中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

050414

Stewart's Theorem 的推廣及相關探討

學校名稱：國立彰化高級中學

作者：	指導老師：
高二 黃品嘉 高二 楊子頡	龔詩尹 楊昌宸

關鍵詞：Stewart' sTheorem、德・斯路斯蚌線、反演

摘要

本文主要探討：在頂角為$\angle A$、腰長為$\overline{AB}=l$的等腰三角形ABC中，給定t，

滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=\pm t$的所有$P$點的軌跡方程式及圖形，我們得知：

一 $t=1$時，其圖形為直線$\overleftrightarrow{BC}$與$\triangle ABC$外接圓的聯集。

二 $0<t<\csc\left(\frac{A}{2}\right)$，但$t\neq 1$時，其圖形為兩圓：圓$C_1$、圓$C_2$。

若設圓C是以A為圓心；l為半徑的圓，則圓C_1對圓C的反演是圓C_2。

三 $t=0$或$\csc\left(\frac{A}{2}\right)$時，其圖形為一圓。

四 $\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=t$對圓$C$的反演為$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=-t$。

再者，我們研究等腰梯形的情況，其圖形為圓與形似「德・斯路斯蚌線」的聯集。我們說明等腰三角形是等腰梯形的極限狀況。

更一般地，我們探討任意三角形，得知其圖形為圓與雙曲線的聯集。

壹、　研究動機

數學專題課中，我們研讀了$Stewart's\ Theorom$，對於其中邊長之間的恆等式，雖然證明不難，但卻令我們印象深刻。我們改變了其中的條件加以推廣。

貳、　研究目的

一、在等腰三角形中推廣$Stewart's\ Theorom$，並引進參數t加以研究。
二、探討$Stewart's\ Theorom$在等腰梯形及任意三角形中的形式。
三、利用$GeoGebra$觀察方程式，並對圖形加以分析，做出結論。

參、　研究設備及器材

筆、紙、$GeoGebra$、$Wolfram\ Alpha$。

肆、　研究過程與方法

一、　文獻探討

在參考文獻一中，有一定理：$Stewart's\ Theorem$(史都華定理，又稱斯圖爾特定理)

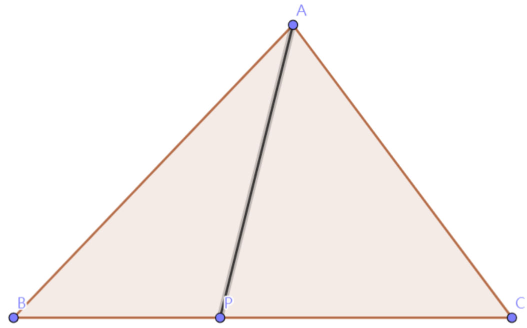
在一三角形ABC的邊$\overline{BC}$上任取一點P，則

$$\overline{PA}^2-\frac{\overline{PC}\times\overline{AB}^2+\overline{PB}\times\overline{AC}^2}{\overline{PB}+\overline{PC}}=-\overline{PB}\times\overline{PC}$$

此定理說明了$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$、$\overline{AB}$及$\overline{AC}$之間的關係。

若$\overline{AB}=\overline{AC}=l$，則$\overline{PA}^2-l^2=-\overline{PB}\times\overline{PC}$。

我們將P點任意移動，去探討$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$及l之間的關係。



圖(一-1)

二、 P點在直線$\overleftrightarrow{BC}$上

定理 1

等腰三角形$\boldsymbol{ABC}$的底邊$\overline{\boldsymbol{BC}}$所在的直線上取一點$\boldsymbol{P}$，設$\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{AC}} = \boldsymbol{l}$，則

(一).若$\boldsymbol{P}$在線段$\overline{\boldsymbol{BC}}$上，則$\overline{\boldsymbol{PA}}^2 - \boldsymbol{l}^2 = -\overline{\boldsymbol{PB}} \times \overline{\boldsymbol{PC}}$

(二).若$\boldsymbol{P}$在直線$\overleftrightarrow{\boldsymbol{BC}}$上，但不在線段$\overline{\boldsymbol{BC}}$上，則$\overline{\boldsymbol{PA}}^2 - \boldsymbol{l}^2 = \overline{\boldsymbol{PB}} \times \overline{\boldsymbol{PC}}$。

證明：

(一). P在線段$\overline{BC}$上，如**圖(二-1)**。

利用餘弦定理可知：

$$\cos\theta = \frac{\overline{PA}^2+\overline{PB}^2-l^2}{2\overline{PA}\times\overline{PB}}，$$

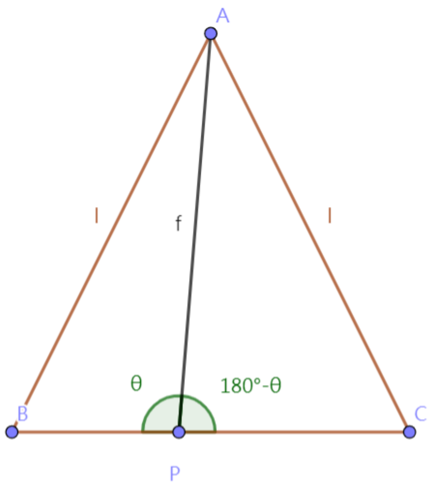
$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{\overline{PA}^2+\overline{PC}^2-l^2}{2\overline{PA}\times\overline{PC}}$$

利用$\cos\theta = -\cos(180^\circ - \theta)$的性質，

可得$\overline{PC}\left(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - l^2\right) = -\overline{PB}\left(\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 - l^2\right)$

整理成$(\overline{PB} + \overline{PC})\left(\overline{PA}^2 + \overline{PB} \times \overline{PC}\right) = (\overline{PB} + \overline{PC}) \cdot l^2$

可得$\overline{PA}^2 - l^2 = -\overline{PB} \times \overline{PC}$。得證。



圖(二-1)

(二). P在直線$\overleftrightarrow{BC}$，且P在$\overline{BC}$左側(右側證明方法相同)，如**圖(二-2)**。

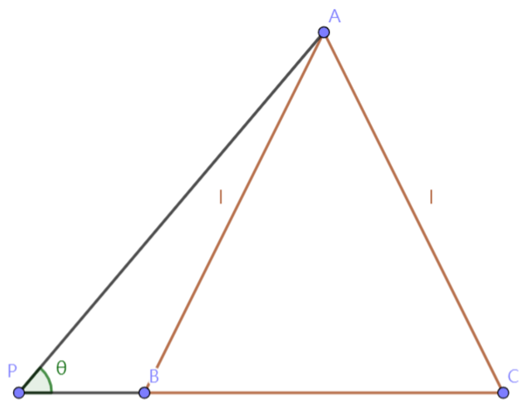
利用餘弦定理兩次可知：

$$\cos\theta = \frac{\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - l^2}{2\overline{PA} \times \overline{PB}} = \frac{\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 - l^2}{2\overline{PA} \times \overline{PC}}$$

可得$\overline{PC}\left(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - l^2\right) = \overline{PB}\left(\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 - l^2\right)$

整理成$(\overline{PC} - \overline{PB})\left(\overline{PA}^2 - \overline{PB} \times \overline{PC}\right) = (\overline{PC} - \overline{PB})l^2$

可得$\overline{PA}^2 - l^2 = \overline{PB} \times \overline{PC}$。得證。



圖(二-2)

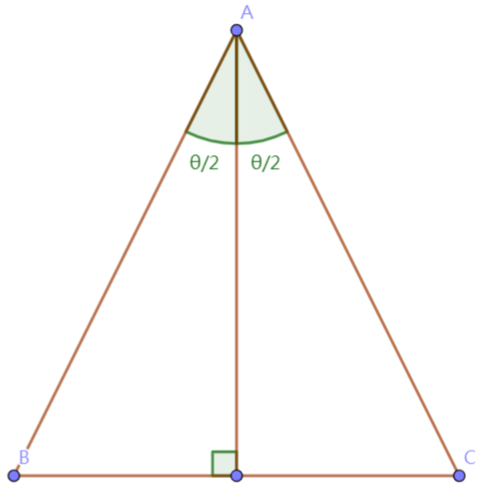
三、 $\overline{PA}^2 - l^2 = \pm\overline{PB} \times \overline{PC}$

在前一小節，我們知道若P點在等腰三角形的底邊$\overline{BC}$所在的直線上，假設$\overline{AB} = \overline{AC} = l$，則 $\frac{\overline{PA}^2 - l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}$ 的可能值為± 1。

那反過來，$\frac{\overline{PA}^2 - l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}} = 1$或 $\frac{\overline{PA}^2 - l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}} = -1$時，其$P$點軌跡為何？我們將$A$、$B$、$C$、$P$座標化，假設

$\angle BAC = \theta$，A點座標為$(0,0)$、$B = \left(-l\sin\frac{\theta}{2}, -l\cos\frac{\theta}{2}\right)$、

$C = (l\sin\frac{\theta}{2}, -l\cos\frac{\theta}{2})$及$P = (x, y)$，如**圖(三-1)**，



圖(三-1)

則：

$$\frac{\overline{PA}^2 - l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}} = \frac{x^2 + y^2 - l^2}{\sqrt{\left(x + l\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(y + l\cos\frac{\theta}{2}\right)^2} \times \sqrt{\left(x - l\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(y + l\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - l^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + l^2 + 2xl\sin\frac{\theta}{2} + 2yl\cos\frac{\theta}{2}} \times \sqrt{x^2 + y^2 + l^2 - 2xl\sin\frac{\theta}{2} + 2yl\cos\frac{\theta}{2}}}$$

若$\frac{\overline{PA}^2 - l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}} = 1$時$(x^2 + y^2 - l^2 > 0)$，

平方可得

$$(x^2 + y^2 - l^2)^2 = (x^2 + y^2 + l^2 + 2yl\cos\frac{\theta}{2})^2 - (2xl\sin\frac{\theta}{2})^2$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 + l^4 - 2l^2(x^2 + y^2)$$

$$= (x^2 + y^2)^2 + 2(l^2 + 2yl\cos\frac{\theta}{2})(x^2 + y^2) + \left(l^2 + 2yl\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 - \left(2xl\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4(l^2 + yl\cos\frac{\theta}{2})(x^2 + y^2) - 4l^2\sin^2\frac{\theta}{2}x^2 + 4l^2\cos^2\frac{\theta}{2}y^2 + 4l^3\cos\frac{\theta}{2}y = 0$$

$$\Rightarrow 4(l^2 + yl\cos\frac{\theta}{2})(x^2 + y^2) - 4l^2\sin^2\frac{\theta}{2}(x^2 + y^2) + 4l^2y^2 + 4l^3\cos\frac{\theta}{2}y = 0$$

$$\Rightarrow 4(l^2\cos^2\frac{\theta}{2} + yl\cos\frac{\theta}{2})(x^2 + y^2) + 4l^2y(y + l\cos\frac{\theta}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow 4\left(y + l\cos\frac{\theta}{2}\right)\left[l\cos\frac{\theta}{2}(x^2 + y^2) + l^2y\right] = 0$$

左右同除以$4l\cos\frac{\theta}{2}$

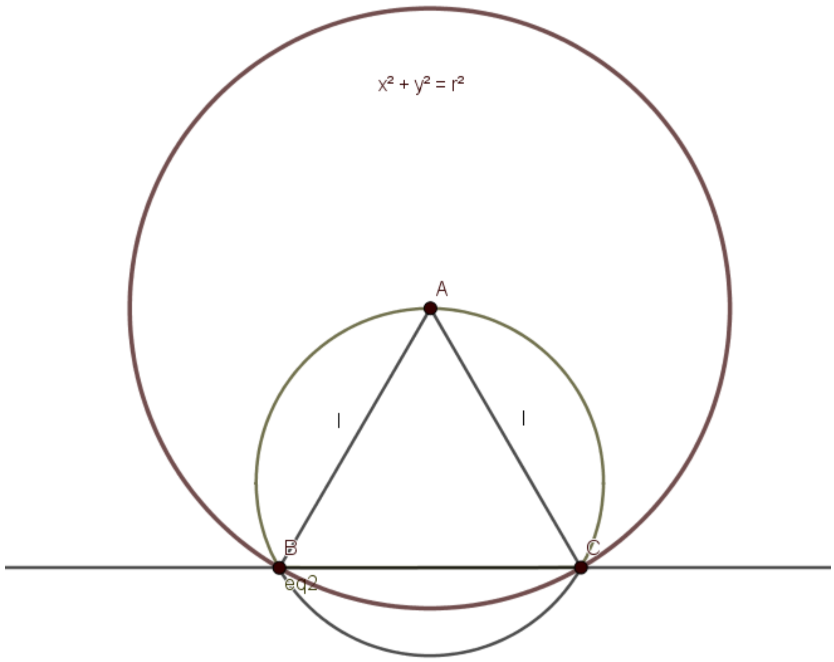
$$\Rightarrow \left(y+l\cos\frac{\theta}{2}\right)\left[x^2+y^2+(\frac{l}{\cos\frac{\theta}{2}})y\right]=0$$

$$\Rightarrow\ y+l\cos\frac{\theta}{2}=0 \text{ 或} x^2+y^2+\left(\frac{l}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)y=0$$

而$y+l\,cos\frac{\theta}{2}=0$是直線$\overleftrightarrow{BC}$，$x^2+y^2+\left(\frac{l}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)y=0$為$\triangle ABC$的外接圓。

然而這兩個圖形需滿足$x^2+y^2-l^2>0$，即在以A為圓心、l為半徑的圓的外部。

$\triangle ABC$的外接圓之最低點為$\left(0,\frac{-l}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)$落在$x^2+y^2=l^2$的外部，如**圖(三-2)**：



圖(三-2)

所以滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=1$的所有點$P$落在「直線$\overleftrightarrow{BC}$上，但不在線段$\overline{BC}$中」及

「$\triangle ABC$的外接圓上的弧BC上(不包含B、C兩點)」 。

另一方面，若$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=-1$時$(x^2+y^2-l^2<0)$，平方化簡後可得到相同方程式：

$$y+l\,cos\frac{\theta}{2}=0\text{或 }x^2+y^2+\left(\frac{l}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)y=0\text{。}$$

但其軌跡必須在$x^2+y^2=l^2$的內部，所以滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=-1$的所有點$P$落在

「線段$\overline{BC}$」及「$\triangle ABC$的外接圓的弧BAC上(不包含A、B、C三點)」。

接下來我們還要證明；

$\triangle ABC$的外接圓上的弧BC上的所有點(不包含B、C兩點)皆滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=1$，且在

弧BAC上的所有點(不包含A、B、C兩點)皆滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=-1$。

如**圖(三-3)**，P為弧BC上的動點，
由於$\overline{AB}=\overline{AC}$，所以$\angle APB=\angle APC$，
由餘弦定理可知：

$$\cos(\angle APB)=\frac{\overline{PA}^2+\overline{PB}^2-l^2}{2\overline{PA}\times\overline{PB}}$$

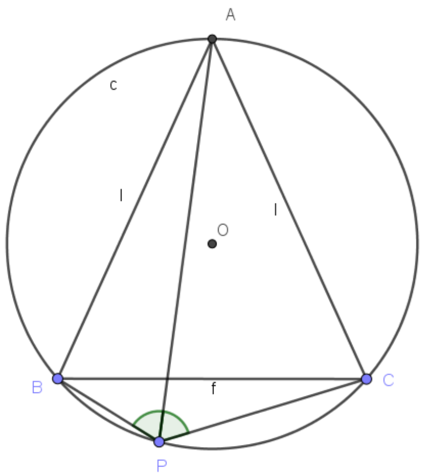
$$=\cos(\angle APC)=\frac{\overline{PA}^2+\overline{PC}^2-l^2}{2\overline{PA}\times\overline{PC}}$$

化簡為

$$\overline{PC}(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2-l^2)=\overline{PB}(\overline{PA}^2+\overline{PC}^2-l^2)$$

$$\Rightarrow(\overline{PC}-\overline{PB})(\overline{PA}^2-\overline{PB}\times\overline{PC})=(\overline{PC}-\overline{PB})l^2$$

若$\overline{PB}\neq\overline{PC}$，可得$\overline{PA}^2-l^2=\overline{PB}\times\overline{PC}$；
若$\overline{PB}=\overline{PC}$，則$\overline{PA}$為圓的直徑，亦滿足$\overline{PA}^2-l^2=\overline{PB}\times\overline{PC}$



圖(三-3)

而當P在弧BAC上，如**圖(三-4)**。由於$\angle ABP=\angle ACP$，由餘弦定理得知：

$$cos(\angle ABP)=\frac{\overline{PB}^2+l^2-\overline{PA}^2}{2\overline{PB}\times l}$$

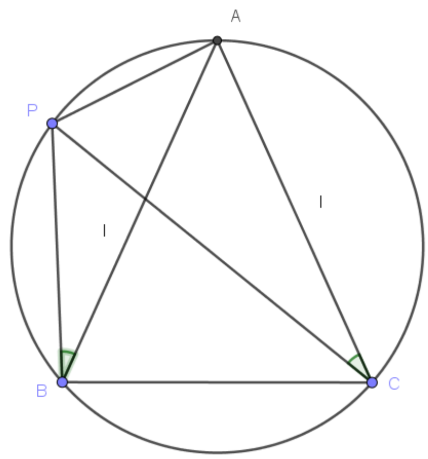
$$=cos(\angle ACP)=\frac{\overline{PC}^2+l^2-\overline{PA}^2}{2\overline{PC}\times l}$$

化簡為$\overline{PC}\left(\overline{PB}^2+l^2-\overline{PA}^2\right)=\overline{PB}\left(\overline{PC}^2+l^2-\overline{PA}^2\right)$

$$\Rightarrow(\overline{PB}-\overline{PC})\left(\overline{PA}^2+\overline{PB}\times\overline{PC}\right)=(\overline{PB}-\overline{PC})l^2$$

可得$\overline{PA}^2-l^2=-\overline{PB}\times\overline{PC}$

綜合以上結論，可整理成定理 2。



圖(三-4)

結論：

定理 2：

等腰$\triangle ABC$中，假設$\overline{AB}=\overline{AC}=l$，則：

(一). 滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=1$的點$P$軌跡為「直線$\overleftrightarrow{BC}$上，但不在線段$\overline{BC}$中」及「$\triangle ABC$的外接圓上的弧$BC$上$($不包含$B$、$C$兩點$)$」

(二). 滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=-1$的點$P$軌跡為「在線段$\overline{BC}$上」及「$\triangle ABC$的外接圓的弧$BAC$上$($不包含$A$、$B$、$C$三點$)$」。

四、 $\dfrac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=\pm t$ 的軌跡方程式，其中$t>0$，$t\neq 1$

在這一小節，我們設$\angle BAC=\theta$、$A=(0,0)$、$B=\left(-l\sin\frac{\theta}{2},-l\cos\frac{\theta}{2}\right)$、$C=\left(l\sin\frac{\theta}{2},-l\cos\frac{\theta}{2}\right)$及$P(x,y)$，討論$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=\pm t$的情形，其中$t>0$，且$t\neq 1$。
如同前一小節的計算，我們可得：

$$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=\frac{x^2+y^2-l^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+l^2+2yl\cos\frac{\theta}{2}\right)^2-\left(2xl\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}}$$

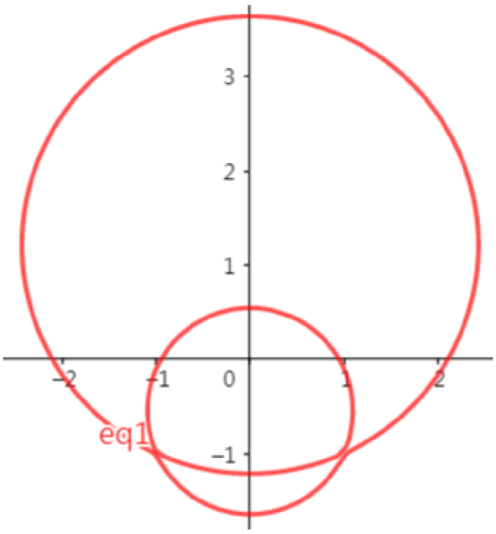
若$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=\pm t$，平方後會有相同的方程式：

$$(x^2+y^2-l^2)^2=t^2\left[\left(x^2+y^2+l^2+2yl\cos\frac{\theta}{2}\right)^2-\left(2xl\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\right]$$

(但我們可利用$x^2+y^2-l^2>0$、$x^2+y^2-l^2<0$去做區分)。
化簡為

$$(x^2+y^2)^2-2l^2(x^2+y^2)+l^4$$
$$=t^2\left[(x^2+y^2)^2+2\left(l^2+2yl\cos\frac{\theta}{2}\right)(x^2+y^2)+\left(l^2+2yl\cos\frac{\theta}{2}\right)^2-\left(2xl\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\right]$$
$$\Rightarrow (t^2-1)(x^2+y^2)^2+\left[2(t^2+1)l^2+4ylt^2\cos\frac{\theta}{2}\right](x^2+y^2)+(t^2-1)l^4-4l^2t^2\sin^2\frac{\theta}{2}x^2$$
$$+4l^2t^2\cos^2\frac{\theta}{2}y^2+4t^2l^3\cos\frac{\theta}{2}y=0 \qquad (☆)$$

此時設$t^2-1\neq 0$，由$GeoGebra$跑出來的圖形是兩個圓，由於方程式本身的圖形對稱於y軸，即圓心在y軸上，設(☆)可因式分解成
$(t^2-1)[x^2+(y-k_1)^2-r_1^2][x^2+(y-k_2)^2-r_2^2]=0$，即
$(t^2-1)[x^2+y^2-2k_1y+(k_1^2-r_1^2)][x^2+y^2-2k_2y+(k_2^2-r_2^2)]=0$



比較係數可得：

$y(x^2+y^2)$項：$4lt^2\cos\frac{\theta}{2}=(t^2-1)(-2k_1-2k_2)$	(1)
x^2項：$2(t^2+1)l^2-4l^2t^2\sin^2\frac{\theta}{2}=(t^2-1)(k_1^2+k_2^2-r_1^2-r_2^2)$	(2)
y^2項：$2(t^2+1)l^2+4l^2t^2\cos^2\frac{\theta}{2}=(t^2-1)(k_1^2+k_2^2-r_1^2-r_2^2+4k_1k_2)$	(3)
y項：$4t^2l^3\cos\frac{\theta}{2}=-2(t^2-1)[k_1(k_2^2-r_2^2)+k_2(k_1^2-r_1^2)]$	(4)
常數項：$(t^2-1)l^4=(t^2-1)(k_1^2-r_1^2)(k_2^2-r_2^2)$	(5)

第(3)式減第(2)式可得：$4l^2t^2=(t^2-1)\cdot 4k_1k_2$，即$k_1k_2=\frac{l^2t^2}{t^2-1}$。

在第(1)式中，可化簡為$k_1+k_2=\frac{-2lt^2\cos\frac{\theta}{2}}{t^2-1}$。

由根與係數關係得知，k_1、k_2為$(t^2-1)x^2+\left(2lt^2\cos\frac{\theta}{2}\right)x+l^2t^2=0$的兩根，

$$\text{所以}k_1\text{、}k_2=\frac{-lt^2\cos\frac{\theta}{2}\pm\sqrt{l^2t^4\cos^2\frac{\theta}{2}-(t^2-1)l^2t^2}}{t^2-1}$$

$$=\frac{-lt^2\cos\frac{\theta}{2}\pm lt^2\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}-1+\frac{1}{t^2}}}{t^2-1}$$

$$=\frac{-lt^2\left(\cos\frac{\theta}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)}{t^2-1} \qquad (6)$$

若$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=\pm t$的圖形要落在兩個不同的圓上，則必要能解出$k_1$、$k_2$是兩個相異實根，

即$\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}>0$，化簡為$0<t<\csc\frac{\theta}{2}$且$t\neq 1$。

由第(5)式中，可得$(k_1^2-r_1^2)(k_2^2-r_2^2)=l^4$

由第(2)式中，可得$(k_1^2-r_1^2)+(k_2^2-r_2^2)=\frac{2(t^2+1)l^2-4l^2t^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{t^2-1}$

由根與係數關係得知$(k_1^2-r_1^2)$、$(k_2^2-r_2^2)$為

$$(t^2-1)x^2-\left[2(t^2+1)l^2-4l^2t^2\,sin^2\frac{\theta}{2}\right]x+(t^2-1)l^4=0$$

的兩根。

所以$(k_1^2-r_1^2)$、$(k_2^2-r_2^2)$

$$=\frac{(t^2+1)l^2-2l^2t^2\sin^2\frac{\theta}{2}\pm\sqrt{\left[(t^2+1)l^2-2l^2t^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]^2-(t^2-1)^2l^4}}{t^2-1}$$

$$=\frac{1}{t^2-1}\left[(t^2+1)l^2-2l^2t^2\sin^2\frac{\theta}{2}\pm 2l^2t^2\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}\right] \tag{7}$$

在(6)、(7)兩式中，可知$(k_1,k_1^2-r_1^2)$及$(k_2,k_2^2-r_2^2)$的配對方式有兩種，代入第(4)式中檢驗，可知配對為

$$\left(\frac{-lt^2\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)}{t^2-1},\frac{(t^2+1)l^2-2l^2t^2\sin^2\frac{\theta}{2}+2l^2t^2\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}{t^2-1}\right)$$

及

$$\left(\frac{-lt^2\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)}{t^2-1},\frac{(t^2+1)l^2-2l^2t^2\sin^2\frac{\theta}{2}-2l^2t^2\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}{t^2-1}\right)$$

將以上討論整理成定理3。

結論：

定理3

等腰三角形ABC，設頂角$\angle A=\theta$，$A=(0,0)$、$B=\left(-l\sin\frac{\theta}{2},-l\cos\frac{\theta}{2}\right)$、

$C=\left(l\sin\frac{\theta}{2},-l\cos\frac{\theta}{2}\right)$及$P(x,y)$，設$0<t\le\csc\frac{\theta}{2}$，且$t\neq 1$

圓C_1：$x^2+y^2-2k_1y+\left(k_1^2-r_1^2\right)=0$、圓$C_2$：$x^2+y^2-2k_2y+\left(k_2^2-r_2^2\right)=0$

其中

$$k_1=\frac{-lt^2\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)}{t^2-1}、k_2=\frac{-lt^2\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)}{t^2-1}$$

$$k_1^2-r_1^2=\frac{(t^2+1)l^2-2l^2t^2\sin^2\frac{\theta}{2}+2l^2t^2\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}{t^2-1}$$

$$k_2^2-r_2^2=\frac{(t^2+1)l^2-2l^2t^2\sin^2\frac{\theta}{2}-2l^2t^2\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}{t^2-1}\text{，}$$

則：

(一).若$0<t<\csc\frac{\theta}{2}$，

1. 滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=t$的$P$點軌跡為圓$C_1$與$C_2$的聯集，但需滿足$x^2+y^2-l^2>0$。
2. 滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=-t$的$P$點軌跡為圓$C_1$與$C_2$的聯集，但需滿足$x^2+y^2-l^2<0$。

(二).若$t=\csc\frac{\theta}{2}$時，圓C_1、圓C_2重合

1. 滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=t$的$P$點軌跡為圓$C_1$，但需滿足$x^2+y^2-l^2>0$。
2. 滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=-t$的$P$點軌跡為圓$C_1$，但需滿足$x^2+y^2-l^2<0$。

五、 $\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=\pm t$ 的圖形分析

在上一小節，我們求出滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=\pm t$的軌跡為兩圓$C_1$、$C_2$的聯集，接下來我們將分析這兩個圓的特殊性質。

(一). C_1、C_2恆過定點B與C。

證明：在前一小節，我們透過座標化，假設A點座標為$(0,0)$、$B=\left(-l\sin\frac{\theta}{2},-l\cos\frac{\theta}{2}\right)$、

$C=\left(l\sin\frac{\theta}{2},-l\cos\frac{\theta}{2}\right)$代入$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=\pm t$，平方且移項整理成

$(\overline{PA}^2-l^2)^2-t^2\overline{PB}^2\times\overline{PC}^2=0$進而因式分解成兩圓$C_1$、$C_2$的乘積。

令$P=B$代入，滿足方程式$(\overline{PA}^2-l^2)^2-t^2\overline{PB}^2\times\overline{PC}^2=0$；$P=C$代入亦滿足，得證。

(二). $\frac{{k_1}^2}{{r_1}^2}=\frac{{k_2}^2}{{r_2}^2}=t^2$

證明：

$$
\begin{aligned}
{k_1}^2&=\frac{t^2}{t^2-1}\times\frac{l^2t^2\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2}{t^2-1}\\
&=\frac{t^2}{t^2-1}\times\frac{l^2t^2(\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}})}{t^2-1}\\
&=\frac{t^2}{t^2-1}\times\frac{l^2t^2(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{t^2}+2\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}})}{t^2-1}\\
&=\frac{t^2}{t^2-1}\times\frac{(t^2+1)l^2-2l^2t^2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\,l^2t^2\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}})}{t^2-1}\\
&=\frac{t^2}{t^2-1}\times({k_1}^2-{r_1}^2)
\end{aligned}
$$

化簡可得：${k_1}^2={r_1}^2t^2$，同理可證：${k_2}^2={r_2}^2t^2$，得證。

(三). 當$0<t<1$時，$k_1>0>k_2$；當$\csc\frac{\theta}{2}>t>1$時，$k_1<k_2<0$；$\lim_{t\to1}k_2=\frac{-l}{2\cos\frac{\theta}{2}}$。

證明：

$$
k_1=\frac{-lt^2(\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}})}{t^2-1}
$$

$$=\frac{-lt^2(\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}})(\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}})}{(t^2-1)(\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}})}$$

$$=\frac{-lt^2(\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{1}{t^2}+\sin^2\frac{\theta}{2})}{(t^2-1)(\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}})}=\frac{-l}{\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

當$0<t<1$時，$k_1>0$;當$\csc\frac{\theta}{2}>t>1$時，$k_1<0$

同理可得：$k_2=\frac{-l}{\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}$，$\lim_{t\to 1}k_2=\frac{-l}{2\cos\frac{\theta}{2}}$。當$\csc\frac{\theta}{2}>t>0$但$t\neq 1$時，$k_2<0$恆成立。

$k_1-k_2=\frac{-2lt^2\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}{t^2-1}$ ，

當$0<t<1$時，$k_1-k_2>0$，可推得，$k_1>0>k_2$。

當$\csc\frac{\theta}{2}>t>1$時，$k_1-k_2<0$，可推得，$k_1<k_2<0$。

得證。

(四). **當$t\to 1$時，$r_1\to\infty$；$\lim_{t\to 1}r_2=\frac{l}{2\cos\frac{\theta}{2}}$。**

證明：

由(三)中得知

$r_1^2=\frac{k_1^2}{t^2}=\left(\frac{l}{t\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{1-t^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}\right)^2$ ，當$t\to 1$時，$r_1^2\to\infty$。

$r_2^2=\frac{k_2^2}{t^2}=\left(\frac{l}{t\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{1-t^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}\right)^2$ ，當$t\to 1$時，$r_2^2\to\left(\frac{l}{2\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2$。

得證。

(五). **$t=1$時，C_1與C_2的聯集是直線與圓**

證明：

圓C_1的圓心是$(0,k_1)$，半徑是r_1；當$t\to 1$時，$r_1\to\infty$，是半徑無限大的圓，可視為直線。

圓C_2的圓心是$(0,k_2)$，半徑是r_2；當$t\to 1$時，方程式為$x^2+\left(y-\frac{-l}{2\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2=\left(\frac{l}{2\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2$

此為$\triangle ABC$的外接圓。這與(三)$\overline{PA}^2-l^2=\pm\overline{PB}\times\overline{PC}$ $(t=1)$的結論相同。

(六). **$t\neq 1$時，圓C_1對圓$x^2+y^2=l^2$的反演是圓C_2**

證明：

在(一)中，圓C_1：$x^2+(y-k_1)^2={r_1}^2$與圓C_2：$x^2+(y-k_2)^2={r_2}^2$恆過定點B與C，而B與C也在$x^2+y^2=l^2$上($x^2+y^2=l^2$是以A為圓心，半徑$=\overline{AB}=\overline{AC}=l$的圓)，故$B$與$C$對於$x^2+y^2=l^2$的反演，皆為本身自己。

在(三)中，我們得知：$k_1\times k_2=\frac{-l}{cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{\frac{1}{t^2}-sin^2\frac{\theta}{2}}}\times\frac{-l}{cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-sin^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{l^2}{1-\left(\frac{1}{t}\right)^2}$ (☆)

由(二)與(三)可推得：當$0<t<1$時，$r_1=\frac{k_1}{t}$且$r_2=-\frac{k_2}{t}$；

當$1<t<\csc\frac{\theta}{2}$時，$r_1=-\frac{k_1}{t}$且$r_2=-\frac{k_2}{t}$。

考慮圓C_1上的點$(0,k_1+r_1)$其對圓$x^2+y^2=l^2$的反演是

$\left(\frac{l^2\times 0}{0^2+(k_1+r_1)^2},\frac{l^2\times(k_1+r_1)}{0^2+(k_1+r_1)^2}\right)=(0,\frac{l^2}{k_1+r_1})$，我們分兩種情況處理：

Case1：當$0<t<1$時，$\frac{l^2}{k_1+r_1}=\frac{l^2}{k_1+\frac{k_1}{t}}=k_2-\frac{k_2}{t}=k_2+r_2$。(由(☆)得知)

$\left(0,\frac{l^2}{k_1+r_1}\right)=(0,k_2+r_2)$在圓$C_2$上。

Case2：當$1<t<\csc\frac{\theta}{2}$時，$\frac{l^2}{k_1+r_1}=\frac{l^2}{k_1-\frac{k_1}{t}}=k_2+\frac{k_2}{t}=k_2-r_2$。(由(☆)得知)

$\left(0,\frac{l^2}{k_1+r_1}\right)=(0,k_2-r_2)$在圓$C_2$上。

由以上討論可知：圓C_1上的三點：B、C、$(0,k_1+r_1)$，對$x^2+y^2=l^2$的反演，皆落在圓C_2上。而$0^2+(0-k_1)^2={k_1}^2=\mathrm{t}^2{r_1}^2\neq{r_1}^2$，所以圓$C_1$不通過$x^2+y^2=l^2$的圓心$(0,0)$，故圓$C_1$對$x^2+y^2=l^2$的反演是一個圓，而此圓正是圓$C_2$，得證。

(七).圓C_1、C_2與圓$x^2+y^2=l^2$的夾角相等(夾角為$\sin^{-1}\left(t\sin\frac{\theta}{2}\right)$、$\pi-\sin^{-1}\left(t\sin\frac{\theta}{2}\right)$)

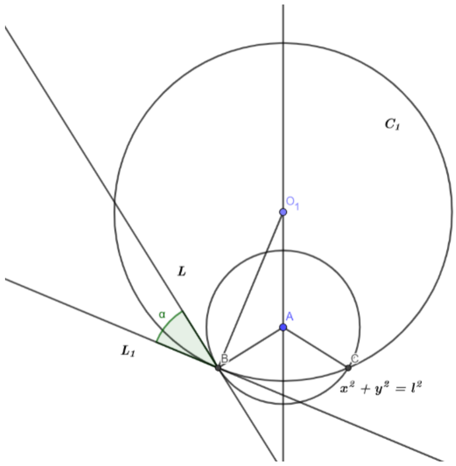
圓C_1與圓$x^2+y^2=l^2$相交於B、C兩點，過B作圓C_1的切線L_1，作圓$x^2+y^2=l^2$的切線L，則L_1與L的夾角α、$\pi-\alpha$稱為兩圓的夾角。如**圖(五-1)。**

由於$\overline{AB}\perp L$且$\overline{O_1B}\perp L_1$，所以L_1與L的夾角$\alpha=\angle O_1BA$。在ΔO_1BA中，$\overline{O_1B}=r_1$，$\overline{O_1A}=|k_1|$，

$\angle O_1BA=\alpha$且$\angle O_1AB=\pi-\frac{\theta}{2}$，由正弦定理可知：

$\frac{|k_1|}{\sin\alpha}=\frac{r_1}{\sin(\pi-\frac{\theta}{2})}$，合併(二)可得

$\sin\alpha=\frac{|k_1|}{r_1}\sin(\frac{\theta}{2})=t\sin(\frac{\theta}{2})$。



圖(五-1)

對於另一個交點C，由於B、C對稱於連心線$\overleftrightarrow{O_1A}$，所以在$B$點的夾角等於在$C$點的夾角。另一方面，設圓$C_2$與圓$x^2+y^2=l^2$的夾角為$\beta$、$\pi-\beta$，

同理可證：$\sin\beta=\frac{|k_2|}{r_2}\sin(\frac{\theta}{2})=t\sin(\frac{\theta}{2})$。

由上述討論可知$\sin\alpha=\sin\beta=t\sin(\frac{\theta}{2})$，夾角相等且其值為$\sin^{-1}\left(t\sin\frac{\theta}{2}\right)$、

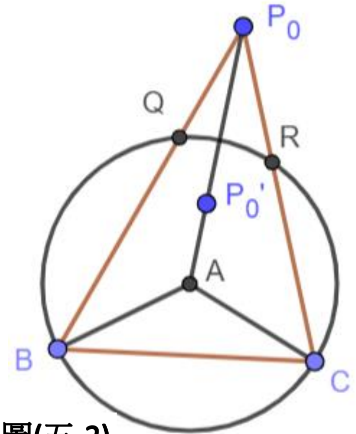
$\pi-\sin^{-1}\left(t\sin\frac{\theta}{2}\right)$，得證。

(八).$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=t$對圓$x^2+y^2=l^2$的反演為$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=-t$

證明：

設P_0為$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=t$上的一點，而$B$與$C$在$x^2+y^2=l^2$上，令$\overleftrightarrow{P_0B}$、$\overleftrightarrow{P_0C}$依序交$x^2+y^2=l^2$於$Q$、$R$，且$P_0$對$x^2+y^2=l^2$的反演為$P_0{}'$，如**圖(五-2)**。

P_0、Q、B對$x^2+y^2=l^2$的反演依序為$P_0{}'$、Q、B，且$\overleftrightarrow{P_0B}$是一條不通過圓心$A$的直線，故其反演為過圓心$A$的圓，可推得$A$、$B$、$Q$、$P_0{}'$四點共圓。



圖(五-2)

由於A、B、Q、$P_0{}'$四點共圓，可知$\angle P_0BP_0{}'=\angle P_0AQ$，又$\angle BP_0P_0{}'=\angle AP_0Q$，故

$\Delta P_0BP_0{}'\sim\Delta P_0AQ(AA$相似)，並可推得$\frac{\overline{P_0B}}{\overline{P_0{}'B}}=\frac{\overline{P_0A}}{\overline{AQ}}$。

同理可證：$\frac{\overline{P_0C}}{\overline{P_0{}'C}}=\frac{\overline{P_0A}}{\overline{AR}}$。

由於$\overline{AQ}=\overline{AR}=l$，所以$\overline{P_0{}'B}=\frac{\overline{P_0B}\times l}{\overline{P_0A}}$且$\overline{P_0{}'C}=\frac{\overline{P_0C}\times l}{\overline{P_0A}}$，

合併$\overline{P_0{}'A}=\frac{l^2}{\overline{P_0A}}$(反演的性質)，可知：

$\frac{(\overline{P_0{}'A})^2-l^2}{\overline{P_0{}'B}\times\overline{P_0{}'C}}=\frac{(\frac{l^2}{\overline{P_0A}})^2-l^2}{\frac{\overline{P_0B}\times l}{\overline{P_0A}}\times\frac{\overline{P_0C}\times l}{\overline{P_0A}}}=\frac{l^2-(\overline{P_0A})^2}{\overline{P_0B}\times\overline{P_0C}}=-t$，即$P_0{}'$滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=-t$，得證。

(九). $t=\csc\frac{\theta}{2}$時，圓C_1 =圓C_2：$x^2+\left(y+\frac{l}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2=\left(\tan^2\frac{\theta}{2}\right)l^2$

證明：

在(三)中，我們得知$k_1=\frac{-l}{\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}$及$k_2=\frac{-l}{\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}$，

當$t=\csc\frac{\theta}{2}$時，$k_1=k_2=\frac{-l}{\cos\frac{\theta}{2}}$。

在(二)中，$\frac{{k_1}^2}{{r_1}^2}=\frac{{k_2}^2}{{r_2}^2}=t^2$，所以$r_1=r_2=\frac{l}{\cos\frac{\theta}{2}}\cdot\sin\frac{\theta}{2}=\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)l$

圓C_1 =圓C_2：$x^2+\left(y+\frac{l}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2=\left(\tan^2\frac{\theta}{2}\right)l^2$。

(十). $t=0$，圓C_1 =圓C_2：$x^2+y^2=l^2$

證明：

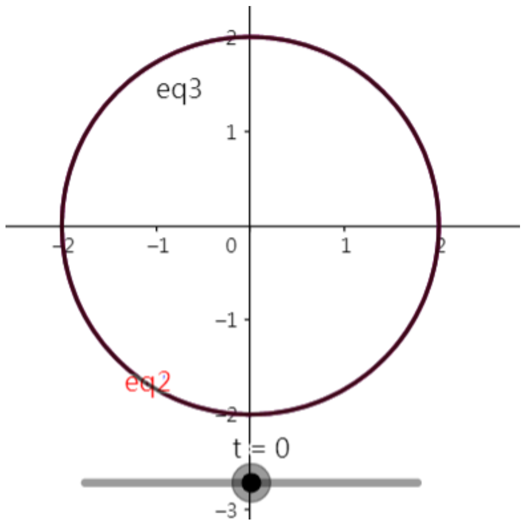
由於P滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=\pm t$，而$t=0$時，$\overline{PA}^2=l^2$，$P$的軌跡為$x^2+y^2=l^2$。

(十一). **範例**：令$A(0,0), B(-1,-\sqrt{3}), C(1,-\sqrt{3})$ (即$\theta=60^{\circ}$)

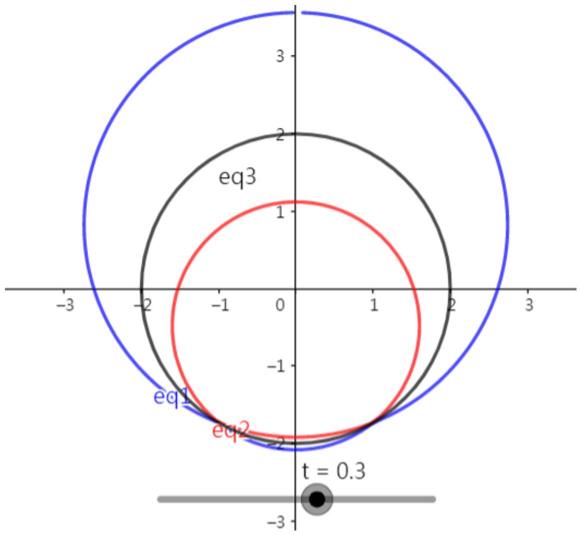
(黑色：$x^2+y^2=l^2$，藍色：$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=t$，紅色：$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=-t$。)

t由0增加至$\csc\frac{60^{\circ}}{2}=2$，圖形的變化情況：

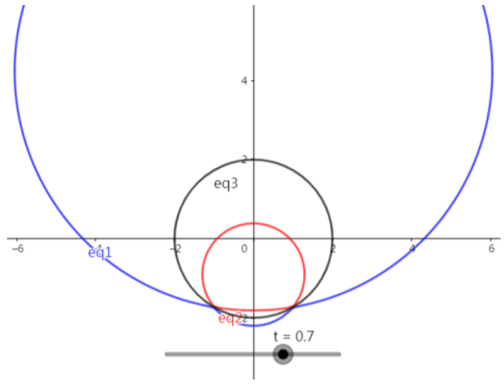
我們可觀察出，當t由0增加到1時，圓C_1的圓心一直都在x軸的上方，半徑逐漸變大，最後是「半徑是無限大的圓」，圓C_1被折成直線$\overleftrightarrow{BC}$；當t由1增加到2時，圓C_1的圖形又恢復成圓，此時的圓心都在x軸的下方。最後我們將所有的t值疊合成一張圖，可直接觀察其變化情形。



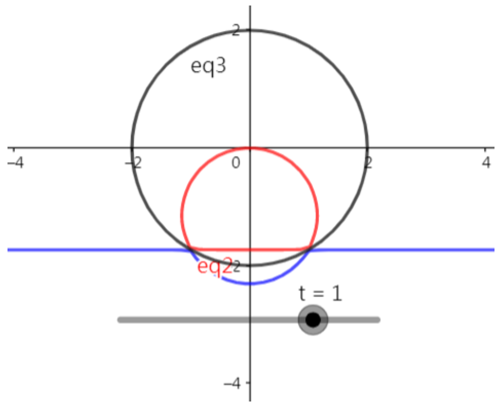
圖(五-3) $t=0$



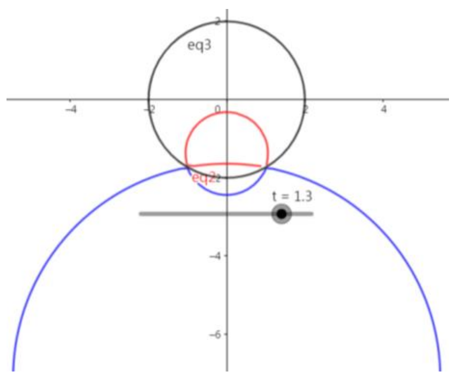
圖(五-4) $t=0.3$



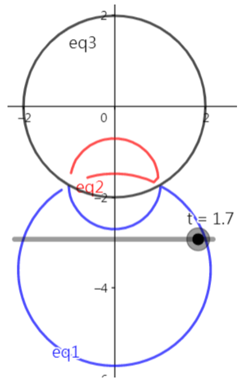
圖(五-5) $t=0.7$



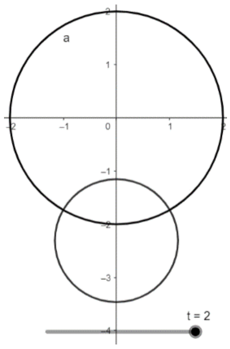
圖(五-6) $t=1$



圖(五-7) $t=1.3$

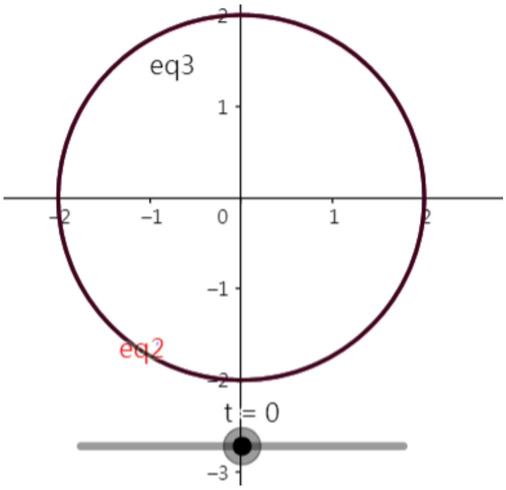


圖(五-8) $t = 1.7$

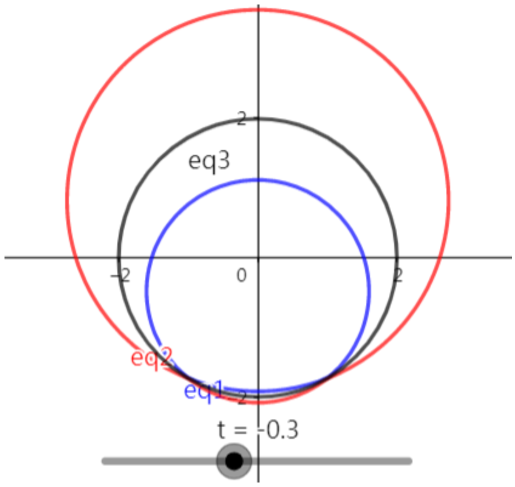


圖(五-9) $t = 2$

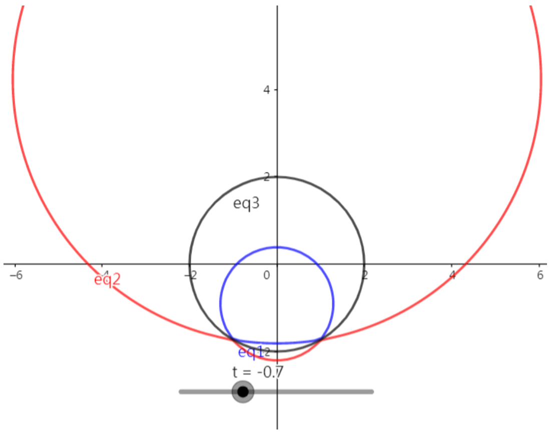
接著是t由0減少至-2(即$t = -\csc\frac{\theta}{2}$)，圖形的變化情況：



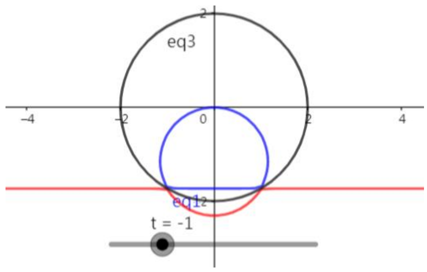
圖(五-10) $t = 0$



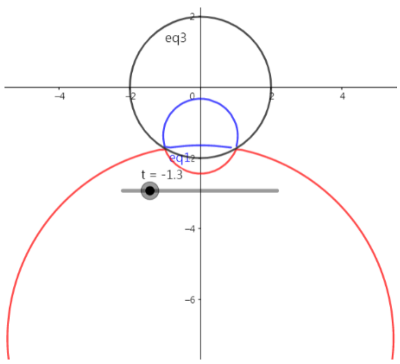
圖(五-11) $t = -0.3$



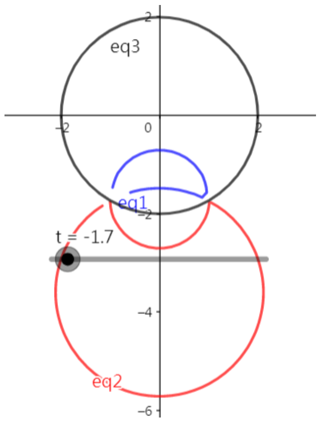
圖(五-12) $t = -0.7$



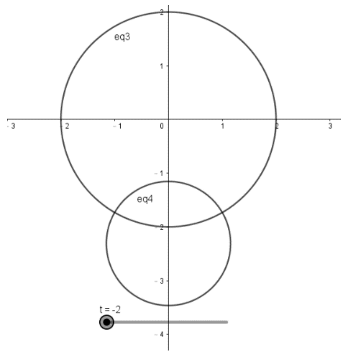
圖(五-23) $t = -1$



圖(五-34) $t = -1.3$

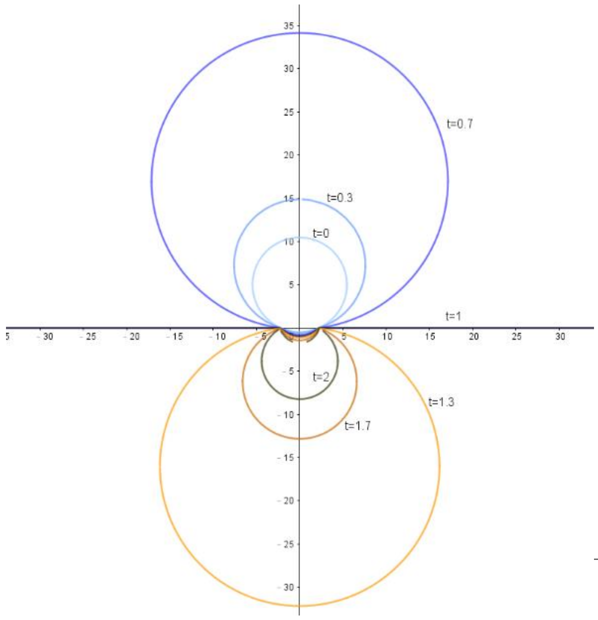


圖(五-15) $t = -1.7$

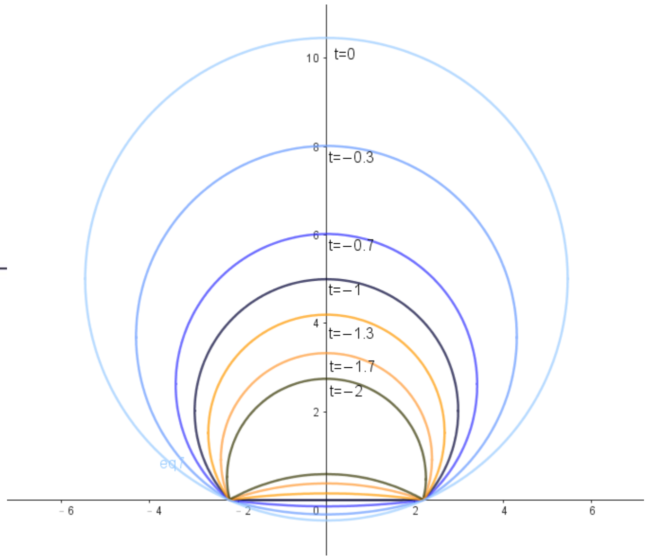


圖(五-16) $t = -2$

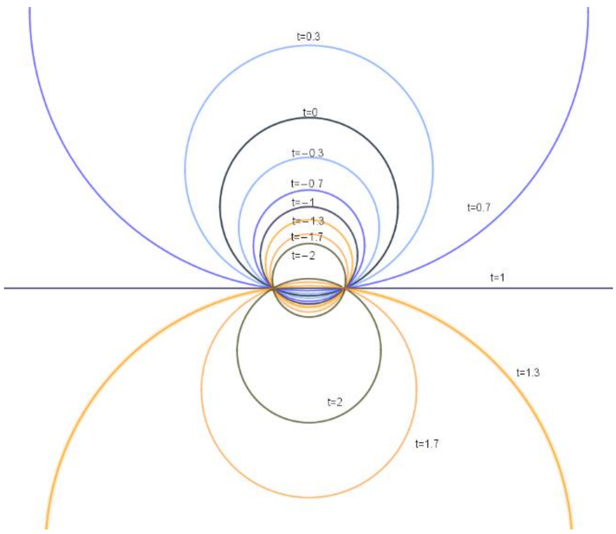
將各情形疊合後可得下圖：



圖(五-17) $x^2 + y^2 \geq 0$的情況



圖(五-48) $x^2 + y^2 \leq 0$ 的情況



圖(五-59)　**圖(五-17)**及**圖(五-18)**的疊合

六、　等腰梯形

在這一小節，我們討論等腰梯形的情況，並說明等腰三角形是等腰梯形的極限狀況。

定理4

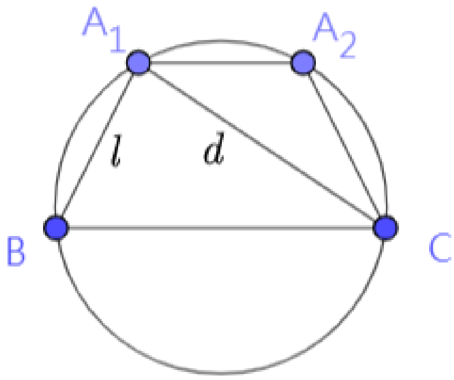
設四邊形A_1BCA_2是等腰梯形，其中$\overline{BC}\parallel\overline{A_1A_2}$，$\angle B=\angle C=\alpha$，$\overline{A_1C}=\overline{A_2B}=d$，$\overline{A_1B}=\overline{A_2C}=l$；設$P$為此等腰梯形的外接圓上的動點，如圖(六-1)。

令$\overline{PA_1}=a_1$，$\overline{PA_2}=a_2$，$\overline{PB}=b$，$\overline{PC}=c$，則：

(一).若P在弧BC上，則$a_1a_2-bc=dl$。

(二).若P在弧A_1B或弧A_2C上，則$a_1a_2+bc=dl$。

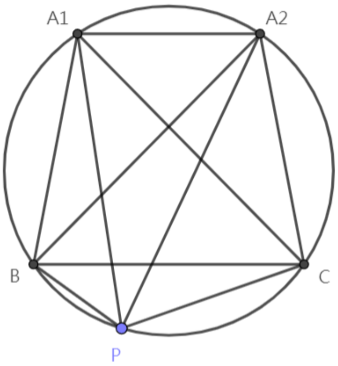
(三).若P在弧A_1A_2上，則$a_1a_2-bc=-dl$。



圖(六-1)

證明：

(一). P在弧BC上，如**圖(六-2)**：



圖(六-2)

在$\triangle A_1PC$中，$\angle A_1PC=\angle A_1BC=\alpha$，

利用餘弦定理可得$d^2={a_1}^2+c^2-2a_1c\cos\alpha$　　(1)

在$\triangle A_2PB$中，$\angle A_2PB=\angle A_2CB=\alpha$，

利用餘弦定理可得$d^2={a_2}^2+b^2-2a_2b\cos\alpha$　　(2)

$(1)\times a_2b-(2)\times a_1c$，可得

$(a_2b-a_1c)\times d^2=a_2b({a_1}^2+c^2)-a_1c({a_2}^2+b^2)$

$=(a_1a_2-bc)(a_1b-a_2c)$　　(3)

在$\triangle A_1PB$中，利用餘弦定理可得$l^2={a_1}^2+b^2-2a_1b\cos(\angle A_1PB)$　　(4)

在$\triangle A_2PC$中，利用餘弦定理可得$l^2={a_2}^2+c^2-2a_2c\cos(\angle A_2PC)$　　(5)

由於$\angle A_1PB=\frac{1}{2}$弧$A_1B=\frac{1}{2}$弧$A_2C=\angle A_2PC$，

$(4)\times a_2c-(5)\times a_1b$，可得

$(a_2c-a_1b)l^2=a_2c({a_1}^2+b^2)-a_1b({a_2}^2+c^2)=(a_1a_2-bc)(a_1c-a_2b)$　　(6)

在圓C中，大弧對大弦，可知$a_1>b$且$a_2>c$，進一步得知$a_1a_2>bc$。

由(3)、(6)可推得$\frac{a_2b-a_1c}{a_1b-a_2c}=\frac{a_1a_2-bc}{d^2}=\frac{l^2}{a_1a_2-bc}$，

化簡為$a_1a_2-bc=dl$。得證。

(二). P在弧A_1B或弧A_2C上：

如同(一)的手法，只是$\angle A_1PC=\alpha$，$\angle A_2PB=180^\circ-\alpha$，$\angle A_1PB=180^\circ-\angle A_2PC$，

依序可得$\frac{a_2b+a_1c}{a_1b+a_2c}=\frac{a_1a_2+bc}{d^2}=\frac{l^2}{a_1a_2+bc}$，

化簡為$a_1a_2+bc=dl$。得證。

(三). P在弧A_1A_2上：

如同(一)的手法，只是$\angle A_1PC = 180^{\circ} - \alpha$，$\angle A_2PB = 180^{\circ} - \alpha$，$\angle A_1PB = \angle A_2PC$，

依序可得$\frac{a_2b-a_1c}{a_1b-a_2c} = \frac{a_1a_2-bc}{d^2} = \frac{l^2}{a_1a_2-bc}$，但$a_1a_2 - bc < 0$，

化簡為$a_1a_2 - bc = -dl$。得證。

討論：

在定理4中，若$\overline{A_1A_2} \to 0$，則等腰梯形→等腰三角形ABC，其中$A_1 = A_2 = A$，$d \to l$且$a_1 = a_2$，定理4(一)、(二)改寫為：

若P在弧BC上，則$a_1a_2 - bc = dl$會變成$\overline{PA}^2 - \overline{PB} \times \overline{PC} = l^2$。

若P在弧BAC上，則$a_1a_2 + bc = dl$會變成$\overline{PA}^2 + \overline{PB} \times \overline{PC} = l^2$。

此與定理2的內容符合。

七、　等腰梯形$\boldsymbol{a_1a_2 \pm bc = \pm dl}$的圖形分析

在第六小節中，我們知道P在圓上，則有下列關係式：

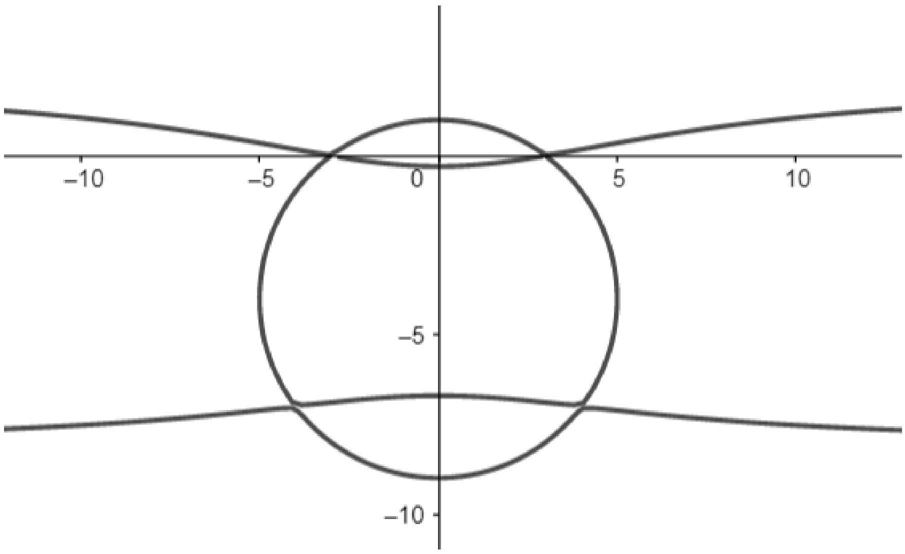
$a_1a_2 - bc = dl$或$a_1a_2 + bc = dl$或$a_1a_2 - bc = -dl$。

然而$a_1a_2 + bc = -dl$是無圖形的。

在這一小節，我們反過來想知道：滿足$a_1a_2 \pm bc = \pm dl$是何種圖形？
在圓Γ：$x^2 + (y+4)^2 = 25$上取四點：$A_1(-3,0)$、$A_2(3,0)$、$B(-4,-7)$、$C(4,-7)$，
則A_1A_2CB為等腰梯形，$l = \overline{A_1B} = 5\sqrt{2}$，$d = \overline{A_1C} = 7\sqrt{2}$；
設$P(x,y)$、$\overline{PA_1} = a_1$、$\overline{PA_2} = a_2$、$\overline{PB} = b$、$\overline{PC} = c$ 。

將$a_1a_2 \pm bc = \pm dl$，作移項並平方，變成$(a_1a_2)^2 = (\pm bc \pm dl)^2$，
再移項成$(a_1a_2)^2 - (bc)^2 - (dl)^2 = \pm 2bcdl$，
再平方整理成$[(a_1a_2)^2 - (bc)^2 - (dl)^2]^2 - (2bcdl)^2 = 0$ ，
然而經過兩次平方，其可還原成$a_1a_2 \pm bc = \pm dl$，並不會增根。

$[(a_1a_2)^2 - (bc)^2 - (dl)^2]^2 - (2bcdl)^2 = 0$ 將A_1、A_2、B、C依序代入，可得：
$\{[(x+3)^2 + y^2]\,[(x-3)^2 + y^2] - [(x+4)^2 + (y+7)^2][(x-4)^2 + (y+7)^2] - 4900\}^2 - 19600[(x+4)^2 + (y+7)^2][(x-4)^2 + (y+7)^2] = 0$
由$Geogebra$可繪製出其圖形為：



我們知道上式的軌跡方程式一定包含圓Γ，我們將其展開，並強迫其因式分解成：
$784[x^2 + (y+4)^2 - 25][x^2(y-2)(y+8) + (y^2 + 7y + 2)(y^2 + 7y + 72)] = 0$。

接下來我們要分析$x^2(y-2)(y+8) + (y^2 + 7y + 2)(y^2 + 7y + 72) = 0$的圖形。
(一). 首先，我們可驗證：A_1、A_2、B、C四點皆在圖形上。
(二). $y = 2$代入方程式，則$0 + 1800 \neq 0$，表示圖形與直線$y = 2$不相交；
$y = -8$代入方程式，則$0 + 800 \neq 0$，表示圖形與直線$y = -8$不相交；

(三). 由於$y \neq 2$且 $y \neq -8$，方程式可寫成$x^2 = -\frac{(y^2+7y+2)(y^2+7y+72)}{(y-2)(y+8)}$。

當$y > 2$或 $y < -8$時，$-\frac{(y^2+7y+2)(y^2+7y+72)}{(y-2)(y+8)} < 0$，故在$y > 2$或 $y < -8$時，無任何點滿足方程式。圖形會落在$-8 < y < 2$之間。

(四). 而當$y \to 2^-$時，$x^2 = -\frac{(y^2+7y+2)(y^2+7y+72)}{(y-2)(y+8)} \to \infty$，

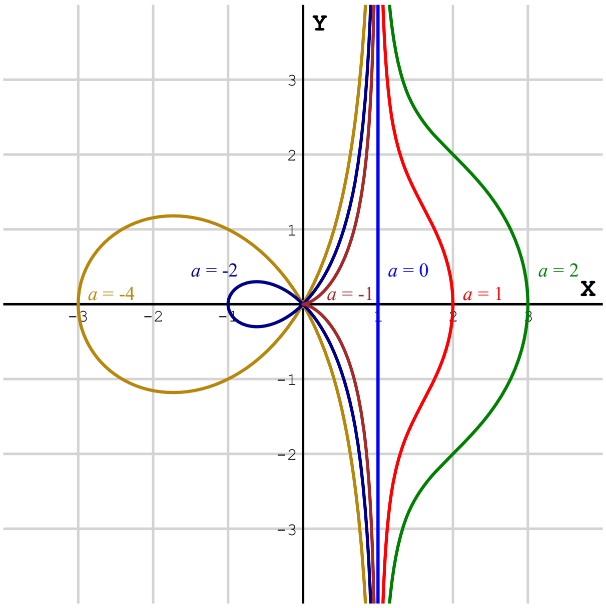
當$y \to (-8)^+$時，$x^2 = -\frac{(y^2+7y+2)(y^2+7y+72)}{(y-2)(y+8)} \to \infty$，

反之，當$x \to \infty$或$x \to -\infty$時，則$(y-2)(y+8) \to 0$

故$y = 2$ 與$y = -8$是圖形的漸近線。

(五). 接下來我們要說明其圖形當$|x|$夠大時，形似兩條「德・斯路斯蚌線」:

$(x-1)y^2 = -x^3 + (a+1)x^2$ (即$(x-1)(x^2+y^2) = ax^2$)



圖(七-1) (參考文獻(二))

$$x^2(y-2) = -\frac{(y^2+7y+2)(y^2+7y+72)}{(y+8)} = -\frac{y^4+14y^3+123y^2+518y+144}{(y+8)}$$

$$= -(y^3+6y^2+75y-82) - \frac{800}{y+8}$$

$$= -(y-1)^3 - 9(y-1)^2 - 90(y-1) - \frac{800}{y+8}$$

將圖形往下平移1單位，方程式變成：

$x^2(y-1) = -y^3 - 9y^2 - 90y - \frac{800}{y+9}$ ，

再對稱於$y = x$，方程式變成：

$y^2(x-1) = -x^3 - 9x^2 - 90x - \frac{800}{x+9}$，

當$|y|$夠大時，方程式近似於$y^2(x-1)=-x^3-9x^2$，$a=-10$的「德・斯路斯蚌線」
另一方面，

$$x^2(y+8)=-\frac{(y^2+7y+2)(y^2+7y+72)}{(y-2)}=-(y^3+16y^2+155y+828)-\frac{1800}{y-2}$$

$$=-(y+9)^3+11(y+9)^2-110(y+9)-\frac{1800}{y-2}$$

將圖形往上平移9單位，方程式變成：

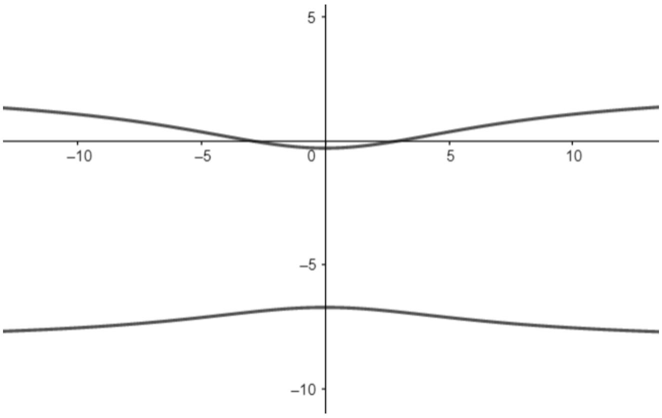
$$x^2(y-1)=-y^3+11y^2-110y-\frac{1800}{y-11}$$ ，

再對稱於$y=x$，方程式變成：

$$y^2(x-1)=-x^3+11x^2-110x-\frac{1800}{x-11}$$，

當$|y|$夠大時，方程式近似於$y^2(x-1)=-x^3+11x^2$，$a=10$的「德・斯路斯蚌線」。

(六). 用$Geogebra$可畫出$x^2(y-2)(y+8)+(y^2+7y+2)(y^2+7y+72)=0$的圖形如下：



圖(七-2)

及

(一). $a_1a_2 - bc = dl$：$\sqrt{(x+3)^2+y^2} \times \sqrt{(x-3)^2+y^2} -$

$$\sqrt{(x+4)^2+(y+7)^2} \times \sqrt{(x-4)^2+(y+7)^2} = 70$$

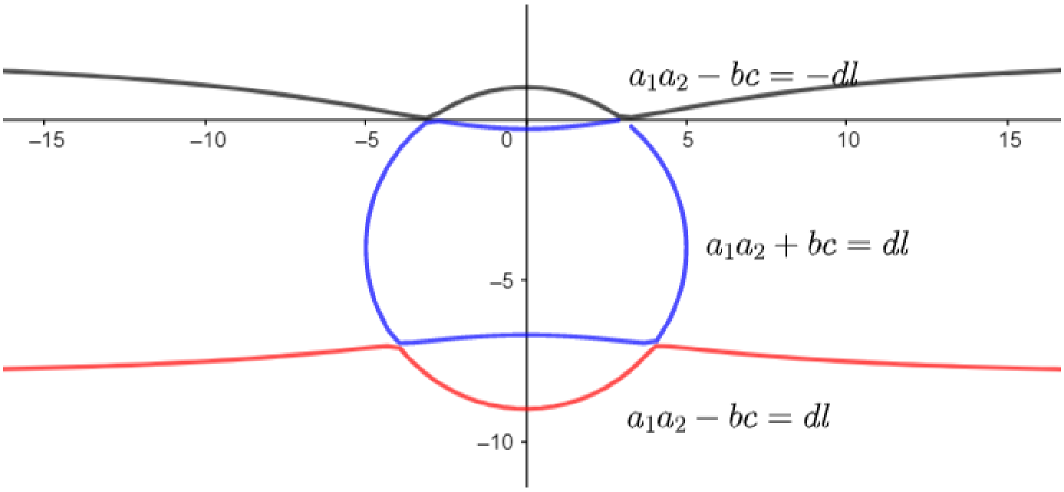
(二). $a_1a_2 + bc = dl$：$\sqrt{(x+3)^2+y^2} \times \sqrt{(x-3)^2+y^2} +$

$$\sqrt{(x+4)^2+(y+7)^2} \times \sqrt{(x-4)^2+(y+7)^2} = 70$$

(三). $a_1a_2 - bc = -dl$：$\sqrt{(x+3)^2+y^2} \times \sqrt{(x-3)^2+y^2} -$

$$\sqrt{(x+4)^2+(y+7)^2} \times \sqrt{(x-4)^2+(y+7)^2} = -70$$

的圖形如下：



圖(七-3)

皆驗證我們的討論。

八、　任意三角形

在這一小節，我們討論任意三角形的情形，並說明其與等腰三角形的關聯性。

定理 5

設$\boldsymbol{P}$為$\boldsymbol{\Delta ABC}$外接圓上的動點，

令$\overline{\boldsymbol{PA}}=\boldsymbol{a}$，$\overline{\boldsymbol{PB}}=\boldsymbol{b}$，$\overline{\boldsymbol{PC}}=\boldsymbol{c}$，$\overline{\boldsymbol{AB}}=\boldsymbol{l_1}$，$\overline{\boldsymbol{AC}}=\boldsymbol{l_2}$，

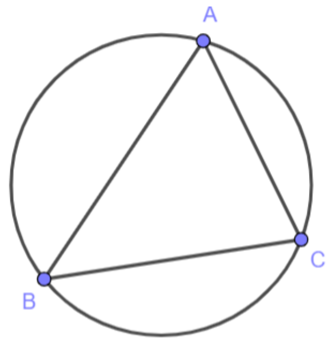
則：

(一).若 $\boldsymbol{P}$在弧$\boldsymbol{BC}$上，

則$(\boldsymbol{bl_1+cl_2})\boldsymbol{a^2}=(\boldsymbol{bl_2+cl_1})(\boldsymbol{bc+l_1l_2})$。

(二).若 $\boldsymbol{P}$在弧$\boldsymbol{BAC}$上，

則$(\boldsymbol{cl_2-bl_1})\boldsymbol{a^2}=(\boldsymbol{bl_2-cl_1})(\boldsymbol{bc-l_1l_2})$。



圖(八-1)

證明：

(一). P在弧BC上，如**圖(八-2)**

在ΔABP中，利用餘弦定理可得：

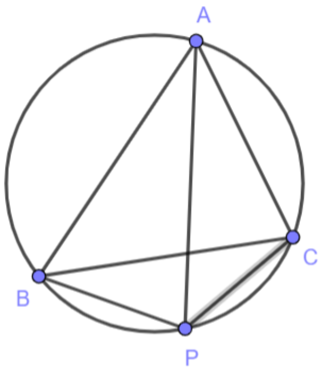
$a^2=b^2+{l_1}^2-2bl_1\cos\angle ABP$　(1)

在ΔACP中，利用餘弦定理可得：

$a^2=c^2+{l_2}^2-2cl_2\cos\angle ACP$　(2)

利用$\cos\angle ABP=-\cos\angle ACP$的性質，

(1)× cl_2 +(2)× bl_1，可得：



圖(八-2)

$(cl_2+bl_1)a^2=cl_2\left(b^2+{l_1}^2\right)+bl_1\left(c^2+{l_2}^2\right)=(bc+l_1l_2)(bl_2+cl_1)$，得證。

(二). P在弧BAC上：如同(一)的手法，只是$\angle ABP=\angle ACP$，

即$\cos\angle ABP=\cos\angle ACP$，可得：

$(cl_2-bl_1)a^2=cl_2\left(b^2+{l_1}^2\right)-bl_1\left(c^2+{l_2}^2\right)=(bl_2-cl_1)(bc-l_1l_2)$，得證。

討論：

在定理5中，若$l_1=l_2=l$ 時，則ΔABC為等腰三角形，定理 5(一)、(二)改寫為：

若 P在弧BC上，則$a^2=bc+l^2$，即$\overline{PA}^2-\overline{PB}\times\overline{PC}=l^2$。

若 P在弧BAC上，則$a^2=-bc+l^2$，即$\overline{PA}^2+\overline{PB}\times\overline{PC}=l^2$。

此與定理 2 的內容符合。

九、 任意三角形的圖形分析

在第八小節中，我們知道P在圓上，則有定理5中(一)、(二)的關係式；在這一小節，我們反過來想知道滿足此關係是何種圖形。

定理5中(一)、(二)可整理成：

$cl_2a^2-(b^2cl_2+cl_1^2l_2)=\pm(-bl_1a^2+bc^2l_1+bl_1l_2^2)$

平方後可化簡為：

$c^2l_2^2[a^2-(b^2+l_1^2)]^2=b^2l_1^2[a^2-(c^2+l_2^2)]^2$

$\Rightarrow c^2l_2^2[a^4+b^4+l_1^4-2a^2b^2-2a^2l_1^2+2b^2l_1^2]$

$=b^2l_1^2[a^4+c^4+l_2^4-2a^2c^2-2a^2l_2^2+2c^2l_2^2]$

$\Rightarrow a^4(b^2l_1^2-c^2l_2^2)+b^2c^2(c^2l_1^2-b^2l_2^2)-2a^2b^2c^2(l_1^2-l_2^2)$

$\quad +l_1^2l_2^2(b^2l_2^2-c^2l_1^2)-2a^2l_1^2l_2^2(b^2-c^2)=0$

接著在圓Γ：$x^2+(y+4)^2=25$上取$A(3,0)$、$B(-4,-7)$、$C(4,-7)$三點，則

$l_1=\overline{AB}=7\sqrt{2}$、$l_2=\overline{AC}=5\sqrt{2}$。可化簡為：

$a^4(49b^2-25c^2)+b^2c^2(49c^2-25b^2)-48a^2b^2c^2$

$+4900(25b^2-49c^2)-4900a^2(b^2-c^2)=0$

令$P=(x,y)$代入，可得：

$[(x-3)^2+y^2]^2[49(x+4)^2-25(x-4)^2+24(y+7)^2]$

$+\{[(x+4)^2+(y+7)^2][(x-4)^2+(y+7)^2]-4900\}$

$\times[49(x-4)^2-25(x+4)^2+24(y+7)^2]$

$-48[(x-3)^2+y^2][(x+4)^2+(y+7)^2][(x-4)^2+(y+7)^2]$

$-4900[(x-3)^2+y^2](16x)=0$

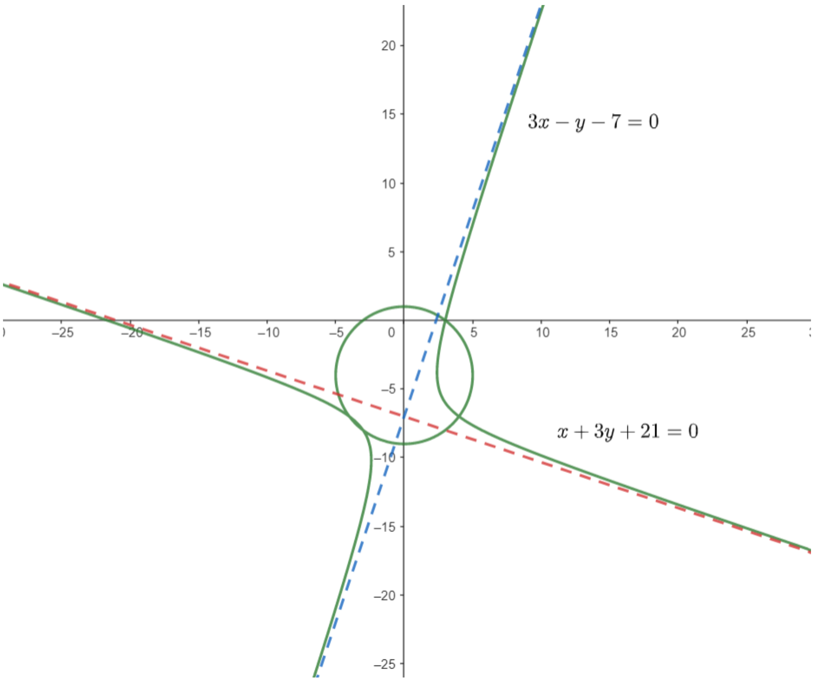
上式合併同類後，是一個x、y的二元四次方程式，我們知道其軌跡方程式一定包含圓Γ，我們強迫其因式分解為：

$-1568[x^2+(y+4)^2-25][3x^2+8xy-3y^2+56x-42y-195]=0$

接下來我們要分析$3x^2+8xy-3y^2+56x-42y-195=0$的圖形。此為$x$、$y$的二元二次方程式，判別式$=8^2-4\times3\times(-3)>0$，是雙曲線型，其可分解為：

$(3x-y-7)(x+3y+21)=48$，是以$3x-y-7=0$、$x+3y+21=0$為漸近線的雙曲線。

由$GeoGebra$作圖，其圖形為圓Γ與一雙曲線的聯集，如下圖，也驗證我們的結果。



圖(九-1)

由$GeoGebra$作圖，我們可以觀察出圓： $x^2+(y+4)^2=25$與雙曲線：$3x^2+8xy-3y^2+56x-42y-195=0$，有四個交點，其中三點為$A(3,0)$、$B(-4,-7)$、$C(4,-7)$，我們可解出第四點座標為$A'(-3,-8)$。

我們想知道若將A換成A'，且B、C不變，則

$cl_2a^2-(b^2cl_2+cl_1^2l_2)=\pm(-bl_1a^2+bc^2l_1+bl_1l_2^2)$是何種圖形？

如同之前的作法，$l_1'=\overline{A'B}=\sqrt{2}$，$l_2'=\overline{A'C}=5\sqrt{2}$，代入可化簡為：

$a^4(b^2-25c^2)+b^2c^2(c^2-25b^2)+48a^2b^2c^2+100(25b^2-c^2)-100a^2(b^2-c^2)=0$

令$P(x,y)$代入，可得：

$[(x+3)^2+(y+8)^2]^2[(x+4)^2-25(x-4)^2-24(y+7)^2]$

$+\{[(x+4)^2+(y+7)^2][(x-4)^2+(y+7)^2]-100\}$

$\times[(x-4)^2-25(x+4)^2-24(y+7)^2]$

$+48[(x+3)^2+(y+8)^2][(x+4)^2+(y+7)^2][(x-4)^2+(y-7)^2]$

$-100[(x+3)^2+(y+8)^2](16x)=0$

可化簡為：$32[x^2+(y+4)^2-25][3x^2+8xy-3y^2+56x-42y-195]=0$

其圖形為圓：$x^2+(y+4)^2=25$與

雙曲線：$3x^2+8xy-3y^2+56x-42y-195=0$之聯集。

我們觀察出$A(3,0)$、$A'(-3,-8)$對稱於圓心$(0,-4)$，所以ΔABC及$\Delta A'BC$所產生的關係式之圖形是相同的，也用$GeoGebra$驗證了許多例子支撐我們的猜測，但由於計算是一個大工程，目前還沒有找到一個有效的方式去證明它。

伍、　研究結果

一、等腰三角形ABC中，其中$\angle A$是頂角，$\overline{AB}=l$，對於$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=\pm t$，

(一)當$t=1$時，其圖形為直線$\overleftrightarrow{BC}$與$\triangle ABC$的外接圓的聯集。

(二)當$0<t<\csc\frac{A}{2}$，但$t\neq 1$時，其圖形為兩圓：圓C_1、圓C_2。

若設圓C是以A為圓心；l為半徑的圓，則圓C_1對圓C的反演是圓C_2。

(三)當$t=0$或$t=\csc\frac{A}{2}$時，其圖形為一圓。

(四) $\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=t$對圓$C$的反演為$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=-t$。

二、等腰梯形A_1BCA_2，其中$\overline{BC}\parallel\overline{A_1A_2}$，$P$為其外接圓上的動點，則：

$\overline{PA_1}\times\overline{PA_2}-\overline{PB}\times\overline{PC}=\pm\overline{A_1B}\times\overline{A_1C}$或$\overline{PA_1}\times\overline{PA_2}+\overline{PB}\times\overline{PC}=\overline{A_1B}\times\overline{A_1C}$。

而滿足此關係式的圖形是其外接圓與形似「德・斯路斯蚌線」的聯集。

三、P為任意三角形ABC外接圓上的動點，則：

$(\overline{PB}\times\overline{AB}+\overline{PC}\times\overline{AC})\overline{PA}^2=(\overline{PB}\times\overline{AC}+\overline{PC}\times\overline{AB})(\overline{PB}\times\overline{PC}+\overline{AB}\times\overline{AC})$或

$(\overline{PC}\times\overline{AC}-\overline{PB}\times\overline{AB})\overline{PA}^2=(\overline{PB}\times\overline{AC}-\overline{PC}\times\overline{AB})(\overline{PB}\times\overline{PC}-\overline{AB}\times\overline{AC})$。

而滿足此關係式的圖形是其外接圓與雙曲線的聯集。

陸、　討論

在第九小節中，我們猜測：當A與A'對稱於$\triangle ABC$外接圓的圓心時，其關係式
$(\overline{PB}\times\overline{AB}+\overline{PC}\times\overline{AC})\overline{PA}^2=(\overline{PB}\times\overline{AC}+\overline{PC}\times\overline{AB})(\overline{PB}\times\overline{PC}+\overline{AB}\times\overline{AC})$或
$(\overline{PC}\times\overline{AC}-\overline{PB}\times\overline{AB})\overline{PA}^2=(\overline{PB}\times\overline{AC}-\overline{PC}\times\overline{AB})(\overline{PB}\times\overline{PC}-\overline{AB}\times\overline{AC})$
中，若將A代換成A'時，所得圖形與代換前相同。這或許是因為$\overline{AA'}$是$\triangle ABC$外接圓的直徑而有的幾何性質，目前透過$GeoGebra$驗證了許多例子都滿足，但還沒有完整的證明。

柒、　結論

在這篇研究中，我們推廣了$Stewart's\ Theorom$，並在等腰三角形中透過定義參數t，做了完整的分析；在等腰梯形及任意三角形中，也有了不錯的收穫，未來將對尚未完成的區塊加以研究。

捌、　參考資料及其他

一、斯圖爾特定理(2021, December 20)。维基百科，自由的百科全書。取自：
https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E6%96%AF%E5%9B%BE%E5%B0%94%E7%89%B9%E5%AE%9A%E7%90%86&oldid=69184988

二、德·斯路斯蚌線(2021, September 22)。维基百科，自由的百科全書。取自：
https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E5%BE%B7%C2%B7%E6%96%AF%E8%B7%AF%E6%96%AF%E8%9A%8C%E7%BA%BF&oldid=67831452

三、反演(2019, January 6)。维基百科，自由的百科全書。取自：
https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=Special:%E5%BC%95%E7%94%A8%E6%AD%A4%E9%A1%B5%E9%9D%A2&page=%E5%8F%8D%E6%BC%94&id=52679686&wpFormIdentifier=titleform

四、黃少宏、吳宜謙、鄭惟仁(2020,12 月)。四邊形的等角曲線及相關探討。科學教育月刊，第 435 期，16-33。

【評語】050414

本作品從三角形的 Stewart Theorem 出發，然後考慮具有類似等式(比值)的點軌跡，首先假設給定之三角形為固定之等腰三角形，證明滿足 Stewart's Theorem 給出的等式的點，可形成底邊及外接圓弧的聯集。作者在修改等式中的係數後，可將滿足等式的點，變成兩圓弧的聯集。然而比較可惜的是推廣成等腰梯形或一般三角形時時，雖然有一些有趣的觀察，但是結果相對有限。

作品海報

Stewart's Theorem 的推廣及相關探討

摘要

本文主要探討：在頂角為$\angle A$、腰長為$\overline{AB}=l$的等腰三角形ABC中，給定t，滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=\pm t$的所有$P$點的軌跡方程式及圖形。再者，我們研究等腰梯形的情況，其圖形為圓與形似「德・斯路斯蚌線」的聯集。我們說明等腰三角形是等腰梯形的極限狀況。更一般地，我們探討任意三角形，得知其圖形為圓與雙曲線的聯集。

壹、　研究動機

數學專題課中我們研讀$Stewart's\ Theorom$，對於其中邊長之間的恆等式，雖然證明不難，但卻令我們印象深刻。我們改變了其中的條件加以推廣。

貳、　研究目的

一、在等腰三角形中推廣$Stewart's\ Theorom$，並引進參數t加以研究。

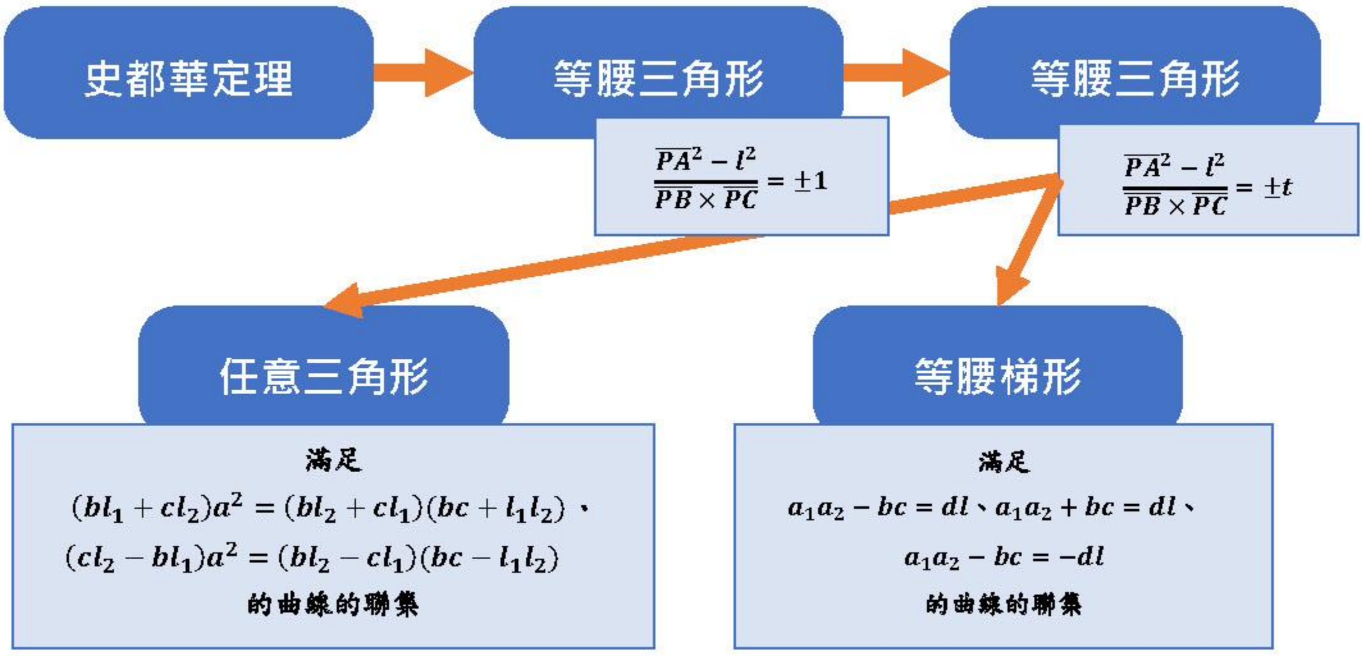
二、探討$Stewart's\ Theorom$在等腰梯形及任意三角形中的形式。

三、利用$GeoGebra$觀察方程式，並對圖形加以分析，做出結論。

參、　研究設備與器材

筆、紙、$GeoGebra$、$Wolfram\ Alpha$。

肆、　研究流程圖



伍、　研究過程與方法

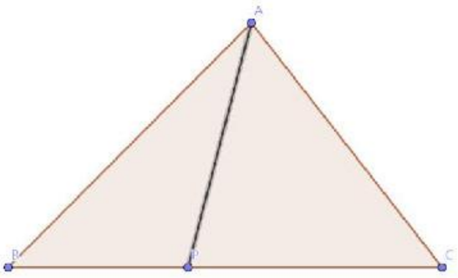
一、文獻探討

$Stewart$ ˊ$s\ Theorem$(史都華定理，又稱斯圖爾特定理)

在一三角形ABC的邊$\overline{BC}$上任取一點P，則

$$\overline{PA}^2-\frac{\overline{PC}\times\overline{AB}^2+\overline{PB}\times\overline{AC}^2}{\overline{PB}+\overline{PC}}=-\overline{PB}\times\overline{PC}$$

若$\overline{AB}=\overline{AC}=l$，則$\overline{PA}^2-l^2=-\overline{PB}\times\overline{PC}$。



二、P點在直線$\overleftrightarrow{BC}$上

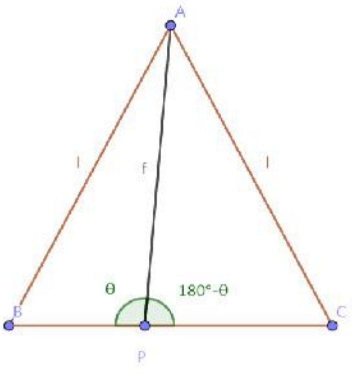
等腰三角形ABC的底邊$\overline{BC}$所在的直線上取一點P，設$\overline{AB}=\overline{AC}=l$，則

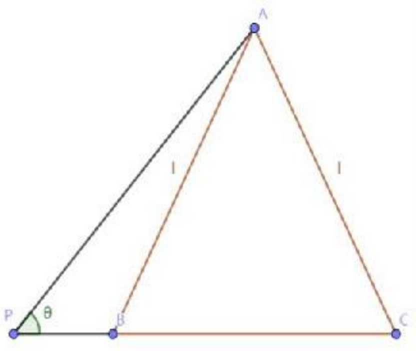
(一). 若P在線段$\overline{BC}$上，

則$\overline{PA}^2-l^2=-\overline{PB}\times\overline{PC}$

(二). 若P在直線$\overleftrightarrow{BC}$上，但不在線段$\overline{BC}$上

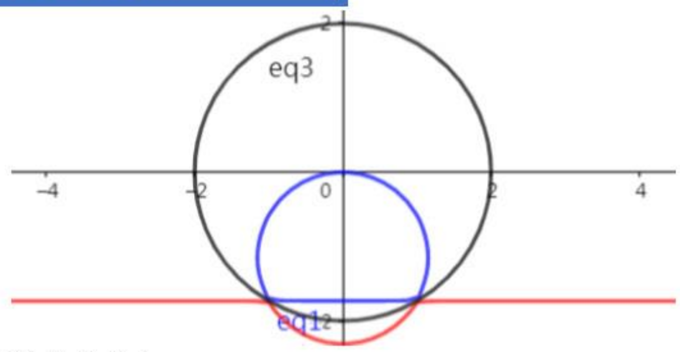
則$\overline{PA}^2-l^2=\overline{PB}\times\overline{PC}$。





三、$\overline{PA}^2-l^2=\pm\overline{PB}\times\overline{PC}$的圖形分析

等腰△ABC中，假設$\overline{AB}=\overline{AC}=l$，則：



1. 滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=1$的點$P$軌跡為：

「直線$\overleftrightarrow{BC}$上，但不在線段$\overline{BC}$中」及「△ABC的外接圓上的弧BC上(不包含B、C兩點)」(紅色曲線)

2. 滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=-1$的點P軌跡為：

「在線段$\overline{BC}$上」及「△ABC的外接圓的弧BAC上(不包含A、B、C三點)」。(藍色曲線)

四、$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=\pm t$ 的軌跡方程式，其中$t>0$，$t\neq1$

等腰三角形ABC，設頂角$\angle A=\theta$，$A=(0,0)$、$B=\left(-l\sin\frac{\theta}{2},-l\cos\frac{\theta}{2}\right)$、

$C=\left(l\sin\frac{\theta}{2},-l\cos\frac{\theta}{2}\right)$及$P(x,y)$，設$0<t\le\csc\frac{\theta}{2}$，且$t\neq1$，圓$C_1$：$x^2+y^2-2k_1y+\left(k_1^2-r_1^2\right)=0$、

圓C_2：$x^2+y^2-2k_2y+\left(k_2^2-r_2^2\right)=0$，其中

$$k_1=\frac{-lt^2\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)}{t^2-1}、k_2=\frac{-lt^2\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)}{t^2-1}$$

$$k_1^2-r_1^2=\frac{(t^2+1)l^2-2l^2t^2\sin^2\frac{\theta}{2}+2l^2t^2\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}{t^2-1}、k_2^2-r_2^2=\frac{(t^2+1)l^2-2l^2t^2\sin^2\frac{\theta}{2}-2l^2t^2\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}{t^2-1}$$

一、若$0<t<\csc\frac{\theta}{2}$，

1.滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=t$的$P$點軌跡為圓$C_1$與$C_2$的聯集，
但需滿足$x^2+y^2-l^2>0$。

2.滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=-t$的$P$點軌跡為圓$C_1$與$C_2$的聯集，
但需滿足$x^2+y^2-l^2<0$。

二、若$t=\csc\frac{\theta}{2}$時，圓C_1、圓C_2重合

1.滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=t$的$P$點軌跡為圓$C_1$，
但需滿足$x^2+y^2-l^2>0$。

2.滿足$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=-t$的$P$點軌跡為圓$C_1$，
但需滿足$x^2+y^2-l^2<0$。

五、$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=\pm t$ 的圖形分析

(1).C_1、C_2恆過定點B與C。

(2).$\frac{{k_1}^2}{{r_1}^2}=\frac{{k_2}^2}{{r_2}^2}=t^2$。

(3).當$0<t<1$時，$k_1>0>k_2$；
當$1<t<\csc\frac{\theta}{2}$時，$k_1<k_2<0$；$\lim\limits_{t\to1}k_2=\frac{-l}{2\cos\frac{\theta}{2}}$。

(4).當$t\to1$時，$r_1\to\infty$；$\lim\limits_{t\to1}r_2=\frac{l}{2\cos\frac{\theta}{2}}$。

(5).當$t=1$時，C_1與C_2的聯集是直線與圓。

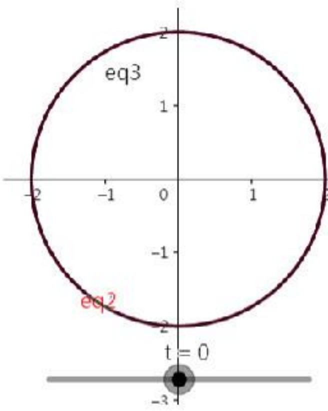
(6).當$t\neq1$時，圓C_1對圓$x^2+y^2=l^2$的反演是圓C_2

(7).圓C_1、C_2與圓$x^2+y^2=l^2$的夾角
皆為$\sin^{-1}\left(t\sin\frac{\theta}{2}\right)$、$\pi-\sin^{-1}\left(t\sin\frac{\theta}{2}\right)$

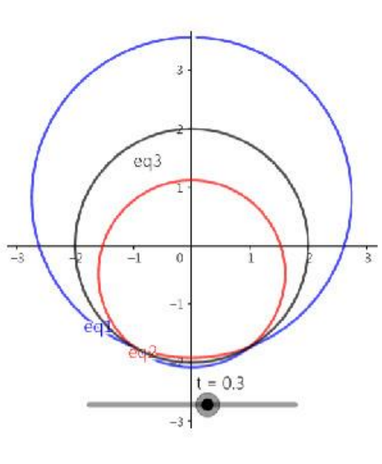
(8).$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=t$對圓$x^2+y^2=l^2$的反演為$\frac{\overline{PA}^2-l^2}{\overline{PB}\times\overline{PC}}=-t$

(9).當$t=\csc\frac{\theta}{2}$時，
圓C_1 =圓C_2：$x^2+\left(y+\frac{l}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2=\left(\tan^2\frac{\theta}{2}\right)l^2$

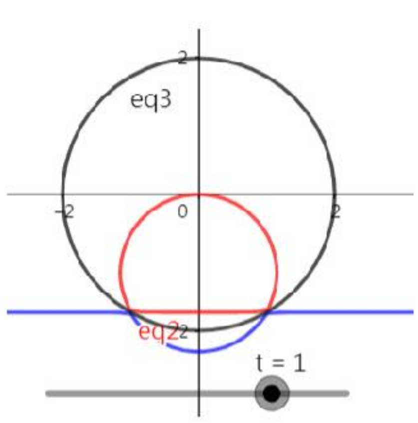
(10).當$t=0$時，圓C_1 =圓C_2：$x^2+y^2=l^2$



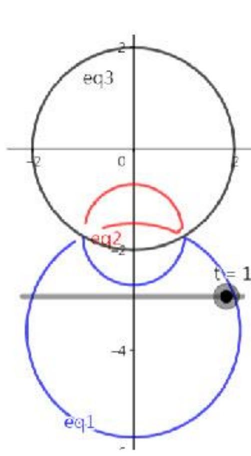
$t=0$



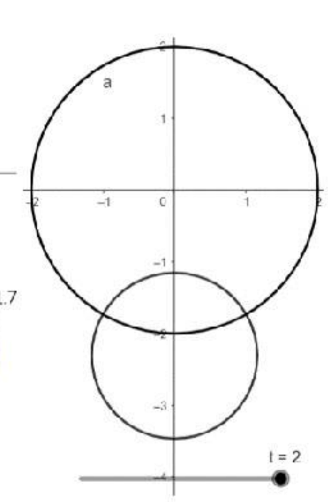
$0<t<1$



$t=1$



$1<t<\csc\frac{\theta}{2}$



$t=\csc\frac{\theta}{2}$

六、 等腰梯形

設四邊形$\boldsymbol{A_1BCA_2}$是等腰梯形，其中$\overline{\boldsymbol{BC}} \parallel \overline{\boldsymbol{A_1A_2}}$，$\angle B = \angle C = \alpha$，

$\overline{A_1C} = \overline{A_2B} = d$，$\overline{A_1B} = \overline{A_2C} = l$；設$P$為此等腰梯形的外接圓上的動點

令$\overline{PA_1} = a_1$，$\overline{PA_2} = a_2$，$\overline{PB} = b$，$\overline{PC} = c$，則：

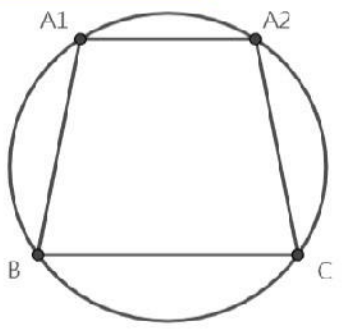
(1).若P在弧BC上，則$a_1a_2 - bc = dl$。

(2).若P在弧A_1B或弧A_2C上，則$a_1a_2 + bc = dl$。

(3).若P在弧A_1A_2上，則$a_1a_2 - bc = -dl$。

此時若$\overline{A_1A_2} \to 0$，則等腰梯形→等腰三角形ABC，

其中$A_1 = A_2 = A$，$d \to l$且$a_1 = a_2$，定理4(1).、(2).會與定理2的內容符合



七、 等腰梯形$a_1a_2 \pm bc = \pm dl$ 的圖形分析

在圓Γ：$x^2 + (y+4)^2 = 25$上取四點作為例子：

$A_1(-3,0)$、$A_2(3,0)$、$B(-4,-7)$、$C(4,-7)$，則

A_1A_2CB為等腰梯形，將其代入$a_1a_2 \pm bc = \pm dl$

接著分析其不屬於圓的圖形可得以下性質：

(1). A_1、A_2、B、C四點皆在圖形上。

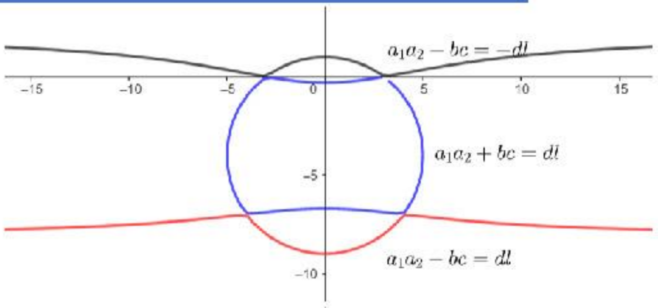
(2).圖形與直線$y = 2$、 $y = -8$不相交。

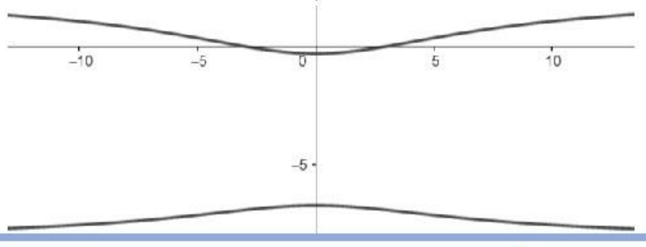
(3).圖形會落在$-8 < y < 2$之間。

(4).$y = 2$與$y = -8$是圖形的漸近線。

(5).其圖形當$|x|$夠大時，

形似兩條「德．斯路斯蚌線」方程式





八、 任意三角形

設$\boldsymbol{P}$為$\boldsymbol{\Delta ABC}$外接圓上的動點，令$\overline{\boldsymbol{PA}} = \boldsymbol{a}$，$\overline{\boldsymbol{PB}} = \boldsymbol{b}$，

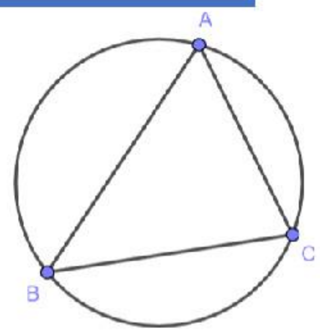
$\overline{\boldsymbol{PC}} = \boldsymbol{c}$，$\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{l_1}$，$\overline{\boldsymbol{AC}} = \boldsymbol{l_2}$，則：

(1).若P在弧BC上，則：$(bl_1 + cl_2)a^2 = (bl_2 + cl_1)(bc + l_1l_2)$。

(2).若P在弧BAC上，則：$(cl_2 - bl_1)a^2 = (bl_2 - cl_1)(bc - l_1l_2)$。

此時若$l_1 = l_2 = l$，則ΔABC為等腰三角形，

定理 5(1).、(2).會與定理 2 的內容符合



九、 任意三角形的圖形分析

在圓Γ：$x^2 + (y+4)^2 = 25$上取$A(3,0)$、$B(-4,-7)$、$C(4,-7)$三點作為例子，代入可得其圖形，

將其方程式因式分解可得：

$$-1568[x^2 + (y+4)^2 - 25][3x^2 + 8xy - 3y^2 + 56x - 42y - 195] = 0$$

接著分析其圖形可知：

(1).其為以$3x - y - 7 = 0$、$x + 3y + 21 = 0$

為漸近線的雙曲線。

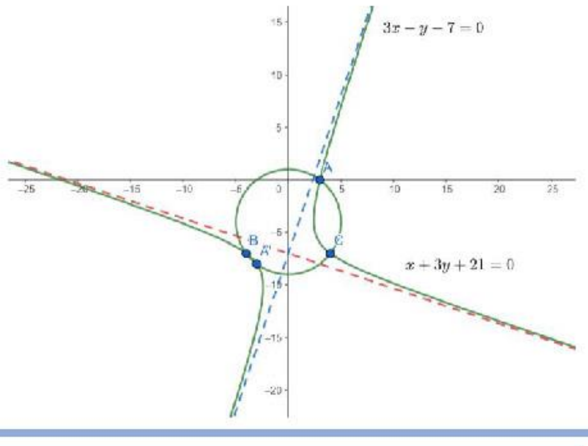
(2).圓與雙曲線有四個交點：$A(3,0)$、$B(-4,-7)$、

$C(4,-7)$，及第四點座標為$A'(-3,-8)$。

(3).$A(3,0)$及$A'(-3,-8)$對稱於圓心$(0,-4)$

(4).若將A換成A'，且B、C不變，則化簡後會發現

新的圖形與原本的圖形是相同的



陸、 參考資料

(1).斯圖爾特定理(2021, December 20)。維基百科，自由的百科全書。取自：
https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E6%96%AF%E5%9B%BE%E5%B0%94%E7%89%B9%E5%AE%9A%E7%90%86&oldid=69184988

(2).德·斯路斯蚌線(2021, September 22)。維基百科，自由的百科全書。取自：
https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E5%BE%B7%C2%B7%E6%96%AF%E8%B7%AF%E6%96%AF%E8%9A%8C%E7%BA%BF&oldid=67831452

(3).反演(2019, January 6)。維基百科，自由的百科全書。取自：
https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=Special:%E5%BC%95%E7%94%A8%E6%AD%A4%E9%A1%B5%E9%9D%A2&page=%E5%8F%8D%E6%BC%94&id=52679686&wpFormIdentifier=titleform

(4).黃少宏、吳宜謙、鄭惟仁(2020,12 月)。四邊形的等角曲線及相關探討。科學教育月刊，第 435 期，16-33。