

# 中華民國第 63 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

高中組 數學科

050413

不變應萬變-旋轉吧!婆羅摩笈多!

學校名稱：國立臺灣師範大學附屬高級中學

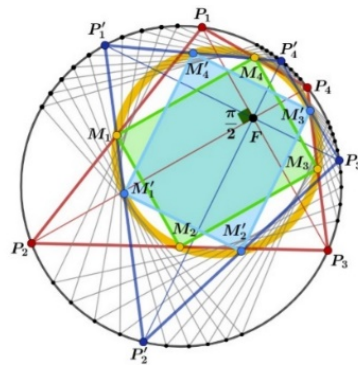
作者：  高二 楊翔允  高二 邱柏愷  高二 朱庭其	指導老師：  周洺朱  洪允東
---	-----------------------------

關鍵詞：不變量、婆羅摩笈多定理、軌跡方程式

# 不變應萬變-旋轉吧!婆羅摩笈多!

## 摘要

本研究主要推廣婆羅摩笈多定理，並探討軌跡方程式與新的不變量。圓錐曲線 $\Gamma$ 內任取一定點 $F$ ，且在 $\Gamma$ 上以逆時針依序取點 $P_1、P_2、\dots、P_n(P_k = P_{k+n})$ ，使得 $\angle P_k F P_{k+1} = \frac{2\pi}{n}$ ， $\forall k \in \square$ ；接著於 $\overline{P_k P_{k+1}}$ 分別取 $M_k、H_k$ 滿足 $\overline{P_k M_k} = \overline{M_k P_{k+1}}$ ， $\overline{F H_k} \perp \overline{P_k P_{k+1}}$ ，稱 $M_1 M_2 \dots M_n、H_1 H_2 \dots H_n$ 分別為 $n$ 邊形 $P_1 P_2 \dots P_n$ 的中點 $n$ 邊形、垂足 $n$ 邊形。首先，固定一圓，一定點 $F$ ，我們發現無限多個以 $F$ 作出的中點 $n$ 邊形、垂足 $n$ 邊形的頂點分別會共一封閉曲線，並得出其方程式。第二，以圓錐曲線的焦點 $F$ 任意作出的垂足 $n$ 邊形 $H_1 H_2 \dots H_n$ 的頂點會共一封閉曲線；特別當 $n=4$ 時，軌跡為一圓。最後，探討垂足 $n$ 邊形的不變量性質： $\sum_{m=1}^n \frac{1}{F H_k^{2m}}$ 與 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{H_i H_{i+1}^{2r}}$ 恆為定值，最後推廣到空間中，並得到三維廣義的婆羅摩笈多定理。



▲圓內無數個中點四邊形頂點軌跡共同一圓

## 壹、前言

### (一)研究動機

婆羅摩笈多定理中有提到「若一圓內接四邊形之對角線互相垂直，則垂直於四邊形一邊且通過對角線交點的直線將平分對邊」，將其應用推廣可得八點圓定理「若任意四邊形對角線垂直相交，由四邊中點分別向對邊作垂線，則四個垂足、四個中點八點共圓」。

經由 GGB 測試，給定一圓 $C$ 及其內一定點 $F$ ，考慮無數個『任意』的對角線互相垂直且相交於 $F$ 的圓 $C$ 內接四邊形 $P_1 P_2 P_3 P_4$ 的各邊中點 $M_1、M_2、M_3、M_4$ 居然會共一『相同』的圓。而我們也將此各邊中點連線所形成的四邊形 $M_1 M_2 M_3 M_4$ 定義為「中點四邊形」。

▲婆羅摩笈多定理	▲八點圓定理	▲彭賽列閉合定理
▲四邊中點 $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$ 、 $M_4$ 共圓	▲圓內無數 中點四邊形之頂點共圓	▲圓內無數 垂足四邊形之頂點共圓

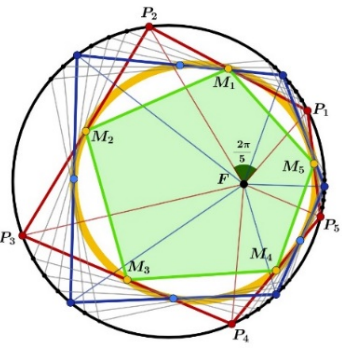
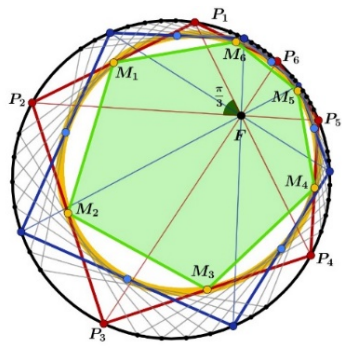
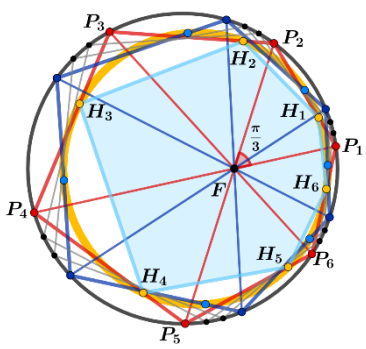
由八點圓定理可知在對角線互相垂直的四邊形中，由各邊中點分別向對邊做垂線，則得到的四個垂足與四個中點將八點共圓，又由婆羅摩笈多定理可知每組中點與垂足的連線將通過固定點  $F$ ，因此我們發現這些由定點  $F$  對各邊取垂足  $H_1$ 、 $H_2$ 、 $H_3$ 、 $H_4$  亦將共一圓，且此圓即為圓內中點四邊形頂點軌跡圓，而我們將四邊形  $H_1H_2H_3H_4$  定義為「垂足四邊形」。

接著，我們分別測試通過定點  $F$  且相鄰角度為  $\frac{2\pi}{n}$  的射線，其與圓  $C_0$  交於  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $\dots$ 、 $P_n$ ， $n = 2, 3, 5, 6, \dots$ ，考慮『任意』的圓內接  $n$  邊形  $P_1P_2 \dots P_n$  的中點  $n$  邊形  $M_1M_2 \dots M_n$  和垂足  $n$  邊形  $H_1H_2 \dots H_n$ ，我們發現不管圓內接  $n$  邊形  $P_1P_2 \dots P_n$  如何在圓上轉動，這些對應的無數個中點  $n$  邊形  $M_1M_2 \dots M_n$  頂點軌跡恆共一個『相同』連續封閉曲線，對於任意大於等於 2 的  $n$  皆成立，而同樣的結果對於無數個垂足  $n$  邊形  $H_1H_2 \dots H_n$  也一樣成立。

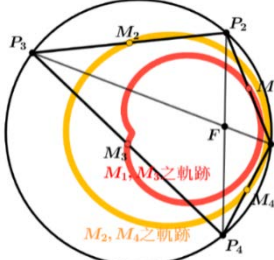
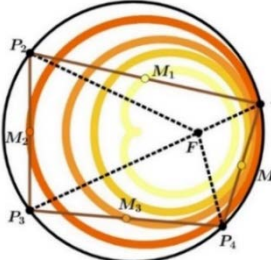
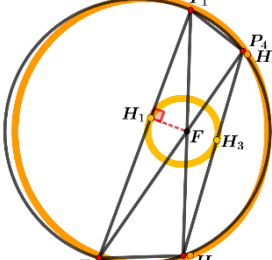
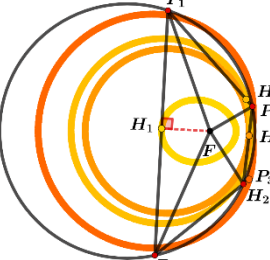
## (二)文獻回顧

這樣的結果讓我們覺得跟彭賽列閉合定理有類似之處，只不過彭賽列閉合定理是取切線，而我們是在各邊取中點、垂足，因此也引起我們接下來的一系列探討。

參考文獻	[1] 婆羅摩笈多定理 二維靜態	[3] 彭賽列定理 取切線	[2] 永恆的旋轉木馬- 角度任意偶數等份的焦半徑倒數 $m$ 次 方和為不變量
------	---------------------	------------------	--

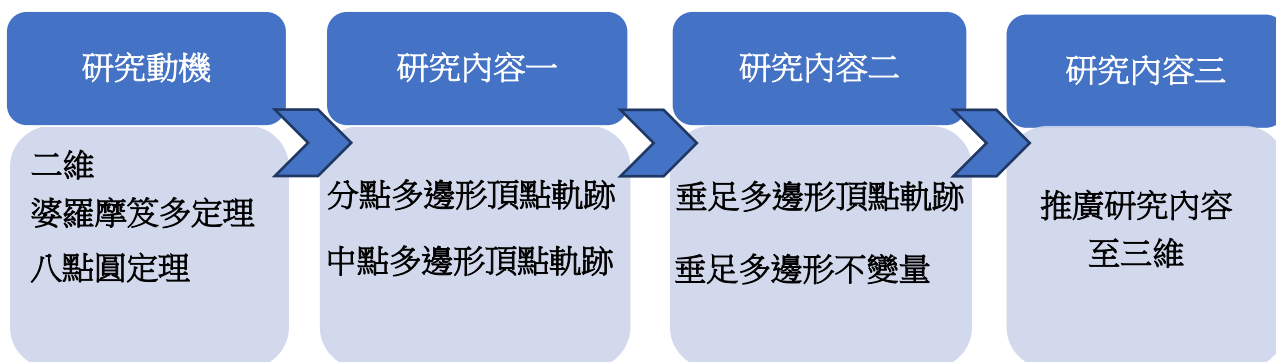
我們的 研究	動態，無數個中點及垂足 共一圓。推廣至三維	取各邊中點、垂足	角度任意 $n$ 等份的垂足多邊形垂線 段、邊長之倒數偶次方和為不變量
			
▲ 圓內中點五邊形	▲ 圓內中點六邊形	▲ 圓內垂足六邊形	

**【Discussion 1】** 我們發現當角度平分時，中點四邊形四個頂點共封閉曲線；若角度不平分，由於各個中點的軌跡不具對稱性，造成中點四邊形四個頂點將各別形成兩條或是四條相異的封閉曲線，因此我們只討論在相鄰等角的情況下產生的軌跡圖形以及其方程式。

			
▲ $F$ 在兩對角線上之 中點軌跡	▲ $F$ 不在對角線上之 中點軌跡	▲ $F$ 在兩對角線上之 垂足軌跡	▲ $F$ 不在對角線上之 垂足軌跡

### (三)研究目的與研究流程

1. 探討圓錐曲線內中點、垂足  $n$  邊形的無數頂點軌跡所共封閉曲線的方程式。
2. 探討圓錐曲線內中點、垂足  $n$  邊形頂點軌跡共圓的結果。
3. 圓錐曲線內垂足  $n$  邊形中的不變量。
4. 推廣婆羅摩笈多定理、垂足多邊形軌跡性質與不變量至三維。



## 貳、研究設備及器材

GeoGebra、筆、紙、電腦、mathtype 應用程式、平板

## 參、研究過程或方法

### 【Lemma1】婆羅摩笈多定理

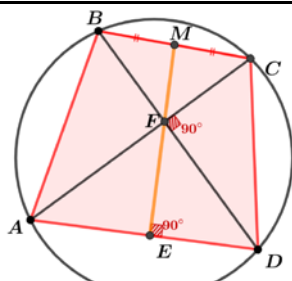
若一圓內接四邊形  $ABCD$  之對角線互相垂直，則垂直於四邊形  $ABCD$  一邊且通過對角線交點的直線將平分對邊。

### 【Lemma 2】八點圓

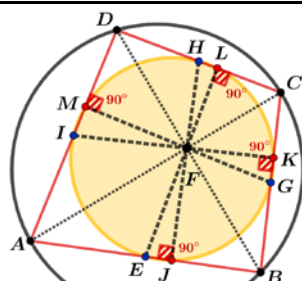
若任意四邊形的對角線互相垂直，由四邊的中點分別向四條對邊作垂線，則這四個垂足與四個中點八點共圓。

### 【Lemma 3】彭賽列閉合定理

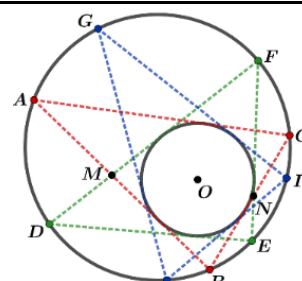
在一平面給定兩圓錐曲線，若有一封閉多邊形內切於其中一圓錐曲線又外接於另一條圓錐曲線，則存在無限多個多邊形滿足上述條件，滿足此性質的封閉多邊形邊數相同。



▲ Lemma1



▲ Lemma 2

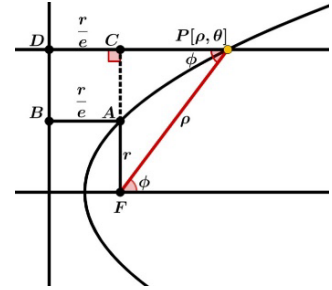


▲ Lemma 3

### 【Lemma 4】圓錐曲線焦半徑

圓錐曲線  $\Gamma$  的焦半徑  $\overline{FP} = \frac{r}{1 - e \cos \phi}$ ，其中  $r$  為半正焦弦長， $e$  為離心率， $\phi$  為  $\overline{FP}$  和  $x$  軸正向夾角。

*Proof*:  $e = \frac{\overline{FP}}{PD} = \frac{\overline{FP}}{CD + PC} = \frac{\overline{FP}}{AB + PC} = \frac{\rho}{\frac{r}{e} + \rho \cos \phi}$ ，其中  $\frac{r}{AB} = e$



得  $\rho = \frac{r}{1 - e \cos \phi}$  為圓錐曲線的極座標方程。

$\therefore$  當  $\Gamma$  為拋物線時， $e = 1$ ；當  $\Gamma$  為雙曲線時， $e > 1$ ；當  $\Gamma$  為橢圓時， $e < 1$ 。■

**【Lemma 5】**

$$\cos^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}} \left[ C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n \cdot \frac{(-1)^n + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_j^n \cos(n-2j)\theta \right], \forall n \in \mathbb{N}$$

*Proof*

1° 當  $n = 1$  時， $RHS = \frac{1}{2^0} \left[ C_0^1 \cdot \frac{(-1)+1}{4} + \sum_{j=0}^0 C_j^1 \cdot \cos(1-2j)\theta \right] = \cos \theta = LHS$  成立

2° 設  $n = k$  時成立，即  $\cos^k \theta = \frac{1}{2^{k-1}} \left[ C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k \cdot \frac{(-1)^k + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} C_j^k \cos(k-2j)\theta \right]$

3° 當  $n = k+1$  時，欲證  $\cos^{k+1} \theta = \frac{1}{2^k} \left[ C_{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{k+1} \cdot \frac{(-1)^{k+1} + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} C_j^{k+1} \cos(k-2j+1)\theta \right]$

Case 1°  $k$  為偶數： $\cos^{k+1} \theta = \frac{1}{2^{k-1}} \left[ C_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^k \cdot \frac{(-1)^k + 1}{4} \cdot \cos \theta + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} C_j^k \cos(k-2j)\theta \cos \theta \right]$

$$= \frac{1}{2^{k-1}} \left[ C_{\frac{k}{2}}^k \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \theta + \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-1} C_j^k \cdot \frac{1}{2} [\cos(k-2j-1)\theta + \cos(k-2j+1)\theta] \right] = \frac{1}{2^k} \left\{ C_{\frac{k}{2}}^k \cos \theta + \left\{ C_0^k \cdot [\cos(k-1)\theta + \cos(k+1)\theta] + \dots + C_{\frac{k}{2}-1}^k \cdot [\cos 3\theta + \cos \theta] \right\} \right\}$$

$$= \frac{1}{2^k} \left\{ C_0^{k+1} \cdot \cos(k+1)\theta + C_1^{k+1} \cdot \cos(k-1)\theta + \dots + C_{\frac{k}{2}-1}^{k+1} \cdot \cos 3\theta + C_{\frac{k}{2}}^{k+1} \cdot \cos \theta \right\} = \frac{1}{2^{(k+1)-1}} \left[ \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}} C_j^{k+1} \cdot \cos(k-2j+1)\theta \right]$$

$$= \frac{1}{2^{(k+1)-1}} \left[ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(k+1)-1}{2} \rfloor} C_j^{k+1} \cdot \cos(k-2j+1)\theta \right] \therefore \text{成立}$$

Case 2°  $k$  為奇數：

$$\begin{aligned}
\cos^{k+1} \theta &= \frac{1}{2^{k-1}} \left\{ 0 + \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} C_j^k \cdot \cos(k-2j)\theta + \cos \theta \right\} = \frac{1}{2^{k-1}} \left\{ \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} C_j^k \cdot [\cos(k-2j+1)\theta + \cos(k-2j-1)\theta] \right\} \\
&= \frac{1}{2^k} \left[ C_0^k \cdot \cos(k+1)\theta + (C_0^k + C_1^k) \cdot \cos(k-1)\theta + \cdots + \left( C_{\frac{k-3}{2}}^k + C_{\frac{k-1}{2}}^k \right) \cdot \cos 2\theta + C_{\frac{k-1}{2}}^k \cdot \cos(0 \cdot \theta) \right] \\
&= \frac{1}{2^k} \left[ C_0^{k+1} \cdot \cos(k+1)\theta + C_1^{k+1} \cdot \cos(k-1)\theta + \cdots + C_{\frac{k-1}{2}}^{k+1} \cdot \cos 2\theta + C_{\frac{k-1}{2}}^k \cdot 1 \right] \\
&= \frac{1}{2^k} \left\{ \left[ \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} C_j^{k+1} \cdot \cos(k-2j+1)\theta \right] + C_{\frac{k-1}{2}}^k \right\} = \frac{1}{2^{(k+1)-1}} \left\{ \frac{k+1}{2(k+1)} \cdot C_{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{k+1} + \left[ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(k+1)-1}{2} \rfloor} C_j^{k+1} \cdot \cos(k-2j+1)\theta \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2^{(k+1)-1}} \left\{ \frac{1}{2} \cdot C_{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{k+1} + \left[ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(k+1)-1}{2} \rfloor} C_j^{k+1} \cdot \cos(k-2j+1)\theta \right] \right\} \therefore \text{成立}
\end{aligned}$$

由數學歸納法， $\cos^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}} \left[ C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n \cdot \frac{(-1)^n + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_j^n \cos(n-2j)\theta \right]$ ， $\forall n \in \mathbb{N}$  ■

### 【Lemma 6】

$$\sum_{u=1}^n \cos \left[ k \left( \phi + \frac{2u\pi}{n} \right) \right] = 0, n > |k|, \forall n \geq 3, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

*Proof*

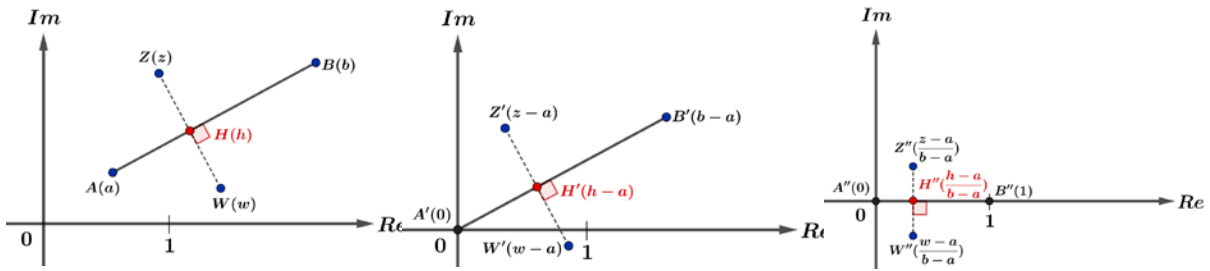
$$\begin{aligned}
\sum_{u=1}^n \cos \left[ k \left( \phi + \frac{2u\pi}{n} \right) \right] &= \frac{1}{2 \sin \frac{k\pi}{n}} \cdot \left[ 2 \cos \left( k\phi + \frac{2k\pi}{n} \right) \sin \frac{k\pi}{n} + 2 \left( k\phi + \frac{4k\pi}{n} \right) \sin \frac{k\pi}{n} + \cdots + 2 \cos \left( k\phi + \frac{2nk\pi}{n} \right) \sin \frac{k\pi}{n} \right] \\
&= \frac{1}{2 \sin \frac{k\pi}{n}} \cdot \left\{ \left[ \sin \left( k\phi + \frac{3k\pi}{n} \right) - \sin \left( k\phi + \frac{k\pi}{n} \right) \right] + \left[ \sin \left( k\phi + \frac{5k\pi}{n} \right) - \sin \left( k\phi + \frac{3k\pi}{n} \right) \right] + \cdots + \left[ \sin \left( k\phi + \frac{(2n+1)k\pi}{n} \right) - \sin \left( k\phi + \frac{(2n-1)k\pi}{n} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2 \sin \frac{k\pi}{n}} \cdot \left[ \sin \left( k\phi + \frac{(2n+1)k\pi}{n} \right) - \sin \left( k\phi + \frac{k\pi}{n} \right) \right] = \frac{1}{2 \sin \frac{k\pi}{n}} \cdot \left[ 2 \cos \left( k\phi + \frac{(n+1)k\pi}{n} \right) \cdot 0 \right] = 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

### 【Lemma 7】複數平面中的垂足表示法

給定三複數  $a$ 、 $b$ 、 $z$  分別對應複數平面  $A$ 、 $B$ 、 $Z$ ，則點  $Z$  對  $\overline{AB}$  之垂足為

$$H \rightarrow h = \frac{(\overline{a-b})z + (a-b)\overline{z} + \overline{ab} - a\overline{b}}{2(\overline{a-b})} \circ \text{特別地，當 } Z \text{ 在原點時垂足為 } H \rightarrow h = \frac{\overline{ab} - a\overline{b}}{2(\overline{a-b})} \circ$$

(複數  $x + yi \rightarrow (x, y)$ ，對應關係以  $\rightarrow$  表示。)



**Proof** 設  $Z(z)$  對於  $\overline{AB}$  的對稱點為  $W(w)$ ，如圖，依序經平移  $-a$ 、旋轉及伸縮  $\frac{1}{b-a}$  變換後得

$$\frac{\overline{z-a}}{\overline{b-a}} = \frac{w-a}{b-a} \Rightarrow \frac{\overline{z-a}}{\overline{b-a}} = \frac{w-a}{b-a} \Rightarrow w = \frac{a(\overline{b-a}) + (b-a)(\overline{z-a})}{\overline{b-a}} = \frac{(a-b)\overline{z} + \overline{ab} - a\overline{b}}{a-b}$$

垂足即為  $\frac{1}{2}(z+w) = \frac{(a-b)z + (a-b)\overline{z} + \overline{ab} - a\overline{b}}{2(a-b)}$ 。當  $z=0$  時，垂足為  $\frac{\overline{ab} - a\overline{b}}{2(a-b)}$  ■

## 肆、研究結果

### 一、圓內中點多邊形頂點軌跡方程式探討

在研究  $n$  等分角度下中點多邊形頂點軌跡的同時，我們驚奇地發現在  $n=4$  時，對於  $F$  所作的任意中點四邊形的頂點軌跡是一個圓！除此之外，在平分任意等分的情況下，圓錐曲線內的中點多邊形頂點都將共曲線，因此我們展開了對中點多邊形的一系列探討。

#### 【Definition 1】相鄰等角多邊形

給定一圓錐曲線，在其內任取一定點  $F$ ，考慮任意依序相鄰角度  $\frac{2\pi}{n}$  的  $n$  條射線  $\overline{FP_1}$ 、 $\overline{FP_2}$ 、  
 $\dots$ 、 $\overline{FP_n}$ ，分別交圓錐曲線於  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $\dots$ 、 $P_n$ ， $n \geq 3$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，則將此  $n$  邊形  $P_1P_2 \dots P_n$  稱為  $F$  的相鄰等角  $n$  邊形。



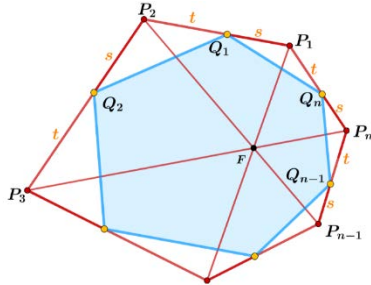
▲  $P_1P_2 \dots P_n$  稱為  $F$  的相鄰等角  $n$  邊形

#### 【Definition 2】中點多邊形與分點多邊形

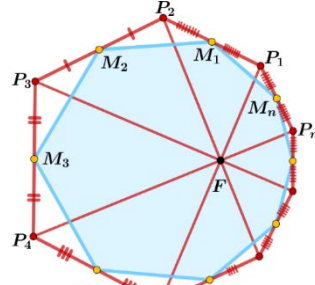
在  $n$  邊形  $P_1P_2 \dots P_n$  中，取  $\overline{P_kP_{k+1}}$  各邊分點為  $Q_k$ ，滿足  $\overline{P_kQ_k} : \overline{Q_kP_{k+1}} = s : t$ ，可得  $n$  邊形



$Q_1Q_2\cdots Q_n$ ，我們稱  $n$  邊形  $Q_1Q_2\cdots Q_n$  為  $n$  邊形  $P_1P_2\cdots P_n$  的  $s:t$  分點多邊形  $Q_1Q_2\cdots Q_n$ ，簡稱  $Q_1Q_2\cdots Q_n$  為分點多邊形。特別的是  $\overline{P_kQ_k}:\overline{Q_kP_{k+1}}=1:1$ ，定義此時  $Q_k = M_k$ ，並稱  $n$  邊形  $M_1M_2\cdots M_n$  為  $n$  邊形  $P_1P_2\cdots P_n$  的中點多邊形，簡稱  $M_1M_2\cdots M_n$  為中點多邊形。



▲分點多邊形



▲中點多邊形

※以下均考慮  $F$  的圓錐曲線內接相鄰等角多邊形  $P_1P_2\cdots P_n$  之中點多邊形  $M_1M_2\cdots M_n$  及分點多邊形  $Q_1Q_2\cdots Q_n$ ，簡稱  $M_1M_2\cdots M_n$ 、 $Q_1Q_2\cdots Q_n$  為圓錐曲線內中點多邊形及分點多邊形。

**【Theorem1】** 圓內中點  $n$  邊形頂點軌跡方程式

給定一圓  $C: x^2 + y^2 = R^2$ ，在其內任取一定點  $F(k,0)$ ，則  $F$  的圓內任意相鄰等角  $n$  邊形  $P_1P_2\cdots P_n$  之中點  $n$  邊形  $M_1M_2\cdots M_n$  頂點共一相同封閉曲線，曲線方程式為

$$2x^2 + 2y^2 - 2kx + k^2 - R^2 - \cos \frac{2\pi}{n} \sqrt{(R^2 + k^2)^2 - 4kx(R^2 + k^2) + \frac{4k^2(x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - R^2y^2)}{x^2 + y^2}} = 0$$

Proof

任取  $C$  上相異兩點  $P_i(x_i, y_i)$ 、 $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ ，滿足  $\angle P_iFP_{i+1} = \frac{2\pi}{n}$ ， $1 \leq i \leq n-1$

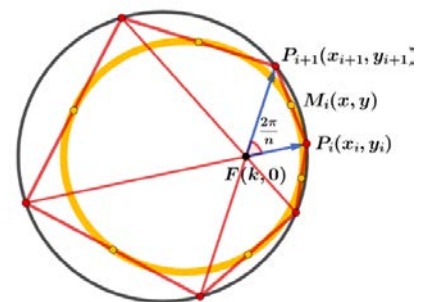
已知條件:  $\begin{cases} x_i + x_{i+1} = 2x \mathbf{L} & (1) \\ y_i + y_{i+1} = 2y \mathbf{L} & (2) \end{cases}$ ， $\begin{cases} x_i^2 + y_i^2 = R^2 \cdots (3) \\ x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2 = R^2 \cdots (4) \end{cases}$

且  $\overrightarrow{FP_i} = (x_i - k, y_i)$ ， $\overrightarrow{FP_{i+1}} = (x_{i+1} - k, y_{i+1})$

因  $\overrightarrow{FP_i} \cdot \overrightarrow{FP_{i+1}} = \left| \overrightarrow{FP_i} \right| \left| \overrightarrow{FP_{i+1}} \right| \cos \frac{2\pi}{n}$ ，分別計算左式與右式比較:

1°  $\overrightarrow{FP_i} \cdot \overrightarrow{FP_{i+1}} = (x_i - k, y_i) \cdot (x_{i+1} - k, y_{i+1}) = x_i x_{i+1} + y_i y_{i+1} - k(x_i + x_{i+1}) + k^2 = x_i x_{i+1} + y_i y_{i+1} - 2kx + k^2$

(1)<sup>2</sup> + (2)<sup>2</sup> - (3) - (4) 得  $x_i x_{i+1} + y_i y_{i+1} = 2x^2 + 2y^2 - R^2$  代入原式  $\overrightarrow{FP_i} \cdot \overrightarrow{FP_{i+1}} = 2x^2 + 2y^2 - 2kx + k^2 - R^2$



$$2^\circ \left| \overrightarrow{FP_i} \right| \left| \overrightarrow{FP_{i+1}} \right| = \sqrt{[(x_i - k)^2 + y_i^2][(x_{i+1} - k)^2 + y_{i+1}^2]} = \sqrt{[R^2 - 2kx_i + k^2][R^2 - 2kx_{i+1} + k^2]}$$

$$= \sqrt{(R^2 + k^2)^2 - 2k(R^2 + k^2)(x_i + x_{i+1}) + 4kx_i x_{i+1}} = \sqrt{(R^2 + k^2)^2 - 4kx(R^2 + k^2) + 4k^2 x_i x_{i+1}}$$

$$3^\circ \boxed{\text{處理 } x_i x_{i+1}}: \begin{cases} x_{i+1} = 2x - x_i \\ y_{i+1} = 2y - y_i \end{cases} \text{ 代入(4)式與(3)式聯立得 } \begin{cases} x_i^2 + y_i^2 = R^2 \\ (2x - x_i)^2 + (2y - y_i)^2 = R^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_i^2 + y_i^2 = R^2 \\ 4x^2 - 4xx_i + x_i^2 + 4y^2 - 4yy_i + y_i^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i^2 + y_i^2 = R^2 \mathbf{L} \quad (3) \\ x^2 - xx_i + y^2 - yy_i = 0 \mathbf{L} \quad (5) \end{cases}, \text{ 由(5)式可得}$$

$$y_i = \frac{x^2 + y^2 - xx_i}{y} \text{ 代入(3)可得 } (x^2 + y^2)x_i^2 - (2xy^2 + 2x^3)x_i + (x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - R^2y^2) = 0$$

$$\text{同理, } (x^2 + y^2)x_{i+1}^2 - (2xy^2 + 2x^3)x_{i+1} + (x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - R^2y^2) = 0$$

$$\therefore x_i, x_{i+1} \text{ 恆為 } (x^2 + y^2)t^2 - (2xy^2 + 2x^3)t + (x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - R^2y^2) = 0 \text{ 的兩根,}$$

$$\Rightarrow x_i x_{i+1} = \frac{x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - R^2y^2}{x^2 + y^2}, \text{ 代回 } \left| \overrightarrow{FP_i} \right| \left| \overrightarrow{FP_{i+1}} \right| \text{ 得}$$

$$2x^2 + 2y^2 - 2kx + k^2 - R^2 - \cos \frac{2\pi}{n} \sqrt{(R^2 + k^2)^2 - 4kx(R^2 + k^2) + \frac{4k^2(x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - R^2y^2)}{x^2 + y^2}} = 0 \blacksquare$$

### 【Corollary 1】橢圓內中點 $n$ 邊形頂點軌跡方程式

給定一橢圓  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 在其內任取一定點  $F(k, 0)$ , 則橢圓內  $F$  的任意相鄰等角  $n$  邊形

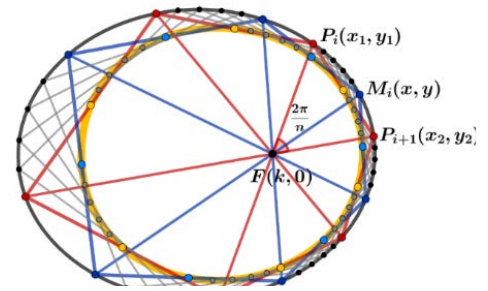
$P_1P_2 \cdots P_n$  之中點  $n$  邊形  $M_1M_2 \cdots M_n$  頂點共一相同封閉曲線, 曲線方程式為

$$p + q - 2kx + k^2 - \cos \frac{2\pi}{n} \sqrt{(p - 2kx + k^2)^2 + q^2 + k^2(4y^2 - 2q) - 2k \left( 2b^2x - \frac{2b^2px}{a^2} \right) + b^2(4x^2 - 2p) - 2\frac{b^2p^2}{a^2}} = 0$$

$$p \equiv p(x, y) = \frac{b^4x^4 + a^4y^4 + 2a^2b^2x^2y^2 - a^4b^2y^2}{a^2b^2y^2 + b^4x^2}, \quad q \equiv q(x, y) = \frac{b^4x^4 + a^4y^4 + 2a^2b^2x^2y^2 - a^2b^4x^2}{a^2b^2x^2 + a^4y^2}$$

Proof

由【Theorem1】相似方法處理  $x_i$ 、 $y_i$ 、 $x_{i+1}$ 、 $y_{i+1}$  與  $x$ 、 $y$  的關係可得橢圓內中點  $n$  邊形頂點軌跡方程式。

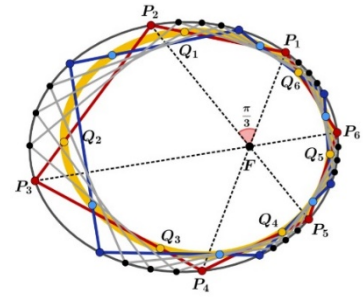
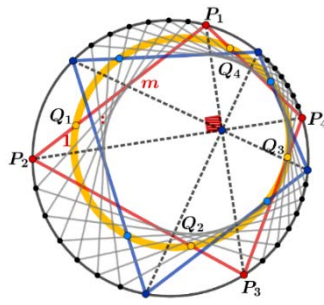
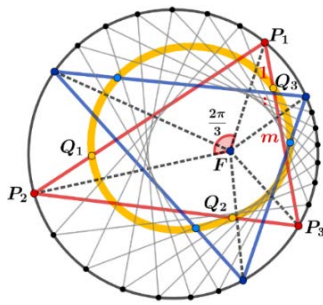


**【Discussion 2】非圓的圓錐曲線中點軌跡問題**

一般而言圓經仿射變換可以變換成橢圓，不過仿射變換

無法保角，因此無法直接透過仿射變換判定共封閉曲線、共圓、不變量等性質。

除了中點多邊形頂點軌跡會共一封閉曲線，我們也嘗試圓內分點多邊形的情況，發現分點  $Q_i$  形成的頂點軌跡也共一相同封閉曲線，引起我們對分點多邊形頂點軌跡方程式的探究。



▲圓內分點三角形頂點軌跡    ▲圓內分點四邊形頂點軌跡    ▲橢圓內分點六邊形頂點軌跡

**【Corollary 2】圓內分點  $n$  邊形頂點軌跡方程式**

給定圓  $C: x^2 + y^2 = R^2$ ，在其內任取一定點  $F(k, 0)$ ，則圓內  $F$  的任意相鄰等角  $n$  邊形  $P_1P_2 \cdots P_n$  之  $m:1$  分點多邊形  $Q_1Q_2 \cdots Q_n$  頂點共一相同封閉曲線，曲線方程式為：

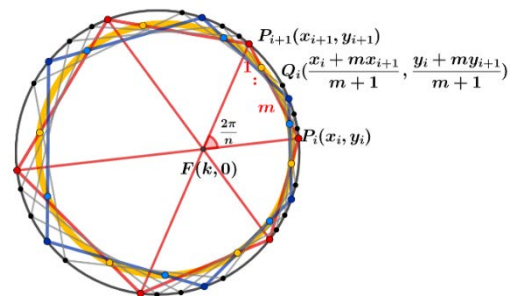
$$\frac{(m+1)^2(x^2 + y^2) - R^2(m^2 + 1)}{2m} + ks + k^2 - \cos \frac{2\pi}{n} \sqrt{(R^2 + k^2)^2 - 2k(R^2 + k^2)s + 4k^2t} = 0$$

$$s(x, y) = \frac{4x[(m+1)(x^2 + y^2) + (1-m)R^2] \pm 4y\sqrt{p}}{8(x^2 + y^2)} + \frac{4x[(m+1)(x^2 + y^2) + (m-1)R^2] \mp 4y\sqrt{p}}{8m(x^2 + y^2)} \quad t(x, y) = \left\{ \frac{4x[(m+1)(x^2 + y^2) + (1-m)R^2] \pm 4y\sqrt{p}}{8(x^2 + y^2)} \right\} \left\{ \frac{4x[(m+1)(x^2 + y^2) + (m-1)R^2] \mp 4y\sqrt{q}}{8m(x^2 + y^2)} \right\}$$

**Proof**

任取  $C$  上相異兩點  $P_i(x_i, y_i)$ 、 $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ ，滿足  $\angle P_i F P_{i+1} = \frac{2\pi}{n}$ ， $1 \leq i \leq n-1$

已知條件  $\begin{cases} x = \frac{x_i + mx_{i+1}}{m+1} \dots (1) \\ y = \frac{y_i + my_{i+1}}{m+1} \dots (2) \end{cases}, \begin{cases} x_i^2 + y_i^2 = R^2 \dots (3) \\ x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2 = R^2 \dots (4) \end{cases}$



1° 令  $F(k, 0)$ ， $P_i(x_i, y_i)$ ， $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ ， $\forall 1 \leq i \leq n-1$  得

$$\overrightarrow{FP}_i = (x_i - k, y_i), \overrightarrow{FP}_{i+1} = (x_{i+1} - k, y_{i+1}), \text{ 則有 } \overrightarrow{FP}_i \cdot \overrightarrow{FP}_{i+1} = \left| \overrightarrow{FP}_i \right| \left| \overrightarrow{FP}_{i+1} \right| \cos \frac{2\pi}{n}$$

$$2^\circ \overrightarrow{FP}_i \cdot \overrightarrow{FP}_{i+1} = (x_i - k, y_i) \cdot (x_{i+1} - k, y_{i+1}) = x_i x_{i+1} + y_i y_{i+1} - k(x_i + x_{i+1}) + k^2$$

$$3^\circ \left| \overrightarrow{FP}_i \right| \left| \overrightarrow{FP}_{i+1} \right| = \sqrt{[(x_i - k)^2 + y_i^2][(x_{i+1} - k)^2 + y_{i+1}^2]} = \sqrt{[R^2 - 2kx_i + k^2][R^2 - 2kx_{i+1} + k^2]}$$

$$= \sqrt{(R^2 + k^2)^2 - 2k(R^2 + k^2)(x_i + x_{i+1}) + 4k^2(x_i x_{i+1})}$$

$$4^\circ \boxed{\text{處理 } x_i x_{i+1} + y_i y_{i+1}}: \text{將(1)、(2)兩式整理得 } x_i x_{i+1} + y_i y_{i+1} = \frac{(m+1)^2(x^2 + y^2) - (m^2 + 1)R^2}{2m}$$

$$5^\circ \boxed{\text{求 } x_i}: \begin{cases} x_{i+1} = \frac{(m+1)x - x_i}{m} \\ y_{i+1} = \frac{(m+1)y - y_i}{m} \end{cases} \text{ 代入(4)式得 } \left[ \frac{(m+1)x - x_i}{m} \right]^2 + \left[ \frac{(m+1)y - y_i}{m} \right]^2 = R^2$$

$$\Rightarrow (m+1)^2(x^2 + y^2) + R^2 - 2(m+1)(xx_i + yy_i) = m^2 R^2 \Rightarrow (m+1)^2(x^2 + y^2) + (1-m^2)R^2 = 2(m+1)(xx_i + yy_i)$$

$$\text{可求出 } y_i = \frac{(1-m)R^2 + (m+1)(x^2 + y^2) - 2xx_i}{2y} \text{ 代入(3)得 } x_i^2 + \left[ \frac{(1-m)R^2 + (m+1)(x^2 + y^2) - 2xx_i}{2y} \right]^2 = R^2$$

整理出關於  $x_i$  的多項式：

$$4(x^2 + y^2)x_i^2 - 4x \left[ (m+1)(x^2 + y^2) + (1-m)R^2 \right] x_i + 2R^2(1-m^2)(x^2 + y^2) + (1-m)^2 R^4 + (m+1)^2(x^2 + y^2)^2 - 4y^2 R^2 = 0$$

$$\boxed{\text{求 } x_{i+1}}: \begin{cases} x_i = (m+1)x - mx_{i+1} \\ y_i = (m+1)y - my_{i+1} \end{cases} \text{ 代入(3)式得 } (m+1)^2(x^2 + y^2) + m^2 R^2 - 2m(m+1)(xx_{i+1} + yy_{i+1}) = R^2$$

$$\Rightarrow (m+1)^2(x^2 + y^2) + (m^2 - 1)R^2 = 2m(m+1)(xx_{i+1} + yy_{i+1})$$

$$\text{得 } y_{i+1} = \frac{(m-1)R^2 + (m+1)(x^2 + y^2) - 2mxx_{i+1}}{2my} \text{ 代入(4)得 } x_{i+1}^2 + \left[ \frac{(m-1)R^2 + (m+1)(x^2 + y^2) - 2mxx_{i+1}}{2my} \right]^2 = R^2$$

整理出有關  $x_{i+1}$  的多項式：

$$4m^2(x^2 + y^2)x_{i+1}^2 - 4mx \left[ (m+1)(x^2 + y^2) + (m-1)R^2 \right] x_{i+1} + 2R^2(m^2 - 1)(x^2 + y^2) + (m-1)^2 R^4 + (m+1)^2(x^2 + y^2)^2 - 4m^2 y^2 R^2 = 0$$

由  $x_i$  和  $x_{i+1}$  的多項式，以一元二次方程式公式解，得

$$x_i = \frac{4x[(m+1)(x^2+y^2)+(1-m)R^2] \pm 4y\sqrt{4R^2(x^2+y^2)-(m+1)^2(x^2+y^2)^2-(1-m)^2R^4-2(1-m^2)(x^2+y^2)R^2}}{8(x^2+y^2)}$$

$$x_{i+1} = \frac{4x[(m+1)(x^2+y^2)+(m-1)R^2] \pm 4y\sqrt{4m^2R^2(x^2+y^2)-(m+1)^2(x^2+y^2)^2-(m-1)^2R^4-2(m^2-1)(x^2+y^2)R^2}}{8m(x^2+y^2)}$$

**求±**：將  $x_i, x_{i+1}$  代回  $(m+1)x = mx_{i+1} + x_i$

$$\begin{aligned} \text{右式} &= \frac{4x[(m+1)(x^2+y^2)+(m-1)R^2] \pm 4y\sqrt{q}}{8(x^2+y^2)} + \frac{4x[(m+1)(x^2+y^2)+(1-m)R^2] \pm 4y\sqrt{p}}{8(x^2+y^2)} \\ &= \frac{8x[(m+1)(x^2+y^2)] \pm 4y\sqrt{q} \pm 4y\sqrt{p}}{8(x^2+y^2)} = (m+1)x = \text{左式} \end{aligned}$$

$$\text{其中} \begin{cases} p(x, y) = -(m+1)^2(x^2+y^2)^2 - (1-m)^2R^4 - 2(1-m^2)(x^2+y^2)R^2 + 4R^2(x^2+y^2) \\ q(x, y) = -(m+1)^2(x^2+y^2)^2 - (m-1)^2R^4 - 2(m^2-1)(x^2+y^2)R^2 + 4m^2R^2(x^2+y^2) \end{cases}$$

將其整理後可得  $p = q = -(m+1)^2(x^2+y^2)^2 - (1-m)^2R^4 + 2R^2m^2x^2 + 2R^2m^2y^2 + 2R^2x^2 + 2R^2y^2$

$$\therefore x_i + x_{i+1} = \frac{4x[(m+1)(x^2+y^2)+(1-m)R^2] \pm 4y\sqrt{p}}{8(x^2+y^2)} + \frac{4x[(m+1)(x^2+y^2)+(m-1)R^2] \mp 4y\sqrt{q}}{8m(x^2+y^2)}$$

$$x_i x_{i+1} = \left[ \frac{4x[(m+1)(x^2+y^2)+(1-m)R^2] \pm 4y\sqrt{p}}{8(x^2+y^2)} \right] \left[ \frac{4x[(m+1)(x^2+y^2)+(m-1)R^2] \mp 4y\sqrt{q}}{8m(x^2+y^2)} \right]$$

代回  $\vec{FP}_i \cdot \vec{FP}_{i+1} = \left| \vec{FP}_i \right| \left| \vec{FP}_{i+1} \right| \cos \frac{2\pi}{n}$  移項得  $\vec{FP}_i \cdot \vec{FP}_{i+1} - \cos \frac{2\pi}{n} \left| \vec{FP}_i \right| \left| \vec{FP}_{i+1} \right| = 0$  分別代入整理出

$$\text{分點軌跡方程式} \frac{(m+1)^2(x^2+y^2) - R^2(m^2+1)}{2m} + ks + k^2 - \cos \frac{2\pi}{n} \sqrt{(R^2+k^2)^2 - 2k(R^2+k^2)s + 4k^2t} = 0$$

其中  $p(x, y) = -(m+1)^2(x^2+y^2)^2 - (1-m)^2R^4 - 2(1-m^2)(x^2+y^2)R^2 + 4R^2(x^2+y^2)$

$$s(x, y) = \frac{4x[(m+1)(x^2+y^2)+(1-m)R^2] \pm 4y\sqrt{p}}{8(x^2+y^2)} + \frac{4x[(m+1)(x^2+y^2)+(m-1)R^2] \mp 4y\sqrt{q}}{8m(x^2+y^2)}$$

$$t(x, y) = \left[ \frac{4x[(m+1)(x^2 + y^2) + (1-m)R^2] \pm 4y\sqrt{p}}{8(x^2 + y^2)} \right] \left[ \frac{4x[(m+1)(x^2 + y^2) + (m-1)R^2] \mp 4y\sqrt{q}}{8m(x^2 + y^2)} \right] \blacksquare$$

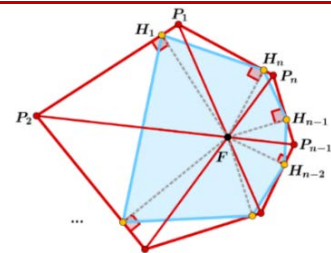
註：當  $x_i$  取+， $x_{i+1}$  取-時，為對於相鄰等角  $n$  邊形  $P_1P_2 \cdots P_n$  之  $m:1$  分點多邊形  $Q_1Q_2 \cdots Q_n$  之頂點軌跡方程式；當  $x_i$  取-， $x_{i+1}$  取+時，為對於相鄰等角  $n$  邊形  $P_1P_2 \cdots P_n$  之  $1:m$  分點多邊形  $Q_1'Q_2' \cdots Q_n'$  之頂點軌跡方程式。

## 二、『圓內』垂足 $n$ 邊形頂點軌跡探討

由八點圓定理可知在對角線互相垂直的四邊形中，由各邊中點分別向對邊做垂線，則四個垂足與四個中點將八點共圓，又由婆羅摩笈多定理知每組中點與垂足的連線將通過固定點  $F$ ，因此發現圓內垂足四邊形頂點軌跡也會共一圓，且此圓即為圓內中點四邊形頂點軌跡圓。由此我們好奇圓錐曲線內接相鄰等角多邊形之垂足多邊形頂點軌跡與相關性質。

### 【Definition 3】垂足多邊形

在  $n$  邊形  $P_1P_2 \cdots P_n$  中，取平面上任意點  $F$  對  $n$  邊形  $P_1P_2 \cdots P_n$  各邊延長線做垂線，可得垂足  $H_k$ ，稱  $n$  邊形  $H_1H_2 \cdots H_n$  為  $F$  之  $n$  邊形  $P_1P_2 \cdots P_n$  的垂足  $n$  邊形。



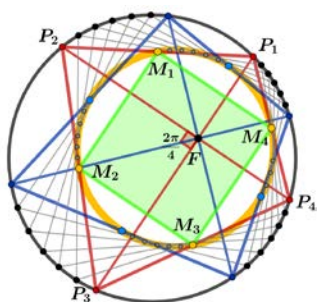
### 【Difference】負踏板多邊形(Negative Pedal Polygon)

一般所謂垂足軌跡為圓錐曲線上給定切線並由任意點做出垂足形成的軌跡，而我們的研究內容是由固定點對圓錐曲線內接多邊形的各邊做垂線並觀察垂足所形成的軌跡。這樣的定義其實較接近負踏板多邊形(Negative Pedal Polygon)，但為方便表達，在此稱其為「垂足多邊形」。

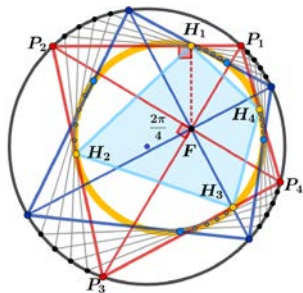
### 【Theorem2】圓內中點四邊形、垂足四邊形頂點軌跡共相同一圓

給定一半徑為  $R$  的圓  $C$ ，在圓內取一定點  $F$ ，將  $F$  點的周角平分為四等分，則對於任意對角線互相垂直於  $F$  的圓內接四邊形  $P_1P_2P_3P_4$  的中點四邊形  $M_1M_2M_3M_4$  之頂點將共一圓  $C_1$ ，且垂足四邊形  $H_1H_2H_3H_4$  之頂點將共一圓  $C_1'$ ，則  $C_1 = C_1'$ 。

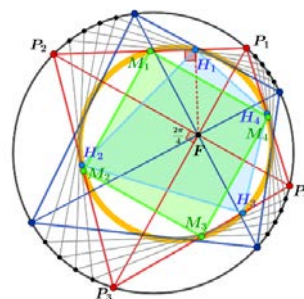
而軌跡圓  $C_1$ 、 $C_1'$  之半徑  $R_1$  滿足  $R_1^2 = \frac{1}{2}R^2 - \overline{OM}^2$ ，其中  $M$  為圓心  $O$  與定點  $F$  的中點。



▲圓內中點四邊形



▲圓內垂足四邊形



▲垂足與中點軌跡為同一圓

*Proof* 1° 取  $\overline{P_1P_2}$  的中點  $M_1$ ， $\overline{OF}$  的中點  $M$ ，連  $\overline{OM_1}$ 、 $\overline{OF}$ 、 $\overline{MM_1}$ 、 $\overline{FM_1}$ ，得  $\overline{M_1P_1} = \overline{M_1F}$ 。

$$2^\circ \text{ 由中線定理 } \overline{OM_1}^2 + \overline{M_1F}^2 = 2(\overline{OM}^2 + \overline{MM_1}^2)$$

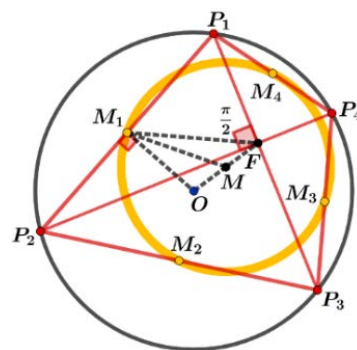
$$\therefore \overline{M_1P_1} = \overline{M_1F} \text{ 且 } \overline{OM_1}^2 + \overline{M_1F}^2 = \overline{OM_1}^2 + \overline{M_1P_1}^2 = R^2$$

$$\therefore \overline{MM_1}^2 = \frac{1}{2}R^2 - \overline{OM}^2 \therefore \overline{OM}^2、R^2 \text{ 為定值 } \therefore \overline{MM_1} \text{ 為定值}$$

對於任意的弦  $\overline{P_iP_{i+1}}$  的中點  $M_i$  仍滿足， $\forall i=1,2,3,4$ 。

則對於任意  $\overline{P_iP_{i+1}}$  的中點  $M_i$  落在以  $M$  為圓心、半徑為  $\sqrt{\frac{1}{2}R^2 - \overline{OM}^2} = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}\overline{OF}^2}$  的圓上。

由八點圓定理，因中點四邊形  $M_1M_2M_3M_4$  之頂點恆共一圓  $C_1$ ，所以垂足四邊形  $H_1H_2H_3H_4$  之頂點也在此圓  $C_1$  上■



### 【Theorem 3】圓內垂足 $n$ 邊形頂點軌跡方程式

給定一圓  $C: x^2 + y^2 = R^2$ ，在其內任取一定點  $F(k,0)$ ，則對於  $F$  的任意相鄰等角  $n$  邊形  $P_1P_2 \cdots P_n$  之垂足  $n$  邊形  $H_1H_2 \cdots H_n$  頂點會共一相同封閉曲線，此曲線方程式為

$$2x^2 + 2y^2 - 2kx + k^2 - R^2 - \cos \frac{2\pi}{n} \sqrt{(R^2 + k^2)^2 - 4k(R^2 + k^2)} \left[ \frac{kx^2 - k^2x + 1}{y^2 + (x-k)^2} \right] + 4k^2 \left[ \frac{x^2(x-k)^2 + 2xy^2(x-k) + y^4 - R^2y^2}{y^2 + (x-k)^2} \right] = 0$$

*Proof* 任取  $C$  上相異兩點  $P_i(x_i, y_i)$ 、 $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ ，滿足  $\angle P_iFP_{i+1} = \frac{2\pi}{n}$ ， $\forall 1 \leq i \leq n-1$

$$\text{已知 } \begin{cases} (x-k, y) \cdot (x_i - x_{i+1}, y_i - y_{i+1}) = 0 \\ (x-k, y) \cdot (x - x_i, y - y_i) = 0 \\ (x-k, y) \cdot (x - x_{i+1}, y - y_{i+1}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xx_i - kx + kx_i + y^2 - yy_i = 0 \cdots (1) \\ x^2 - xx_{i+1} - kx + kx_{i+1} + y^2 - yy_{i+1} = 0 \cdots (2) \end{cases}$$

1° 令  $F(k,0)$ ， $P_i(x_i, y_i)$ ， $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ ， $\forall 1 \leq i \leq n-1$

$$\overrightarrow{FP_i} = (x_i - k, y_i), \overrightarrow{FP_{i+1}} = (x_{i+1} - k, y_{i+1})，\text{則有 } \overrightarrow{FP_i} \cdot \overrightarrow{FP_{i+1}} = \left| \overrightarrow{FP_i} \right| \left| \overrightarrow{FP_{i+1}} \right| \cos \frac{2\pi}{n}$$

$$\therefore (x_i - k, y_i) \cdot (x_{i+1} - k, y_{i+1}) = \sqrt{[(x_i - k)^2 + y_i^2]} \sqrt{[(x_{i+1} - k)^2 + y_{i+1}^2]} \cos \theta$$

$$\boxed{\text{處理 LHS} = x_i x_{i+1} - k(x_i + x_{i+1}) + k^2 + y_i y_{i+1}}$$

$$\therefore \overline{H_i P_i} \times \overline{H_i P_{i+1}} = R^2 - \overline{OH_i}^2 \therefore (x_i - x, y_i - y) \cdot (x_{i+1} - x, y_{i+1} - y) = x^2 + y^2 - R^2$$

$$\Rightarrow x_i x_{i+1} - x x_i - x x_{i+1} + y_i y_{i+1} - y y_i - y y_{i+1} + R^2 = 0 \cdots (3)$$

$$(1)+(2) \text{ 可得 } 2x^2 - x x_i - x x_{i+1} - 2kx + k x_i + k x_{i+1} + 2y^2 - y y_i - y y_{i+1} = 0 \cdots (4)$$

$$(3)-(4) \text{ 可得左式} = x_i x_{i+1} - k(x_i + x_{i+1}) + k^2 + y_i y_{i+1} = 2x^2 + 2y^2 - 2kx + k^2 - R^2$$

$$\boxed{\text{處理 RHS} = \sqrt{[(x_i - k)^2 + y_i^2]} \sqrt{[(x_{i+1} - k)^2 + y_{i+1}^2]} \cos \theta}, \text{ 且 } \begin{cases} x_i^2 + y_i^2 = R^2 \\ x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2 = R^2 \end{cases}$$

$$\text{原式} = \left| \overrightarrow{FP_i} \right| \left| \overrightarrow{FP_{i+1}} \right| = \sqrt{[(x_i - k)^2 + y_i^2]} \sqrt{[(x_{i+1} - k)^2 + y_{i+1}^2]} = \sqrt{(R^2 - 2kx_i + k^2)(R^2 - 2kx_{i+1} + k^2)}$$

$$= \sqrt{(R^2 + k^2)^2 - 2k(R^2 + k^2)(x_i + x_{i+1}) + 4k^2 x_i x_{i+1}} \mathbf{L} \quad (5)$$

$$(1) \Leftrightarrow y_i = \frac{kx_i - x x_i - kx + x^2 + y^2}{y} = \frac{(x_i - x)(k - x)}{y} + y, \text{ 將 } y_i \text{ 代入 } x_i^2 + y_i^2 = R^2 \text{ 整理可得}$$

$$\left[ \frac{y^2 + (x - k)^2}{y^2} \right] x_i^2 + \left[ \frac{-2kx^2 + 2k^2 x - 2}{y^2} \right] x_i + \left[ \frac{x^2 (x - k)^2 + 2xy^2 (x - k) + y^4 - R^2 y^2}{y^2} \right] = 0$$

$$\text{同理} \left[ \frac{y^2 + (x - k)^2}{y^2} \right] x_{i+1}^2 + \left[ \frac{-2kx^2 + 2k^2 x - 2}{y^2} \right] x_{i+1} + \left[ \frac{x^2 (x - k)^2 + 2xy^2 (x - k) + y^4 - R^2 y^2}{y^2} \right] = 0$$

$$\text{故 } x_i, x_{i+1} \text{ 為 } \left[ \frac{y^2 + (x - k)^2}{y^2} \right] t^2 + \left( \frac{-2kx^2 + 2k^2 x - 2}{y^2} \right) t + \left[ \frac{x^2 (x - k)^2 + 2xy^2 (x - k) + y^4 - R^2 y^2}{y^2} \right] = 0 \text{ 之兩根}$$

$$\text{由韋達定理知} \begin{cases} x_i + x_{i+1} = \frac{2kx^2 - 2k^2 x + 2}{y^2 + (x - k)^2} \\ x_i x_{i+1} = \frac{x^2 (x - k)^2 + 2xy^2 (x - k) + y^4 - R^2 y^2}{y^2 + (x - k)^2} \end{cases}, \text{ 將此代回(5)可得軌跡方程式}$$

$$2x^2 + 2y^2 - 2kx + k^2 - R^2 - \cos \frac{2\pi}{n} \sqrt{(R^2 + k^2)^2 - 4k(R^2 + k^2) \left[ \frac{kx^2 - k^2 x + 1}{y^2 + (x - k)^2} \right] + 4k^2 \left[ \frac{x^2 (x - k)^2 + 2xy^2 (x - k) + y^4 - R^2 y^2}{y^2 + (x - k)^2} \right]} = 0 \blacksquare$$

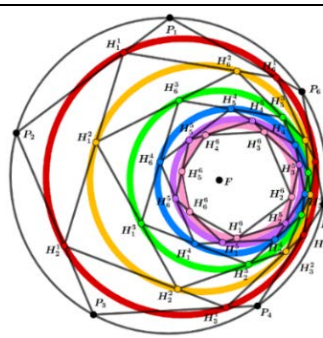
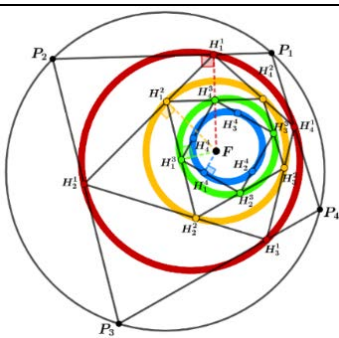
### 【Corollary 3】

給定一圓錐曲線，在其內任取一定點  $F$ ，則將任意  $F$  的相鄰等角  $n$  邊形  $P_1 P_2 \cdots P_n$  之垂足  $n$  邊



形  $H_1H_2 \cdots H_n$  稱為第一層垂足  $n$  邊形；以  $F$  點對第一層垂足  $n$  邊形的每一邊分別做垂足得到多邊形  $H_1^2H_2^2 \cdots H_n^2$ ，則稱多邊形  $H_1^2H_2^2 \cdots H_n^2$  為第 2 層垂足  $n$  邊形。以同樣做圖方式向內持續

<p>1.圓內第 <math>n</math> 層垂足四邊形頂點軌跡共 同一圓</p>	<p>2.圓內第 <math>\frac{n}{2}</math> 層整數倍的垂足 <math>n</math> 邊形頂點軌跡共一圓 且第 <math>\frac{n}{2}</math> 層垂足 <math>n</math> 邊形頂點軌跡圓圓心為定點 <math>F</math></p>
<p>圓內第 <math>n</math> 層垂足四邊形頂點軌跡共 一圓，<math>\forall n \in \square</math>。而圓內第 2 層垂足四 邊形頂點軌跡圓圓心為定點 <math>F</math>。</p>	<p>圓內第 <math>\frac{n}{2}m</math> 層垂足 <math>n</math> 邊形頂點軌跡共一圓而圓內第 <math>\frac{n}{2}</math> 層垂足 <math>n</math> 邊形頂點軌跡圓圓心為定點 <math>F</math>。</p>



Proof(圓內第  $\frac{n}{2}$  層垂足  $n$  邊形頂點軌跡圓圓心為定點  $F$ ， $n$  為偶數)

做出第 3 層、...、第  $m$  層垂足  $n$  邊形，則稱  $H_1^mH_2^m \cdots H_n^m$  為第  $m$  層垂足  $n$  邊形， $\forall m \in \square$ 。

$$\begin{aligned} \angle FH_1^{\frac{n}{2}}H_2^{\frac{n}{2}} &= \angle FH_2^{\frac{n-1}{2}}H_2^{\frac{n}{2}} = \angle FH_2^{\frac{n-1}{2}}H_3^{\frac{n-1}{2}} = \angle FH_3^{\frac{n-2}{2}}H_3^{\frac{n-1}{2}} = \angle FH_3^{\frac{n-2}{2}}H_4^{\frac{n-2}{2}} = \cdots = \angle FH_{\frac{n}{2}}^1H_{\frac{n}{2}+1}^1 = \angle FP_{\frac{n}{2}+1}P_{\frac{n}{2}+2} \\ &= \angle P_1P_{\frac{n}{2}+1}P_{\frac{n}{2}+2} = \angle P_1P_2P_{\frac{n}{2}+2} = \angle P_1P_2F = \angle H_1^1P_2F = \angle H_1^1H_2^1F = \angle H_1^2H_2^1F = \angle H_1^2H_2^2F \\ &= \angle H_1^3H_2^2F = \angle H_1^3H_2^3F = \cdots = \angle H_1^{\frac{n}{2}}H_2^{\frac{n}{2}}F \end{aligned}$$

$$\therefore \angle FH_1^{\frac{n}{2}}H_2^{\frac{n}{2}} = \angle H_1^{\frac{n}{2}}H_2^{\frac{n}{2}}F \therefore FH_1^{\frac{n}{2}} = FH_2^{\frac{n}{2}} \text{ 同理可得 } FH_1^{\frac{n}{2}} = FH_2^{\frac{n}{2}} = FH_3^{\frac{n}{2}} = \cdots = FH_n^{\frac{n}{2}}$$

故  $H_1^{\frac{n}{2}}$ 、 $H_2^{\frac{n}{2}}$ 、...、 $H_n^{\frac{n}{2}}$  共圓，且此圓圓心即為定點  $F$ 。■

### 三、圓錐曲線內垂足 $n$ 邊形頂點軌跡探討

由圓內垂足四邊形頂點軌跡共一圓的結果，我們好奇在任意圓錐曲線內其他的垂足  $n$  邊形頂點軌跡是否有類似的美妙結果。我們發現任意圓錐曲線內第一層垂足  $n$  邊形頂點軌跡皆分別共一封閉曲線。我們除了發現【Corollary 3】中頂點軌跡共圓的性質，甚至發現：當  $F$  為焦點時，任意圓錐曲線內的垂足  $n$  邊形頂點軌跡分別共一圓， $\forall n \in \square, n \geq 3$ 。

軌跡	垂足三角形頂點軌跡	垂足五邊形頂點軌跡	垂足六邊形頂點軌跡
拋物線			
橢圓			
雙曲線			

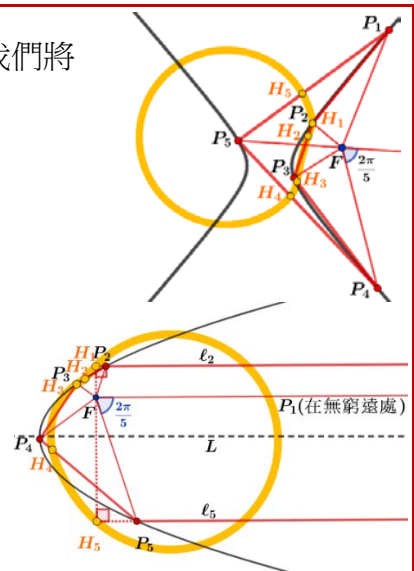
**【Definition 4】** 特殊情況的討論-開放式曲線中的特殊定義

(1)若雙曲線某條  $\overline{FP_k}$  無法與較接近的一支雙曲線有交點，則我們將  $\overline{FP_k}$  旋轉  $180^\circ$  後取其與較遠一支雙曲線的交點。

如右圖中原來的  $\overline{FP_5}$  旋轉  $180^\circ$  後交較遠一支雙曲線於  $P_5$ 。

(2)若拋物線某條  $\overline{FP_k}$  平行對稱軸  $L$ ，則定義此時的  $H_{k-1}$ 、 $H_k$  為  $F$  對  $\ell_{k+1}$ 、 $\ell_{k-1}$  的垂足，其中  $\ell_{k+1}$ 、 $\ell_{k-1}$  分別為過  $P_{k+1}$ 、 $P_{k-1}$  平行  $L$  的直線。右圖以拋物線五等份為例。

(定義  $\ell_0 = \ell_n$ 、 $\ell_1 = \ell_{n+1}$ 、 $H_0 = H_n$ 、 $H_1 = H_{n+1}$ )



**【Theorem 4】** 圓錐曲線內第一層垂足  $n$  邊形頂點軌跡共一圓，此時  $F$  在焦點上。

對於圓錐曲線內焦點  $F$  的相鄰等角多邊形  $P_1P_2 \dots P_n$  之垂足  $n$  邊形  $H_1H_2 \dots H_n$  頂點軌跡皆會

共一圓， $\forall n \geq 3$ 。

軌跡	垂足三角形頂點軌跡	垂足四邊形頂點軌跡	垂足 $n$ 邊形頂點軌跡
拋物線			
橢圓			
雙曲線			

**Proof** 由於離心率與自然常數符號易混淆，故在此以  $\varepsilon$  表示離心率、 $e$  表示自然常數

$$\text{設 } P_k \rightarrow z_k = r_k \cdot e^{i\left(\phi + (k-1)\frac{2\pi}{n}\right)} \quad P_{k+1} \rightarrow z_{k+1} = r_{k+1} \cdot e^{i\left(\phi + k\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$P'_k \rightarrow \overline{z_k} = r_k \cdot e^{-i\left(\phi + (k-1)\frac{2\pi}{n}\right)} \quad P'_{k+1} \rightarrow \overline{z_{k+1}} = r_{k+1} \cdot e^{-i\left(\phi + k\frac{2\pi}{n}\right)}$$

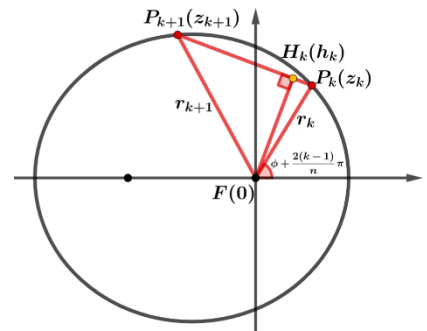
由 **【Lemma 7】** 可知：

$$H_k \mapsto h_k = \frac{1}{2} \left( \frac{\overline{z_k z_{k+1}} - z_k \overline{z_{k+1}}}{z_k - z_{k+1}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(r_k r_{k+1}) \left( e^{i\frac{2\pi}{n}} - e^{-i\frac{2\pi}{n}} \right)}{r_k \cdot e^{-i\left(\phi + (k-1)\frac{2\pi}{n}\right)} - r_{k+1} \cdot e^{-i\left(\phi + k\frac{2\pi}{n}\right)}}$$

$$= \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) - \left[ \cos \left( -\frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( -\frac{2\pi}{n} \right) \right]}{\left[ 1 - \varepsilon \cos \left( \phi + k \frac{2\pi}{n} \right) \right] \cdot e^{-i\left(\phi + (k-1)\frac{2\pi}{n}\right)} - \left\{ 1 - \varepsilon \cos \left[ \phi + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] \right\} \cdot e^{-i\left(\phi + k\frac{2\pi}{n}\right)}}$$

， $\rho$  為半正焦弦長

$$= \frac{\rho}{2} \cdot \frac{2i \sin \frac{2\pi}{n}}{\left[ 1 - \varepsilon \cos \left( \phi + k \frac{2\pi}{n} \right) \right] \left\{ \cos \left[ \phi + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] - i \sin \left[ \phi + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] \right\} - \left\{ 1 - \varepsilon \cos \left[ \phi + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] \right\} \left[ \cos \left( \phi + k \frac{2\pi}{n} \right) - i \sin \left( \phi + k \frac{2\pi}{n} \right) \right]}$$

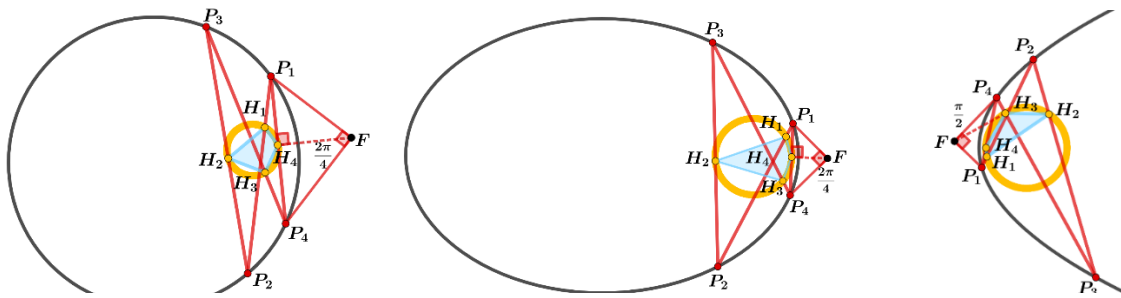


$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho}{2} \cdot \frac{2i \sin \frac{2\pi}{n}}{\cos \left[ \phi + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] - i \sin \left[ \phi + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] + i \varepsilon \cos \left( \phi + k \frac{2\pi}{n} \right) \sin \left[ \phi + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] - \cos \left( \phi + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \phi + k \frac{2\pi}{n} \right) - i \varepsilon \cos \left[ \phi + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] \sin \left( \phi + k \frac{2\pi}{n} \right)} \\
&= \frac{\rho}{2} \cdot \frac{4i \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}}{-2i \varepsilon \cdot \cos \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{\pi}{n} - 2 \sin \left[ \phi + (2k-1) \frac{\pi}{n} \right] \cdot \sin \left( \frac{\pi}{n} \right) + 2i \cos \left[ \phi + (2k-1) \frac{\pi}{n} \right] \cdot \sin \left( \frac{\pi}{n} \right)} \cdot \frac{1}{h_k} = \frac{-\sin \left[ \phi + (2k-1) \frac{\pi}{n} \right] + i \cos \left[ \phi + (2k-1) \frac{\pi}{n} \right] - i \varepsilon \cos \frac{\pi}{n}}{\rho \cos \frac{\pi}{n}} \\
&\Leftrightarrow \frac{\rho i \cos \frac{\pi}{n}}{h_k} + i \varepsilon \cos \frac{\pi}{n} = i \cos \frac{\pi}{n} \left( \frac{\rho}{h_k} + \varepsilon \right) = -\sin \left[ \phi + (2k-1) \frac{\pi}{n} \right] + i \cos \left[ \phi + (2k-1) \frac{\pi}{n} \right] \\
&\Leftrightarrow \left| \frac{\rho}{h_k} + \varepsilon \right| = \left| \frac{\cos \left[ \phi + (2k-1) \frac{\pi}{n} \right] + i \sin \left[ \phi + (2k-1) \frac{\pi}{n} \right]}{\cos \frac{\pi}{n}} \right|, \quad \Leftrightarrow h_k = x_k + iy_k \\
&\Leftrightarrow \left| \frac{\rho}{x_k + iy_k} + \varepsilon \right| = \left| \frac{\rho(x_k - iy_k)}{x_k^2 + y_k^2} + \varepsilon \right| = \left| \left( \frac{\rho x_k}{x_k^2 + y_k^2} + \varepsilon \right) - \left( \frac{\rho y_k}{x_k^2 + y_k^2} \right) i \right| = \left| \cos \left[ \phi + (2k-1) \frac{\pi}{n} \right] + i \sin \left[ \phi + (2k-1) \frac{\pi}{n} \right] \right| \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \\
&\left( \frac{\rho x_k}{x_k^2 + y_k^2} + \varepsilon \right)^2 + \left( \frac{-\rho y_k}{x_k^2 + y_k^2} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \Leftrightarrow \frac{\rho^2 x_k^2}{(x_k^2 + y_k^2)^2} + \varepsilon^2 + \frac{2\rho \varepsilon x_k}{x_k^2 + y_k^2} + \frac{\rho^2 y_k^2}{(x_k^2 + y_k^2)^2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \dots (*) \\
&\left( x_k + \frac{\rho \varepsilon \cos^2 \frac{\pi}{n}}{\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 1} \right)^2 + y_k^2 = \frac{\rho^2 \varepsilon^2 \cos^4 \frac{\pi}{n} - \rho \varepsilon^3 \cos^4 \frac{\pi}{n} + \rho \varepsilon \cos^2 \frac{\pi}{n}}{\left( \varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 1 \right)^2} \\
&\therefore \left( x + \frac{\rho \varepsilon \cos^2 \frac{\pi}{n}}{\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 1} \right)^2 + y^2 = \frac{\rho^2 \varepsilon^2 \cos^4 \frac{\pi}{n} - \rho \varepsilon^3 \cos^4 \frac{\pi}{n} + \rho \varepsilon \cos^2 \frac{\pi}{n}}{\left( \varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 1 \right)^2} \text{ 即為 } H_k \text{ 之軌跡方程式} \blacksquare
\end{aligned}$$

註：視圓的焦點為圓心，顯然成立，其軌跡方程式即為(\*)中  $\varepsilon = 0$ 。

### 【Discussion3】 $F$ 點落在圓錐曲線外之垂足四邊形頂點軌跡為同一圓

給定一圓錐曲線及其外一點  $F$ ，將  $F$  周角平分四等分，交圓錐曲線於  $P_1$ 、 $P_4$ ，將其延長交圓錐曲線於  $P_2$ 、 $P_3$  形成一折線四邊形  $P_1P_2P_3P_4$ 。作  $\overline{FH_i} \perp \overline{P_iP_{i+1}}$ ,  $H_i \in \overline{P_iP_{i+1}}$ ，則對於任意的  $P_1P_2P_3P_4$  之垂足四邊形  $H_1H_2H_3H_4$  頂點軌跡共一圓。



*Proof* ” $\square$ ”均表示有向角符號

$$\square FH_1H_4 = \square FP_1H_4 = \square FPP_4 = 90^\circ - \square PP_4F = 90^\circ - \square H_4P_4F = 90^\circ - \square H_4H_3F$$

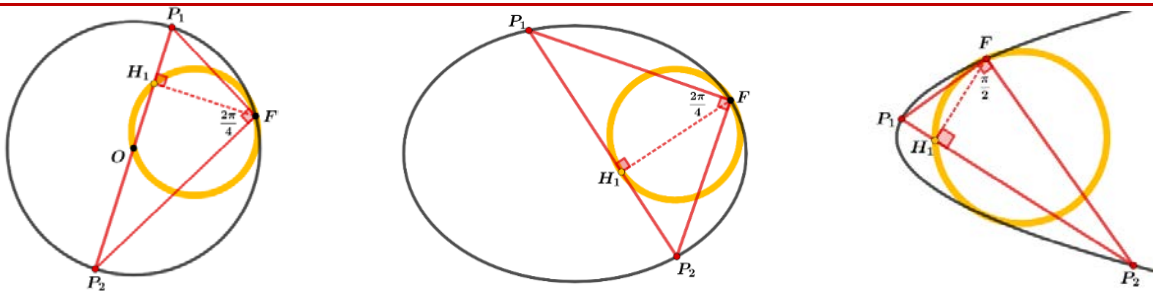
同理  $\square H_2H_1F = 90^\circ - \square FH_3H_2$

故  $\square H_2H_1H_4 = \square H_2H_1F + \square FH_1H_4 = 180^\circ - (\square H_4H_3F + \square FH_3H_2) = -\square H_4H_3H_2 = \square H_2H_3H_4$

因此  $H_1$ 、 $H_2$ 、 $H_3$ 、 $H_4$  共圓 ■

**【Discussion4】**  $F$  點在圓錐曲線上垂足四邊形頂點軌跡為同一圓

給定一圓錐曲線及圓錐曲線上一點  $F$ ，將  $F$  周角平分四等分，交圓於  $P_1$ 、 $P_2$ ，圓錐曲線內接四邊形退化為圓錐曲線內接  $\Delta P_1FP_2$ 。以  $F$  點對  $\overline{P_1P_2}$  做垂足  $H_1$ ，其軌跡共一圓。



*Proof* 以圓上垂足四邊形為例  $\because \angle P_1FP_2 = 90^\circ \therefore \overline{P_1P_2}$  恆過初始圓圓心  $O$

又  $\because \angle FH_1P_2 = 90^\circ$ ，且  $O$ 、 $F$  為固定點  $\therefore H_1$  的軌跡為以  $\overline{OF}$  為直徑的圓 ■

**四、圓錐曲線內垂足  $n$  邊形不變量探討**

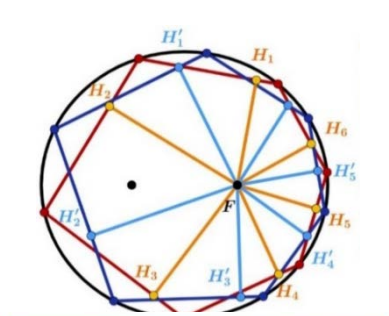
當繼續深入研究圓錐曲線內垂足  $n$  邊形後，發現固定點  $F$  與第一層垂足  $n$  邊形的  $n$  個頂點之連線段的倒數平方和之偶數次方和也存在不變量，接著我們持續關注垂足  $n$  邊形的邊長，發現其倒數的偶數次方和也是不變量。另外，任意圓錐曲線內第  $n-1$  層垂足多邊形存在特殊的角度關係。和符合龐色列定理中的調和多邊形一樣有不變量性質[3]。

**【Theorem 5】** 圓錐曲線內垂足  $n$  邊形的垂線段倒數偶次方和為不變量

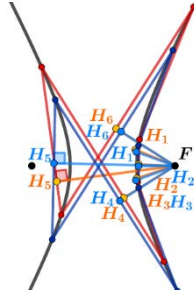
任意圓錐曲線內，從焦點  $F$  對相鄰等角多邊形  $P_1P_2 \cdots P_n$  作各邊的垂線之倒數偶次方和恆為定值，即

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{FH_k} \right)^{2m} = \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=m \\ 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq m}} \left[ \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma!} (2 + e^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} - e^2 \cos^2 \frac{2\pi}{n})^\alpha (-4e \cos \frac{\pi}{n})^\beta (4e \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n})^\gamma \frac{n}{2^{\beta+\gamma-2}} C_{\lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor}^\beta C_{\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor}^\gamma \frac{(-1)^\beta + 1}{4} \cdot \frac{(-1)^\gamma + 1}{4} \right]$$

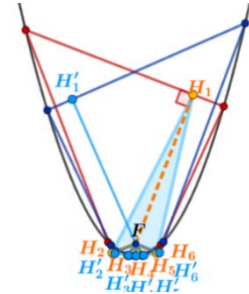
恆為定值， $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ，其中  $m < n$ 。



$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^2} = 0.0071473705138$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^4} = 0.0071473705138$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^4} = 0.0000099454298$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^6} = 0.0000099454298$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^6} = 0.0000000152572$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^8} = 0.0000000152572$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^8} = 0.0000000000248$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^{10}} = 0.0000000000248$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^{10}} = 0.000000000000421$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^{12}} = 0.000000000000421$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^{12}} = 0.000000000000005$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^{14}} = 0.000000000000009$



$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^2} = 1.3989513191$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^4} = 1.3989513191$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^4} = 0.4395425773$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^6} = 0.4395425773$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^6} = 0.1553472022$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^8} = 0.1553472022$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^8} = 0.0579220134$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^{10}} = 0.0579220134$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^{10}} = 0.0222491763$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^{12}} = 0.0222491763$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^{12}} = 0.0087206050$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^{14}} = 0.0087183274$



$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^2} = 0.03738562616625$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^4} = 0.03738562616625$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^4} = 0.0003470442455799$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^6} = 0.0003470442455799$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^6} = 0.000003584270406019$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^8} = 0.000003584270406019$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^8} = 0.000000038887715738709$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^{10}} = 0.000000038887715738709$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^{10}} = 0.0000000004337620975085$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^{12}} = 0.0000000004337620975085$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^{12}} = 0.0000000000493918209361$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{FH_i^{14}} = 0.000000000049390689649$

註：所有圓錐曲線的焦半徑能以  $\overline{FP} = \frac{r}{1 - e \cos \theta}$  表示， $r$  為半正焦弦長， $e$  為離心率， $\theta$  為  $\overline{FP}$  線段與  $x$  軸正向之夾角。

*Proof* 由 **Lemma4**：  $\overline{FP}_k = \frac{r}{1 - e \cos \left[ \phi + \frac{2(k-1)}{n} \right]}$   $\overline{FP}_{k+1} = \frac{r}{1 - e \cos \left( \phi + \frac{2k}{n} \right)}$

$$\overline{FH}_k = \frac{\overline{FP}_k \cdot \overline{FP}_{k+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}}{\sqrt{\overline{FP}_k^2 + \overline{FP}_{k+1}^2 - 2\overline{FP}_k \cdot \overline{FP}_{k+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{n}}}$$

$$= \frac{\frac{r^2}{\left\{ 1 - e \cos \left[ \phi + \frac{2(k-1)}{n} \right] \right\} \left\{ 1 - e \cos \left( \phi + \frac{2k}{n} \right) \right\}} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}}{\sqrt{\frac{r^2}{\left\{ 1 - e \cos \left[ \phi + \frac{2(k-1)}{n} \right] \right\}^2} + \frac{r^2}{\left\{ 1 - e \cos \left( \phi + \frac{2k}{n} \right) \right\}^2} - 2 \frac{r}{1 - e \cos \left[ \phi + \frac{2(k-1)}{n} \right]} \cdot \frac{r}{1 - e \cos \left( \phi + \frac{2k}{n} \right)} \cdot \cos \frac{2\pi}{n}}}$$

$$= \frac{r \sin \frac{2\pi}{n}}{\sqrt{\left\{ 1 - e \cos \left[ \phi + \frac{2(k-1)\pi}{n} \right] \right\}^2 + \left\{ 1 - e \cos \left( \phi + \frac{2k\pi}{n} \right) \right\}^2 - 2 \left\{ 1 - e \cos \left[ \phi + \frac{2(k-1)\pi}{n} \right] \right\} \left\{ 1 - e \cos \left( \phi + \frac{2k\pi}{n} \right) \right\} \cos \frac{2\pi}{n}}}$$

(一)當  $n = 4$  時：因  $n > 4$  證明十分複雜，我們先單獨列出  $n = 4$  之證明

$$\sum_{k=1}^4 \left( \frac{1}{FH_k} \right)^{2m} = \sum_{k=1}^4 \frac{\left\{ \left[ 1 - e \cos \left( \phi + \frac{2(k-1)\pi}{4} \right) \right]^2 + \left[ 1 - e \cos \left( \phi + \frac{2k\pi}{4} \right) \right]^2 - 2 \left[ 1 - e \cos \left( \phi + \frac{2(k-1)\pi}{4} \right) \right] \left[ 1 - e \cos \left( \phi + \frac{2k\pi}{4} \right) \right] \cos \frac{2\pi}{4} \right\}^m}{\left( r \sin \frac{2\pi}{4} \right)^{2m}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^4 \frac{\left\{ \left[ 1 - e \sin \left( \phi + \frac{k\pi}{2} \right) \right]^2 + \left[ 1 - e \cos \left( \phi + \frac{k\pi}{2} \right) \right]^2 \right\}^m}{r^{2m}} = \frac{1}{r^{2m}} \sum_{k=1}^4 \left\{ 2 + e^2 - 2e \left[ \sin \left( \phi + \frac{k}{2} \pi \right) + \cos \left( \phi + \frac{k}{2} \pi \right) \right] \right\}^m \\
&= \left( \frac{2\sqrt{2}e}{r^2} \right)^m \sum_{k=1}^4 \left\{ t - \cos \left( \phi + \frac{2k+1}{4} \pi \right) \right\}^m, \text{ 其中 } \frac{\sqrt{2}}{2e} + \frac{\sqrt{2}e}{4} = t \text{ 為常數} \\
&= \left( \frac{2\sqrt{2}e}{r^2} \right)^m \sum_{k=1}^4 \left[ \sum_{i=0}^m C_i^m \cdot t^{m-i} \cdot (-1)^i \cos^i \left( \phi + \frac{2k+1}{4} \pi \right) \right] = \left( \frac{2\sqrt{2}e}{r^2} \right)^m \sum_{i=0}^m \left[ C_i^m \cdot t^{m-i} \cdot (-1)^i \sum_{k=1}^4 \cos^i \left( \phi + \frac{2k+1}{4} \pi \right) \right] \\
&= \left( \frac{2\sqrt{2}e}{r^2} \right)^m \sum_{i=0}^m \left\{ C_i^m \cdot t^{m-i} \cdot (-1)^i \cdot \frac{1}{2^{i-1}} \sum_{k=1}^4 \left[ C_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^i \cdot \frac{(-1)^i + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \left( C_j^i \cos(i-2j) \left( \phi + \frac{2k+1}{4} \pi \right) \right) \right] \right\} \text{ 由 【Lemma 5】} \\
&= \left( \frac{2\sqrt{2}e}{r^2} \right)^m \sum_{i=0}^m \left\{ C_i^m \cdot t^{m-i} \cdot (-1)^i \cdot \frac{1}{2^{i-1}} \left[ \sum_{k=1}^4 C_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^i \cdot \frac{(-1)^i + 1}{4} + \sum_{k=1}^4 \left( \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \left( C_j^i \cos(i-2j) \left( \phi + \frac{2k+1}{4} \pi \right) \right) \right) \right] \right\} \\
&= \left( \frac{2\sqrt{2}e}{r^2} \right)^m \sum_{i=0}^m \left\{ C_i^m \cdot t^{m-i} \cdot (-1)^i \cdot \frac{1}{2^{i-1}} \left[ \sum_{k=1}^4 C_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^i \cdot \frac{(-1)^i + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \left( C_j^i \sum_{k=1}^4 \left( \cos(i-2j) \left( \phi + \frac{\pi}{4} + \frac{2k}{4} \pi \right) \right) \right) \right] \right\} \\
&= \left( \frac{2\sqrt{2}e}{r^2} \right)^m \sum_{i=0}^m \left\{ C_i^m \cdot t^{m-i} \cdot (-1)^i \cdot \frac{1}{2^{i-1}} \left( \sum_{k=1}^4 C_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^i \cdot \frac{(-1)^i + 1}{4} \right) \right\} = 2 \left( \frac{2\sqrt{2}e}{r^2} \right)^m \sum_{i=0}^m \left\{ C_i^m \cdot C_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^i \cdot t^{m-i} \cdot \left( \frac{-1}{2} \right)^i \cdot (-1)^i + 1 \right\} \text{ 恆為定值} \\
&\text{(由 【Lemma 6】 } \because j \leq \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor \therefore 1 \leq i-2j \leq i \leq m < n = 4 \therefore \sum_{k=1}^4 \left\{ \cos(i-2j) \left[ \left( \phi + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{2k}{4} \pi \right] \right\} = 0) \blacksquare
\end{aligned}$$

(二)當  $n > 4$  時：令  $\psi = \phi + \frac{2k-1}{n} \pi$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{FH_k} \right)^{2m} &= \left( \frac{1}{r \sin \frac{2\pi}{n}} \right)^{2m} \sum_{k=1}^n \left\{ \left[ 1 - e \cos \left( \phi + \frac{2(k-1)}{n} \pi \right) \right]^2 + \left[ 1 - e \cos \left( \phi + \frac{2k}{n} \pi \right) \right]^2 - 2 \left[ 1 - e \cos \left( \phi + \frac{2(k-1)}{n} \pi \right) \right] \left[ 1 - e \cos \left( \phi + \frac{2k}{n} \pi \right) \right] \cos \frac{2\pi}{n} \right\}^m \\
&= \left( \frac{1}{r \sin \frac{2\pi}{n}} \right)^{2m} \sum_{k=1}^n \left\{ 2 - 4e \cos \psi \cos \frac{\pi}{n} + e^2 \left[ \cos^2 \left( \psi - \frac{\pi}{n} \right) + \cos^2 \left( \psi + \frac{\pi}{n} \right) \right] - 2 \left[ 1 - 2e \cos \psi \cos \frac{\pi}{n} + \frac{1}{2} e^2 \left( \cos 2\psi + \cos \frac{2\pi}{n} \right) \right] \cos \frac{2\pi}{n} \right\}^m \\
&= \left( \frac{1}{r \sin \frac{2\pi}{n}} \right)^{2m} \sum_{k=1}^n \left( 2 + e^2 - 4e \cos \psi \cos \frac{\pi}{n} + e^2 \cos 2\psi \cos \frac{2\pi}{n} - 2 \cos \frac{2\pi}{n} + 4e \cos \psi \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n} - e^2 \cos 2\psi \cos \frac{2\pi}{n} - e^2 \cos^2 \frac{2\pi}{n} \right)^m \\
&= \left( \frac{1}{r \sin \frac{2\pi}{n}} \right)^{2m} \sum_{k=1}^n \left\{ 2 - 4e \cos \psi \cos \frac{\pi}{n} + e^2 \left[ \frac{1 + \cos 2 \left( \psi - \frac{\pi}{n} \right)}{2} + \frac{1 + \cos 2 \left( \psi + \frac{\pi}{n} \right)}{2} \right] - 2 \left[ 1 - 2e \cos \psi \cos \frac{\pi}{n} + \frac{1}{2} e^2 \left( \cos 2\psi + \cos \frac{2\pi}{n} \right) \right] \cos \frac{2\pi}{n} \right\}^m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{1}{r \sin \frac{2\pi}{n}} \right)^{2m} \sum_{k=1}^n \left( 2 + e^2 - 4e \cos \psi \cos \frac{\pi}{n} - 2 \cos \frac{2\pi}{n} + 4e \cos \psi \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n} - e^2 \cos^2 \frac{2\pi}{n} \right)^m \\
&= \left( \frac{1}{r \sin \frac{2\pi}{n}} \right)^{2m} \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=m \\ 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq m}} \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma!} \left( 2 + e^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} - e^2 \cos^2 \frac{2\pi}{n} \right)^\alpha \left( -4e \cos \psi \cos \frac{\pi}{n} \right)^\beta \left( 4e \cos \psi \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n} \right)^\gamma \right] \\
&= \left( \frac{1}{r \sin \frac{2\pi}{n}} \right)^{2m} \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=m \\ 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq m}} \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma!} \left( 2 + e^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} - e^2 \cos^2 \frac{2\pi}{n} \right)^\alpha \left( -4e \cos \frac{\pi}{n} \right)^\beta \left( 4e \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n} \right)^\gamma \cos^\beta \psi \cos^\gamma \psi \right] \\
&= \left( \frac{1}{r \sin \frac{2\pi}{n}} \right)^{2m} \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=m \\ 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq m}} \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma!} \left( 2 + e^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} - e^2 \cos^2 \frac{2\pi}{n} \right)^\alpha \left( -4e \cos \frac{\pi}{n} \right)^\beta \left( 4e \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n} \right)^\gamma \cdot \frac{1}{2^{\beta+\gamma-2}} \left[ \sum_{k=1}^n \left[ C_{\lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor}^\beta \cdot \frac{(-1)^\beta + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\beta-1}{2} \rfloor} C_j^\beta \cos(\beta-2j)\psi \right] \left[ C_{\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor}^\gamma \cdot \frac{(-1)^\gamma + 1}{4} + \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{\gamma-1}{2} \rfloor} C_s^\gamma \cos(\gamma-2s)\psi \right] \right]
\end{aligned}$$

其中  $= \sum_{k=1}^n C_{\lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor}^\beta C_{\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor}^\gamma \frac{(-1)^\beta + 1}{4} \cdot \frac{(-1)^\gamma + 1}{4} + C_{\lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor}^\beta \cdot \frac{(-1)^\beta + 1}{4} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{\gamma-1}{2} \rfloor} \left\{ \sum_{k=1}^n C_s^\gamma \cos(\gamma-2s)\psi \right\} + C_{\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor}^\gamma \cdot \frac{(-1)^\gamma + 1}{4} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\beta-1}{2} \rfloor} \left\{ \sum_{k=1}^n C_j^\beta \cos(\beta-2j)\psi \right\}$

$+ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\beta-1}{2} \rfloor} \left\{ \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{\gamma-1}{2} \rfloor} C_j^\beta C_s^\gamma \left\{ \sum_{k=1}^n \cos(\beta-2j+\gamma-2s)\psi + \sum_{k=1}^n \cos(\beta-2j-\gamma+2s)\psi \right\} \right\} = n \cdot C_{\lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor}^\beta C_{\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor}^\gamma \frac{(-1)^\beta + 1}{4} \cdot \frac{(-1)^\gamma + 1}{4}$  (由 **Lemma 6**)

$$\therefore \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{FH_k} \right)^{2m} = \left( \frac{1}{r \sin \frac{2\pi}{n}} \right)^{2m} \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=m \\ 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq m}} \left[ \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma!} \left( 2 + e^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} - e^2 \cos^2 \frac{2\pi}{n} \right)^\alpha \left( -4e \cos \frac{\pi}{n} \right)^\beta \left( 4e \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n} \right)^\gamma \frac{n}{2^{\beta+\gamma-2}} C_{\lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor}^\beta C_{\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor}^\gamma \frac{(-1)^\beta + 1}{4} \cdot \frac{(-1)^\gamma + 1}{4} \right]$$

恆為定值 ( $\because j \leq \lfloor \frac{\beta-1}{2} \rfloor, 2j \leq \beta-1$  且  $\beta-2j \in \square$  且  $\beta-2j \leq \beta \leq m < n$ )

$$\therefore \sum_{k=1}^n C_s^\gamma \cos(\gamma-2s)\psi, \sum_{k=1}^n C_j^\beta \cos(\beta-2j)\psi, \sum_{k=1}^n \cos(\beta-2j+\gamma-2s)\psi, \sum_{k=1}^n \cos(\beta-2j-\gamma+2s)\psi = 0 \blacksquare$$

**【Theorem 6】圓內垂足四邊形垂足線段倒數平方和為不變量**

給定一圓  $C: x^2 + y^2 = R^2$ ，對於其內任意定點  $F(k, 0)$  之任意相鄰等角四邊形  $P_1P_2P_3P_4$  之垂足

$$\text{四邊形 } H_1H_2H_3H_4 \text{ 恆滿足 } \sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^2} = \left[ \frac{4}{(\sqrt{2R^2 - k^2} - k)^2} + \frac{4}{(\sqrt{2R^2 - k^2} + k)^2} \right] \text{ 為定值。}$$

**Proof** 欲證:  $H_1H_2H_3H_4$  為雙心四邊形

$$\angle P_1P_3P_4 = \angle P_1P_2P_4 = \angle PFH_1 = \angle PH_4H_1$$

$P_1P_2P_3P_4$  共圓      母子相似       $P_1H_1FH_4$  共圓



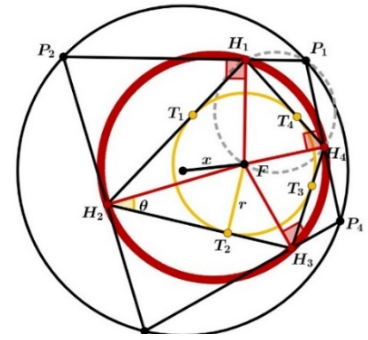
$$\angle P_1 P_3 P_4 = \angle P_4 F H_3 = \angle P_4 H_4 H_3$$

母子相似 共圓

又  $\because \overline{FH_4} \perp \overline{P_1 P_4} \therefore \angle FH_4 H_1 = \angle FH_4 H_3$ ，即  $\overline{FH_4}$  平分  $\angle H_1 H_4 H_3$

對於其他點同理，故  $H_1 H_2 H_3 H_4$  存在內心，且內心為  $F$ 。

令內切圓分別與  $\overline{H_1 H_2}, \overline{H_2 H_3}, \overline{H_3 H_4}, \overline{H_4 H_1}$  切於  $T_1, T_2, T_3, T_4$  且半徑為  $r$



$$\because H_1 H_2 H_3 H_4 \text{ 四點共圓} \therefore \angle FH_2 T_2 + \angle FH_4 T_3 = \frac{1}{2}(\angle H_1 H_2 H_3 + \angle H_3 H_4 H_1) = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle H_2 F T_2 + \angle H_4 F T_3 = 90^\circ, \text{ 令 } \angle H_2 F T_2 = \theta, \angle H_4 F T_3 = 90^\circ - \theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{FH_2^2} + \frac{1}{FH_4^2} = \frac{\cos^2 \theta}{FT_2^2} + \frac{\cos^2(90^\circ - \theta)}{FT_3^2} = \frac{\cos^2 \theta}{FT_2^2} + \frac{\sin^2 \theta}{FT_3^2} = \frac{1}{r^2}$$

同理  $\frac{1}{FH_1^2} + \frac{1}{FH_3^2} = \frac{1}{r^2}$

故  $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^2} = \frac{1}{r^2} \times 2 = \frac{2}{r^2}$  設雙心四邊形  $H_1 H_2 H_3 H_4$  外接圓  $C_1$  與內切圓  $C'_1$  圓心距  $x$ ，半徑分別為

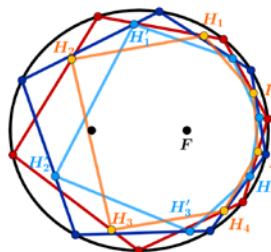
$$R_1, r, \text{ 雙心四邊形有關係式 } \frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R_1 - x)^2} + \frac{1}{(R_1 + x)^2} \text{ 故 } \sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^2} = \frac{2}{r^2} = 2 \left[ \frac{1}{(R_1 - k)^2} + \frac{1}{(R_1 + k)^2} \right]$$

由 **【Theorem 2】**  $R_1 = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}OF^2}$  故  $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^2} = \left[ \frac{4}{(\sqrt{2R^2 - k^2} - k)^2} + \frac{4}{(\sqrt{2R^2 - k^2} + k)^2} \right]$  恆為定值 ■

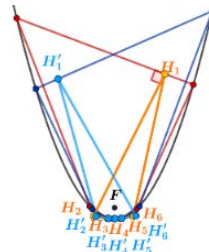
**【Theorem 7】圓錐曲線內垂足  $n$  邊形的邊長倒數偶次方和為不變量**

任意圓錐曲線內，從焦點  $F$  對相鄰等角多邊形  $P_1 P_2 \dots P_n$  作垂足  $n$  邊形  $H_1 H_2 \dots H_n$ ，則垂足  $n$  邊形邊長倒數偶次方和恆為定值，即  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{H_i H_{i+1}^{2m}} =$

$$\left( \frac{1}{\rho i \sin \frac{2\pi}{n}} \right)^{2m} \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=m} \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma! \delta!} \left( \varepsilon^4 \cos^4 \frac{2\pi}{n} - 2\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} + 5 \right)^\alpha \left( -4\varepsilon^3 \cos^4 \frac{\pi}{n} + 4\varepsilon \cos^2 \frac{\pi}{n} + 8 \right)^\beta \left( 4\varepsilon^2 \cos^4 \frac{\pi}{n} + 4\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 4 \right)^\gamma \right. \\ \left. \left( -8\varepsilon \cos^2 \frac{\pi}{n} - 8 \right)^\delta \frac{n}{2^{\beta+2\gamma+3\delta-1}} C_{\left[ \frac{\beta+2\gamma+3\delta}{2} \right]}^{\beta+2\gamma+3\delta} \frac{(-1)^{\beta+2\gamma+3\delta} + 1}{4} \right\} \text{ 恆為定值, } \forall m, n \in \square, \text{ 其中 } m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$



$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{H_i H_{i+1}^2} = 0.0085391430736$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{H'_i H'_{i+1}^2} = 0.0085391430736$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{H_i H_{i+1}^4} = 0.0000175142630$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{H'_i H'_{i+1}^4} = 0.0000175142630$
$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{H_i H_{i+1}^6} = 0.0000000419101$	$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{H'_i H'_{i+1}^6} = 0.0000000419240$



$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{H_i H_{i+1}^2} = 0.0814425701$	$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{H'_i H'_{i+1}^2} = 0.0814425701$
$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{H_i H_{i+1}^4} = 0.002239445616$	$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{H'_i H'_{i+1}^4} = 0.002239445616$
$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{H_i H_{i+1}^6} = 0.00006936969423$	$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{H'_i H'_{i+1}^6} = 0.00006936184535$

Proof 令  $F$  對  $\overline{P_k P_{k+1}}$  的垂足為  $H_k$ ， $\psi = \phi + \frac{2k\pi}{n}$

$$\begin{aligned}
H_k \rightarrow h_k &= \frac{\rho}{2} \cdot \frac{4i \cos \frac{\pi}{n}}{-2i\varepsilon \cos \frac{\pi}{n} - 2 \sin \left( \phi + (2k-1) \frac{\pi}{n} \right) + 2i \cos \left( \phi + (2k-1) \frac{\pi}{n} \right)} = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{4i \cos \frac{\pi}{n}}{-2i\varepsilon \cos \frac{\pi}{n} - 2 \sin \left( \psi - \frac{\pi}{n} \right) + 2i \cos \left( \psi - \frac{\pi}{n} \right)} \\
\therefore H_{k+1} \rightarrow h_{k+1} &= \frac{\rho}{2} \cdot \frac{4i \cos \frac{\pi}{n}}{-2i\varepsilon \cos \frac{\pi}{n} - 2 \sin \left( \phi + (2k+1) \frac{\pi}{n} \right) + 2i \cos \left( \phi + (2k+1) \frac{\pi}{n} \right)} = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{4i \cos \frac{\pi}{n}}{-2i\varepsilon \cos \frac{\pi}{n} - 2 \sin \left( \psi + \frac{\pi}{n} \right) + 2i \cos \left( \psi + \frac{\pi}{n} \right)} \\
h_{k+1} - h_k &= \rho i \cos \frac{\pi}{n} \cdot \left[ \frac{1}{-i\varepsilon \cos \frac{\pi}{n} - \sin \left( \psi + \frac{\pi}{n} \right) + i \cos \left( \psi + \frac{\pi}{n} \right)} - \frac{1}{-i\varepsilon \cos \frac{\pi}{n} - \sin \left( \psi - \frac{\pi}{n} \right) + i \cos \left( \psi - \frac{\pi}{n} \right)} \right] \\
&= \rho i \sin \frac{2\pi}{n} \frac{\cos \psi + i \sin \psi}{\cos^2 \frac{\pi}{n} \varepsilon (2 \cos \psi + 2i \sin \psi - \varepsilon) - (\cos 2\psi + i \sin 2\psi)} \\
\Rightarrow \frac{1}{|h_{k+1} - h_k|} &= \left| \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n} \varepsilon (2 \cos \psi + 2i \sin \psi - \varepsilon) - (\cos 2\psi + i \sin 2\psi)}{\rho i \sin \frac{2\pi}{n} (\cos \psi + i \sin \psi)} \right| \Rightarrow \left( \frac{1}{H_{k+1} H_k} \right)^{2m} = \left| \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n} \varepsilon (2 \cos \psi + 2i \sin \psi - \varepsilon) - (\cos 2\psi + i \sin 2\psi)}{\rho i \sin \frac{2\pi}{n} (\cos \psi + i \sin \psi)} \right|^{2m} \\
&= \left( \frac{1}{\rho i \sin \frac{2\pi}{n}} \right)^{2m} \left[ \left( 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \varepsilon \cos \psi - \cos^2 \frac{\pi}{n} \varepsilon^2 - \cos 2\psi \right)^2 + (2 \sin \psi + \sin 2\psi)^2 \right]^m \\
&= \left( \frac{1}{\rho i \sin \frac{2\pi}{n}} \right)^{2m} \left[ \left( \varepsilon^4 \cos^4 \frac{\pi}{n} - 2\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} + 5 \right) + \cos \psi \left( -4\varepsilon^3 \cos^4 \frac{\pi}{n} + 4\varepsilon \cos^2 \frac{\pi}{n} + 8 \right) + \cos^2 \psi \left( 4\varepsilon^2 \cos^4 \frac{\pi}{n} + 4\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 4 \right) + \cos^2 \psi \left( -8\varepsilon \cos^2 \frac{\pi}{n} - 8 \right) \right]^m
\end{aligned}$$

由多項式定理， $\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{H_{k+1} H_k} \right)^{2m} =$

$$\left( \frac{1}{\rho i \sin \frac{2\pi}{n}} \right)^{2m} \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=m} \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma! \delta!} \left( \varepsilon^4 \cos^4 \frac{2\pi}{n} - 2\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} + 5 \right)^\alpha \left( -4\varepsilon^3 \cos^4 \frac{\pi}{n} + 4\varepsilon \cos^2 \frac{\pi}{n} + 8 \right)^\beta \left( 4\varepsilon^2 \cos^4 \frac{\pi}{n} + 4\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 4 \right)^\gamma \left( -8\varepsilon \cos^2 \frac{\pi}{n} - 8 \right)^\delta \cos^{\beta+2\gamma+3\delta} \psi \right]$$

設  $A = \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma! \delta!} \left( \varepsilon^4 \cos^4 \frac{2\pi}{n} - 2\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} + 5 \right)^\alpha \left( -4\varepsilon^3 \cos^4 \frac{\pi}{n} + 4\varepsilon \cos^2 \frac{\pi}{n} + 8 \right)^\beta \left( 4\varepsilon^2 \cos^4 \frac{\pi}{n} + 4\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 4 \right)^\gamma \left( -8\varepsilon \cos^2 \frac{\pi}{n} - 8 \right)^\delta$  恆為定值

$$\text{其中 } \cos^{\beta+2\gamma+3\delta} \psi = \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=m} A \left[ \frac{1}{2^{\beta+2\gamma+3\delta-1}} \sum_{k=1}^n \left( C_{\lfloor \frac{\beta+2\gamma+3\delta}{2} \rfloor}^{\beta+2\gamma+3\delta} \frac{(-1)^{\beta+2\gamma+3\delta} + 1}{4} + \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{\beta+2\gamma+3\delta-1}{2} \rfloor} C_s^{\beta+2\gamma+3\delta} \cos(\beta+2\gamma+3\delta-2s)\psi \right) \right] \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=m} A \left[ \frac{n}{2^{\beta+2\gamma+3\delta-1}} C_{\lfloor \frac{\beta+2\gamma+3\delta}{2} \rfloor}^{\beta+2\gamma+3\delta} \frac{(-1)^{\beta+2\gamma+3\delta} + 1}{4} \right] \right\}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{H_{k+1} H_k} \right)^{2m} = \left( \frac{1}{\rho i \sin \frac{2\pi}{n}} \right)^{2m} \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=m} \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma! \delta!} \left( \varepsilon^4 \cos^4 \frac{2\pi}{n} - 2\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} + 5 \right)^\alpha \left( -4\varepsilon^3 \cos^4 \frac{\pi}{n} + 4\varepsilon \cos^2 \frac{\pi}{n} + 8 \right)^\beta \left( 4\varepsilon^2 \cos^4 \frac{\pi}{n} + 4\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 4 \right)^\gamma \left( -8\varepsilon \cos^2 \frac{\pi}{n} - 8 \right)^\delta \frac{n}{2^{\beta+2\gamma+3\delta-1}} C_{\lfloor \frac{\beta+2\gamma+3\delta}{2} \rfloor}^{\beta+2\gamma+3\delta} \frac{(-1)^{\beta+2\gamma+3\delta} + 1}{4} \right\}$$

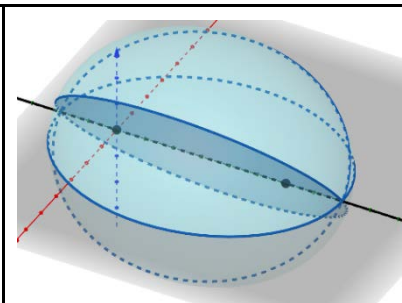
恆為定值■

## 伍、討論

以下考慮空間中焦點在  $x$  軸上特殊圓錐曲面

$$\Omega = \left\{ \Omega_E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 (a > b), \Omega_H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1, \Omega_p : 4cx - y^2 - z^2 = 0 \right\}$$

，並利用正多面體製造空間中的相鄰等角射線來推廣 **Theorem4** 與 **Theorem5**。

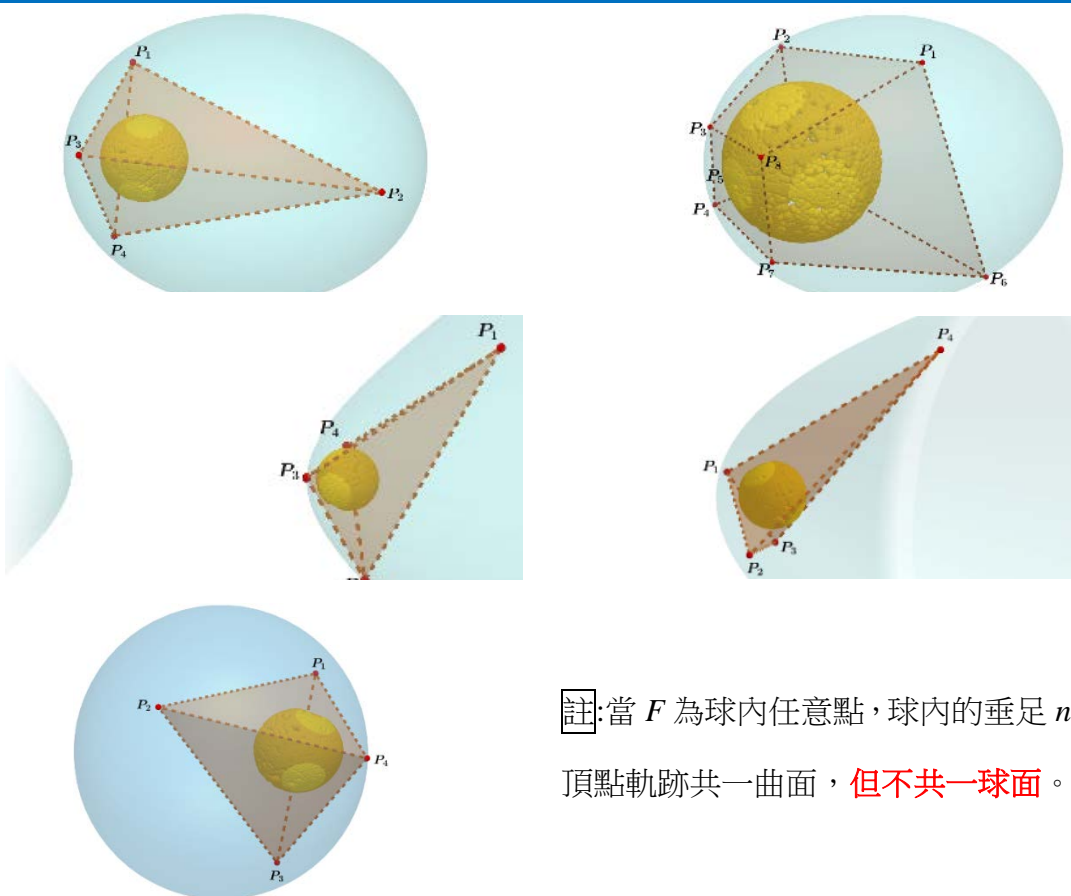


(2)相鄰等角多面體：給定  $F$  為  $\Omega$  內任一點與以  $F$  為重心之正多面體  $\Pi$ ， $F$  對  $\Pi$  的各個頂點連線與  $\Omega$  產生的交點所形成之頂點集所決定之唯一凸多面體定義為相鄰等角多面體。

(3)垂足  $n$  面體：以  $F$  對相鄰等角  $n$  面體的  $n$  個面作垂足，將這  $n$  個垂足連線所決定之唯一凸  $n$  面體定義為垂足  $n$  面體。

### 1. 三維空間中垂足多面體的頂點軌跡共一球面， $n = 4, 6, 8, 12, 20$

給定圓錐曲面  $\Omega$ ，對於焦點  $F$  所作的任意垂足  $n$  面體的頂點軌跡共一**球面**。



**註**:當  $F$  為球內任意點，球內的垂足  $n$  面體的頂點軌跡共一曲面，**但不共一球面**。

### 2. 三維空間中垂足多面體的垂線段的倒數偶次方和存在不變量， $n = 4, 6, 8, 12, 20$

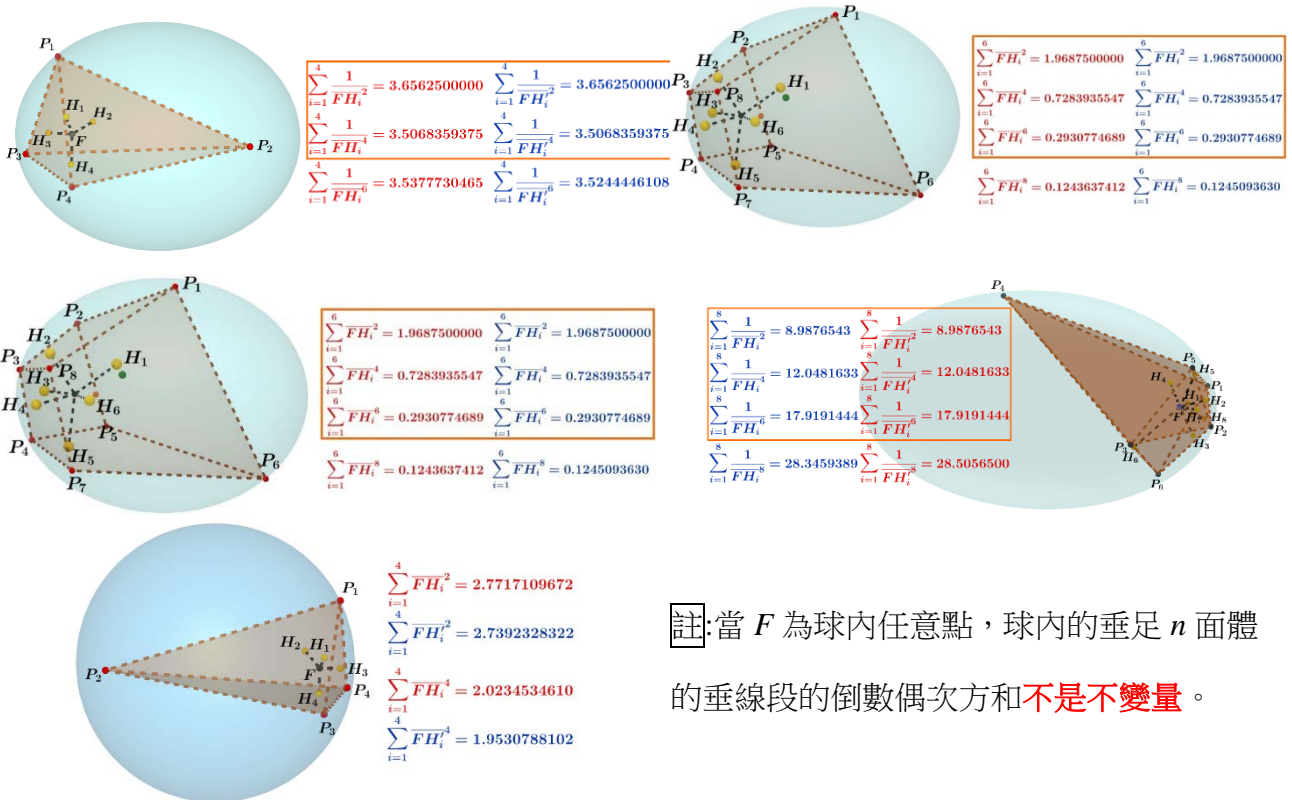
當  $F$  為焦點，圓錐曲面  $\Omega$  內的垂足  $n$  面體的垂線段的倒數偶次方和存在不變量。

即  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{FH_i^{2m}}$  恆為定值，次方數  $2m$  的限制與「正多面體頂點最大共面數  $n$ 」有關， $n < m$ 。

說明：正四面體(最大共面數=3)→垂足四面體不變量之次方  $2m = 2, 4$

正六面體(最大共面數=4)→垂足八面體不變量之次方  $2m = 2, 4, 6$

正八面體(最大共面數=4)→垂足六面體不變量之次方  $2m = 2, 4, 6$



註：當  $F$  為球內任意點，球內的垂足  $n$  面體的垂線段的倒數偶次方和不是不變量。

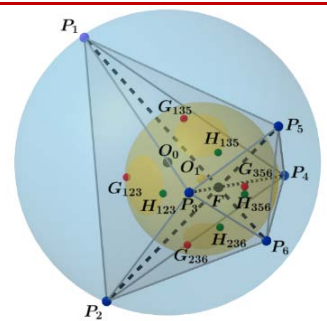
**【Theorem 8】三維空間中的廣義婆羅摩笈多定理**

給定一球  $S$ ，固定其內任意一點  $F$ ， $\overline{P_1P_6}$ 、 $\overline{P_2P_5}$ 、 $\overline{P_3P_4}$  兩兩互相垂直且三線共點於  $F$ ，且  $P_i \in S$ ， $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 。若八面體  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$  的 8 個表面  $\Delta P_iP_jP_k$  之垂心、重心分別為  $H_{ijk}$ 、 $G_{ijk}$ 。

(1)對於任意的八面體  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ ， $H_{ijk}$ 、 $G_{ijk}$  會共同一個球  $S_1$ ，且

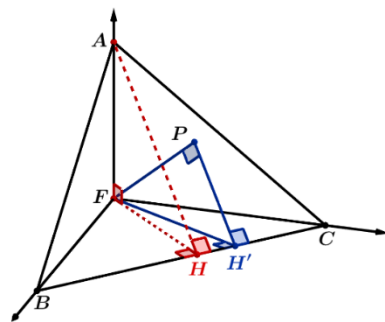
滿足  $\overline{OO_1} : \overline{O_1F} = 2:1$ ，其中球  $S$ 、 $S_1$  的球心分別為  $O$ 、 $O_1$ 。

(2)  $\Delta P_iP_jP_k$  的重心  $G_{ijk}$  與  $F$  的連線必過對面  $\Delta P_{7-i}P_{7-j}P_{7-k}$  的垂心  $H_{7-i,7-j,7-k}$ 。



**Proof Claim 1**  $\triangle ABC$  的垂心為  $F$  於平面  $ABC$  之投影點

在四面體  $ABCF$  中， $\overline{AF}$  垂直平面  $FBC$  於  $F$ ， $\overline{AH}$  垂直  $\overline{BC}$  於  $H$ ，則由三垂線逆定理， $\overline{FH} \perp \overline{BC}$ ； $\overline{FP}$  垂直平面  $ABC$  於  $P$ ， $\overline{PH}$  垂直  $\overline{BC}$  於  $H'$ ，則由三垂線定理， $\overline{FH'} \perp \overline{BC}$ ， $\therefore H = H'$ ， $P$  在  $\overline{AH}$  上其餘同理，因此  $P$  即為  $\triangle ABC$  的垂心。



**Claim 2** 三維空間中的婆羅摩笈多定理： $H$ 、 $F$ 、 $G$  共線

令  $F$  為直角坐標原點，

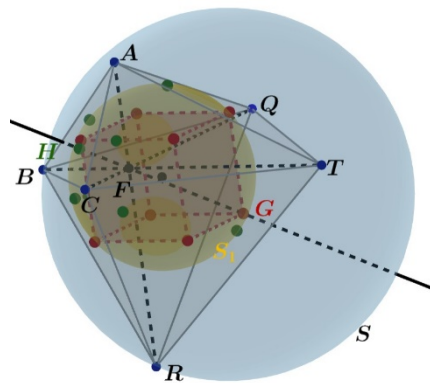
$A = (a, 0, 0)$ 、 $B = (0, b, 0)$ 、 $C = (0, 0, c)$ ， $H$  為  $\triangle ABC$  的垂心

$Q = (q, 0, 0)$ 、 $R = (0, r, 0)$ 、 $T = (0, 0, t)$ ， $G$  為  $\triangle QRT$  的重心

因為  $F$  在  $E_{ABC}$  上的投影點  $H = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \left( \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right)$

則可知  $\overrightarrow{FH} \parallel \left( \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right)$ ， $\overrightarrow{FG} \parallel (q, r, t)$ ，

$H$ 、 $F$ 、 $G$  共線  $\Leftrightarrow \left( \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right) \parallel (q, r, t) \Leftrightarrow aq = br = ct$ ，由  $F$  的圓幕得知必為成立 ■



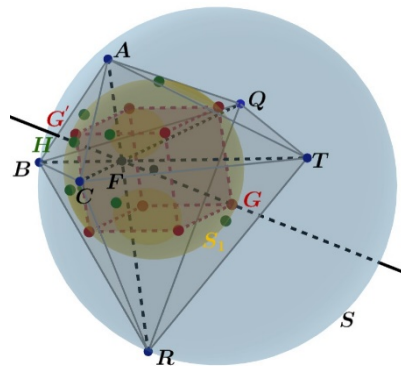
**Claim 3** 固定八面體  $ABCQRT$  之重心、垂心共球面  $S_1$

因為八個面的重心可形成一個長方體，可知重心必共球面。

以下欲證垂心亦在此球面上：

由 Claim 2 可知  $F$  對  $E_{ABC}$  的垂足即為對應面之重心對  $E_{ABC}$  的垂足，因此  $\angle GHG' = 90^\circ$ ， $G$ 、 $G'$  為對應面之重心。

可知  $H$  必定在  $G_i$  所形成的球面上，其餘同理，得證。



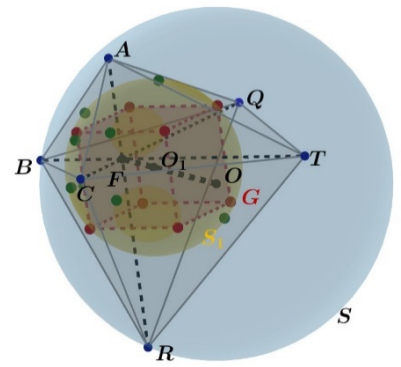
**Claim 4** 任意八面體  $ABCQRT$  之重心、垂心共同一球面  $S_1$ ，

其球心  $O_1 \ni \overrightarrow{OO_1} : \overrightarrow{O_1F} = 2:1$ 。

取  $\overrightarrow{OO_1} : \overrightarrow{O_1F} = 2:1$  可得  $\overrightarrow{GO_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GO} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GF}$

$\Rightarrow \overline{O_1G}^2 = \left| \overrightarrow{GO_1} \right|^2 = \left| \frac{1}{3}\overrightarrow{GO} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GF} \right|^2 = \frac{1}{9}\overline{GO}^2 + \frac{4}{9}\overline{GF}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GF}$

$= \frac{1}{9}\overline{GO}^2 + \frac{4}{9}\overline{GF}^2 + \frac{2}{9}\overline{GO}^2 + \frac{2}{9}\overline{GF}^2 - \frac{2}{9}\overline{OF}^2 = \frac{1}{3}\overline{GO}^2 + \frac{2}{3}\overline{GF}^2 - \frac{2}{9}\overline{OF}^2$



$$\text{故 } \boxed{\overline{O_1G^2} = \frac{1}{3}\overline{GO^2} + \frac{2}{3}\overline{GF^2} - \frac{2}{9}\overline{OF^2} \dots(1)}, \quad \overline{FG^2} = \left| \overrightarrow{FG} \right|^2 = \left| \frac{1}{3}(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}) \right|^2 = \frac{1}{9}(\overline{FA^2} + \overline{FB^2} + \overline{FC^2}) \dots(2)$$

$$\begin{aligned} \overline{OG^2} &= \left| \overrightarrow{OG} \right|^2 = \left| \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FG} \right|^2 = \left| \overrightarrow{OF} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}) \right|^2 \\ &= \overline{OF^2} + \frac{1}{9}(\overline{FA^2} + \overline{FB^2} + \overline{FC^2}) - \frac{1}{3}(3\overline{FO^2} + \overline{FA^2} + \overline{FB^2} + \overline{FC^2} - \overline{OA^2} - \overline{OB^2} - \overline{OC^2}) \\ &= -\frac{2}{9}(\overline{FA^2} + \overline{FB^2} + \overline{FC^2}) + R^2 \dots(3) \end{aligned}$$

將(2)、(3)代入(1)得  $\overline{O_1G^2} = \frac{1}{3}R^2 - \frac{2}{9}\overline{OF^2}$  為常數，且球面  $S_1$  的半徑  $R_1 = \sqrt{\frac{1}{3}R^2 - \frac{2}{9}\overline{OF^2}}$  ■

### 3. $F$ 對圓 $C$ 、 $C_1$ 之反演點為同一點

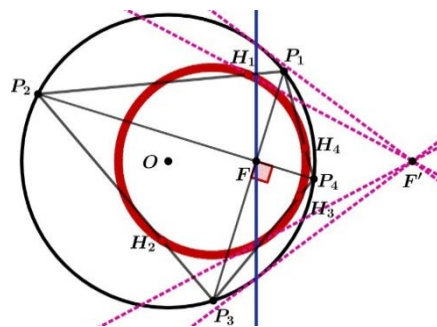
給定一圓  $C$  及圓內任一定點  $F$ ， $C_1$  為  $F$  的相鄰等角四邊形之垂足四邊形外接圓，則  $F$  對圓  $C$ 、 $C_1$  之反演點為同一點  $F'$ 。

*Proof* 設  $F$  對  $C$ 、 $C_1$  之反演點分別為  $F_1$ 、 $F_2$ ，欲證  $F_1$ 、 $F_2$  為同一點。

1° 連  $\overline{FF_1}$ 、 $\overline{FF_2}$ ， $O$ 、 $M$ 、 $F$ 、 $F_1$ 、 $F_2$  必共線。

2° 根據反演的定義，可得 
$$\begin{cases} \overline{OF} \times \overline{OF_1} = R_0^2 \dots(1) \\ \overline{MF} \times \overline{MF_2} = R_1^2 \dots(2) \end{cases},$$

根據圖形可將(2)式拆解為  $\frac{1}{2}\overline{OF} \times \left( \frac{1}{2}\overline{OF} + \overline{FF_2} \right) = R_1^2 \dots(3)$



由【Theorem2】 $\overline{OM^2} = \frac{1}{2}R_0^2 - R_1^2 \Rightarrow R_0^2 = 2 \left[ \left( \frac{1}{2}\overline{OF} \right)^2 + R_1^2 \right] \Rightarrow R_1^2 = \frac{2R_0^2 - \overline{OF^2}}{4}$  代入(3)式

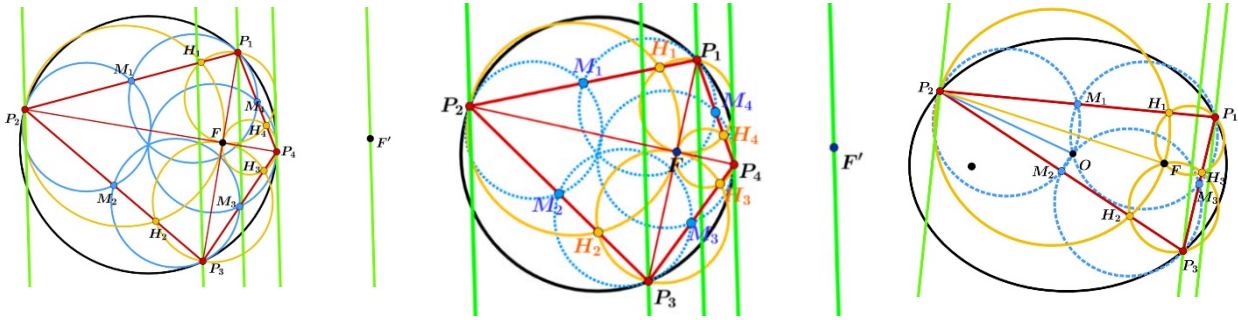
化簡可得  $R_0^2 = \overline{OF}(\overline{OF} + \overline{FF_2}) \Rightarrow R_0^2 = \overline{OF} \times \overline{OF_2}$  再由(1)可得  $\overline{OF} \times \overline{OF_1} = R_0^2 = \overline{OF} \times \overline{OF_2}$

$\therefore O$ 、 $F_1$ 、 $F_2$  共線  $\therefore F_1$ 、 $F_2$  必為同一點 ■

### 4. 中點多邊形與垂足多邊形之關聯

給定圓  $C$  內任意定點  $F$  的相鄰等角多邊形  $P_1P_2 \dots P_n$ ，其中點多邊形、垂足多邊形分別為  $M_1M_2 \dots M_n$ 、 $H_1H_2 \dots H_n$ ，定義  $\mathcal{M}_i$ 、 $\mathcal{H}_i$  為  $\Delta P_iM_iM_{i-1}$ 、 $\Delta P_iH_iH_{i-1}$  的外接圓， $\forall 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$  ( $M_0 = M_n$ ， $H_0 = H_n$ )，則  $\mathcal{M}_i$ 、 $\mathcal{H}_i$  之根軸及  $F$  對圓  $C$  之極線互相平行。

若  $F$  點改為在非圓的圓錐曲線內，則僅  $n = 3$  時成立。



## 陸、結論

本研究由婆羅摩笈多定理發想，從「圓」內中點四邊形延伸至垂足，甚至考慮拋物線以及雙曲線內的中點與垂足  $n$  邊形，除了研究中點、垂足多邊形之頂點軌跡，後來竟發現和龐色列定理中的調和多邊形一樣有不變量性質[4]，差別是，龐色列定理是取切線，我們是考慮中點與垂線，能夠使用的幾何性質非常少，且不變量的證明比參考文獻[2]更困難。特別是， $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ，圓錐曲線內對於焦點  $F$  的垂足  $n$  邊形頂點都會共一圓。最後，當  $F$  為圓錐曲線

焦點時，垂足  $n$  邊形  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{FH_i} = 2m$ ， $m < n$  與  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{H_i H_{i+1}} = 2r$  恆為定值， $r \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ 。

### 一、中點、分點、垂足 $n$ 邊形頂點軌跡方程式

<b>Theorem 1</b>	圓內中點 $n$ 邊形之第一層頂點軌跡共一封閉曲線，其方程式為 $2x^2 + 2y^2 - 2kx + k^2 - R_0^2 - \cos \frac{2\pi}{n} \sqrt{(R_0^2 + k^2)^2 - 4kx(R_0^2 + k^2)} + \frac{4k^2(x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - R_0^2y^2)}{x^2 + y^2} = 0$
<b>Corollary 1</b>	橢圓內中點 $n$ 邊形之第一層頂點軌跡共一封閉曲線，方程式為 $p + q - 2kx + k^2 - \cos \frac{2\pi}{n} \sqrt{(p - 2kx + k^2)^2 + q^2 + k^2(4y^2 - 2q)} - 2k \left( 2b^2x - \frac{2b^2px}{a^2} \right) + b^2(4x^2 - 2p) - 2\frac{b^2p^2}{a^2} = 0$
<b>Corollary 2</b>	圓內分點 $n$ 邊形之第一層頂點軌跡共一封閉曲線，方程式為 $\frac{(m+1)^2(x^2 + y^2) - R^2(m^2 + 1)}{2m} + ks + k^2 - \cos \frac{2\pi}{n} \sqrt{(R^2 + k^2)^2 - 2k(R^2 + k^2)s + 4k^2t} = 0$

<b>Theorem3</b>	圓內垂足 $n$ 邊形頂點軌跡方程式為 $2x^2 + 2y^2 - 2kx + k^2 - R^2 - \cos \frac{2\pi}{n} \sqrt{(R^2 + k^2)^2 - 4k(R^2 + k^2)} \left( \frac{kx^2 - k^2x + 1}{y^2 + (x-k)^2} \right) + 4k^2 \left( \frac{x^2(x-k)^2 + 2xy^2(x-k) + y^4 - R^2y^2}{y^2 + (x-k)^2} \right)$
-----------------	---

## 二、中點四邊形、垂足 $n$ 邊形頂點軌跡共圓

<b>Theorem 2</b>	圓內中點四邊形、垂足四邊形頂點軌跡為同一圓
<b>Corollary 3</b>	(1) 圓內第每一層垂足四邊形頂點軌跡共一圓 (2) 圓內第 $\frac{n}{2}m$ 層垂足 $n$ 邊形頂點軌跡共一圓，且第 $\frac{n}{2}$ 層軌跡圓圓心為 $F$
<b>Theorem4</b>	圓錐曲線內， $F$ 在焦點上之垂足 $n$ 邊形第一層頂點軌跡共一圓，方程式為 $\left( x + \frac{\rho e \cos^2 \frac{\pi}{n}}{e^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 1} \right)^2 + y^2 = \frac{\rho^2 e^2 \cos^4 \frac{\pi}{n} - \rho e^3 \cos^4 \frac{\pi}{n} + \rho e \cos^2 \frac{\pi}{n}}{\left( e^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 1 \right)^2}$
<b>Corollary 4~5</b>	$F$ 點位於圓錐曲線上、外之垂足四邊形頂點跡為同一圓

## 三、垂足 $n$ 邊形中的不變量

<b>Theorem 5</b>	當 $F$ 為焦點時，圓錐曲線內垂足 $n$ 邊形之垂線段之倒數 $2m$ 次方和為定值， $\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{FH_k} \right)^{2m} = \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=m \\ 0 \leq \alpha, \beta, \gamma}} \left[ \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma!} (2 + e^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} - e^2 \cos^2 \frac{2\pi}{n})^\alpha (-4e \cos \frac{\pi}{n})^\beta (4e \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n})^\gamma \frac{n}{2^{\beta+\gamma-2}} C_{\lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor}^{\beta} C_{\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor}^{\gamma} \frac{(-1)^{\beta+1}}{4} \cdot \frac{(-1)^{\gamma+1}}{4} \right]$ $\forall m \in \square$ ，其中 $m < n$ 。
<b>Theorem 6</b>	圓內垂足四邊形中， $F$ 至垂足之倒數平方和為定值，即 $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^2}$ 為定值
<b>Theorem7</b>	當 $F$ 為焦點時，圓錐曲線中，垂足 $n$ 邊形之邊長倒數 $2m$ 次方和為定值， $\sum_{i=1}^n \frac{1}{H_i H_{i+1}^{2m}} = \left( \frac{1}{\rho i \sin \frac{2\pi}{n}} \right)^{2m} \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=m} \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma! \delta!} \left( \epsilon^4 \cos^4 \frac{2\pi}{n} - 2\epsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} + 5 \right)^\alpha \left( -4\epsilon^3 \cos^4 \frac{\pi}{n} + 4\epsilon \cos^2 \frac{\pi}{n} + 8 \right)^\beta \left( 4\epsilon^2 \cos^4 \frac{\pi}{n} + 4\epsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 4 \right)^\gamma \right.$ $\left. \left( -8\epsilon \cos^2 \frac{\pi}{n} - 8 \right)^\delta \frac{n}{2^{\beta+2\gamma+3\delta-1}} C_{\lfloor \frac{\beta+2\gamma+3\delta}{2} \rfloor}^{\beta+2\gamma+3\delta} \frac{(-1)^{\beta+2\gamma+3\delta} + 1}{4} \right\}$ 其中 $m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ ， $\forall n$ 為偶數， $m \in \square$ 。

## 四、三維婆羅摩笈多

<b>Theorem 8</b>	給定一球 $S$ ，固定其內任意一點 $F$ ， $\overline{P_1 P_6}, \overline{P_2 P_5}, \overline{P_3 P_4}$ 兩兩互相垂直且三線共點於 $F$ ，且 $P_i \in S$ 。若 $\Delta P_i P_j P_k$ 之垂心、重心分別為 $H_{ijk}$ 、 $G_{ijk}$ ，則 $H_{ijk}$ 、 $G_{ijk}$ 會共
------------------	---



同一個球面且 $G_{ijk}$ 、 $F$ 、 $H_{7-i,7-j,7-k}$ 共線。
--

## 柒、參考文獻資料

1. K. R. S. Sastry(2002) , **Forum Geometricorum Volume 2 Brahmagupta Quadrilaterals** 。  
Retrieved from <https://forumgeom.fau.edu/FG2002volume2/FG200221.pdf>
2. 王凱、江佶龍(2018) , 永恆的旋轉木馬。國立臺灣師範大學附屬高級中學。  
Retrieved  
from <https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=136&a=6822&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=13996>
3. Ronaldo Alves Garcia、Dan Reznik(2021) , **Discovering New Properties and Invariants of Harmonic Polygons** 。 Retrieved from <https://reurl.cc/XL4ojE>

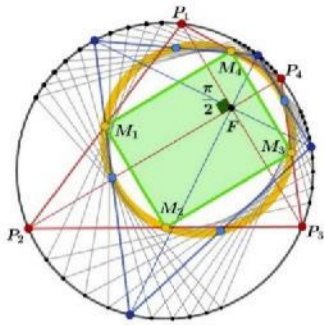
## 【評語】 050413

作者觀察出圓錐曲線內中點、垂足  $n$  邊形的無數頂點軌跡都落在一封閉曲線上，並求得此封閉曲線的方程式。而後證明圓錐曲線內中點、垂足  $n$  邊形頂點軌跡共圓，並獲知圓錐曲線內垂足  $n$  邊形中的不變量。計算繁複但詳實，作圖清晰可讀。作者並著手將結果推廣至三維，用心可嘉。建議作者更加深入思考計算結果的內涵。

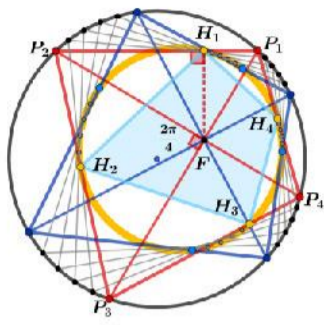
# 作品海報

## 摘要

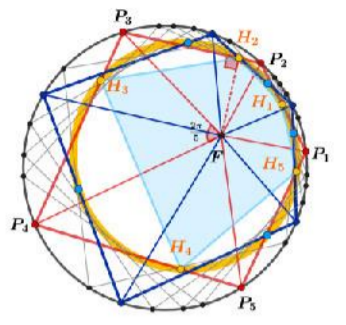
本研究主要討論圓錐曲線內相鄰等角  $n$  邊形的中點、垂足  $n$  邊形頂點軌跡與新的不變量。圓錐曲線  $\Gamma$  內任取一定點  $F$ ，依序相鄰等角的  $n$  條射線  $\overline{FP_1}$ 、 $\overline{FP_2}$ 、 $\dots$ 、 $\overline{FP_n}$  分別交  $\Gamma$  於  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $\dots$ 、 $P_n$ ，於  $P_k P_{k+1}$  分別取  $M_k$ 、 $H_k$  滿足  $P_k M_k = M_k P_{k+1}$ 、 $FH_k \perp P_k P_{k+1}$ ，稱  $M_1 M_2 \dots M_n$ 、 $H_1 H_2 \dots H_n$  分別為  $F$  的相鄰等角  $n$  邊形  $P_1 P_2 \dots P_n$  的中點、垂足  $n$  邊形。首先，固定一圓，對於任意定點  $F$ ，我們發現無限多個  $F$  的圓內接相鄰等角  $n$  邊形之中點、垂足  $n$  邊形的頂點分別共一封閉曲線並得出其方程式，這與龐色列定理類似。第二，圓錐曲線的焦點  $F$  之任意相鄰等角的  $n$  邊形的垂足  $n$  邊形  $H_1 H_2 \dots H_n$  的頂點會共一封閉曲線；特別當  $n=4$  時，軌跡為一圓。第三，探討垂足  $n$  邊形的不變量性質： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{FH_k^{2m}}$  與  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{H_i H_{i+1}^{2r}}$  恆為定值。最後，我們將研究推廣到三維空間中。



▲圓內中點四邊形、垂足四邊形頂點軌跡共相同一圓



▲圓內中點五邊形軌跡共一曲線



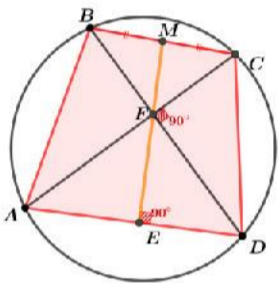
▲圓內垂足五邊形軌跡共一曲線

## 研究動機

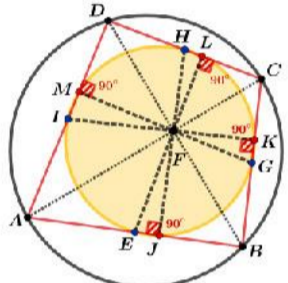
婆羅摩笈多定理提到「若一圓內接四邊形  $ABCD$  之對角線互相垂直，則垂直於四邊形  $ABCD$  一邊且通過對角線交點的直線將平分對邊」。且其應用推廣得八點圓性質「若任意四邊形的對角線垂直相交，由四邊的中點分別向四條對邊作垂線，則這四個垂足與四個中點八點共圓」。

若固定圓內一點  $F$ ，使對角線互相垂直的圓內接四邊形的對角線皆交於  $F$ ，由婆羅摩笈多定理得知這些圓內接四邊形的四邊中點和  $F$  對各邊垂足會共一圓，不禁讓人好奇「這些圓的關係為何？」透過 GGB 測試，驚奇的發現這些圓居然是同一個！而對於中點  $n$  邊形和垂足  $n$  邊形，其頂點軌跡都共一相同的封閉曲線，而在特定的等分下竟然能共一圓錐曲線

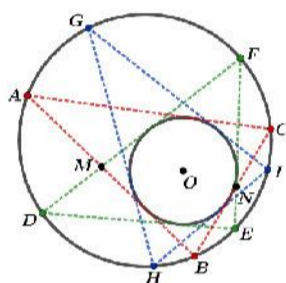
◎圓  $C$  內中點、垂足四邊形頂點軌跡共相同一圓且其半徑  $R_1^2 = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}OF^2 = \frac{1}{2}R^2 - OM^2$ ，其中  $M$  為圓心  $O$  與固定點  $F$  的中點。



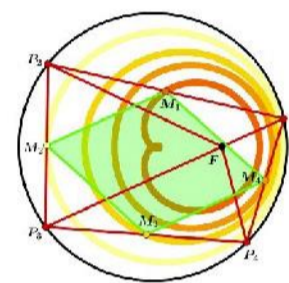
▲婆羅摩笈多定理



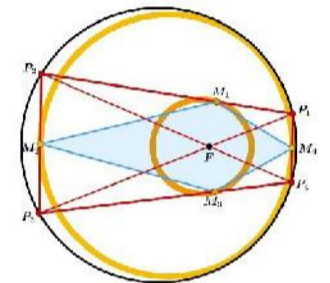
▲八點圓定理



▲彭賽列閉合定理



▲周角不平分-中點



▲周角不平分-垂足



參考文獻	婆羅摩笈多定理-靜態	彭賽列閉合定理-取切線
我們的研究內容	動態，無數個中點及垂足共同一圓	取各邊中點、垂足

## 研究過程與方法

### I. 預備定理

**Definition 1** 將  $F$  點周角平分  $n$  等分交於曲線上，相鄰兩點所連成的多邊形定義為相鄰等角  $n$  邊形

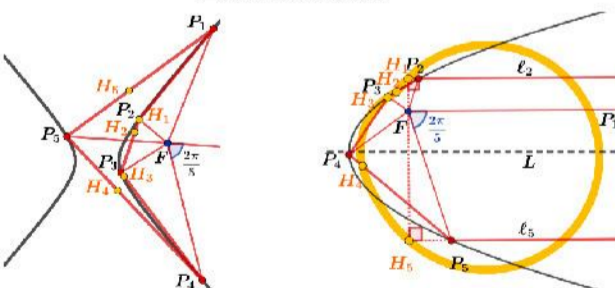
- (1)當雙曲線某條周角平分射線  $\overline{FP_k}$  無法與較近一支雙曲線有交點時，則將  $\overline{FP_k}$  旋轉  $180^\circ$  後取其與較遠一支雙曲線的交點。
- (2)當拋物線某條周角平分射線  $\overline{FP_k}$  平行拋物線對稱軸  $L$ ，則此時的  $H_{k-1}$ 、 $H_k$  定義為  $F$  對  $\ell_{k+1}$ 、 $\ell_{k-1}$  的垂足。

**Definition 2** 給定任意  $n$  邊形  $P_1 P_2 \dots P_n$  與一點  $F$ ：

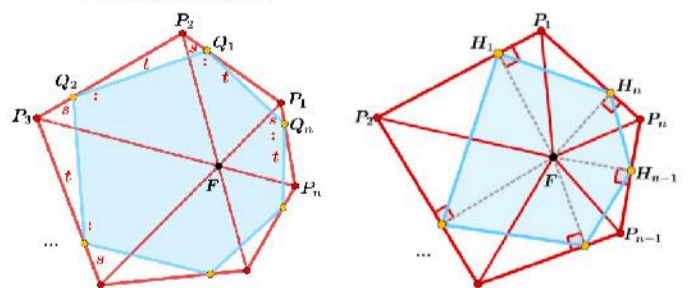
- (1)取其各邊中點、分點連接形成一個  $n$  邊形  $M_1 M_2 \dots M_n$ 、 $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ ，定義此  $n$  邊形為「中點  $n$  邊形」、「分點  $n$  邊形」。
- (2)以  $F$  對各邊做垂足，連接  $n$  個垂足  $H_i$  形成一  $n$  邊形，定義  $n$  邊形  $H_1 H_2 \dots H_n$  為「垂足  $n$  邊形」。

**註：**以下研究結果均考慮  $F$  的圓錐曲線內接相鄰等角多邊形  $P_1 P_2 \dots P_n$  之中點多邊形  $M_1 M_2 \dots M_n$  及分點多邊形  $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ ，簡稱  $M_1 M_2 \dots M_n$ 、 $Q_1 Q_2 \dots Q_n$  為圓錐曲線內的中點多邊形及分點多邊形。

#### ▲ Definition 1



#### ▲ Definition 2



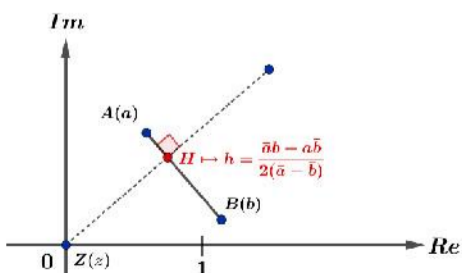
▲ **Lemma 1**  $\cos^n \theta = \frac{1}{2^{n-1}} \left[ C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_j^n \cos(n-2j)\theta \right]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

▲ **Lemma 2**  $\sum_{u=1}^n \cos \left[ k \left( \phi + \frac{2u\pi}{n} \right) \right] = 0, n > |k|, \forall n \geq 3, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$

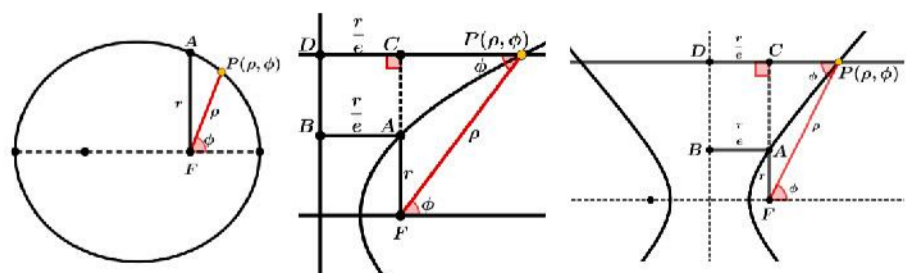
▲ **Lemma 3** 複數平面中的垂足座標：在複數平面中給定三複數  $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $Z(z)$ ，當  $Z$  在原點時垂足  $H(h)$  為  $\frac{\bar{a}b - a\bar{b}}{2(\bar{a} - \bar{b})}$

#### 說明

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1) \\ \cos^3 \theta &= \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos \theta) \\ \cos^4 \theta &= \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3) \\ \cos^5 \theta &= \frac{1}{16}(\cos 5\theta + 10\cos 3\theta + 5\cos \theta) \end{aligned}$$



▲ **Lemma 3** 複數平面中垂足座標



▲ **Lemma 4** 圓錐曲線的焦半徑  $\overline{FP_k} = \frac{r}{1 - e \cos \phi}$

II. 主定理

◎ 給定一圓  $C: x^2 + y^2 = R^2$ ; 橢圓  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 在其內任取一定點  $F(k, 0)$ , 考慮任意依序相鄰角度為  $\frac{2\pi}{n}$  的  $n$  條射線  $\overline{FP_1}, \overline{FP_2}, \dots, \overline{FP_n}, \forall n \in \mathbb{N}$

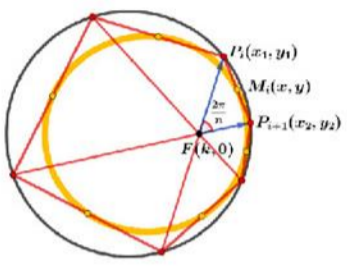
**Theorem 1** 圓  $C$  內中點  $n$  邊形頂點軌跡方程式  $2x^2 + 2y^2 - 2kx + k^2 - R^2 - \cos \frac{2\pi}{n} \sqrt{(R^2 + k^2)^2 - 4k(R^2 + k^2)} + \frac{4k^2(x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - R^2y^2)}{x^2 + y^2} = 0$

**Corollary 1** 圓  $C$  內分點  $n$  邊形頂點軌跡方程式  $\frac{(m+1)^2(x^2 + y^2) - R^2(m^2 + 1)}{2m} + kx + k^2 - \cos \frac{2\pi}{n} \sqrt{(R^2 + k^2)^2 - 2k(R^2 + k^2)s + 4k^2t} = 0$

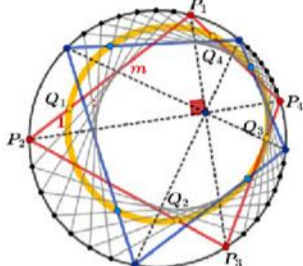
$s \equiv s(x, y) = \frac{4x[(m+1)(x^2 + y^2) + (1-m)R^2] - 4y\sqrt{p}}{8(x^2 + y^2)} + \frac{4x[(m+1)(x^2 + y^2) + (m-1)R^2] + 4y\sqrt{p}}{8m(x^2 + y^2)} \quad t \equiv t(x, y) = \left( \frac{4x[(m+1)(x^2 + y^2) + (1-m)R^2] - 4y\sqrt{p}}{8(x^2 + y^2)} \right) \left( \frac{4x[(m+1)(x^2 + y^2) + (m-1)R^2] + 4y\sqrt{p}}{8m(x^2 + y^2)} \right)$

**Corollary 2** 橢圓  $\Gamma$  內中點  $n$  邊形頂點軌跡方程式  $p + q - 2kx + k^2 - \cos \frac{2\pi}{n} \sqrt{(p - 2kx + k^2)^2 + q^2 + k^2(4y^2 - 2q)} - 2k \left( 2b^2x - \frac{2b^2px}{a^2} \right) + b^2(4x^2 - 2p) - 2\frac{b^2p^2}{a^2} = 0$

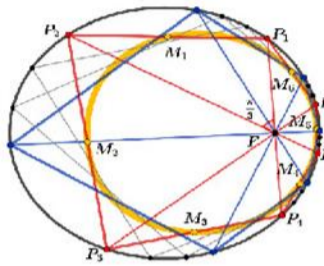
$p \equiv p(x, y) = \frac{b^4x^4 + a^4y^4 + 2a^2b^2x^2y^2 - a^4b^2y^2}{a^2b^2y^2 + b^4x^2}, \quad q \equiv q(x, y) = \frac{b^4x^4 + a^4y^4 + 2a^2b^2x^2y^2 - a^2b^4x^2}{a^2b^2x^2 + a^4y^2}$



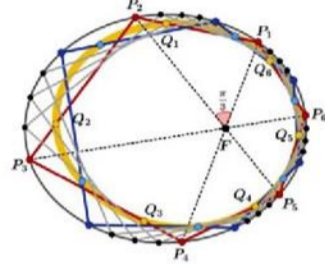
▲ 圓內中點多邊形



▲ 圓內分點多邊形



▲ 橢圓內中點多邊形



▲ 橢圓內分點多邊形

Proof

韋達定理

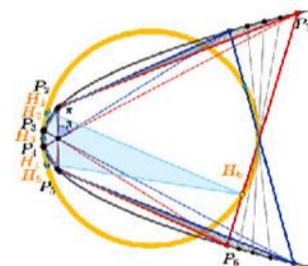
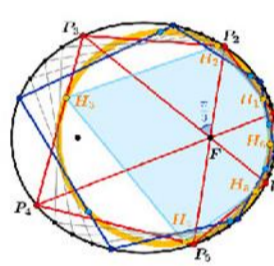
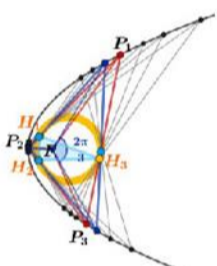
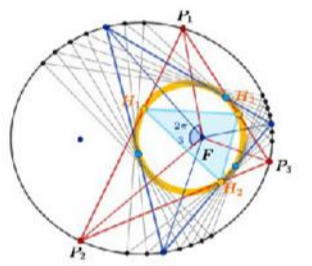
向量內積

**Theorem 3** 圓  $C$  內垂足  $n$  邊形頂點軌跡方程式  $2x^2 + 2y^2 - 2kx + k^2 - R^2 - \cos \frac{2\pi}{n} \sqrt{(R^2 + k^2)^2 - 4k(R^2 + k^2)} \left( \frac{kx^2 - k^2x + 1}{y^2 + (x-k)^2} \right) + 4k^2 \left( \frac{x^2(x-k)^2 + 2xy^2(x-k) + y^4 - R^2y^2}{y^2 + (x-k)^2} \right) = 0$

**Theorem 4** 當  $F$  為焦點，圓錐曲線內第一層垂足  $n$  邊形頂點軌跡共同一圓  $\left( x + \frac{\rho \varepsilon \cos^2 \frac{\pi}{n}}{\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 1} \right)^2 + y^2 = \frac{\rho^2 \varepsilon^2 \cos^4 \frac{\pi}{n} - \rho \varepsilon^3 \cos^4 \frac{\pi}{n} + \rho \varepsilon \cos^2 \frac{\pi}{n}}{(\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 1)^2}, n \geq 3$

**Theorem 8** 圓內第  $\frac{n}{2}$  層垂足  $n$  邊形頂點軌跡共同一圓,  $\forall m \in \mathbb{N}$ , 其中圓內第  $\frac{n}{2}$  層垂足  $n$  邊形頂點軌跡圓圓心為固定點  $F, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Corollary 3** 任意圓錐曲線內之垂足  $n$  邊形，第  $n-1$  層的垂足  $n$  邊形，每個內角皆為  $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ .



Proof

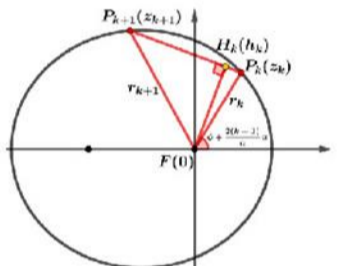
Lemma 3 複數垂足

Lemma 4 焦半徑

和差化積

歐拉公式

$h_k = \frac{1}{2} \left( \frac{P_k P_{k+a} - P_k P_{k-a}}{P_k - P_{k+a}} \right), \quad P_k \mapsto z_k = r_k e^{i(\theta_k - \frac{2\pi}{n})}$



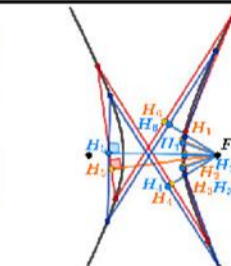
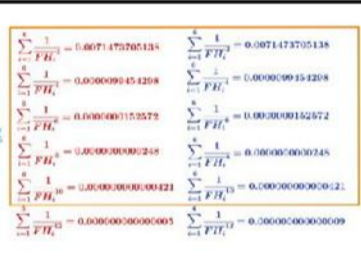
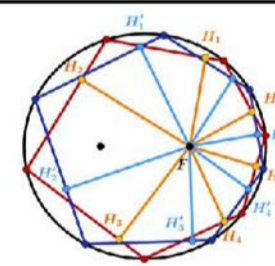
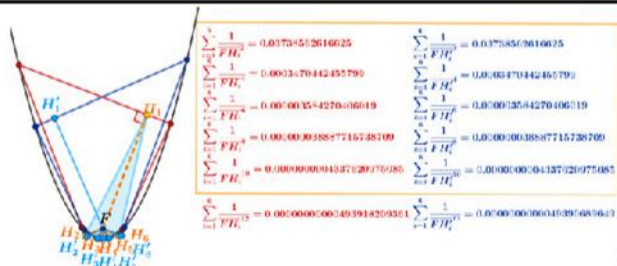
四點共圓

圓周角

$F, H_1^2, H_2^2, H_2^{2-1}$  四點共圓

**Theorem 5** 任意圓錐曲線內  $P_1 P_2 \dots P_n$ , 從焦點  $F$  對相鄰等角多邊形  $P_1 P_2 \dots P_n$  作各邊的垂線段之倒數偶次方和恆為定值。  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

即  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{FH_i^{2m}} = \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma+m \\ 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq m}} \frac{m!}{\alpha! \beta! \gamma!} (2 + e^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} - e^2 \cos^2 \frac{2\pi}{n})^\alpha (-4e \cos \frac{\pi}{n})^\beta (4e \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n})^\gamma \frac{n}{2^{\beta+\gamma-2}} \binom{\beta}{2} \binom{\gamma}{2} \frac{(-1)^\beta + 1}{4} \frac{(-1)^\gamma + 1}{4} \in constant, \forall m \in \mathbb{N},$  其中  $m < n$ .



Proof

$$\frac{FP_k \cdot FP_{k+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}}{\sqrt{FP_k^2 + FP_{k+1}^2 - 2FP_k \cdot FP_{k+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{n}}}$$

多項式定理、Lemma 1

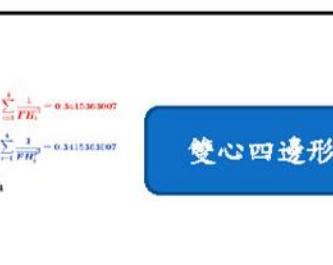
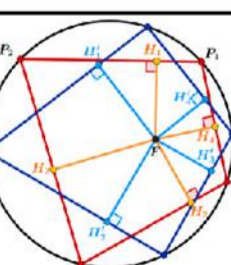
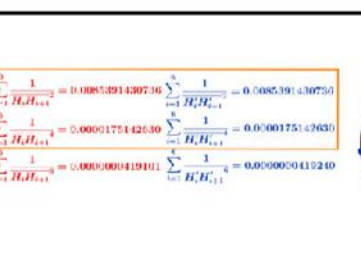
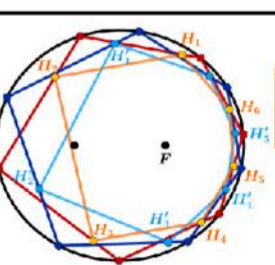
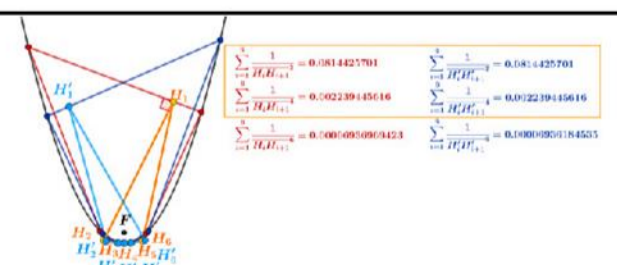
Lemma 2

$$\sum_{k=1}^n \left[ C_{\lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor}^{\beta} \frac{(-1)^{\beta+1} + 1}{4} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\beta-1}{2} \rfloor} C_j^{\beta} \cos(\beta - 2j)\psi \right] \left[ C_{\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor}^{\gamma} \frac{(-1)^{\gamma+1} + 1}{4} + \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{\gamma-1}{2} \rfloor} C_s^{\gamma} \cos(\gamma - 2s)\psi \right], \psi = \phi + \frac{2k-1}{n} \pi$$

$$\sum_{k=1}^n C_s^{\gamma} \cos(\gamma - 2s)\psi, \sum_{k=1}^n C_j^{\beta} \cos(\beta - 2j)\psi, \sum_{k=1}^n \cos(\beta - 2j + \gamma - 2s)\psi, \sum_{k=1}^n \cos(\beta - 2j - \gamma + 2s)\psi = 0$$

**Theorem 6** 從圓內任意點  $F$  對相鄰等角多邊形  $P_1 P_2 P_3 P_4$  作四邊的垂線段之倒數平方和恆為定值，即  $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^2} = \frac{4}{(\sqrt{2R^2 - k^2} - k)^2} + \frac{4}{(\sqrt{2R^2 - k^2} + k)^2} \in constant$

**Theorem 7** 當  $F$  為焦點，圓錐曲線內垂足  $n$  邊形的邊長倒數偶次方和為不變量，即  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{H_i H_{i+1}^{2m}}$  恆為定值，  $\forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ , 其中  $m \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ .



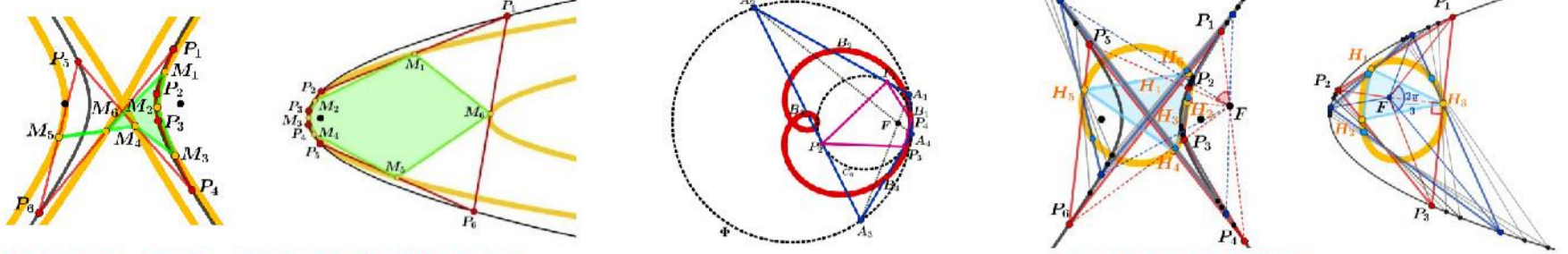
雙心四邊形

▲ 圓錐曲線內垂足  $n$  邊形的邊長倒數偶次方和為不變量

▲ 圓內垂足四邊形垂線段倒數平方和為不變量

III. 性質與討論

1. 拋物線、雙曲線之中點多邊形頂點軌跡不共一曲線 2. 雙心四邊形的中點軌跡為蚘線 3. 拋物線、雙曲線之垂足多邊形軌跡共一曲線

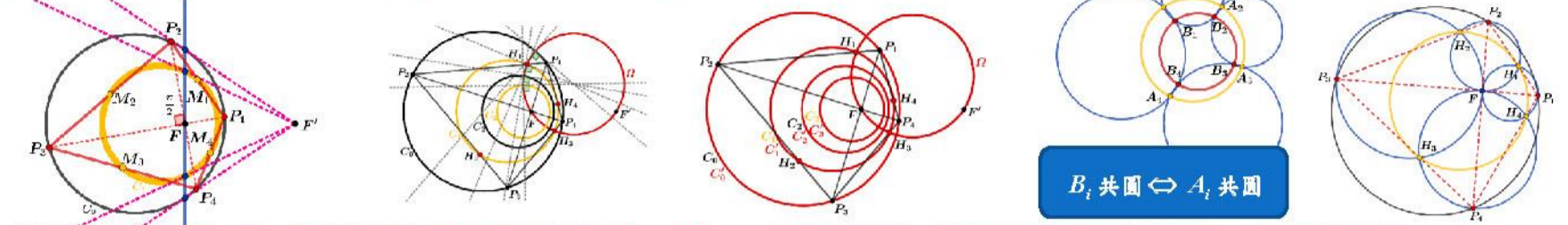


3. 圓內中點、垂足四邊形與反演變換之關聯

- (1)  $F$  對  $C_0, C_1$  之反演點同為  $F'$  (2)  $C_k$  與  $\Omega$  皆正交 (3)  $C_k$  對  $\Omega$  的反演圖形仍為  $C_k$

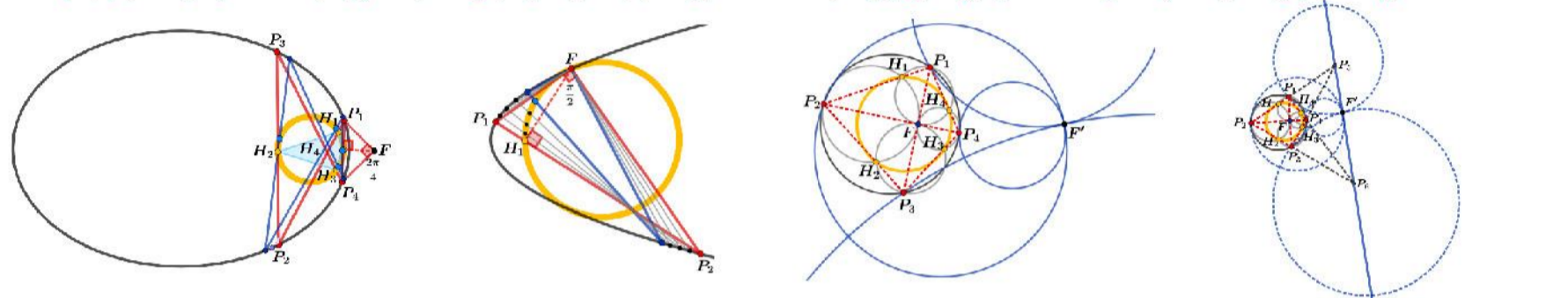
<應用>密克六圓定理

Proof 由 Thm.3



4.  $F$  在圓錐曲線外、上，僅有垂足四邊形頂點軌跡共一圓

5. 利用密克四圓定理及反演詮釋垂足四邊形之性質



研究結果

**Theorem 1** 圓內、橢圓內  $P_1P_2 \dots P_n$  之中點多邊形頂點軌跡共同一封閉曲線。

**Theorem 3、4** 圓錐曲線內  $P_1P_2 \dots P_n$  之垂足多邊形頂點軌跡共同一封閉曲線，其中當  $F$  為焦點時，此軌跡為一圓。

**Theorem 5** 圓錐曲線內  $P_1P_2 \dots P_n$  之垂足多邊形之垂線段長之倒數  $2m$  次方和在  $m < n$  時為不變量。

**Theorem 6** 圓內垂足四邊形垂足線段倒數平方和為不變量。

**Theorem 7** 圓錐曲線內垂足  $n$  邊形的相鄰垂足連線段倒數偶次方和在  $m \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  時為不變量， $n \geq 3, \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ 。

未來展望

1. 三維空間中垂足多邊形頂點軌跡共一球面，垂線段倒數偶次和亦為不變量

考慮特殊圓錐曲面  $\Omega_E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 (a > b), \Omega_H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1, \Omega_p: 4cx - y^2 - z^2 = 0$ ，並利用正多面體製造空間中的相鄰等角射線來推廣 **Thm.4** 與 **Thm.5**，得到「當  $F$  為焦點，圓錐曲面內的垂足  $N$  面體的頂點軌跡共一球面」並且「其垂線段的倒數偶次方和亦為不變量」， $N = 4, 6, 8, 12, 20$ 。

▲ 垂足  $N$  面體頂點軌跡共一球面

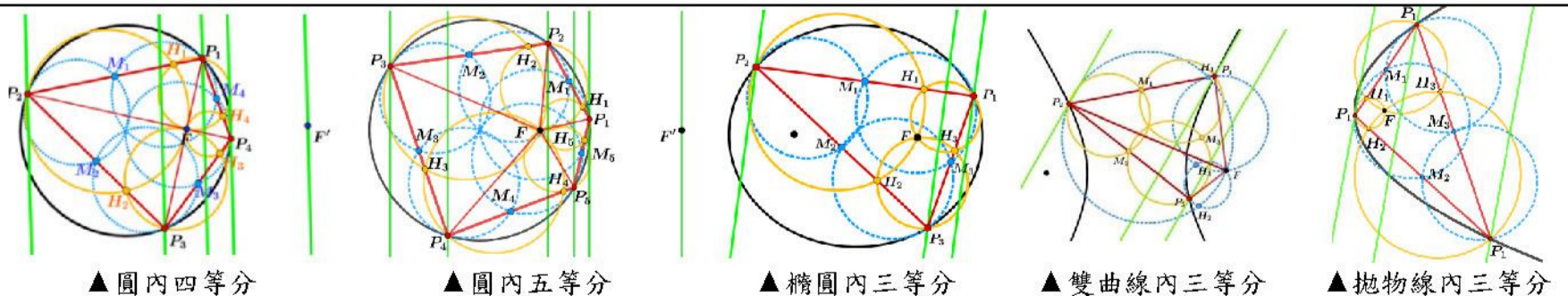


▲ 垂足  $N$  面體垂線段倒數偶次方和為定值

$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^2} = 3.6562500000$ $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^4} = 3.6562500000$ $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^6} = 3.5068359375$ $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^8} = 3.5068359375$ $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^{10}} = 3.5377730465$ $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^{12}} = 3.5244446108$	$\sum_{i=1}^6 FH_i^2 = 1.9687500090$ $\sum_{i=1}^6 FH_i^4 = 1.9687500090$ $\sum_{i=1}^6 FH_i^6 = 0.7283935547$ $\sum_{i=1}^6 FH_i^8 = 0.7283935547$ $\sum_{i=1}^6 FH_i^{10} = 0.2930774689$ $\sum_{i=1}^6 FH_i^{12} = 0.2930774689$ $\sum_{i=1}^6 FH_i^{14} = 0.1243637412$ $\sum_{i=1}^6 FH_i^{16} = 0.1245093630$
$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^2} = 8.3456790123$ $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^4} = 8.3456790123$ $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^6} = 20.3389727176$ $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^8} = 20.3389727176$ $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^{10}} = 53.1334934924$ $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^{12}} = 52.3794497665$	$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^2} = 2.5000000000$ $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^4} = 2.5000000000$ $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^6} = 1.7500000000$ $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^8} = 1.7500000000$ $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^{10}} = 1.3160376185$ $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{FH_i^{12}} = 1.2958993042$

2. 圓錐曲線內垂足多邊形與中點多邊形之關聯

給定圓  $C$  內任意點  $F$  的相鄰等角多邊形  $P_1P_2 \dots P_n$ ，其中點多邊形、垂足多邊形分別為  $M_1M_2 \dots M_n, H_1H_2 \dots H_n$ ， $\mathcal{M}_i, \mathcal{H}_i$  為  $\Delta P_i M_i M_{i-1}, \Delta P_i H_i H_{i-1}$  的外接圓， $\forall 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N} (M_0 = M_n, H_0 = H_n)$ ，則  $\mathcal{M}_i, \mathcal{H}_i$  之根軸及  $F$  對圓  $C$  之極線互相平行。



▲ 圓內四等分

▲ 圓內五等分

▲ 橢圓內三等分

▲ 雙曲線內三等分

▲ 拋物線內三等分

參考資料

1. 王凱、江佑龍(2018)，永恆的旋轉木馬。國立臺灣師範大學附屬高級中學。
2. K. R. S. Sastry(2002)，Forum Geometricorum Volume 2 Brahmagupta Quadrilaterals
3. Ronaldo Alves Garcia、Dan Reznik(2021)，Discovering New Properties and Invariants of Harmonic Polygons
4. S. Ramassamy (2020)，Miquel Dynamics for Circle Patterns。