3y+3\le x,2\le y\le3\\ 2y+6\le x,3\le y\le4\\ y+10\le x,4\le y\le5\end{cases}$

範例：$A_{5,1}^{\frac{1}{<\mu_i>},1},\left(<\mu_i>_{i=1}^{4}=5,4,3,2\right)$，對應的路徑數為 $T_{5,1}^{\frac{1}{<\mu_i>},1},\left(<\mu_i>_{i=1}^{4}=5,4,3,2\right)=268$





伍、討論

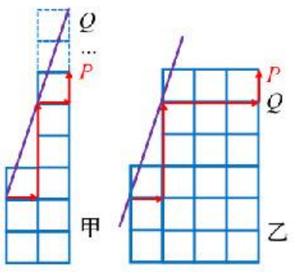
一、對於 $A_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$

(一)當 r,μ 固定時，由定義可知，此圖形恰完全位於寬 $(n-1)\mu+h$ 、高 $(n-1)r+k$ 的矩形內。

(二) $\mu=h=1$ 或 $r=k=1$ 都可直接代路徑公式

(三)利用演算法畫出「最高虛擬路徑」，可以幫助我們找到對應路徑計算 $T_{n,h}^{\frac{r}{\mu},k}$ 。

二、公式與實際路徑、計算路徑的關係



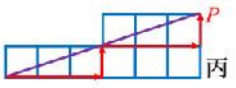
(一) $\mu=1,r\geq 1$ (一格一階或一格多階)時

(1)若 $h=\mu$ ，由甲圖可知，實際路徑的終點為 P

①當 $r=1$ 時邊界恰過 P ，代入終點在邊界的公式

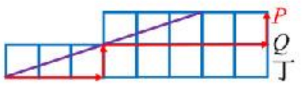
②當 r>1時邊界未通過 P 但通過 Q ，而通過 P 後往上至 Q 的路徑數皆相同，代入計算至 Q 的公式

(2)若 $h>\mu$ ，由乙圖可知，經演算法所得每條路徑都會通過 Q ，再通過 P ，計算至 Q 有公式，故僅計算至 Q



(二) $\mu>1,r=1$ (多格一階)時

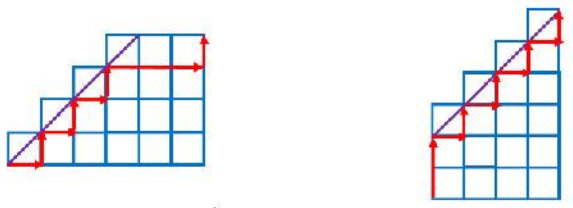
(1)若 $h=\mu$ ，由丙圖可知邊界恰過 P ，代入終點在邊界的公式



(2)若 $h>\mu$ ，由丁圖可知，與(一)(2)同，所得每條路徑都會通過 Q ，再通過 P ，計算至 Q 有公式，故僅計算至 Q

三、圖形結構相同時，堆疊方法數可能不同

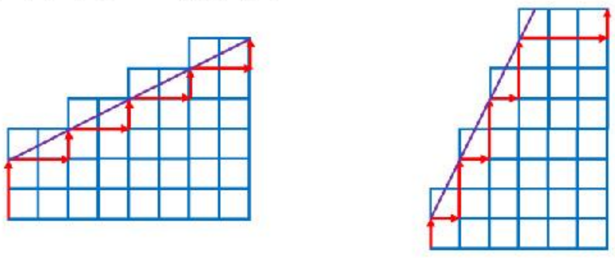
(一)一格一階



由性質 4.02，可得 $T_{4,3}^{\frac{1}{1},1}=\dfrac{3+1}{4+3}C_{4-1}^{2\times 4+3-2}=48$

由性質 4.03，可得 $T_{4,1}^{\frac{1}{1},3}=\dfrac{3}{4+3}C_{4}^{2\times 4+3-1}=90$

(二)多格一階⇔一格多階



由性質 4.11 可得，

$$T_{4,2}^{\frac{1}{2},3}=C_{4+(3-1)}^{(2+1)(4-1)+(3-1)}-\sum_{i=1}^{4}C_{i+(3-1)}^{(2+1)i+(3-1)-1}\frac{1}{2(4-i)+1}C_{4-i}^{(2+1)(4-i)}=882$$

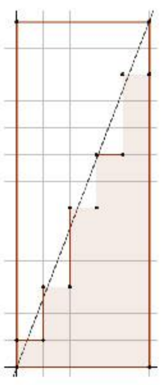
由性質 4.08 可得，

$$T_{4,3}^{\frac{2}{1},2}=C_{(4-1)+3}^{(2+1)(4-1)+(2-1)+3}-\sum_{i=0}^{4-2}d_{(i,2i+(2-1))}^{y\leq 2x+(2-1)}\times C_{(4-1)+3-i}^{(2+1)(4-1)+3-1-i(2+1)}=1107$$

四、長寬互質的矩形存在一個堆疊圖形

已知一矩形 $\mu\times r$ 且 $\mu<r,(\mu,r)=1$ ，若滿足下列條件

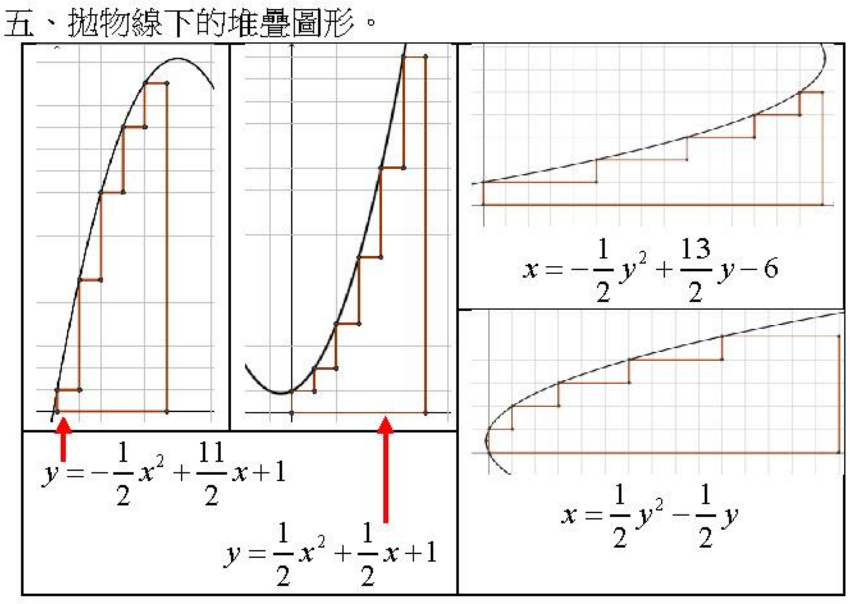
$$\begin{cases}x=0\sim 1,y=1\\ x=t\sim t+1,y=\left\lceil \dfrac{r}{\mu}\times t\right\rceil,t=1,2,...,\mu-1\text{之整數}\end{cases},$$



可得一階梯形狀 A ，則 $T=\dfrac{1}{\mu+r}C_{r}^{\mu+r}$

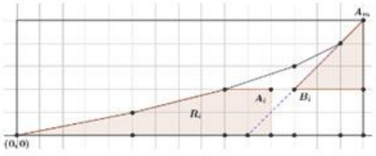
範例：如圖 $T=\dfrac{1}{13+5}C_{5}^{13+5}=476$

五、拋物線下的堆疊圖形。



六、定理：已知邊界條件形如

$$R_m:\begin{cases}\mu_1 y+k_1\leq x,0\leq y\leq 1\\ \mu_2 y+k_2\leq x,1\leq y\leq 2\\ \mu_3 y+k_3\leq x,2\leq y\leq 3\\ ......\\ \mu_m y+k_m\leq x,m-1\leq y\leq m\end{cases},$$



其中 $\mu_1>\mu_2>\mu_3>...>\mu_m$ 且 $r_i,i=1,2,...,m$ 為整數，則

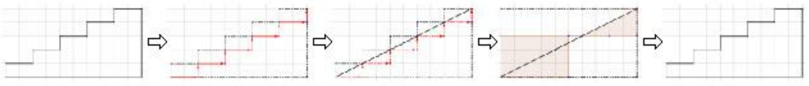
$$\left|L:(0,0)\to(m\mu_m+k_m,m);\{R_m\}\right|$$

$$=\sum_{i=0}^{m-1}\left|L:(0,0)\to(i\mu_m+k_m-1,i);\{R_i\}\right|\times\frac{1}{\mu_m(m-i)+1}C_{m-i}^{(\mu_m+1)(m-i)}$$

陸、結論

一、Jonah 定理與矩形堆疊

將堆疊問題透過演算法，轉換成路徑問題，利用 Jonah 定理，發展路徑公式，再利用路徑公式解決原來的堆疊問題。



二、變化固定的圖形，整理如下

範例	層	格	水平	階	高	矩形		直接代公式	邊界過起點	邊界過終點
	n	μ	h	r	k	寬	高			
4.01	4	1	1	1	1	4	4	公式 $\mu=h=1$ $r=k=1$	是 $k=1$	是 $\mu=h=1$
4.02	4	1	3	1	1	6	4	公式 $r=k=1$	是 $k=1$	
4.03	4	1	1	1	3	4	6	公式 $\mu=h=1$		是 $\mu=h=1$
4.04	4	1	2	1	4	5	7			
4.05	4	1	1	2	1	4	7	公式 $\mu=h=1$	是 $k=1$	* $\mu=h=1$
4.06	4	1	1	2	5	4	11	公式 $\mu=h=1$		* $\mu=h=1$
4.07	4	1	3	2	1	6	7		是 $k=1$	
4.08	4	1	3	2	4	6	10			
4.09	3	2	2	1	1	6	3	公式 $r=k=1$	是 $k=1$	是 $\mu=h=2$
4.10	5	2	3	1	1	11	5	公式 $r=k=1$	是 $k=1$	
4.11	4	2	2	1	3	8	6			# $\mu=h=2$
4.12	4	2	4	1	3	10	6			

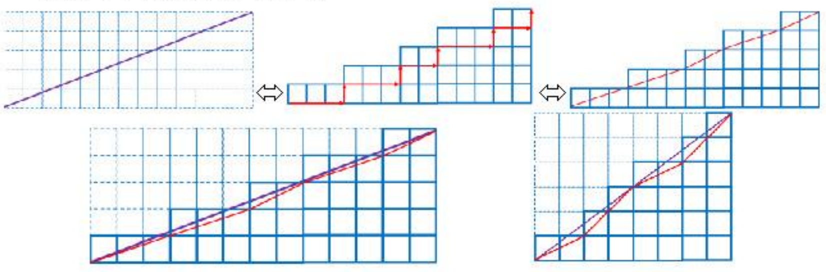
[註]：*表公式採用邊界過終點。#表過終點，但無直接代的公式

三、堆疊對有理數斜率與變動斜率的連結

(一)已知一矩形 $\mu\times r$ 且 $\mu>r,(\mu,r)=1$ ，依性質 4.13 可得一堆疊圖形，其排列方法數相當於不超過斜率為有理數邊界的路徑數。

(二)對(一)的堆疊圖形，同樣存在一條最高虛擬路徑，透過尖點連線，可得一組變動的單位分數斜率邊界，不超過此邊界的路徑數等同堆疊圖形的排列方法數。

(三)部分複雜的變動斜率邊界的路徑數可用有理數邊界計算。同樣地，非互質的有理數邊界，也可找到一組變動斜率的邊界來計算。



柒、參考資料及其他

1.第 62 屆中小學科學展覽會。斜面下相遇的機率。(2022).

2.林晉宏。一般性 Catalan 數的組合意義及其應用。數學傳播季刊，第 35 卷第 1 期, pp. 36-50。(2011)

3.Peter Hilton, Jean Pedersen, The ballot problem and Catalan numbers. Nieuw Archief voor Wiskunde (1990; 8: 209-216.)

4.Peter Hilton, Jean Pedersen, Catalan Numbers, Their Generalization, and Their Uses, The Mathematical Intelligencer ·(March 1991).

5.Christian Krattenthaler, Lattice Path Enumeration https://www.mat.univie.ac.at/~kratt/artikel/encylatt.pdf

6.原來樓梯間也能這麼玩！樓梯間設計對了，等於家裡多出一間房！(民 109 年 4 月 20 日)。壹讀。民 109 年 4 月 20 日，取自：https://read01.com/zy83e24.html