# 中華民國第63屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

---

高中組　數學科

**第一名**

050412

**比例和的圓舞曲：當內切錐線遇上截線比例和**

學校名稱：臺中市立臺中第一高級中等學校



| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 高二 詹淯翔<br>高二 范思緯 | 黃家瑋 |



關鍵詞：線段比、包絡線、圓錐曲線

# 得獎感言

## 在圓錐曲線的世界尋找一線生機

一開始，我們對研究的方向及主題都很迷茫，在數個不同的主題中，我們選擇了最擅長的幾何，儘管如此，過程中依然遇到了許多瓶頸，在無數個日夜的努力後，終於得到不錯的結果。

在研究一開始，我們由於對內容的不熟悉，只能使用最樸實無華的方法，也就是解析幾何，在炸開算式後，驗證我們的猜想是正確的，給予了我們很大的信心，也在過程中獲得許多快樂，得益於之前數學競賽的經驗，我們漸入佳境，開始有了許多純幾何的證明思路，也成功的證明了最終定理。

在比賽科展前，我們知道到了全國大家的研究肯定是更加特別和厲害，於是我們不敢鬆懈，練習了無數次的報告，對於自己的研究也有了更大更廣的理解。到了比賽當天，我們對自己和自己的作品充滿了信心，在面對教授的提問時，大部分的問題我們都有預料到，而回答不出的問題在第二天也流暢的回答了出來，儘管如此，因為我們做的東西過於古典，從未覺得我們能拿到第一，甚至是能上台領獎。

在公布成績的典禮上，由於覺得不會有好名次，所以沒抱太大的期望，但在公布數學組名次時，也不禁心跳加速、緊張起來。聽到第三名不是我們，第二名也不是我們，第一名竟然是我們，開心地跳了起來，衝上台領獎，這是對我們研究最大的肯定。

花了一年投注在研究上，終於獲得了成果，我想之後我們也會繼續研究，帶來更多的成果。

地區賽拿到第一名時與指導老師的合影，感謝黃家瑋老師的用心指導

全國賽前向教授請教相關知識。謝謝卓士堯教授對我們的指導！

# 摘要

本文以一個跟線段比例和有關的幾何問題出發，探討該問題的推廣以及其背後的數學原理。我們接續原命題中正方形的結論，推廣到了正多邊形乃至等腰三角形。在推廣不等邊三角形時又發現問題與「交比和為定值」有關。將相同概念套用到後續的研究，最終將結論推廣到任意圓錐曲線外切多邊形。

# 壹、 研究動機

在專題課時，老師給了我們一個幾何問題如下:

已知圓 $O$ 為正方形 $ABCD$ 的內切圓(如 **圖 1** 所示)，設 $P,Q$ 兩點分別為圓 $O$ 與 $\overline{AD}$ 、$\overline{AB}$ 的切點，若 $T$ 為 $PQ$ 弧上異於 $P,Q$ 的任意點，且過 $T$ 點作圓弧 $PQ$ 的切線，交 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{AD}$ 於 $I,J,K$ 三點，試證：

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{AJ}}{\overline{JC}}+\frac{\overline{AK}}{\overline{KD}}=1。$$

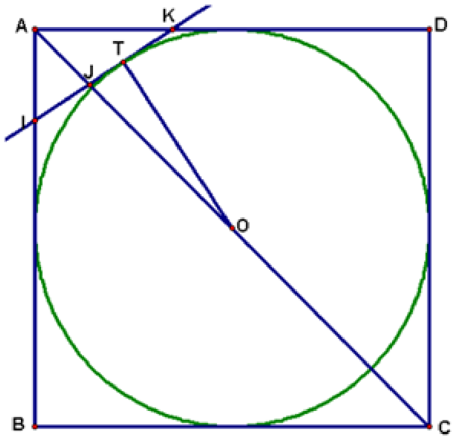



**圖 1**

這個問題有著非常漂亮的結論，那就是切線截兩邊及對角線所形成的三個比例和剛好等於 1。於是我們便開始好奇在三角形甚至是任意多邊形時是否同樣會有漂亮的結論，以及背後有著什麼樣的數學原理導致了這樣的結果。

# 貳、 研究目的

由比例和為定值出發，探討切線交在邊及對角線上的點與線段比例和的關係。

一、正多邊形時截線比例和等於 1 的推廣。

二、等腰三角形時截線比例和為定值的推廣。

三、三角形時比例和為定值與內切圓錐曲線的關係。

四、圓錐曲線外切多邊形與截線比例和的關係。

# 參、 研究設備及材料

紙、筆、電腦、GeoGebra 計算機套件、WolframAlpha 線上計算機。

# 肆、 研究過程與方法

## 一、問題討論及初步推廣

**問題:**

已知圓 $O$ 為正方形 $ABCD$ 的內切圓(如 **圖 2** 所示)，設 $P,Q$ 兩點分別為圓 $O$ 與 $\overline{AD}$ 、$\overline{AB}$ 的切點，若 $T$ 為 $PQ$ 弧上異於 $P,Q$ 的任意點，且過 $T$ 點作圓弧 $PQ$ 的切線，交 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{AD}$ 於 $I,J,K$ 三點，試證：

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{AJ}}{\overline{JC}}+\frac{\overline{AK}}{\overline{KD}}=1。$$

**【證明】**

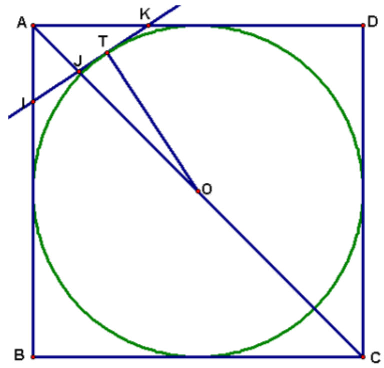



圖 2

方法一、利用三角函數證明。

令 $\angle AOT=\theta$，有

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{IB}}=\frac{1-\tan\left(\frac{45^\circ+\theta}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{45^\circ+\theta}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1-\sin(45^\circ+\theta)}{1+\sin(45^\circ+\theta)}},$$

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KD}}=\frac{1-\tan\left(\frac{45^\circ-\theta}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{45^\circ-\theta}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1-\sin(45^\circ-\theta)}{1+\sin(45^\circ-\theta)}},$$

$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{JC}}=\frac{\sqrt{2}-\sec\theta}{\sqrt{2}+\sec\theta}=\frac{\sqrt{2}\cos\theta-1}{\sqrt{2}\cos\theta+1},$$

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{AK}}{\overline{KD}}=\frac{\sqrt{\left(1-\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)}}{\sqrt{\left(1+\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin\theta\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\theta\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}\cos\theta+1},$$

$$\therefore\frac{\overline{AI}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{AK}}{\overline{KD}}+\frac{\overline{AJ}}{\overline{JC}}=\frac{2+\sqrt{2}\cos\theta-1}{\sqrt{2}\cos\theta+1}=1，故得證。$$

方法二、利用直角坐標解析證明。

令 $O(0,0),A(-1,1),B(-1,-1),C(1,-1),D(1,1)$ ,

$\overleftrightarrow{AB}: x=-1, \overleftrightarrow{AD}: y=1, \overleftrightarrow{AC}: y=-x, T(\cos\theta, \sin\theta)$ ，

$\overleftrightarrow{IK}: \cos\theta\, x+\sin\theta\, y=1$

$$\Rightarrow I\left(-1, \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right), J\left(\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}, \frac{-1}{\cos\theta-\sin\theta}\right), K\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}, 1\right),$$

$$\Rightarrow \overline{IB}=\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}, \overline{JC}=\sqrt{2}\left(\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}\right), \overline{KD}=\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\cos\theta},$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{JC}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{KD}}=\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\frac{2(\sin\theta-\cos\theta)}{1+\sin\theta-\cos\theta}+\frac{2\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-1}$$

$$=\frac{2\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta-1)+2\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta+1)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}$$

$$+\frac{2(\sin\theta-\cos\theta)}{1+\sin\theta-\cos\theta}$$

$$=\frac{2+4\sin\theta\cos\theta+2\cos\theta-2\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta}+\frac{2(\sin\theta-\cos\theta)}{1+\sin\theta-\cos\theta}$$

$$=2+\frac{1+\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{2(\sin\theta-\cos\theta)}{1+\sin\theta-\cos\theta}$$

$$=2+\frac{1-(\sin\theta-\cos\theta)^2+2(\sin\theta-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$=2+\frac{2\sin\theta\cos\theta+2(\sin\theta-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$=4.$$

$\therefore \frac{\overline{AI}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{AK}}{\overline{KD}}+\frac{\overline{AJ}}{\overline{JC}}+3=4 \Rightarrow \frac{\overline{AI}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{AK}}{\overline{KD}}+\frac{\overline{AJ}}{\overline{JC}}=1$，故得證。 ■

此問題可以做進一步的推廣。一開始我們先將問題中的正方形推廣到了正 $2^k+1$ 邊形，也就是正 $2^k+1$ 邊形時同樣有線段比值和恆為 1。

**推廣問題一:**

對於任意正 $n$ 邊形 $A_1A_2\dots A_n$，其中 $n=2^k+1$，$k\in$ 正整數，圓 $O$ 為其內切圓，$P,Q$ 分別為內切圓在 $A_1A_2, A_1A_n$ 上的切點，若 $T$ 為 $PQ$ 弧上異於 $P,Q$ 的任意點，過 $T$ 點作圓弧 $PQ$ 的切線，交 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_1A_3}$、…、$\overline{A_1A_n}$ 於 $B_2, B_3, \dots, B_n$ 共 $n-1=2^k$ 個點，則

$$\frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{B_2A_2}}+\frac{\overline{A_1B_3}}{\overline{B_3A_3}}+\cdots+\frac{\overline{A_1B_n}}{\overline{B_nA_n}}=1.$$

**【證明】**

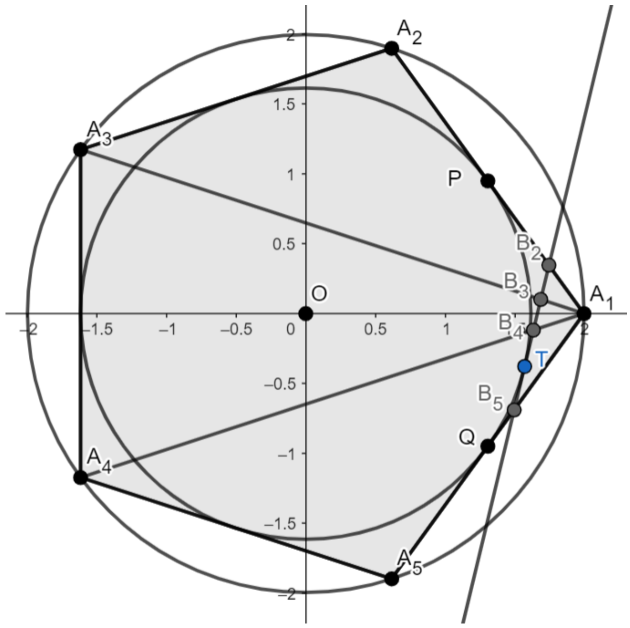



**圖 3**

令 $O(0,0), A_1(1,0), A_{k+1}(\cos\frac{2k\pi}{n}, \sin\frac{2k\pi}{n})$，內切圓半徑為 $\cos\frac{\pi}{n}$，取其上一點 $T(\cos\theta\cos\frac{\pi}{n}, \sin\theta\cos\frac{\pi}{n})$ 作切線 $\cos\theta\, x + \sin\theta\, y = \cos\frac{\pi}{n}$。

另外 $n-1$ 條截線方程式為

$$y - 0 = \frac{\sin\dfrac{2k\pi}{n} - 0}{\cos\dfrac{2k\pi}{n} - 1}(x-1), (k = 1,2,\cdots,n-1)\,.$$

切線與截線的交點 $y$ 座標為

$$y = \frac{\sin\dfrac{2k\pi}{n}(\cos\dfrac{\pi}{n} - \cos\theta)}{\cos(\dfrac{2k\pi}{n} - \theta) - \cos\theta}, (k = 1,2,\cdots,n-1)\,.$$

設 $\frac{\overline{A_1B_{k+1}}}{B_{k+1}A_{k+1}} = a_k \Longrightarrow y_{B_{k+1}} = \frac{a_k \sin\frac{2k\pi}{n} + 1\times 0}{a_k + 1}$

$$\Longrightarrow a_k = \frac{\cos\dfrac{\pi}{n} - \cos\theta}{\cos(\dfrac{2k\pi}{n} - \theta) - \cos\dfrac{\pi}{n}}$$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$

$$= \frac{\cos\dfrac{\pi}{n} - \cos\theta}{\cos\left(\dfrac{2\pi}{n} - \theta\right) - \cos\dfrac{\pi}{n}} + \frac{\cos\dfrac{\pi}{n} - \cos\theta}{\cos\left(\dfrac{4\pi}{n} - \theta\right) - \cos\dfrac{\pi}{n}} + \cdots + \frac{\cos\dfrac{\pi}{n} - \cos\theta}{\cos\left(\dfrac{(2n-2)\pi}{n} - \theta\right) - \cos\dfrac{\pi}{n}}$$

原式 $= a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}$

$$=\left(\frac{\cos\theta-\cos\frac{\pi}{2^k+1}}{2}\right)\sum_{i=1}^{2^k}\frac{1}{\sin\left(\frac{\frac{2i-1}{2^k+1}\pi-\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{2i+1}{2^k+1}\pi-\theta}{2}\right)}$$

$$=\left(\frac{\cos\theta-\cos\frac{\pi}{2^k+1}}{2}\right)\cdot(2\cos\frac{\pi}{2^k+1})\sum_{i=1}^{2^{k-1}}\frac{1}{\sin\left(\frac{\frac{4i-3}{2^k+1}\pi-\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{4i+1}{2^k+1}\pi-\theta}{2}\right)}$$

$$=\left(\frac{\cos\theta-\cos\frac{\pi}{2^k+1}}{2}\right)\cdot(2\cos\frac{\pi}{2^k+1})(2\cos\frac{2\pi}{2^k+1})\sum_{i=1}^{2^{k-2}}\frac{1}{\sin\left(\frac{\frac{8i-7}{2^k+1}\pi-\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{8i+1}{2^k+1}\pi-\theta}{2}\right)}$$

$$=\cdots=2^k\prod_{i=0}^{k-1}\cos\left(\frac{2^i}{2^{k+1}}\pi\right)=\frac{\sin\left(\frac{2^k\pi}{2^k+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^k+1}\right)}=1. \qquad \blacksquare$$

分析上面推得的 $\sum a_k$ 的結果，我們找到了一個更簡潔的化簡方法，並且證明了對於任意 $n$ 邊形的情況。

**推廣問題二: (正n邊形)**

對於任意正 $n$ 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$，$n>2, n\in\mathbb{N}$，圓 $O$ 為其內切圓，$P,Q$ 分別為內切圓在 $A_1A_2, A_1A_n$ 上的切點，若 $T$ 為 $PQ$ 弧上異於 $P,Q$ 的任意點，過 $T$ 點作圓弧 $PQ$ 的切線，交 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_1A_3}$、…、$\overline{A_1A_n}$ 於 $B_2,B_3,\ldots,B_n$ 共 $n-1$ 個點，則

$$\frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{B_2A_2}}+\frac{\overline{A_1B_3}}{\overline{B_3A_3}}+\cdots+\frac{\overline{A_1B_n}}{\overline{B_nA_n}}=1.$$

**【證明】**

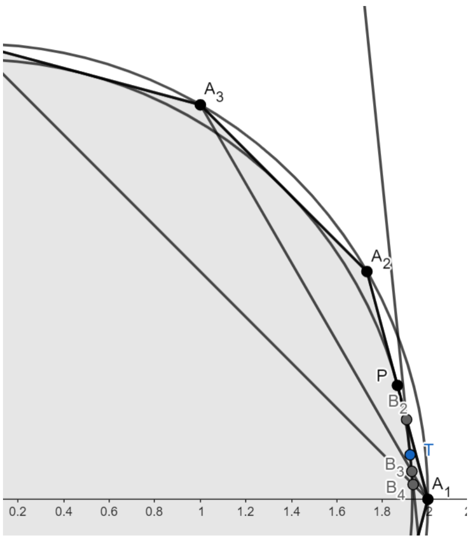



**圖 4**

如同 **推廣問題一** 假設，

$$S=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=\frac{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\theta}{\cos\left(\frac{2\pi}{n}-\theta\right)-\cos\frac{\pi}{n}}+\frac{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\theta}{\cos\left(\frac{4\pi}{n}-\theta\right)-\cos\frac{\pi}{n}}+\cdots+\frac{\cos\frac{\pi}{n}-\cos\theta}{\cos\left(\frac{(2n-2)\pi}{n}-\theta\right)-\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\theta\right)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\cos\left(\frac{2i\pi}{n}-\theta\right)-\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\theta\right)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{-2\sin\left(\frac{(2i+1)\pi-n\theta}{2n}\right)\sin\left(\frac{(2i-1)\pi-n\theta}{2n}\right)}.$$

欲將分數拆成分式並利用分項對消的方式將式子化簡，所以考慮

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{(2i+1)\pi-n\theta}{2n}\right)\sin\left(\frac{(2i-1)\pi-n\theta}{2n}\right)}=\frac{A}{\sin\left(\frac{(2i+1)\pi-n\theta}{2n}\right)}-\frac{B}{\sin\left(\frac{(2i-1)\pi-n\theta}{2n}\right)},$$

由於

$$\cos\left(\frac{(2i+1)\pi-n\theta}{2n}\right)\sin\left(\frac{(2i-1)\pi-n\theta}{2n}\right)-\cos\left(\frac{(2i-1)\pi-n\theta}{2n}\right)\sin\left(\frac{(2i+1)\pi-n\theta}{2n}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

可以得到

$$A=\frac{\cos\left(\frac{(2i+1)\pi-n\theta}{2n}\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)},B=\frac{\cos\left(\frac{(2i-1)\pi-n\theta}{2n}\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)},$$

所以

$$S=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\theta\right)}{2\sin\frac{\pi}{n}}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\cos\left(\frac{(2i+1)\pi-n\theta}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{(2i+1)\pi-n\theta}{2n}\right)}-\frac{\cos\left(\frac{(2i-1)\pi-n\theta}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{(2i-1)\pi-n\theta}{2n}\right)}\right)$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\theta\right)}{2\sin\frac{\pi}{n}}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\cot\left(\frac{(2i+1)\pi-n\theta}{2n}\right)-\cot\left(\frac{(2i-1)\pi-n\theta}{2n}\right)\right)$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\theta\right)}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left(\cot\left(\frac{(2n-1)\pi-n\theta}{2n}\right)-\cot\left(\frac{\pi-n\theta}{2n}\right)\right)$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\theta\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}\left(\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi-n\theta}{2n}\right)\sin\left(\frac{\pi-n\theta}{2n}\right)-\cos\left(\frac{\pi-n\theta}{2n}\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi-n\theta}{2n}\right)}{2\sin\left(\frac{(2n-1)\pi-n\theta}{2n}\right)\sin\left(\frac{\pi-n\theta}{2n}\right)}\right)$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\theta\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}\left(\frac{\sin\left(\frac{(2-2n)\pi}{2n}\right)}{\cos\left(\frac{(2n-2)\pi}{2n}\right)-\cos(\pi-\theta)}\right)$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\theta\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}-\pi\right)}{\cos\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)-\cos(\pi-\theta)}\right)$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\theta\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)-\cos(\theta)}\right)=1.$$

■

我們特別地研究 $n=3$，也就是三角形的情況後，發現在等腰三角形的時候，比例和也會恆為一個定值，進一步的計算後也確定了這個定值。

**推廣問題三: (等腰三角形)**

對於任意等腰三角形 $ABC$，其中 $\overline{AB}=\overline{AC}$，圓 $I$ 為其內切圓，$P,Q$ 分別為內切圓在 $\overline{AB},\overline{AC}$ 上的切點，若 $T$ 為 $PQ$ 弧上異於 $P,Q$ 的任意點，過 $T$ 點作圓弧 $PQ$ 的切線，交 $\overline{AB},\overline{AC}$ 於 $D,E$，則

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}+\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\text{定值}.$$

**【證明】**

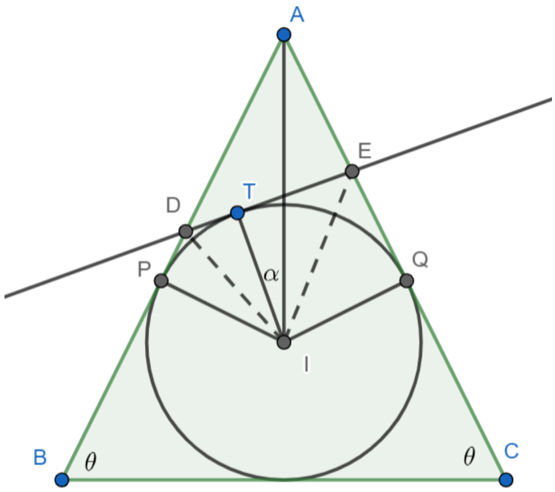



**圖 5**

假設 $\angle B=\angle C=\theta$，內切圓半徑為 $r$，$\angle TIA=\alpha$ 。

令 $\overline{BC}=2$，則 $r=\frac{\frac{1}{\cos\theta}-1}{\tan\theta}=\csc\theta-\cot\theta$。

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}+\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\frac{r\tan\theta-r\tan\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}{1+r\tan\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}+\frac{r\tan\theta-r\tan\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)}{1+r\tan\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(r\tan\theta-r\tan\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)+r^2\tan\theta\tan\frac{\theta+\alpha}{2}-r^2\tan\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)+r\tan\theta-r\tan\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)+r^2\tan\theta\tan\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)-r^2\tan\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\right)}{\left(1+r\tan\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)+r\tan\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)+r^2\tan\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\right)}$$

$$=\frac{\left(2r\tan\theta-r\left(\tan\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)+\tan\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\right)+r^2\tan\theta\left(\tan\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)+\tan\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\right)-2r^2\tan\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\right)}{\left(1+r\tan\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)+r\tan\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)+r^2\tan\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\right)}$$

因為 $\tan(\frac{\theta-\alpha}{2})+\tan(\frac{\theta+\alpha}{2})=\tan\theta\left(1-\tan\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\right)$ (和角公式)，

所以 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}+\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\dfrac{(r\tan\theta+r^2\tan^2\theta)+(r\tan\theta-r^2\tan^2\theta-2r^2)\tan(\frac{\theta-\alpha}{2})\tan(\frac{\theta+\alpha}{2})}{(1+r\tan\theta)+(r^2-r\tan\theta)\tan(\frac{\theta-\alpha}{2})\tan(\frac{\theta+\alpha}{2})}$,

$$\frac{r\tan\theta+r^2\tan^2\theta}{1+r\tan\theta}=r\tan\theta=\sec\theta-1,$$

$$\begin{aligned}\frac{r\tan\theta-r^2\tan^2\theta-2r^2}{r^2-r\tan\theta}&=\frac{\tan\theta-r\tan^2\theta-2r}{r-\tan\theta}=\frac{\tan\theta-r-r(\tan^2\theta+1)}{r-\tan\theta}\\&=-1+\frac{r\sec^2\theta}{\tan\theta-r}=\frac{(\csc\theta-\cot\theta)\sec^2\theta}{\tan\theta-\csc\theta+\cot\theta}-1\\&=\frac{(\csc\theta-\cot\theta)\sec^2\theta}{\frac{\tan^2\theta+1}{\tan\theta}-\csc\theta}-1=\frac{\sec^3\theta-\sec^2\theta}{\sec^2\theta-\sec\theta}-1=\sec\theta-1.\end{aligned}$$

所以 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}+\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\sec\theta-1=$ 定值 . ■

觀察以上證明後我們發現了 $T$ 點不一定要限制在 $PQ$ 弧，若將命題關於線段的描述全部視為有向線段，就能使 $T$ 點為內切圓上任意一個點命題都能成立。這裡先引用一些有向線段比值的定義及性質，方便之後的證明使用。

**【定義 1.1】(線段、直線、有向線段表示)**

定義 $\overline{AB}$ 為 $AB$ 的無向線段、$\overleftrightarrow{AB}$ 為 $AB$ 直線，$AB$ 為 $A$ 到 $B$ 的有向線段。

**【定義 1.2】(有向線段的比值)**

令 $A,B,P$ 為共線的三點，若 $P\in AB$ 線段，則有向線段比值 $\frac{PA}{PB}$ 取負，否則取正。稱此值為 $A,B,P$ 的 **單比 (simple ratio)**，另記作 $(A,B;P)$。

**【性質 1.1】(單比的唯一性)**

令 $A,B,P_1,P_2$ 為共線的四點，則

$$(A,B;P_1)=(A,B;P_2)\Leftrightarrow P_1=P_2.$$

有了有向線段比值定義，我們就能將 **推廣問題三** 寫成如下的形式。

**【定理 1.1】**

等腰三角形 $ABC$ 中 $\overline{AB}=\overline{AC}$，$D,E$ 分別為直線 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ 上的動點滿足

$$\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}=\sec\angle B-1,$$

則，動線 $\overleftrightarrow{DE}$ 的包絡線為 $ABC$ 的內切圓。

**【證明】**

命題等價於

等腰三角形 $ABC$ 中 $\overline{AB}=\overline{AC}$，$D,E$ 分別為直線 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ 上的點，則

$$\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}=\sec\angle B-1 \Leftrightarrow \text{直線 } \overleftrightarrow{DE} \text{ 切於 } ABC \text{ 內切圓。}$$

「⇐」已證明。

證明「⇒」:

選定 $\overleftrightarrow{AB}$ 上的一個 $D$ 點，過 $D$ 作另一條三角形內切圓的切線交 $\overleftrightarrow{AC}$ 於 $E'$ 。

由「⇐」我們可以得到

$$\frac{AD}{DB}+\frac{AE'}{E'C}=\sec\angle B-1=\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{AE'}{E'C}=\frac{AE}{EC},$$

而由單比的唯一性 (**性質 1.1**) 即可證明 $E'=E$ 。故得證。 ■

接著我們嘗試將 **定理 1.1** 推廣至任意三角形，但經過計算後並沒有發現特別的性質。所以我們轉而好奇如果 $\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}$ 是任意一個定值 $k$ 時，動線 $DE$ 是否同樣會有包絡線呢？利用數學軟體 GeoGebra 計算機套件協助繪製包絡線後發現，當 $\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}$ 是任意定值時，動線 $\overleftrightarrow{DE}$ 的包絡線似乎是一個切於三角形三邊的圓錐曲線。

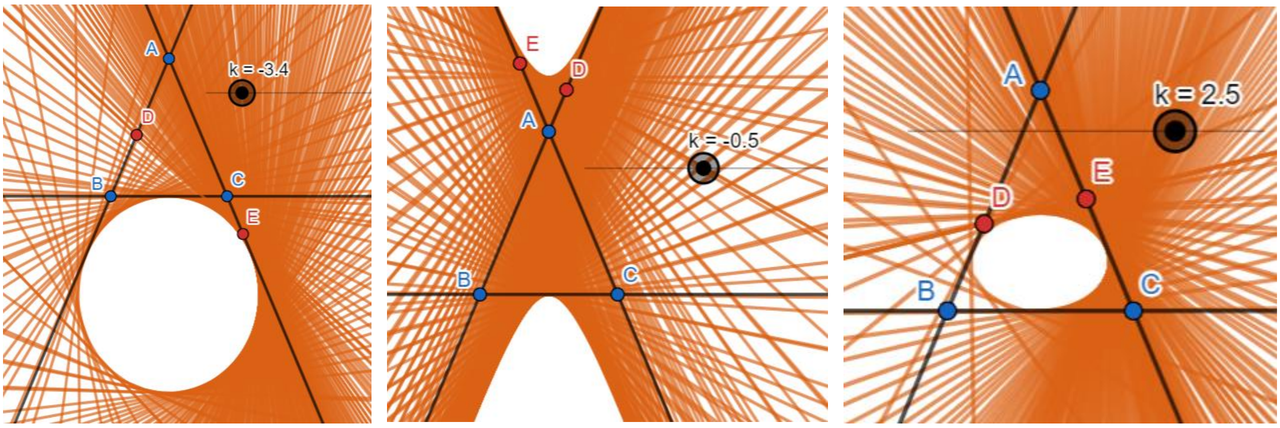



**圖 6**

## 二、預備定理 ( 參見文獻[1] )

為了討論切三角形三邊的圓錐曲線，這裡先引用一些會用到的工具及性質。

下面為方便將以 $\ell_i\cap\ell_j$ 代表直線 $\ell_i$ 及直線 $\ell_j$ 的交點。

**【定義 2.1】**

對於共線(非無窮遠線)的四點 $P_1,P_2,P_3,P_4$，定義**四點**的 **交比 (cross ratio)** 為

$$(P_1,P_2;P_3,P_4)=\frac{(P_1,P_2;P_3)}{(P_1,P_2;P_4)}=\frac{P_3P_1}{P_3P_2}\Big/\frac{P_4P_1}{P_4P_2}.$$

**【定義 2.2】**

對於共點的四線 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$，定義**四線**的交比為

$$(\ell_1,\ell_2;\ell_3,\ell_4)=\frac{\sin\measuredangle(\ell_3,\ell_1)}{\sin\measuredangle(\ell_3,\ell_2)}\Big/\frac{\sin\measuredangle(\ell_4,\ell_1)}{\sin\measuredangle(\ell_4,\ell_2)}.$$

其中，$\measuredangle$ 指有向角，即對定向角度取 π 模。

**【定義 2.3】**

(i) 設相異四點 $P_1, P_2, P_3, P_4$ 及一點 $O$，定義

$$O(P_1, P_2; P_3, P_4) = \left(\overleftrightarrow{OP_1}, \overleftrightarrow{OP_2}; \overleftrightarrow{OP_3}, \overleftrightarrow{OP_4}\right) = \frac{\sin \measuredangle P_3OP_1}{\sin \measuredangle P_3OP_2} \Big/ \frac{\sin \measuredangle P_4OP_1}{\sin \measuredangle P_4OP_2}.$$

(ii) 設相異四線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ 及一線 $L$，定義

$$L(\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) = (L \cap \ell_1, L \cap \ell_2; L \cap \ell_3; L \cap \ell_4).$$

**【性質 2.1】**

設相異四點 $P_1, P_2, P_3, P_4$ 共線(非無窮遠線)，$O$ 為線外一點，則

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = \left(\overleftrightarrow{OP_1}, \overleftrightarrow{OP_2}; \overleftrightarrow{OP_3}, \overleftrightarrow{OP_4}\right).$$

**【性質 2.2】** (交比的唯一性)

(i) 設 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ 為共線的五點，則

$$P_4 = P_5 \Leftrightarrow (P_1, P_2; P_3, P_4) = (P_1, P_2; P_3, P_5).$$

(ii) 設 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5$ 為共點的五線，則

$$\ell_4 = \ell_5 \Leftrightarrow (\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) = (\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_5).$$

由於圓周角性質，若給定一圓上的四點 $P_1, P_2, P_3, P_4$，對於圓上任一點 $A$，以 $A$ 看 $P_1, P_2, P_3, P_4$ 的交比均為

$$\frac{\sin \measuredangle(AP_3, AP_1)}{\sin \measuredangle(AP_3, AP_2)} \Big/ \frac{\sin \measuredangle(AP_4, AP_1)}{\sin \measuredangle(AP_4, AP_2)} = \text{定值},$$

所以我們可以定義圓上的交比

**【定義 2.4】**

設相異四點 $P_1, P_2, P_3, P_4$ 共一圓 $\Gamma$，$A$ 為圓 $\Gamma$ 上的任一點，定義

$$(P_1, P_2; P_3, P_4)_\Gamma = A(P_1, P_2; P_3, P_4).$$

**【性質 2.3】**

單比為仿射變換的不變量，即：

設相異三點 $P_1, P_2, P_3$ 共線，則經過仿射變換 $\varphi$ 後三點的單比不變，即

$$(P_1, P_2; P_3) = (\varphi(P_1), \varphi(P_2); \varphi(P_3)).$$

**【性質 2.4】**

交比為射影變換的不變量，即：

設相異四點 $P_1, P_2, P_3, P_4$ 共線(非無窮遠線)，則經過射影變換 $\varphi$ 後四點的交比不變，即

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = \left(\varphi(P_1), \varphi(P_2); \varphi(P_3), \varphi(P_4)\right).$$

【引理 2.1】

五個點可決定一個圓錐曲線，五條線可決定一個相切圓錐曲線。

【定義 2.5】

定義 $(P_1P_2P_3P_4P_5)$ 為過 $P_1,P_2,P_3,P_4,P_5$ 的圓錐曲線，$(\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4\ell_5)$ 為切 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4,\ell_5$ 的圓錐曲線。

透過射影變換，我們就能將交比的定義拓展到圓錐曲線上。

【引理 2.2】**(圓錐曲線基本定理)**

令 $P_1,P_2,P_3,P_4,A,A'$ 為平面上六點且任三點不共線，則 $P_1,P_2,P_3,P_4,A,A'$ 共一圓錐曲線若且唯若

$$A(P_1,P_2;P_3,P_4)=A'(P_1,P_2;P_3,P_4).$$

【證明】

令 $\boldsymbol{\mathcal{C}}=(P_1P_2P_3AA')$ 且 $E$ 為 $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ 所在的平面，則存在一平面 $E_1$、一圓 $\Omega$ 在 $E_1$ 上及一透視(射影)變換 $\varphi: E\to E_1$ 使 $\varphi(\boldsymbol{\mathcal{C}})=\Omega$。

$(\Rightarrow)$ 由 $\varphi(P_4)\in\Omega$ 知

$$\begin{aligned}A(P_1,P_2;P_3,P_4)&=\varphi(A)(\varphi(P_1),\varphi(P_2);\varphi(P_3),\varphi(P_4))\\&=\varphi(A')\big(\varphi(P_1),\varphi(P_2);\varphi(P_3),\varphi(P_4)\big)\\&=A'(P_1,P_2;P_3,P_4).\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ 令 $P_i'=P_i, i=1,2,3$，$P_4'=AP_4\cap\boldsymbol{\mathcal{C}}\backslash\{A\}$，則由 $(\Rightarrow)$ 知

$$A'(P_1',P_2';P_3',P_4')=A(P_1,P_2;P_3,P_4)=A'(P_1,P_2;P_3,P_4),$$

即 $P_4'=\overleftrightarrow{A'P_4}\cap\overleftrightarrow{AP_4}=P_4$，故 $P_1,P_2,P_3,P_4,A,A'$ 共圓錐曲線。 ■

由 **引理 2.2** 我們就可以定義圓錐曲線上的交比

【定義 2.6】

設相異四點 $P_1,P_2,P_3,P_4$ 共一圓錐曲線 $\boldsymbol{\mathcal{C}}$，$A$ 為圓錐曲線 $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ 上的任一點，定義

$$(P_1,P_2;P_3,P_4)_{\boldsymbol{\mathcal{C}}}=A(P_1,P_2;P_3,P_4).$$

【預備定理 2.1】**(布里昂雄定理/Brianchon's)**

令 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4,\ell_5,\ell_6$ 為任三線不共點的六線，定義 $P_{ij}=\ell_i\cap\ell_j$，則 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4,\ell_5,\ell_6$ 共切一圓錐曲線若且唯若

$$\overleftrightarrow{P_{12}P_{45}},\overleftrightarrow{P_{23}P_{56}},\overleftrightarrow{P_{34}P_{61}}$$

三線共點。**(如圖 7)**

【證明】

令 $L_1=\overleftrightarrow{P_{12}P_{45}}, L_2=\overleftrightarrow{P_{23}P_{56}}, L_3=\overleftrightarrow{P_{34}P_{61}}$，則

$$\begin{aligned}
L_1(\ell_1,\ell_3;\ell_4,L_3) &= \left(\overleftrightarrow{(\ell_1\cap L_1)P_{34}},\ell_3;\ell_4,L_3\right)\\
&= \ell_1(\ell_2,\ell_3;\ell_4,\ell_6),\\
L_1(\ell_1,\ell_3;\ell_4,L_2) &= \left(\ell_2,\ell_3;\overleftrightarrow{(\ell_4\cap L_1)P_{23}},L_2\right)\\
&= \ell_5(\ell_2,\ell_3;\ell_4,\ell_6)
\end{aligned}$$

因此 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4,\ell_5,\ell_6$ 共切一圓錐曲線若且唯若

$$\ell_1(\ell_2,\ell_3;\ell_4,\ell_6)=\ell_5(\ell_2,\ell_3;\ell_4,\ell_6)$$
$$\Leftrightarrow L_1(\ell_1,\ell_3;\ell_4,L_3)=L_1(\ell_1,\ell_3;\ell_4,L_2)$$

若且唯若 $\overleftrightarrow{P_{12}P_{45}},\overleftrightarrow{P_{23}P_{56}},\overleftrightarrow{P_{34}P_{61}}$ 三線共點 (可由 **性質 2.2** 知)。 ■

布里昂雄定理允許兩線重合，兩線的交點就會視為切點，即若 $\ell_i$ 與 $\ell_j$ 重合，則取交點 $P_{ij}$ 為 $\ell_i$ 與 $\ell_j$ 切在圓錐曲線上的點。

**【預備定理 2.1.1】(布里昂雄定理的退化/牛頓三號定理)**

對於任三線不共點的四線 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$，定義 $P_{ij}=\ell_i\cap\ell_j$，若圓錐曲線 $\boldsymbol{C}$ 分別切 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$ 於 $Q_1,Q_2,Q_3,Q_4$，則 $\overleftrightarrow{Q_1Q_3}, \overleftrightarrow{Q_2Q_4},\overleftrightarrow{P_{12}P_{34}},\overleftrightarrow{P_{23}P_{41}}$ 四線共點。**(如圖 8)**

**【證明】**

考慮六切線組 $(\ell_1\ell_1\ell_2\ell_3\ell_3\ell_4)$ 與 $(\ell_1\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4\ell_4)$，由 **預備定理 2.1** 知 $\overleftrightarrow{Q_1Q_3}$, $\overleftrightarrow{P_{12}P_{34}},\overleftrightarrow{P_{23}P_{41}}$ 及 $\overleftrightarrow{Q_2Q_4},\overleftrightarrow{P_{12}P_{34}},\overleftrightarrow{P_{23}P_{41}}$ 分別共點，即 $\overleftrightarrow{Q_1Q_3}, \overleftrightarrow{Q_2Q_4},\overleftrightarrow{P_{12}P_{34}},\overleftrightarrow{P_{23}P_{41}}$ 四線共點。 ■

**【預備定理 2.1.2】(布里昂雄定理的退化)**

對於任三線不共點的四線 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$，定義 $P_{ij}=\ell_i\cap\ell_j$，若圓錐曲線 $\boldsymbol{C}$ 分別切 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$ 於 $Q_1,Q_2,Q_3,Q_4$，則 $\overleftrightarrow{Q_1P_{23}}, \overleftrightarrow{Q_2P_{41}},\overleftrightarrow{P_{12}P_{34}}$ 三線共點。**(如圖 9)**

**【證明】**

考慮切線組 $(\ell_1\ell_2\ell_2\ell_3\ell_4\ell_1)$，由 **預備定理 2.1** 知

$$\overleftrightarrow{P_{12}P_{34}}, \overleftrightarrow{Q_2P_{41}},\overleftrightarrow{Q_1P_{23}}$$

三線共點。 ■

**【預備定理 2.1.3】(布里昂雄定理的退化/賽瓦錐線)**

三角形 $ABC$ 中，$T_A,T_B,T_C$ 分別為 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 上的點，則存在一圓錐曲線 $\boldsymbol{C}$ 分別切 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 於 $T_A,T_B,T_C$ 若且唯若 $\overleftrightarrow{AT_A}, \overleftrightarrow{BT_B}, \overleftrightarrow{CT_C}$ 三線共點。稱 $\boldsymbol{C}$ 為三角形 $ABC$ 關於 $T_A,T_B,T_C$ 的**賽瓦錐線**。**(如圖 10)**

【證明】

考慮切線組 $(\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{CA})$，由 **預備定理 2.1** 知 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 切一圓錐曲線若且唯若

$$\overleftrightarrow{T_CC},\ \overleftrightarrow{BT_B},\ \overleftrightarrow{T_AA}$$

三線共點。 ■

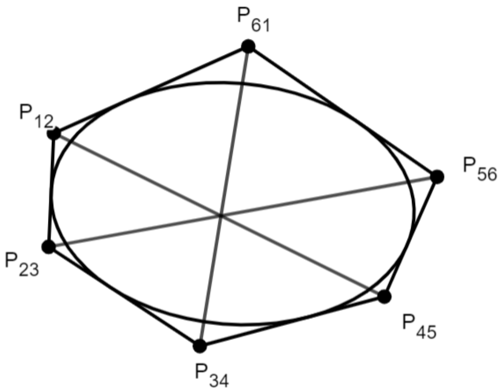



**圖 7 - Brianchon 定理**

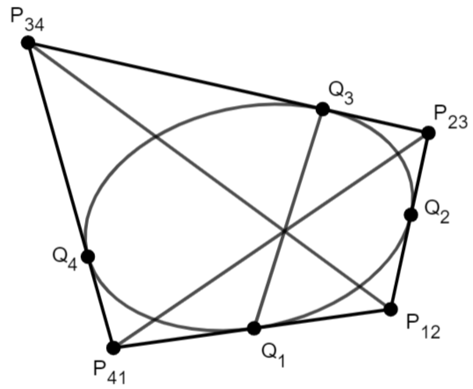



**圖 8 - Brianchon 退化型 1; (牛頓 III)**

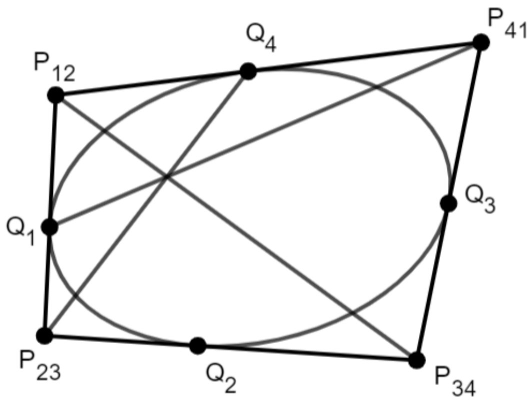



**圖 9 - Brianchon 退化型 2**

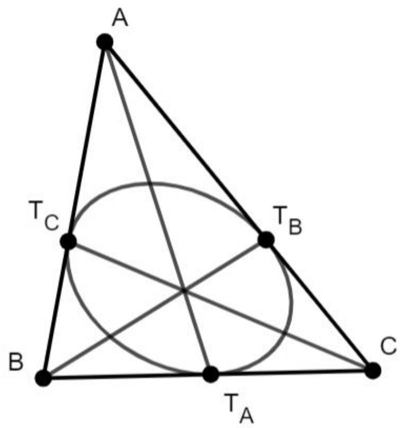



**圖 10 - Brianchon 退化型 3; 賽瓦錐線**

【引理 2.3】

射影平面上任三點不共線的四點 $A,B,C,D$ 分別對應 $A',B',C',D'$ 可以唯一確定一個射影變換。

## 三、圓錐曲線外切三邊形

我們首先將 **定理 1.1** 中，$\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}$ 的值推廣到了任意實數。觀察到 **定理 1.1** 中，若將內切圓上的切點移動到 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ 上，比例和的其中一項就會趨近於 0，另一項則是切點的單比，而比例和的定值就會等於該單比。我們將同樣的概念應用在任意定值的情況，得出了推廣後的定理。

**【定理 3.1】**

等腰三角形 $ABC$ 中 $\overline{AB}=\overline{AC}$，$D,E$ 分別為直線 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ 上的動點滿足

$$\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}=\text{任意定值 } k,$$

則，動線 $\overleftrightarrow{DE}$ 的包絡線為切 $ABC$ 三邊的圓錐曲線。並且該圓錐曲線切 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 的切點 $T_A,T_B,T_C$ 滿足

$$\frac{AT_C}{T_CB}=\frac{AT_B}{T_BC}=k,\frac{BT_A}{T_AC}=1.$$

**【證明】**

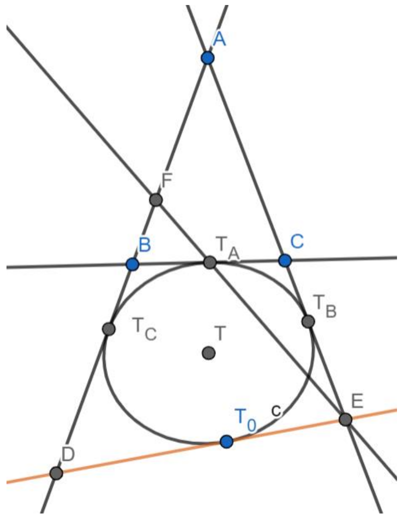



**圖 11**

我們只要證明 $AB,AC$ 上動點 $D,E$ 滿足 $\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}=k$ 有動線 $DE$ 為 $T_A,T_B,T_C$ 的賽瓦錐線的一條切線，就能利用單比的唯一性說明包絡線存在。

利用仿射變換使 $ABC$ 變換為等腰直角三角形

考慮直角坐標解析，假設 $A(0,1),B(-1,0),\mathrm{C}(1,0)$ 。

欲找出 $T_A,T_B,T_C$ 的賽瓦錐線，故令

$T_A(0,0),T_B(-t,t+1),T_C(t,t+1)$，且 $k=\frac{-t}{t+1}$ 。

$\overline{T_AT_B}$ 中點 $M_C\left(\frac{-t}{2},\frac{t+1}{2}\right)$,$\overline{T_AT_C}$ 中點 $M_B\left(\frac{t}{2},\frac{t+1}{2}\right)$,$\overline{T_BT_C}$ 中點 $M_A(0,t+1)$,

賽瓦錐線中心 $O=\overleftrightarrow{BM_B}\cap\overleftrightarrow{CM_C}\cap\{x=0\}=(0,\frac{t+1}{t+2})$

找出三切點 $T_A,T_B,T_C$ 關於中心 $O$ 的對稱點 $T_A',T_B',T_C'$ 以推得賽瓦錐線方程。

$T_A'\left(0,\frac{2(t+1)}{t+2}\right),T_B'\left(t,\frac{-t(t+1)}{t+2}\right),T_C'\left(-t,\frac{-t(t+1)}{t+2}\right)$

設賽瓦錐線 $\boldsymbol{\mathcal{C}}: A_0x^2+B_0xy+C_0y^2+D_0x+E_0y+F_0=0$

$T_A$代入 $\Longrightarrow\ F_0 = 0$ ,

$T_A'$ 代入 $\Longrightarrow E_0 = \dfrac{-2(t+1)}{t+2}C_0$ ,

$$\frac{T_C \text{ 代入} + T_B \text{ 代入}}{2} \Longrightarrow A_0(t^2) + C_0(t+1)^2 + \frac{-2(t+1)}{t+2}C_0(t+1) = 0$$

$$\Longrightarrow A_0 = \frac{-t(t+1)^2}{t^2(t+2)}C_0 ,$$

$$\frac{T_C \text{ 代入} - T_B \text{ 代入}}{2} \Longrightarrow B_0(t)(t+1) + D_0(t) = 0$$

$$\Longrightarrow D_0 = -(t+1)B_0 ,$$

$$T_C' \text{ 代入} \Longrightarrow \frac{-t(t+1)^2}{(t+2)}C_0 + \frac{t^2(t+1)}{t+2}B_0 + \frac{t^2(t+1)^2}{(t+2)^2}C_0 + t(t+1)B_0 + \frac{2t(t+1)^2}{(t+2)^2}C_0 = 0$$

$\Longrightarrow B_0 = D_0 = 0$ .

這邊先假設 $t \neq -1, -2, 0$ .

所以 $\boldsymbol{C}: (t+1)^2x^2 - t(t+2)y^2 + 2t(t+1)y = 0$ (*)

令 $D(u, u+1), E = \frac{\left(k+\frac{u}{u+1}\right)C+A}{k+\frac{u}{u+1}+1}$ ，如此滿足 $\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = k$。

求得直線方程式 $\overleftrightarrow{DE}: -(x-u)(2u+(u+1)k) = (y-u-1)(k+\frac{u}{u+1} - uk - \frac{u^2}{u+1} - u)$

將此式與 $\boldsymbol{C}$ 的方程式聯立求解，若有唯一解即代表 $\overleftrightarrow{DE}$ 與 $\boldsymbol{C}$ 相切。

令 $\mathrm{a} = (2\mathrm{u} + (\mathrm{u}+1)\mathrm{k}),\ \mathrm{b} = \left(-\mathrm{k} + \mathrm{uk} + \frac{2u^2}{u+1}\right)$

$$\text{原式} = \begin{cases} (x-u)a = (y-u-1)b & (1) \\ x^2(t+1)^2 - t(t+2)y^2 + 2t(t+1)y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{由}(1): \mathrm{x} = \frac{(y-u-1)b + ua}{a} \text{ 代入(2)後可得}$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\left(\mathrm{by} + (\mathrm{ua} - (\mathrm{u}+1)\mathrm{b})\right)^2(t+1)^2 - a^2t(t+2)\mathrm{y}^2 + 2a^2t(t+1)y\right) = 0$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\left(\mathrm{b}^2(\mathrm{t}+1)^2 - \mathrm{a}^2\mathrm{t}(\mathrm{t}+2)\right)\mathrm{y}^2 + \left(2b(ua-(u+1)b)(t+1)^2 + 2a^2t(t+1)\right)y + (ua-(u+1)b)^2(t+1)^2\right) = 0$$

$$\begin{aligned}\text{判別式 D} = \frac{1}{a^4}&(4\mathrm{b}^2(ua-(u+1)b)^2(t+1)^4 + 8a^2bt(t+1)^3(ua-(u+1)b) + 4a^4t^2(t+1)^2 \\ &- 4b^2(t+1)^4(ua-(u+1)b)^2 + 4a^2t\,(t+1)^2(t+2)(ua-(u+1)b)^2)\end{aligned}$$

$$= \frac{4\mathrm{t}(\mathrm{t}+1)^2}{a^2}(2\mathrm{b}(\mathrm{t}+1)(\mathrm{ua}-(\mathrm{u}+1)\mathrm{b}) + \mathrm{a}^2\mathrm{t} + (\mathrm{t}+2)(\mathrm{ua}-(\mathrm{u}+1)\mathrm{b})^2)$$

$$= \frac{4\mathrm{t}(\mathrm{t}+1)^2}{a^2}\left((2b(ua-(u+1)b) + a^2 + (ua-(u+1)b)^2)t + 2b(ua-(u+1)b) + 2(ua-(u+1)b)^2\right)$$

$$\because \mathrm{ua} - (\mathrm{u}+1)\mathrm{b} = 2\mathrm{u}^2 + u(u+1)k + (u+1)k - u(u+1)k - 2u^2 = (u+1)\mathrm{k} \text{ 且 } t = \frac{-k}{k+1}$$

$$2b(ua-(u+1)b) + 2(ua-(u+1)b)^2 = 2\mathrm{u}(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{u}+1)\mathrm{k}$$

$$\mathrm{D} = \frac{4t(k+1)(t+1)^2}{-a^2k}\left((2b(ua-(u+1)b) + a^2 + (ua-(u+1)b)^2) - 2u(a-b)(u+1)(k+1)\right)$$

$$\begin{aligned}= \frac{4t(k+1)(t+1)^2}{-a^2k}\Bigg(&2\mathrm{k}(\mathrm{u}+1)\left(-\mathrm{k}+\mathrm{uk}+\frac{2\mathrm{u}^2}{u+1}\right) + 4\mathrm{u}^2 + 4\mathrm{u}(\mathrm{u}+1)\mathrm{k} + 2(\mathrm{u}+1)^2\mathrm{k}^2 \\ &- 2\mathrm{u}(2\mathrm{u}+(\mathrm{u}+1)\mathrm{k})(\mathrm{u}+1)(\mathrm{k}+1) + 2\mathrm{u}(\mathrm{u}+1)(\mathrm{k}+1)\left(-\mathrm{k}+\mathrm{uk}+\frac{2\mathrm{u}^2}{u+1}\right)\Bigg)\end{aligned}$$

$$= \frac{4t(k+1)(t+1)^2}{-a^2k}(-2k^2u - 2k^2 + 2u^2k^2 + 2uk^2 + 4u^2k + 4u^2 + 4u^2k + 4uk + 2u^2k^2 + 4uk^2 + 2k^2 - 4u^2k - 4u^2 - 4u^3k - 4u^3 - 2u^3k^2 - 2u^3k - 4u^2k^2 - 4u^2k - 2uk^2 - 2uk - 2u^2k^2 - 2uk^2 - 2uk - 2u^2k + 4u^3k + 4u^3 + 2u^3k^2 + 2u^3k + 2u^2k^2 + 2u^2k) = 0$$

故得證。 ■

由仿射變換，我們又可以將定理推廣至任意三角形。

**【定理 3.2】**

任意三角形 $ABC$ ，$D, E$ 分別為直線 $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ 上的動點滿足

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = \text{任意定值 } k,$$

則，動線 $\overleftrightarrow{DE}$ 的包絡線為切 $ABC$ 三邊的圓錐曲線。並且該圓錐曲線切 $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{AB}$ 的切點 $T_A, T_B, T_C$ 滿足

$$\frac{AT_C}{T_CB} = \frac{AT_B}{T_BC} = k, \frac{BT_A}{T_AC} = 1.$$

**【證明】**

透過仿射變換，可以將三角形 $ABC$ 變換為 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 的等腰三角形，故命題即可等價到 **定理 3.1** 。 ■

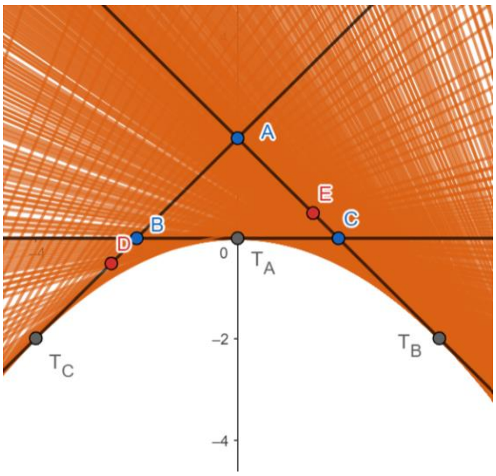



**圖 12**

觀察 **定理 3.1** 推得的錐線方程式 (∗) 我們可以知道不同 $k$ 值所產生的包絡錐線類型:

| $k$ 的範圍 | 錐線類型 |
|---|---|
| $k > 0$ | 內切橢圓 |
| $k = 0$ | 動線過一定點( $BC$ 中點) |
| $k \in (-2,0)$ | 旁切雙曲線 |
| $k = -2$ | 旁切拋物線 |
| $k < -2$ | 旁切橢圓 |

$k=-1$ 時方程式需額外討論，由原始定義也會發現錐線是以 $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ 為漸進線的雙曲線(切在無窮遠點)。

由於 **定理 3.1** 及 **定理 3.2** 的證明涉及到仿射變換，並沒有列出所有情況，再加上方程式聯立求解實在太過繁雜，所以我們希望**找到純幾何的證明**並且將定理推廣到任意賽瓦錐線的情況。

嘗試研究後我們發現，若 $T_A$ 不為 $\overline{BC}$ 中點且想讓任意圓錐曲線外切三邊形的比例和恆為一定值，就必須將其中一項乘上一個係數，即 $\frac{AD}{DB}+r\frac{AE}{EC}=$ 任意定值 $k$。透過觀察將錐線上的切點移動到 $\overleftrightarrow{AB}$ 及 $\overleftrightarrow{AC}$ 上，我們可以猜測到決定這個係數的條件以及最後的定值，他們分別為 $r=\frac{CT_A}{T_AB}$ 及 $k=\frac{AT_C}{T_CB}$。

**【定理 3.3】**

任意三角形 $ABC$，$D,E$ 分別為直線 $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ 上的動點滿足

$$\frac{AD}{DB}+r\frac{AE}{EC}=\text{定值 }k,$$

則，動線 $\overleftrightarrow{DE}$ 的包絡線為切 $ABC$ 三邊的圓錐曲線。並且該圓錐曲線切 $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{AB}$ 的切點 $T_A,T_B,T_C$ 滿足

$$\frac{AT_C}{T_CB}=k,\frac{AT_B}{T_BC}=\frac{k}{r},\frac{BT_A}{T_AC}=\frac{1}{r}.$$

**【證明】**

同 **定理 1.1**，我們只要證明關於 $T_A,T_B,T_C$ 的賽瓦錐線上的任意一條切線所截的 $D,E$ 皆滿足 $\frac{AD}{DB}+r\frac{AE}{EC}=k$ 即可。

令 $\overleftrightarrow{ET_A}\cap\overleftrightarrow{AB}=F$。由孟氏定理我們有

$$\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CT_A}{T_AB}=\frac{AD}{DB}-\frac{AF}{FB}$$
$$=\frac{AD}{DB}-\frac{AF}{FB}+\frac{DB}{DB}-\frac{FB}{FB}$$
$$=\frac{AB}{DB}-\frac{AB}{FB},$$

則命題等價於

$$\frac{AB}{DB}-\frac{AB}{FB}=k=\frac{AT_C}{T_CB}\text{ 。}$$

因為 $\frac{AT_C}{T_CB}=\frac{AB}{T_CB}-1$，所以命題等價於

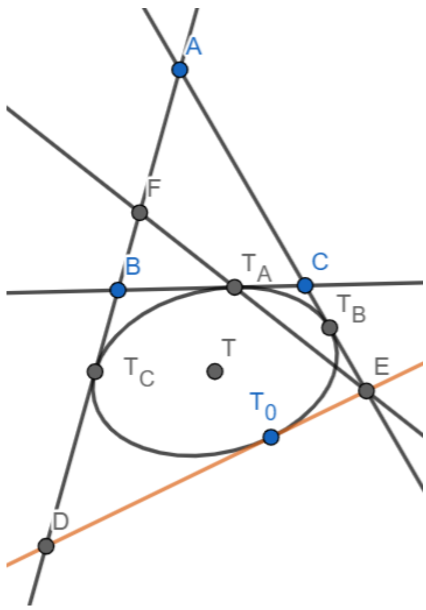


圖 13

$$\frac{1}{DB}-\frac{1}{FB}=\frac{1}{T_CB}-\frac{1}{AB},$$

等價於

$$\frac{1}{BD}+\frac{1}{BA}=\frac{1}{BT_C}+\frac{1}{BF}\text{。}$$

觀察後可發現此式與 Candy's 定理的描述雷同，故考慮 Candy's 定理類似的證明思路。

若 $(D,T_C;B,A)=(D,B;F,A)$，則有

$$\frac{BD}{BT_C}\cdot\frac{AT_C}{AD}=\frac{FD}{FB}\cdot\frac{AB}{AD}$$
$$\Rightarrow\frac{BD\cdot AT_C}{BT_C}=\frac{FD\cdot AB}{FB}$$
$$\Rightarrow\frac{BD\cdot(AB+BT_C)}{BT_C}=\frac{(FB+BD)\cdot AB}{FB}$$
$$\Rightarrow BD+\frac{BD\cdot AB}{BT_C}=AB+\frac{BD\cdot AB}{FB}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{BT_C}+\frac{1}{BF}=\frac{1}{BD}+\frac{1}{BA}\text{。}$$

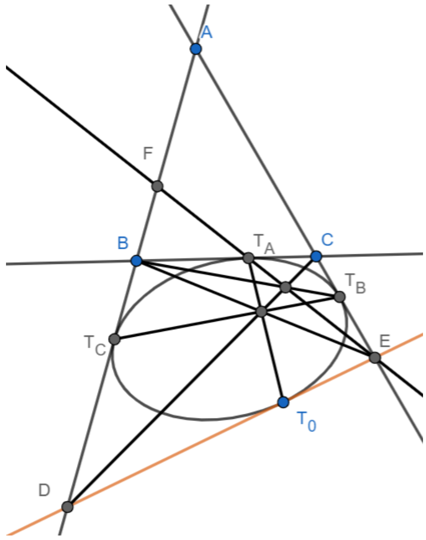


圖 14

故命題等價到證明

$$(D,T_C;B,A)=(D,B;F,A)\,.$$

由 **預備定理 2.1.2**、**預備定理 2.1.3** 可知

$\overleftrightarrow{BE},\overleftrightarrow{DC},\overleftrightarrow{T_BT_C}$ 共點，$\overleftrightarrow{BT_B},\overleftrightarrow{ET_A},\overleftrightarrow{DC}$ 共點。

所以

$$(D,T_C;B,A)=(C,T_B;E,A)=(D,B;F,A)\text{。}$$

故得證。 ■

這個結論引導我們將問題推廣到「加權比例和」，我們可以將 **定理 3.3** 的結果換成另一種描述。

**【定理 3.4】**

圓錐曲線 $\boldsymbol{C}$ 有外切三邊形 $AA_1A_2$，$\boldsymbol{C}$ 上有一點 $T$，過 $T$ 作 $\boldsymbol{C}$ 的切線分別截 $\overleftrightarrow{AA_1},\overleftrightarrow{AA_2}$ 於 $X_1,X_2$。令 $a_1=\frac{AX_1}{X_1A_1},a_2=\frac{AX_2}{X_2A_2}$。$\boldsymbol{C}$ 與 $\overleftrightarrow{AA_1},\overleftrightarrow{AA_2}$ 切於 $Y_1,Y_2$。令 $r_1=\frac{A_1Y_1}{Y_1A},r_2=\frac{A_2Y_2}{Y_2A}$，則

$$r_1a_1+r_2a_2=1\,.$$

**【證明】**

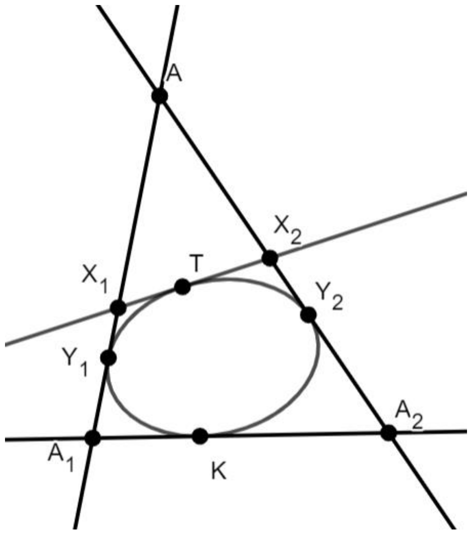



**圖 15**

令 $\boldsymbol{C}$ 切 $A_1A_2$ 於 $K$。

由 **定理 3.3** 我們有

$$
\begin{aligned}
& a_1+\frac{A_2K}{KA_1}a_2=\frac{AY_1}{Y_1A_1} \\
& \Rightarrow a_1+\frac{A_2Y_2}{Y_2A}\cdot\frac{AY_1}{Y_1A_1}a_2=\frac{AY_1}{Y_1A_1}\ (\text{賽瓦定理}) \\
& \Rightarrow \frac{A_1Y_1}{Y_1A}a_1+\frac{A_2Y_2}{Y_2A}a_2=1\,.
\end{aligned}
$$

所以有 $r_1a_1+r_2a_2=1$。 ■

**定理 3.4** 告訴我們，任意圓錐曲線外切三邊形中，特定加權比例和會有定值 1。如此一來我們便能合理的猜測，在多邊形時或許也有類似的結論。

事實上 **定理 3.4** 還可以將敘述再進行變換。觀察到

$$r_1a_1=\frac{A_1Y_1}{Y_1A}\frac{AX_1}{X_1A_1}=\frac{AX_1}{A_1X_1}\Big/\frac{AY_1}{A_1Y_1}=(A,A_1;X_1,Y_1)\text{，}$$

$$\text{同理 } r_2a_2=(A,A_2;X_2,Y_2)\text{。}$$

所以定理可以寫成如下形式。

**【定理 3.5】**

圓錐曲線 $\boldsymbol{C}$ 有外切三邊形 $AA_1A_2$，$\boldsymbol{C}$ 上有一點 $T$，過 $T$ 作 $\boldsymbol{C}$ 的切線分別截 $\overleftrightarrow{AA_1},\overleftrightarrow{AA_2}$ 於 $X_1,X_2$。$\boldsymbol{C}$ 分別切 $\overleftrightarrow{AA_1},\overleftrightarrow{AA_2}$ 於 $Y_1,Y_2$，則

$$(A,A_1;X_1,Y_1)+(A,A_2;X_2,Y_2)=1.$$

**【證明】** 顯然。 ■

而這個形式的定理為之後多邊形的推廣給了很大的幫助。

## 四、圓錐曲線外切多邊形

一開始我們在推廣多邊形時是以「權重比例和」為出發點。類似 **定理 3.4** 的形式，對於任意圓錐曲線 $\boldsymbol{C}$ 外切 $n+1$ 邊形 $AA_1A_2\cdots A_n$，我們猜測存在 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 使得

$$r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n=1.$$

其中，$a_i$ 為 $\boldsymbol{C}$ 上任意一條過 $\boldsymbol{C}$ 上一點 $T$ 的切線截 $\overleftrightarrow{AA_\iota}$ 於 $X_i$ 的有向線段比例 $\frac{AX_i}{X_iA_i}$。

下一步是要找到決定 $r_i$ 的條件。我們先觀察了四邊形的情況，考慮到在三邊形時，$r_i$ 是由圓錐曲線在邊上交點的線段比來決定，所以我們同樣的猜測四邊形也是如此。

假設圓錐曲線 $\boldsymbol{C}$ 有外切四邊形 $AA_1A_2A_3$ ，$\boldsymbol{C}$ 的一條切線截 $\overleftrightarrow{AA_\iota}$ 於 $X_i$，射線 $\overrightarrow{AA_\iota}$ 第一次交 $\boldsymbol{C}$ 於 $Y_i$，$\boldsymbol{C}$ 的一條過 $Y_2$ 的切線分別交 $\overleftrightarrow{AA_1},\overleftrightarrow{AA_3}$ 於 $Z_1,Z_2$，猜測加權值 $r_1,r_2,r_3$ 由以下聯立方程式決定:

$$\begin{cases} r_1\dfrac{AY_1}{Y_1A_1}+0+0=1 \\ r_1\dfrac{AZ_1}{Z_1A_1}+r_2\dfrac{AY_2}{Y_2A_2}+r_3\dfrac{AZ_2}{Z_2A_3}=1 \\ 0+0+r_3\dfrac{AY_3}{Y_3A_3}=1 \end{cases}.$$

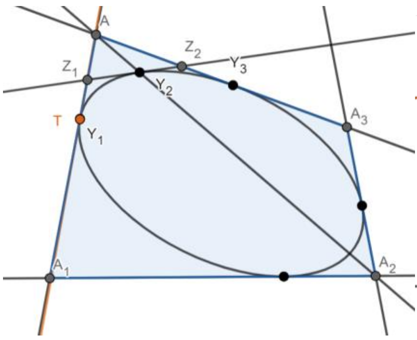



圖 16 ($T$ 與 $Y_1$ 重合)

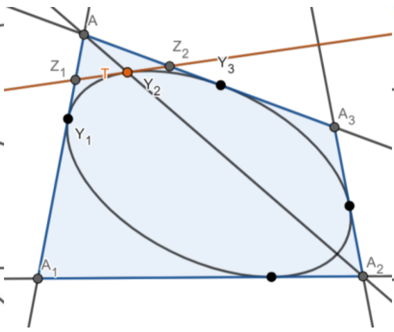



圖 17 ($T$ 與 $Y_2$ 重合)

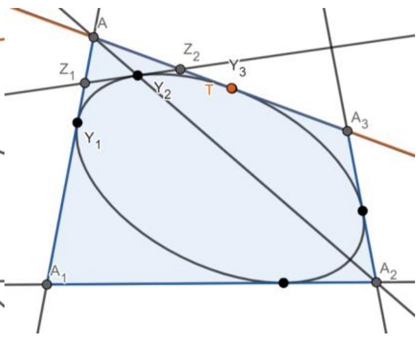



圖 18 ($T$ 與 $Y_3$ 重合)

令 $b_{1,1}=\frac{AY_1}{Y_1A_1},b_{2,1}=\frac{AZ_1}{Z_1A_1},b_{2,2}=\frac{AY_2}{Y_2A_2},b_{2,3}=\frac{AZ_2}{Z_2A_3},b_{3,3}=\frac{AY_3}{Y_3A_3}$.

解得

$$\begin{cases} r_1=\dfrac{1}{b_{1,1}} \\ r_2=\dfrac{b_{1,1}b_{3,3}-b_{1,1}b_{2,3}-b_{2,1}b_{3,3}}{b_{1,1}b_{2,2}b_{3,3}} \\ r_3=\dfrac{1}{b_{3,3}} \end{cases}.$$

將 $r_1,r_2,r_3$ 解出後利用 GeoGebra 計算機套件驗算發現它是對的，這就代表我們猜測決定加權值條件的方向沒錯，所以我們先將這個結果記下並繼續探討加權值是否存在更加漂亮的形式。(由於工具不足，下面僅給出能射影變換成圓外切菱形的情況)

【定理 4.1】

假設圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 有外切四邊形 $AA_1A_2A_3$ 滿足存在射影變換使得能將 $\mathcal{C}$ 變換為圓形、$AA_1A_2A_3$ 變換為菱形。$\mathcal{C}$ 的一條切線過 $\mathcal{C}$ 上一點 $T$ 截 $\overleftrightarrow{AA_i}$ 於 $X_i$，射線 $\overrightarrow{AA_i}$ 第一次交 $\mathcal{C}$ 於 $Y_i$，$\mathcal{C}$ 的一條過 $Y_2$ 的切線分別交 $\overleftrightarrow{AA_1},\overleftrightarrow{AA_3}$ 於 $Z_1,Z_2$，存在 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 使得

$$r_1a_1+r_2a_2+r_3a_3=1.$$

而 $r_1,r_2,r_3$ 由以下聯立方程式決定:

$$\begin{cases} r_1\dfrac{AY_1}{Y_1A_1}+0+0=1 \\ r_1\dfrac{AZ_1}{Z_1A_1}+r_2\dfrac{AY_2}{Y_2A_2}+r_3\dfrac{AZ_2}{Z_2A_3}=1 \\ 0+0+r_3\dfrac{AY_3}{Y_3A_3}=1 \end{cases}.$$

其中，$a_i$ 為 $\mathcal{C}$ 上任意一條切線截 $\overleftrightarrow{AA_i}$ 於 $X_i$ 的有向線段比例 $\frac{AX_i}{X_iA_i}$。

【證明】

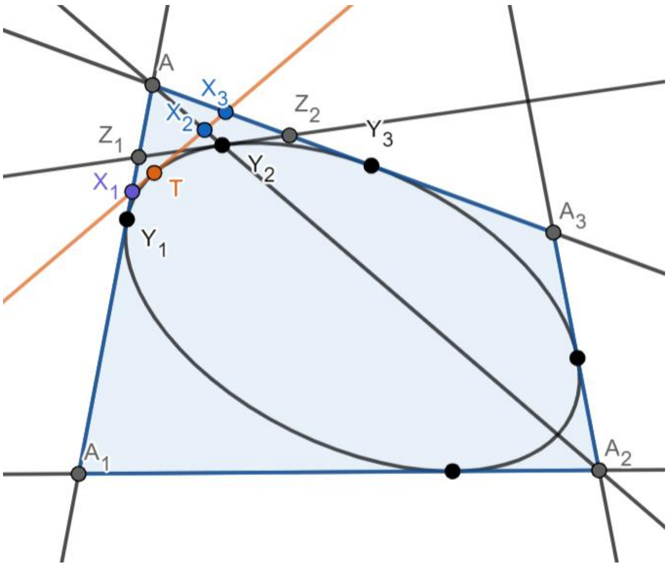



圖 19

令 $b_{1,1}=\frac{AY_1}{Y_1A_1},b_{2,1}=\frac{AZ_1}{Z_1A_1},b_{2,2}=\frac{AY_2}{Y_2A_2},b_{2,3}=\frac{AZ_2}{Z_2A_3},b_{3,3}=\frac{AY_3}{Y_3A_3}$.

$$r_1a_1+r_2a_2+r_3a_3=\frac{a_1}{b_{1,1}}+\frac{a_2}{b_{2,2}}\left(1-\frac{b_{2,3}}{b_{3,3}}-\frac{b_{2,1}}{b_{1,1}}\right)+\frac{a_3}{b_{3,3}}$$

$$=(A,A_1;X_1,Y_1)+(A,A_2;X_2,Y_2)\big(1-(A,A_3;Z_2,Y_3)-(A,A_1;Z_1,Y_1)\big)+(A,A_3;X_3,Y_3)$$

因為交比為射影變換下的不變量(**性質 2.4**)，所以可由射影變換將圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 及外切四邊形 $AA_1A_2A_3$ 變換為圓外切菱形，且能使 $r_1a_1+r_2a_2+r_3a_3$ 的值保持不變。

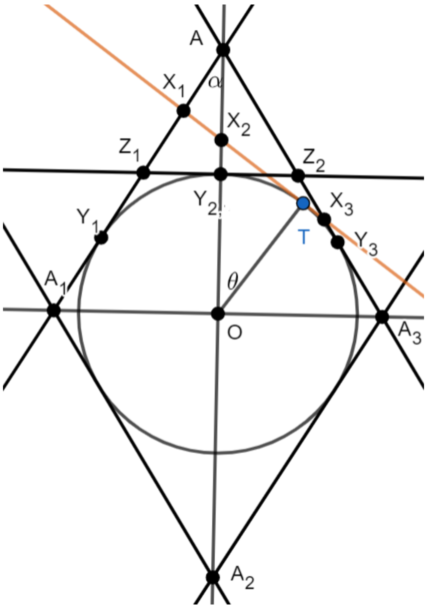



**圖 20**

下面證明圓外切菱形時的情況。

令 $\angle A_1AA_2 = \angle A_2AA_3 = \alpha, \angle TOA = \theta$，則

$$b_{1,1} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \cot^2\alpha = \frac{1}{\tan^2\alpha}, b_{2,2} = \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}, b_{3,3} = b_{1,1}, b_{2,1} = \frac{1}{\sin\alpha} - 1, b_{2,3} = b_{2,1}$$

$$a_1 = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\theta}{2}\right)}{\tan\alpha + \tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\theta}{2}\right)}, a_2 = \frac{\cos\theta - \sin\alpha}{\cos\theta + \sin\alpha}, a_3 = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\theta}{2}\right)}{\tan\alpha + \tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\theta}{2}\right)}.$$

$$r_1 = r_3 = \tan^2\alpha,$$

$$r_2 = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\cdot\left(1 - 2\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)\tan^2\alpha\right)$$

$$= \frac{\sin\alpha - 2\tan\alpha\cos\alpha + 1}{1-\sin\alpha} = \frac{1-\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = 1.$$

$$r_1a_1 + r_3a_3 = \tan^2\alpha\left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\theta}{2}\right)}{\tan\alpha + \tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\theta}{2}\right)} + \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\theta}{2}\right)}{\tan\alpha + \tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\theta}{2}\right)}\right),$$

化簡過程略為繁瑣，故部分省略，將上式化開可得

$$r_1a_1 + r_3a_3 = 1 - \tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\theta}{2}\right)\tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\theta}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha-\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha+\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha-\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha+\theta}{2}\right)}$$

$$= 1 - \frac{\cos\theta - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\theta + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

$$= 1 - \frac{\cos\theta - \sin\alpha}{\cos\theta + \sin\alpha} = 1 - r_2 a_2 \, ,$$

所以 $r_1 a_1 + r_2 a_2 + r_3 a_3 = 1.$ ■

繼續觀察

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + r_3 a_3 = (A, A_1; X_1, Y_1) + (A, A_2; X_2, Y_2)\big(1 - (A, A_3; Z_2, Y_3) - (A, A_1; Z_1, Y_1)\big) + (A, A_3; X_3, Y_3)$$

我們想將此式化簡成如 **定理 3.5** 那樣可以簡單用交比和來表示。

由於上述的定理中，還有一項變量沒有用到，那就是 $\overleftrightarrow{AA_i}$ 與 $\boldsymbol{C}$ 的第二個交點。我們將這項變量納入考量，猜測它應該會出現在式中何處。令 $\overleftrightarrow{AA_i}$ 交 $\boldsymbol{C}$ 於兩點 $Y_{i,1}, Y_{i,2}$ 經過 GeoGebra 計算機套件的驗算，我們發現了當 $(A, A_2; X_2, Y_{2,1})$ 及 $(A, A_2; X_2, Y_{2,2})$ 為正時

$$r_2 a_2 = \sqrt{(A, A_2; X_2, Y_{2,1})(A, A_2; X_2, Y_{2,2})}\, .$$

由於 $Y_1 = Y_{1,1} = Y_{1,2}, Y_3 = Y_{3,1} = Y_{3,2}$ ，式子便能寫成

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + r_3 a_3 = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{(A, A_i; X_i, Y_{i,1})(A, A_i; X_i, Y_{i,2})} = 1\, ,$$

若其中所有交比值皆為正。

有了這項發現我們便能大膽猜測，對於圓錐曲線外切任意多邊形都有

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(A, A_i; X_i, Y_{i,1})(A, A_i; X_i, Y_{i,2})} = 1\, ,$$

若其中所有交比值皆為正。

討論交比值為負時的情況後發現，$(A, A_i; X_i, Y_{i,1})$ 及 $(A, A_i; X_i, Y_{i,2})$ 會同號，若希望仍能滿足上列關係式，我們就需另外定義當 $(A, A_i; X_i, Y_{i,1})$ 及 $(A, A_i; X_i, Y_{i,2})$ 為負時，

$$r_i a_i = -\sqrt{(A, A_i; X_i, Y_{i,1})(A, A_i; X_i, Y_{i,2})}.$$

**【定義 4.1】**

定義雙變數函數 $G$ 為

$$G(a, b) = \begin{cases} \sqrt{a \cdot b}, if\ a, b \geq 0 \\ -\sqrt{a \cdot b}, if\ a, b < 0 \end{cases}.$$

有了函數 $G$ 的定義，我們便能將猜測稍加轉變：對於圓錐曲線外切任意多邊形都有

$$\sum_{i=1}^{n} G\left((A, A_i; X_i, Y_{i,1}), (A, A_i; X_i, Y_{i,2})\right) = 1\, .$$

在證明這個猜測前，我們必須先有下面這個引理，方便我們能夠利用數學歸納法實現任意多邊形的證明。

**【引理 4.1】**

三角形 $ABC$ 中，內(旁)切圓 ω 切 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 於 $T_A,T_B,T_C$。過 ω 上一點 $T$ 作 ω 的切線交 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ 於 $P,Q$。在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上找一點 $R$ 使得 $\overleftrightarrow{QR}$ 交 ω 於兩點 $M,N$。令 $\overleftrightarrow{QR}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 $S$。則

$$G\big((R,Q;S,M),(R,Q;S,N)\big)+(R,P;B,T_C)=(R,A;B,T_C).$$

**【證明】**

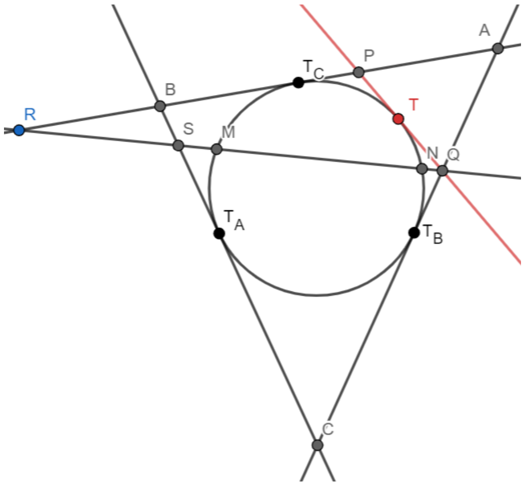



**圖 21**

首先，$(R,Q;S,M)$ 與 $(R,Q;S,N)$ 顯然同號（ $Q,R,S$ 顯然不會在 $M,N$ 之間 )。

命題等價於

$$G\left(\frac{RS}{QS}\cdot\frac{QM}{RM},\frac{RS}{QS}\cdot\frac{QN}{RN}\right)=\frac{RB}{AB}\cdot\frac{AT_C}{RT_C}-\frac{RB}{PB}\cdot\frac{PT_C}{RT_C},$$

等價於

$$\frac{RS}{SQ}\sqrt{\frac{QM}{RM}\cdot\frac{QN}{RN}}=\frac{RB}{RT_C}\left(\frac{AT_C}{AB}-\frac{PT_C}{PB}\right).$$

由於 $QM\cdot QN=(QT)^2=(QT_B)^2$，$RM\cdot RN=(RT_C)^2$，所以命題等價於

$$\frac{RS}{SQ}\cdot\frac{QT_B}{RT_C}=\frac{RB}{RT_C}\left(\frac{AT_C}{AB}-\frac{PT_C}{PB}\right),$$

等價於

$$\frac{RS}{SQ}\cdot\frac{QT_B}{RB}=\frac{AT_C}{AB}-\frac{PT_C}{PB}.$$

由於 $\frac{RS}{SQ}\cdot\frac{QC}{CA}\cdot\frac{AB}{BR}=-1$ (孟氏定理)，所以命題等價於

$$\frac{CA}{QC}\cdot\frac{QT_B}{AB}+\frac{PT_C}{PB}=\frac{AT_C}{AB},$$

等價於

$$\frac{CA}{QC}\cdot\frac{QT_B}{AB}\cdot\frac{AB}{AT_C}+\frac{PT_C}{PB}\cdot\frac{AB}{AT_C}=1,$$

等價於

$$\frac{AC}{QC}\cdot\frac{QT_B}{AT_B}+\frac{AB}{PB}\cdot\frac{PT_C}{AT_C}=1.$$

觀察左式為

$$(A,Q;C,T_B)+(A,P;B,T_C),$$

且三角形 $APQ$ 為圓 $(T_AT_BT_C)$ 的外切三邊形，利用 **定理 3.5** 即可得

$$(A,Q;C,T_B)+(A,P;B,T_C)=1.$$

故得證。 ■

**【定理 4.2】**

圓錐曲線 $\boldsymbol{C}$ 有外切 $n+1\ (n\geq 2, n\in\mathbb{N})$ 邊形 $AA_1\cdots A_n$ ，$\boldsymbol{C}$ 的一條切線過 $\boldsymbol{C}$ 上一點 $T$ 截 $\overleftrightarrow{AA_i}$ 於 $X_i$。直線 $\overleftrightarrow{AA_i}$ 交 $\boldsymbol{C}$ 於兩點 $Y_{i,1},Y_{i,2}$ (可重合)。則

$$\sum_{i=1}^{n}G\left((A,A_i;X_i,Y_{i,1}),(A,A_i;X_i,Y_{i,2})\right)=1.$$

**【證明】**

透過射影變換，命題可以等價於證明任意圓外切多邊形能夠成立即可。

考慮數學歸納法。

當 $n=2$ 時，因 **定理 3.5** 而成立。

設 $n=k$ 時命題成立。

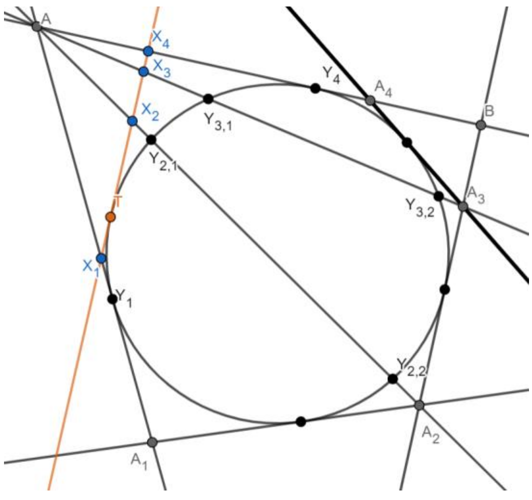



**圖 22**

當 $n=k+1$ 時，令 $Y_{k+1}=Y_{k+1,1}=Y_{k+1,2}$，

令 $\overleftrightarrow{A_{k-1}A_{k-2}} \cap \overleftrightarrow{AA_k}=B$，由假設則有

$$G\left(\left(A,A_1;X_1,Y_{1,1}\right),\left(A,A_1;X_1,Y_{1,2}\right)\right)+\cdots+G\left(\left(A,A_{k-1};X_{k-1},Y_{k-1,1}\right),\left(A,A_{k-1};X_{k-1},Y_{k-1,2}\right)\right)$$
$$+G\left(\left(A,B;X_{k+1},Y_{k+1,1}\right),\left(A,B;X_{k+1},Y_{k+1,2}\right)\right)=1\,.$$

由 **引理 4.1** 我們有

$$G\left(\left(A,A_k;X_k,Y_{k,1}\right),\left(A,A_k;X_k,Y_{k,2}\right)\right)+\left(A,A_{k+1};X_{k+1},Y_{k+1}\right)=G\left(\left(A,B;X_{k+1},Y_{k+1,1}\right)\left(A,B;X_{k+1},Y_{k+1,2}\right)\right).$$

所以

$$1=G\left(\left(A,A_1;X_1,Y_{1,1}\right),\left(A,A_1;X_1,Y_{1,2}\right)\right)+\cdots+G\left(\left(A,A_{k-1};X_{k-1},Y_{k-1,1}\right),\left(A,A_{k-1};X_{k-1},Y_{k-1,2}\right)\right)$$
$$+G\left(\left(A,A_k;X_k,Y_{k,1}\right),\left(A,A_k;X_k,Y_{k,2}\right)\right)+\left(A,A_{k+1};X_{k+1},Y_{k+1}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{k+1}G\left(\left(A,A_i;X_i,Y_{i,1}\right),\left(A,A_i;X_i,Y_{i,2}\right)\right).$$

故由數學歸納法得證。 ■

# 伍、 研究結果

以下所提及的比例表示(如 $\frac{A_1B_2}{B_2A_2}$ 等)除特別標明，否則皆為有向線段比(**定義 1.1**、**定義 1.2**)。

1. 對於任意正 $n$ 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$，圓 $O$ 為其內切圓，若 $T$ 為圓 $O$ 上的點，過 $T$ 作圓 $O$ 的切線，交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$、$\overleftrightarrow{A_1A_3}$、…、$\overleftrightarrow{A_1A_n}$ 於 $B_2,B_3,\ldots,B_n$，則無論 $T$ 在圓 $O$ 上何處，皆有

$$\frac{A_1B_2}{B_2A_2}+\frac{A_1B_3}{B_3A_3}+\cdots+\frac{A_1B_n}{B_nA_n}=1.$$

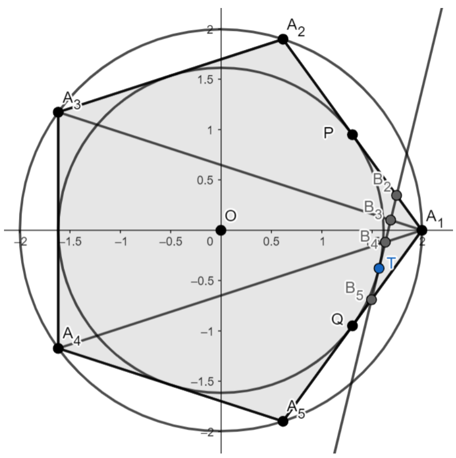



**圖 23**

2. 對於任意等腰三角形 $ABC$，其中 $\overline{AB}=\overline{AC}$，圓 $I$ 為其內切圓，若 $T$ 為圓 $I$ 上的點，過 $T$ 點作圓 $I$ 的切線，交 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ 於 $D,E$，則無論 $T$ 在圓 $I$ 上何處，皆有

$$\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}=\text{定值}=\sec\angle ABC-1\,.$$

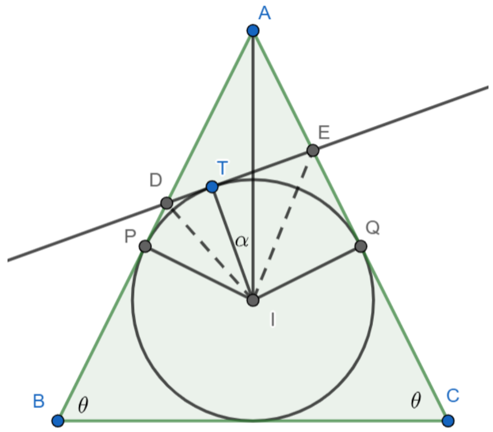



**圖 24**

3. 等腰三角形 $ABC$ 中 $\overline{AB}=\overline{AC}$，$D,E$ 分別為直線 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ 上的動點滿足

$$\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}=\sec\angle B-1,$$

則，動線 $\overleftrightarrow{DE}$ 的包絡線為 $ABC$ 的內切圓。

4. 等腰三角形 $ABC$ 中 $\overline{AB}=\overline{AC}$，$D,E$ 分別為直線 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ 上的動點滿足

$$\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}=\text{任意定值}\,k,$$

則，動線 $\overleftrightarrow{DE}$ 的包絡線為切 $ABC$ 三邊的圓錐曲線。並且該圓錐曲線切 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 的切點 $T_A,T_B,T_C$ 滿足

$$\frac{AT_C}{T_CB}=\frac{AT_B}{T_BC}=k,\frac{BT_A}{T_AC}=1.$$

而不同 $k$ 值所產生的包絡錐線類型:

| $k$ 的範圍 | 錐線類型 |
|---|---|
| $k>0$ | 內切橢圓 |
| $k=0$ | 動線過一定點( $BC$ 中點) |
| $k\in(-2,0)$ | 旁切雙曲線 |
| $k=-2$ | 旁切拋物線 |
| $k<-2$ | 旁切橢圓 |

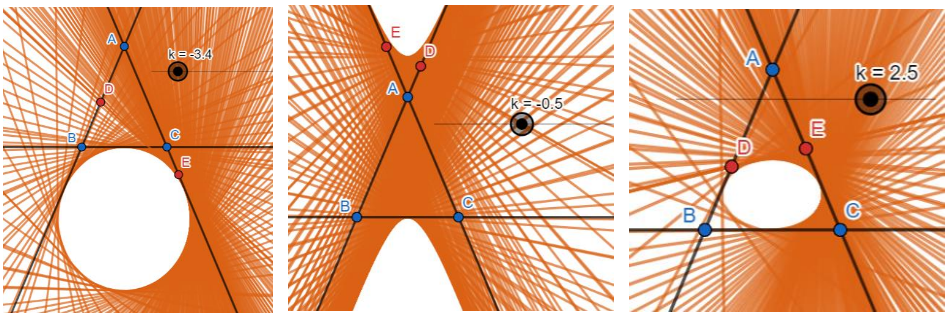



**圖 25**

5. 任意三角形 $ABC$ ，$D,E$ 分別為直線 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ 上的動點滿足

$$\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}=\text{任意定值}\ k,$$

則，動線 $\overleftrightarrow{DE}$ 的包絡線為切 $ABC$ 三邊的圓錐曲線。並且該圓錐曲線切 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 的切點 $T_A,T_B,T_C$ 滿足

$$\frac{AT_C}{T_CB}=\frac{AT_B}{T_BC}=k,\frac{BT_A}{T_AC}=1.$$

6. 任意三角形 $ABC$ ，$D,E$ 分別為直線 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ 上的動點滿足

$$\frac{AD}{DB}+r\frac{AE}{EC}=\text{定值}\ k,$$

則，動線 $\overleftrightarrow{DE}$ 的包絡線為切 $ABC$ 三邊的圓錐曲線。並且該圓錐曲線切 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 的切點 $T_A,T_B,T_C$ 滿足

$$\frac{AT_C}{T_CB}=k,\frac{AT_B}{T_BC}=\frac{k}{r},\frac{BT_A}{T_AC}=\frac{1}{r}.$$

7. 圓錐曲線 $\boldsymbol{C}$ 有外切三邊形 $AA_1A_2$，$\boldsymbol{C}$ 上有一點 $T$，過 $T$ 作 $\boldsymbol{C}$ 的切線分別截 $\overleftrightarrow{AA_1},\overleftrightarrow{AA_2}$ 於 $X_1,X_2$。令 $a_1=\frac{AX_1}{X_1A_1},a_2=\frac{AX_2}{X_2A_2}$ 。$\boldsymbol{C}$ 與 $\overleftrightarrow{AA_1},\overleftrightarrow{AA_3}$ 切於 $Y_1,Y_2$。令 $r_1=\frac{A_1Y_1}{Y_1A},r_2=\frac{A_2Y_2}{Y_2A}$，則

$$r_1a_1+r_2a_2=1\,.$$

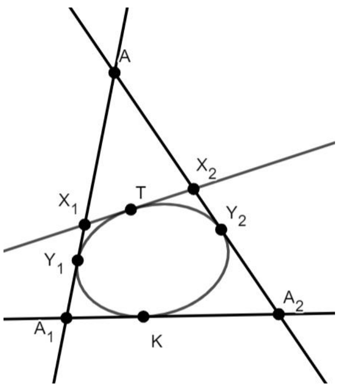



**圖 26**

8. 圓錐曲線 $\boldsymbol{C}$ 有外切三邊形 $AA_1A_2$，$\boldsymbol{C}$ 上有一點 $T$，過 $T$ 作 $\boldsymbol{C}$ 的切線分別截 $\overleftrightarrow{AA_1},\overleftrightarrow{AA_2}$ 於 $X_1,X_2$。$\boldsymbol{C}$ 分別切 $\overleftrightarrow{AA_1},\overleftrightarrow{AA_2}$ 於 $Y_1,Y_2$，則

$$(A,A_1;X_1,Y_1)+(A,A_2;X_2,Y_2)=1.$$

9. 假設圓錐曲線 $\boldsymbol{C}$ 有外切四邊形 $AA_1A_2A_3$ 滿足存在射影變換使得能將 $\boldsymbol{C}$ 變換為圓形、$AA_1A_2A_3$ 變換為菱形。$\boldsymbol{C}$ 的一條切線過 $\boldsymbol{C}$ 上一點 $T$ 截 $\overleftrightarrow{AA_\iota}$ 於 $X_i$，射線 $\overrightarrow{AA_\iota}$ 第一次交 $\boldsymbol{C}$ 於 $Y_i$，$\boldsymbol{C}$ 的一條過 $Y_2$ 的切線分別交 $\overleftrightarrow{AA_1},\overleftrightarrow{AA_2}$ 於 $Z_1,Z_2$，存在 $r_1,r_2,r_3$ 使得

$$r_1a_1+r_2a_2+r_3a_3=1.$$

而 $r_1,r_2,r_3$ 由以下聯立方程式決定:

$$\begin{cases} r_1\dfrac{AY_1}{Y_1A_1}+0+0=1 \\ r_1\dfrac{AZ_1}{Z_1A_1}+r_2\dfrac{AY_2}{Y_2A_2}+r_3\dfrac{AZ_2}{Z_2A_3}=1 \\ 0+0+r_3\dfrac{AY_3}{Y_3A_3}=1 \end{cases}.$$

其中，$a_i$ 為 $\boldsymbol{C}$ 上任意一條切線截 $\overleftrightarrow{AA_\iota}$ 於 $X_i$ 的有向線段比例 $\frac{AX_i}{X_iA_i}$。

10. 圓錐曲線 $\boldsymbol{C}$ 有外切 $n+1\ (n\geq 2,n\in\mathbb{N})$ 邊形 $AA_1\cdots A_n$ ，$\boldsymbol{C}$ 的一條切線過 $\boldsymbol{C}$ 上一點 $T$ 截 $\overleftrightarrow{AA_\iota}$ 於 $X_i$。直線 $\overleftrightarrow{AA_\iota}$ 交 $\boldsymbol{C}$ 於兩點 $Y_{i,1},Y_{i,2}$ (可重合)。則

$$\sum_{i=1}^{n}G\left(\left(A,A_i;X_i,Y_{i,1}\right),\left(A,A_i;X_i,Y_{i,2}\right)\right)=1\,,$$

其中函數 $G$ 的定義同 **定義 4.1** 。

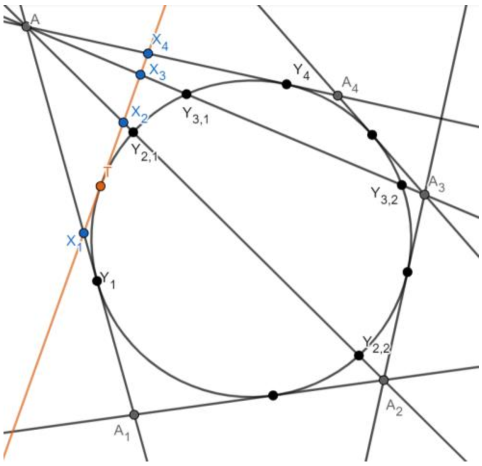



**圖 27**

# 陸、　討論與結論

我們從老師提供的題目開始，持續將問題中的圓外切正多邊形推廣到任意圓錐曲線外切多邊形，過程中利用電腦軟體不斷驗證猜想，從中又發現了命題與交比的「幾何平均」有關，最終也找到了能用交比來呈現的簡短結論——截線交比的幾何平均和為 1 (**定理 4.2**)。

**定理 4.2** 足以當作我們所追求的數學原理，它不僅能夠解釋最一開始的問題，之後推導出的所有三邊形與四邊形的定理也都是它的退化。

發現這個結論我們實屬驚訝，在較為複雜的圓錐曲線下竟有這般性質。然而這樣複雜的形式若想在平面再進行拓展也許會有些困難，未來期望能在更高維度或是橢圓曲線等方向發展，找出類似的性質。

# 柒、　參考資料及其他


[1] Evan Chen (2016). *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads.* American Mathematical Society.

[2] 姜很肇（2021 年 4 月 14 日）。“外接圆锥曲线”关于三角形的塞瓦锥心变换。知乎。https://zhuanlan.zhihu.com/p/364879696

[3] 廖偉恩（2012 年）。以國中幾何角度看圓錐曲線。丘成桐中學數學獎第三屆得獎作品。http://www.math.ntu.edu.tw/~shing_tung/PDF/3rd/Liao.pdf

# 【評語】050412

作品討論一個幾何問題的推廣： 設正三角形 ABCD 的內切圓近角 A 的切線交正方形於 I,K 兩點, 也交對角線於 J，則 AJ/JC + AI/IB+AK/KD =1.

作者對以上定理給出兩個證明，並且証明正 n 邊形內切圓的切線, 也有類似結果。接著，作者考慮交比和，使得這個結論不只有對內切圓是對的，而是若交比和為定值其包絡線之軌跡可以被證明為圓錐曲線。本作品以簡潔的手法推得有趣的定理，作者利用了一些射影幾何的定理，以及交比的關係，巧妙結合三角函數、解析幾何、平面幾何做完整的討論，內容精彩，值得鼓勵。

# 作品海報

# 壹、 前言

本文從一個與**線段比例和**有關的幾何問題出發，首先將問題推廣到了**正多邊形**及**等腰三角形**。再由觀察等腰三角形的結論，推導出**線段比例和為定值**時動線所形成的**包絡線**為**圓錐曲線**。將包絡錐線的結論推廣到任意三角形時，發現問題可以整理成**交比和為定值**的形式。相同概念套用到四邊形乃至任意多邊形的推廣，最終也找出了能以**交比的幾何平均和**呈現的結論。

## 一、 研究動機

**【原問題】**已知圓 $O$ 為正方形 $ABCD$ 的內切圓，設 $P,Q$ 兩點分別為圓 $O$ 與 $\overline{AD}$ 、$\overline{AB}$ 的切點，若 $T$ 為 $PQ$ 弧上異於 $P,Q$ 的任意點，且過 $T$ 點作圓弧 $PQ$ 的切線，交 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{AD}$ 於 $I,J,K$ 三點，試證：

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{AJ}}{\overline{JC}}+\frac{\overline{AK}}{\overline{KD}}=1。$$

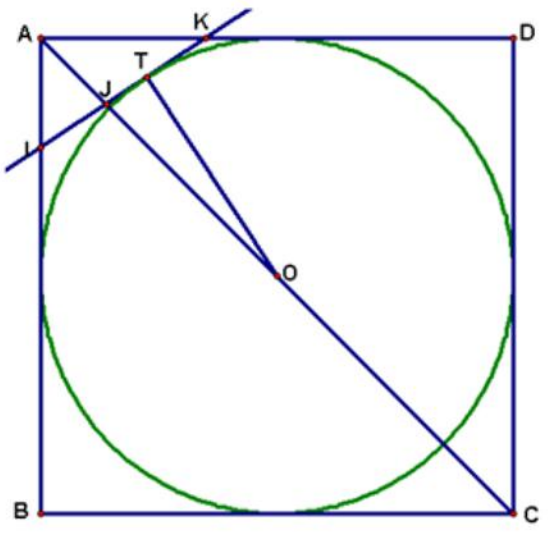



圖 1

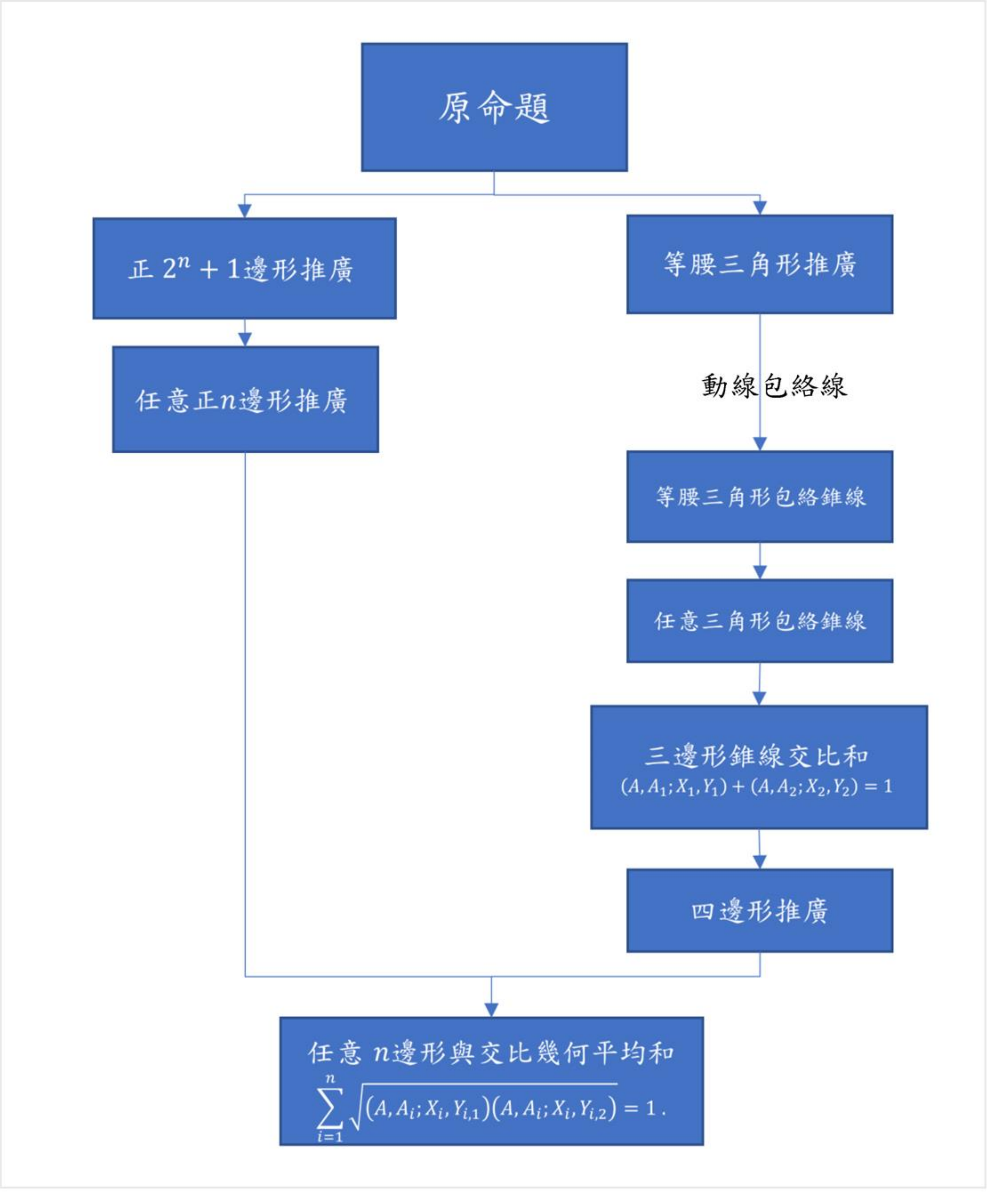
## 二、 研究目的

1. 正多邊形時截線比例和等於 1 的推廣。
2. 等腰三角形時截線比例和為定值的推廣。
3. 三角形時比例和為定值與內切圓錐曲線的關係。
4. 圓錐曲線外切多邊形與截線比例和的關係。

## 三、 研究設備及器材

紙、筆、電腦、GeoGebra 計算機套件、WolframAlpha 線上計算機。

# 貳、 研究流程圖




# 參、 研究過程與方法與結果

## 一、 問題討論及初步推廣

**【推廣問題一、二】**對於任意正 $n$ 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$，其中 $n\in\mathbb{N}$，圓 $O$ 為其內切圓，$P,Q$ 分別為內切圓在 $A_1A_2,A_1A_n$ 上的切點，若 $T$ 為 $PQ$ 弧上異於 $P,Q$ 的任意點，過 $T$ 點作圓弧 $PQ$ 的切線，交 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_1A_3}$、…、$\overline{A_1A_n}$ 於 $B_2,B_3,\ldots,B_n$ 共 $n-1$ 個點，則

$$\frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{B_2A_2}}+\frac{\overline{A_1B_3}}{\overline{B_3A_3}}+\cdots+\frac{\overline{A_1B_n}}{\overline{B_nA_n}}=1.$$

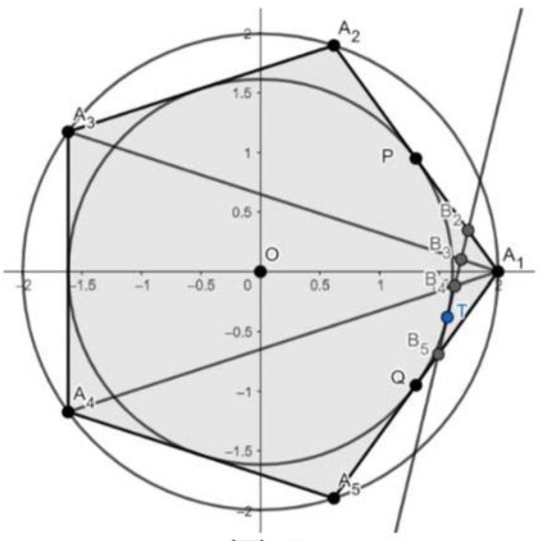



圖 2

【推廣問題三】對於任意等腰三角形 $ABC$，其中 $\overline{AB}=\overline{AC}$，圓 $I$ 為其內切圓，$P,Q$ 分別為內切圓在 $\overline{AB},\overline{AC}$ 上的切點，若 $T$ 為 $PQ$ 弧上異於 $P,Q$ 的任意點，過 $T$ 點作圓弧 $PQ$ 的切線，交 $\overline{AB},\overline{AC}$ 於 $D,E$，則

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}+\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\text{定值}.$$

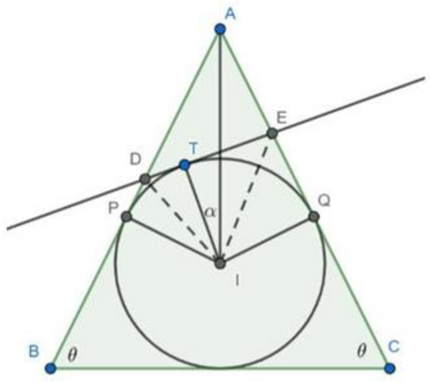


圖 3

【定義 1.1】定義 $\overline{AB}$ 為 $AB$ 的無向線段、$\overleftrightarrow{AB}$ 為 $AB$ 直線，$AB$ 為 $A$ 到 $B$ 的有向線段。

【定義 1.2】令 $A,B,P$ 為共線的三點，若 $P\in AB$ 線段，則有向線段比值 $\frac{PA}{PB}$ 取負，否則取正。稱此值為 $A,B,P$ 的 **單比 (simple ratio)**，另記作 $(A,B;P)$。

【定理 1.1】等腰三角形 $ABC$ 中 $\overline{AB}=\overline{AC}$，$D,E$ 分別為直線 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ 上的動點滿足

$$\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}=\sec\angle B-1,$$

則，動線 $\overleftrightarrow{DE}$ 的包絡線為 $ABC$ 的內切圓。

## 二、 預備定理與定義

【預備定理 2.1】(布里昂雄定理/Brianchon's) 令 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4,\ell_5,\ell_6$ 為任三線不共點的六線，定義 $P_{ij}=\ell_i\cap\ell_j$，則 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4,\ell_5,\ell_6$ 共切一圓錐曲線若且唯若

$$\overleftrightarrow{P_{12}P_{45}},\overleftrightarrow{P_{23}P_{56}},\overleftrightarrow{P_{34}P_{61}}\ \text{三線共點。}$$

【預備定理 2.1.1】(布里昂雄定理的退化/牛頓三號定理) 對於任三線不共點的四線 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$，定義 $P_{ij}=\ell_i\cap\ell_j$，若圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 分別切 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$ 於 $Q_1,Q_2,Q_3,Q_4$，則

$$\overleftrightarrow{Q_1Q_3},\overleftrightarrow{Q_2Q_4},\overleftrightarrow{P_{12}P_{34}},\overleftrightarrow{P_{23}P_{41}}\ \text{四線共點。}$$

【預備定理 2.1.2】(布里昂雄定理的退化) 對於任三線不共點的四線 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$，定義 $P_{ij}=\ell_i\cap\ell_j$，若圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 分別切 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$ 於 $Q_1,Q_2,Q_3,Q_4$，則

$$\overleftrightarrow{Q_1P_{23}},\overleftrightarrow{Q_2P_{41}},\overleftrightarrow{P_{12}P_{34}}\ \text{三線共點。}$$

【預備定理 2.1.3】(布里昂雄定理的退化/賽瓦錐線) 三角形 $ABC$ 中，$T_A,T_B,T_C$ 分別為 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 上的點，則存在一圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 分別切 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 於 $T_A,T_B,T_C$ 若且唯若

$$\overleftrightarrow{AT_A},\overleftrightarrow{BT_B},\overleftrightarrow{CT_C}\ \text{三線共點。}$$

稱 $\mathcal{C}$ 為三角形 $ABC$ 關於 $T_A,T_B,T_C$ 的**賽瓦錐線**。

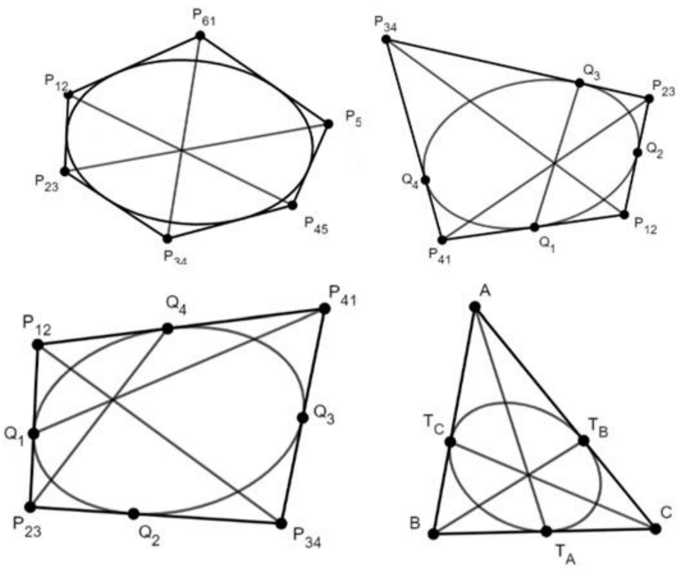


圖 4 - Brianchon 定理及其退化

【定義 2.1】對於共線(非無窮遠線)的四點 $P_1,P_2,P_3,P_4$，定義**四點**的 **交比 (cross ratio)** 為

$$(P_1,P_2;P_3,P_4)=\frac{(P_1,P_2;P_3)}{(P_1,P_2;P_4)}=\frac{P_3P_1}{P_3P_2}\Big/\frac{P_4P_1}{P_4P_2}.$$

## 三、 三邊形推廣

【定理 3.1、3.2】

任意三角形 $ABC$ 中，$D,E$ 分別為直線 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ 上的動點滿足

$$\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}=\text{任意定值 }k,$$

則，動線 $\overleftrightarrow{DE}$ 的包絡線為切 $ABC$ 三邊的圓錐曲線。並且該圓錐曲線切 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 的切點 $T_A,T_B,T_C$ 滿足

$$\frac{AT_C}{T_CB}=\frac{AT_B}{T_BC}=k,\frac{BT_A}{T_AC}=1.$$

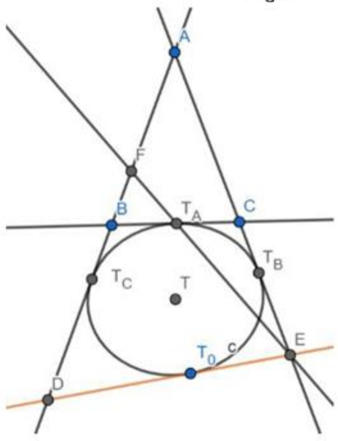


圖 5

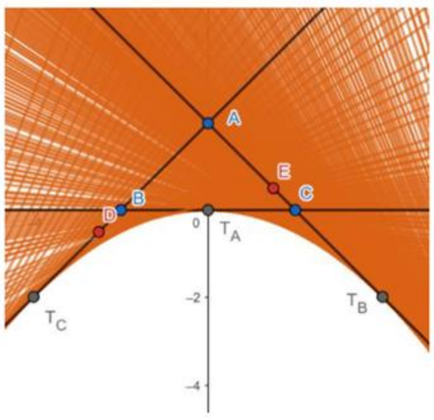


圖 6

透過仿射變換與直角坐標解析可推得

錐線方程式 $\mathcal{C}:(t+1)^2x^2-t(t+2)y^2+2t(t+1)y=0$，

其中 $k=\frac{-t}{t+1}$，不同 $k$ 值所產生的包絡錐線類型：

| $k$ 的範圍 | 錐線類型 |
|---|---|
| $k>0$ | 內切橢圓 |
| $k=0$ | 動線過一定點($BC$ 中點) |
| $k\in(-2,0)$ | 旁切雙曲線 |
| $k=-2$ | 旁切拋物線 |
| $k<-2$ | 旁切橢圓 |

表格 1

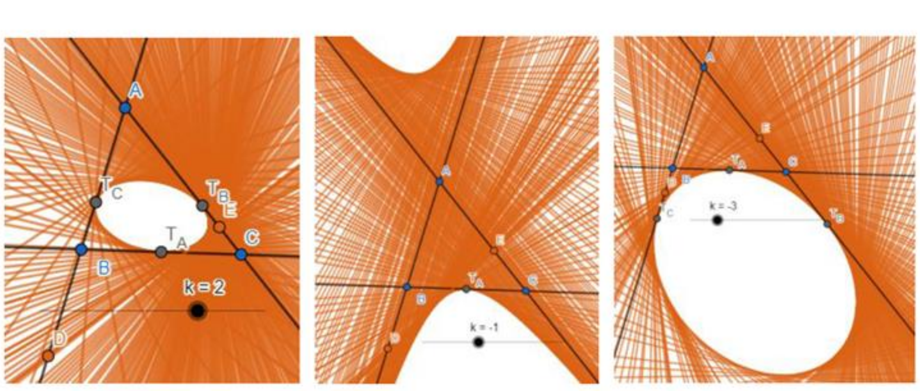


圖 7 - 由左到右依序為 $k=2,-1,-3$ 的情況

【定理 3.3】

任意三角形 $ABC$，$D,E$ 分別為直線 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ 上的動點滿足

$$\frac{AD}{DB}+r\frac{AE}{EC}=\text{定值 }k,$$

則，動線 $\overleftrightarrow{DE}$ 的包絡線為切 $ABC$ 三邊的圓錐曲線。並且該圓錐曲線切 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 的切點 $T_A,T_B,T_C$ 滿足

$$\frac{AT_C}{T_CB}=k,\frac{AT_B}{T_BC}=\frac{k}{r},\frac{BT_A}{T_AC}=\frac{1}{r}.$$

【證明】

只要證明關於 $T_A,T_B,T_C$ 的賽瓦錐線上的任意一條切線所截的 $D,E$ 皆滿足 $\frac{AD}{DB}+r\frac{AE}{EC}=k$ 即可。令 $\overleftrightarrow{ET_A}\cap\overleftrightarrow{AB}=F$。搭配孟氏定理可將命題整理，等價於

$$\frac{1}{BD}+\frac{1}{BA}=\frac{1}{BT_C}+\frac{1}{BF}\ 。$$

此式與 Candy's 定理的描述雷同，故考慮 Candy's 定理類似的證明思路：

若 $(D,T_C;B,A)=(D,B;F,A)$，則有

$$\frac{1}{BT_C}+\frac{1}{BF}=\frac{1}{BD}+\frac{1}{BA}\ 。$$

故命題等價到證明

$$(D,T_C;B,A)=(D,B;F,A)\,.$$

由 **預備定理** 可知

$\overleftrightarrow{BE},\overleftrightarrow{DC},\overleftrightarrow{T_BT_C}$ 共點，$\overleftrightarrow{BT_B},\overleftrightarrow{ET_A},\overleftrightarrow{DC}$ 共點。

所以

$(D,T_C;B,A)=(C,T_B;E,A)=(D,B;F,A)$。

故得證。 ∎

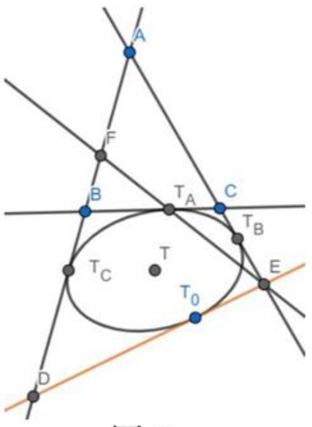


圖 8

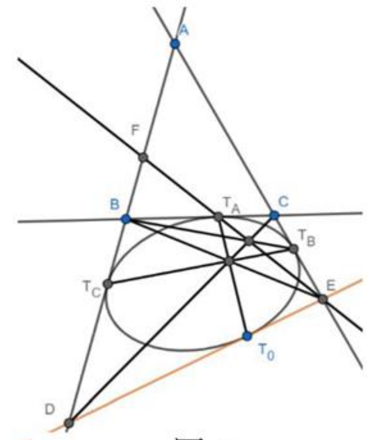


圖 9

【定理 3.4】圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 有外切三邊形 $AA_1A_2$，$\mathcal{C}$ 上有一點 $T$，過 $T$ 作 $\mathcal{C}$ 的切線分別截 $\overleftrightarrow{AA_1},\overleftrightarrow{AA_2}$ 於 $X_1,X_2$。令 $a_1=\frac{AX_1}{X_1A_1},a_2=\frac{AX_2}{X_2A_2}$。$\mathcal{C}$ 與 $\overleftrightarrow{AA_1},\overleftrightarrow{AA_2}$ 切於 $Y_1,Y_2$。令 $r_1=\frac{A_1Y_1}{Y_1A},r_2=\frac{A_2Y_2}{Y_2A}$，則

$$r_1a_1+r_2a_2=1\,.$$

【定理 3.5】圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 有外切三邊形 $AA_1A_2$，$\mathcal{C}$ 上有一點 $T$，過 $T$ 作 $\mathcal{C}$ 的切線分別截 $\overleftrightarrow{AA_1},\overleftrightarrow{AA_2}$ 於 $X_1,X_2$。$\mathcal{C}$ 分別切 $\overleftrightarrow{AA_1},\overleftrightarrow{AA_2}$ 於 $Y_1,Y_2$，則

$$(A,A_1;X_1,Y_1)+(A,A_2;X_2,Y_2)=1.$$

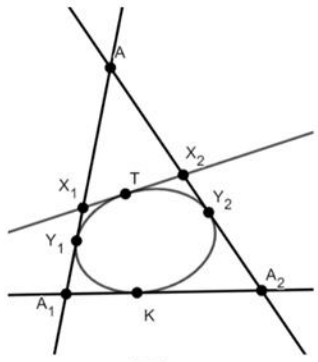


圖 10

## 四、 四邊形與多邊形推廣

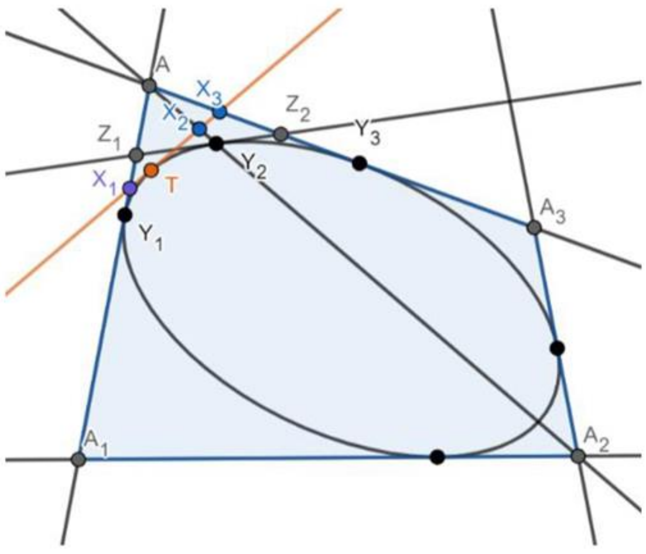



圖 11

【定理 4.1】假設圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 有外切四邊形 $AA_1A_2A_3$ 滿足存在射影變換使得能將 $\mathcal{C}$ 變換為圓形、$AA_1A_2A_3$ 變換為菱形。$\mathcal{C}$ 的一條切線過 $\mathcal{C}$ 上一點 $T$ 截 $\overleftrightarrow{AA_i}$ 於 $X_i$，射線 $\overrightarrow{AA_i}$ 第一次交 $\mathcal{C}$ 於 $Y_i$，$\mathcal{C}$ 的一條過 $Y_2$ 的切線分別交 $\overleftrightarrow{AA_1},\overleftrightarrow{AA_3}$ 於 $Z_1,Z_2$，存在 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 使得

$$r_1a_1+r_2a_2+r_3a_3=1.$$

而 $r_1,r_2,r_3$ 由以下聯立方程式決定:

$$\begin{cases} r_1\dfrac{AY_1}{Y_1A_1}+0+0=1 \\ r_1\dfrac{AZ_1}{Z_1A_1}+r_2\dfrac{AY_2}{Y_2A_2}+r_3\dfrac{AZ_2}{Z_2A_3}=1 \\ 0+0+r_3\dfrac{AY_3}{Y_3A_3}=1 \end{cases}.$$

其中，$a_i$ 為 $\mathcal{C}$ 上任意一條切線截 $\overleftrightarrow{AA_i}$ 於 $X_i$ 的有向線段比例 $\frac{AX_i}{X_iA_i}$。

整理後可以得到

$$r_1a_1=(A,A_1;X_1,Y_1);\ r_3a_3=(A,A_3;X_3,Y_3);$$
$$r_2a_2=(A,A_2;X_2,Y_2)\big(1-(A,A_3;Z_2,Y_3)-(A,A_1;Z_1,Y_1)\big).$$

經過 GeoGebra 驗算發現，若令 $\overleftrightarrow{AA_2}$ 交 $\mathcal{C}$ 於 $Y_{2,1},Y_{2,2}$，則

$$r_2a_2=\sqrt{(A,A_2;X_2,Y_{2,1})(A,A_2;X_2,Y_{2,2})},$$

若 $(A,A_2;X_2,Y_{2,1})$ 及 $(A,A_2;X_2,Y_{2,2})$ 為正。

$(A,A_2;X_2,Y_{2,1})$ 及 $(A,A_2;X_2,Y_{2,2})$ 同號，並且

$$r_2a_2=-\sqrt{(A,A_2;X_2,Y_{2,1})(A,A_2;X_2,Y_{2,2})},$$

若 $(A,A_2;X_2,Y_{2,1})$ 及 $(A,A_2;X_2,Y_{2,2})$ 為負。

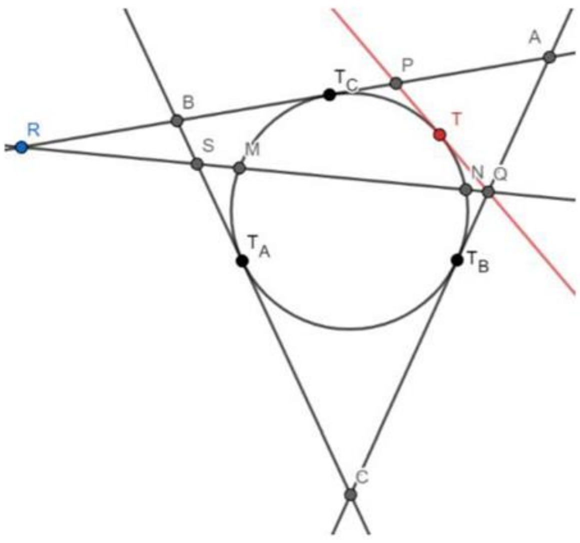



圖 12

【定義 4.1】定義雙變數函數 $G$ 為 $G(a,b)=\begin{cases}\sqrt{a\cdot b}, if\ a,b\ge 0\\ -\sqrt{a\cdot b}, if\ a,b<0\end{cases}.$

【引理 4.1】三角形 $ABC$ 中，內(旁)切圓 ω 切 $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{CA},\overleftrightarrow{AB}$ 於 $T_A,T_B,T_C$。過 ω 上一點 $T$ 作 ω 的切線交 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{AC}$ 於 $P,Q$。在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上找一點 $R$ 使得 $\overleftrightarrow{QR}$ 交 ω 於兩點 $M,N$。令 $\overleftrightarrow{QR}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 $S$。則

$$G\big((R,Q;S,M),(R,Q;S,N)\big)+(R,P;B,T_C)=(R,A;B,T_C).$$

【證明】透過孟氏定理可將命題等價到：$(A,Q;C,T_B)+(A,P;B,T_C)=1$，而由 **定理 3.5** 即可得證。

【定理 4.2】圓錐曲線 $\mathcal{C}$ 有外切 $n+1\ (n\ge 2, n\in\mathbb{N})$ 邊形 $AA_1\cdots A_n$ ，$\mathcal{C}$ 的一條切線過 $\mathcal{C}$ 上一點 $T$ 截 $\overleftrightarrow{AA_i}$ 於 $X_i$。直線 $\overleftrightarrow{AA_i}$ 交 $\mathcal{C}$ 於兩點 $Y_{i,1},Y_{i,2}$ (可重合)。則

$$\sum_{i=1}^{n}G\left((A,A_i;X_i,Y_{i,1}),(A,A_i;X_i,Y_{i,2})\right)=1.$$

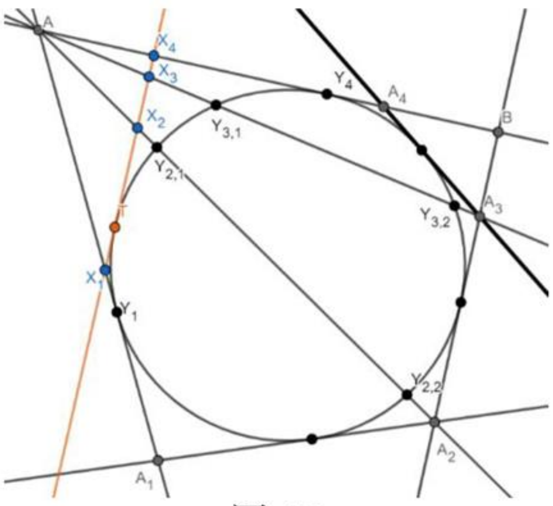



圖 13

【證明】

透過射影變換，命題可以等價於證明任意圓外切多邊形能夠成立即可。

考慮數學歸納法。

(i) 當 $n=2$ 時，因 **定理 3.5** 而成立。

(ii) 設 $n=k$ 時命題成立。

(iii) 當 $n=k+1$ 時，令 $Y_{k+1}=Y_{k+1,1}=Y_{k+1,2}$，

令 $\overleftrightarrow{A_{k-1}A_{k-2}}\cap\overleftrightarrow{AA_k}=B$，由假設則有

$$\sum_{i=1}^{k-1}G\left((A,A_1;X_i,Y_{1,1}),(A,A_1;X_i,Y_{1,2})\right)+G\left((A,B;X_{k+1},Y_{k+1,1}),(A,B;X_{k+1},Y_{k+1,2})\right)=1.$$

由 **引理 4.1** 我們有

$$G\left((A,A_k;X_k,Y_{k,1}),(A,A_k;X_k,Y_{k,2})\right)+(A,A_{k+1};X_{k+1},Y_{k+1})=G\left((A,B;X_{k+1},Y_{k+1,1}),(A,B;X_{k+1},Y_{k+1,2})\right).$$

所以

$$1=\sum_{i=1}^{k}G\left((A,A_1;X_i,Y_{1,1}),(A,A_1;X_i,Y_{1,2})\right)+(A,A_{k+1};X_{k+1},Y_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}G\left((A,A_i;X_i,Y_{i,1}),(A,A_i;X_i,Y_{i,2})\right).$$

故由數學歸納法得證。 ∎

# 肆、 討論與結論

此篇研究由最一開始的命題，不斷地進行推廣。從**正多邊形**到**等腰三角形**，然後又發現三角形中**比例和為任意定值**所圍出的**包絡線**會是**圓錐曲線**。引入加權比例和以及交比，稍加變換後所推得的「**錐線外切三邊形之截線交比和為 1**」又為後續多邊形的推廣提供靈感。

進行**四邊形的推廣**時，利用特殊點的位置(將切點移動到錐線與四邊形的邊與對角線的交點)，推測並證明出比例和為定值時**各比例的加權權重**。再透過觀察先前所推導出的三邊形的結論，將比例和的每一項化簡成了「**交比的幾何平均**」的形式，最終也成功將定理推廣到多邊形。

研究過程中我們有嘗試將性質推廣到三維空間，然未有所獲。未來期望能夠將這些平面線段比例和的定理推廣到空間中的球、橢球等形式。

# 伍、 參考資料及其他


[1] Evan Chen (2016). *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*. American Mathematical Society.

[2] 姜很犟 ( 2021 年 4 月 14 日 )。“外接圆锥曲线”关于三角形的塞瓦锥心变换。知乎。 https://zhuanlan.zhihu.com/p/364879696

[3] 廖偉恩 ( 2012 年 )。以國中幾何角度看圓錐曲線。丘成桐中學數學獎第三屆得獎作品。http://www.math.ntu.edu.tw/~shing_tung/PDF/3rd/Liao.pdf