中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第二名

050411

從心開始—三角形的四心到各邊距離和

學校名稱：國立彰化高級中學

作者：	指導老師：
高二 楊宥維	龔詩尹
高二 楊豈東	朱芳寅

關鍵詞：三角形的四心、尤拉線、卡諾定理

摘要

此研究討論三角形 ABC 的外心、重心、垂心、內心到三邊之距離，並依銳角、直角及鈍角三角形，去比較各距離總和之大小關係及相互之間的關聯性。其主要結果為：

1. 用外接圓半徑 R 及 $\angle A, \angle B, \angle C$ 表示各心到三邊之距離。
2. 設外心、重心、垂心、內心到三邊之距離總和依序為d_1, d_2, d_3, d_4，其大小關係為：
   (1)在銳角Δ中，$d_1 \geq d_2 \geq d_4 \geq d_3$，僅當正Δ時，等號成立。
   (2)在直角Δ中，$d_1 > d_2 > d_4 > d_3$。
   (3)在鈍角Δ中，$d_1 > d_2 > d_4$恆成立。d_3與d_1 、d_2 、d_4比較，並無絕對關係，但在等腰鈍角Δ，我們給出其大小順序的臨界值。
3. 在銳角Δ及直角Δ中，等式$d_2 = \frac{2}{3}d_1 + \frac{1}{3}d_3$和$d_2 + \frac{1}{3}d_1 - \frac{1}{3}d_3 - \frac{1}{3}d_4 = R$ 恆成立。

壹、 研究動機

在參考文獻一中，任意銳角ΔABC中，其外心到三邊之距離總和可表示成內切圓半徑與外接圓半徑之和，此性質稱為卡諾定理。我們試著找出重心、垂心、內心到三邊之距離總合，並做一系列的相關探討。

貳、 研究目的

1.求出四心到各邊之距離
2.比較四心到各邊之距離總和的大小
3.四心到各邊之距離總和之關係

參、 研究設備及器材

筆、紙、Geogebra、WolframAlpha

肆、研究過程及方法

首先我們要討論三角形 ABC 的外心、重心、垂心、內心到三邊之距離，我們用外接圓半徑來控制三角形的尺寸大小，用$\angle A, \angle B, \angle C$來描述三角形的形狀，故其距離皆用 R 及 $\angle A, \angle B, \angle C$來表示。

由於重心、內心恆在三角形的內部，但外心、垂心會因三角形的類型而改變，故我們分銳角、直角、鈍角三角形去探討。

特地討論等腰三角形，是想了解在銳角三角形時，各心到三邊距離總和的差距；在鈍角三角形時，是想知道大小順序中，三內角所扮演的角色。

最後我們給出各心到三邊之距離總和，其相互之間的關係可用恆等式去連接。

符號定義

在ΔABC中，設$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$。$S=\frac{a+b+c}{2}$。h_a、h_b、h_c依序為$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$邊上的高；設r、R依序為內切圓半徑、外接圓半徑。ΔABC的面積=Δ。

P點到直線$\overleftrightarrow{AB}$的距離設為 $d\left(P,\overleftrightarrow{AB}\right)$，$\sum d\left(P,\overleftrightarrow{AB}\right)$定義為 $d\left(P,\overleftrightarrow{AB}\right)+d\left(P,\overleftrightarrow{BC}\right)+d\left(P,\overleftrightarrow{AC}\right)$。

一、銳角三角形

在這一小節，我們討論在銳角ΔABC中，外心、重心、垂心、內心到三邊之距離總和。

引理 1：

ΔABC中，$\cos A+\cos B+\cos C-1=\frac{r}{R}$。

證明：

利用餘弦定理，

$$
\begin{aligned}
&\cos A+\cos B+\cos C-1\\
&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-1\\
&=\frac{1}{2abc}[a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)-2abc]\\
&=\frac{1}{2abc}\{a[(b+c)^2-a^2]+b[(c-a)^2-b^2]+c[(a-b)^2-c^2]\}\\
&=\frac{1}{2abc}[a(b+c+a)(b+c-a)+b(c-a+b)(c-a-b)+c(a-b+c)(a-b-c)]\\
&=\frac{(b+c-a)}{2abc}[a(b+c+a)+b(c-a-b)-c(a-b+c)]\\
&=\frac{(b+c-a)}{2abc}[a(a+b-c)+2ac-b(a+b-c)-c(-a-b+c)-2ac]\\
&=\frac{(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{2abc}\\
&=\frac{8\cdot(\frac{a+b+c}{2})(\frac{b+c-a}{2})(\frac{a+b-c}{2})(\frac{a-b+c}{2})}{(\frac{a+b+c}{2})2abc}
\end{aligned}
$$

利用三角形面積公式：$\Delta=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}=\frac{abc}{4R}=rS$

$$
\begin{aligned}
&\frac{8\cdot(\frac{a+b+c}{2})(\frac{b+c-a}{2})(\frac{a+b-c}{2})(\frac{a-b+c}{2})}{(\frac{a+b+c}{2})2abc}\\
&=\frac{8\cdot\Delta^2}{S\cdot(8\cdot R\cdot\Delta)}=\frac{\Delta}{S\cdot R}=\frac{r}{R}
\end{aligned}
$$

得證。

定理1.1：

銳角 ΔABC 中，設 I,O,G,H 依序為內心、外心、重心、垂心，則

(1) $\sum d(I,\overleftrightarrow{AB}) = 3r = 3R(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$

(2) $\sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) = R(\cos A + \cos B + \cos C) = R + r$

(3) $\sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) = \frac{2\Delta}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{2R}{3}(\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A)$

(4) $\sum d(H,\overleftrightarrow{AB}) = 2\Delta\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - 2(R+r) = 2R(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A)$

證明：

(1)ΔABC 的內心到三邊等距離，距離都為r，利用引理1可知

$$\sum d(I,\overleftrightarrow{AB}) = 3r = 3R(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$$

(此結果對於任意三角形皆成立。)

(2)如圖(一)，O為銳角ΔABC之外心，O在ΔABC的內部。

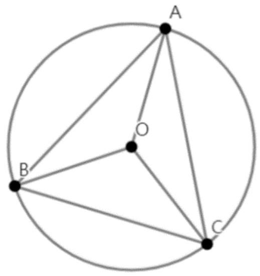
考慮ΔOBC，已知$\overline{OB} = \overline{OC} = R$，且$\angle BOC = 2\angle A$

可推得：$\boxed{d(O,\overleftrightarrow{BC}) = R\cos A}$。

同理可得：$\boxed{d(O,\overleftrightarrow{CA}) = R\cos B}$、$\boxed{d(O,\overleftrightarrow{AB}) = R\cos C}$。

由上式討論，合併引理1，可知

$$\sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) = R(\cos A + \cos B + \cos C) = R\left(1+\frac{r}{R}\right) = R + r$$



圖(一)

(3)如圖(二)，G為ΔABC之重心，$\overline{GE}\perp\overline{BC}$，$\overline{AF}\perp\overline{BC}$。

由重心性質可知$\overline{DG}:\overline{DA} = 1:3$，並推得$d(G,\overleftrightarrow{BC}) = \overline{GE} = \frac{1}{3}\overline{AF} = \frac{1}{3}h_a$。

合併三角形面積公式：$\Delta = \frac{1}{2}a\cdot h_a = \frac{1}{2}ab\sin C$

及正弦定理：$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$，可得

$$\boxed{d(G,\overleftrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}h_a = \frac{2\Delta}{3a} = \frac{1}{3}(b\sin C) = \frac{1}{3}(2R\sin B\sin C)}$$

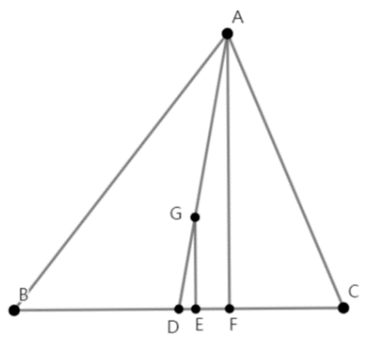
同理可得

$$\boxed{d(G,\overleftrightarrow{CA}) = \frac{2\Delta}{3b} = \frac{1}{3}(2R\sin C\sin A)}$$

$$\boxed{d(G,\overleftrightarrow{AB}) = \frac{2\Delta}{3c} = \frac{1}{3}(2R\sin A\sin B)}$$

(此結果任意三角形皆成立。)

$$\sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) = \frac{2\Delta}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{2R}{3}(\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A)$$

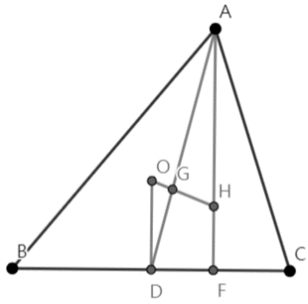


圖(二)

(4)如圖(三)，由於ΔABC是銳角三角形，所以外心O、重心 G 、垂心 H 皆在ΔABC的內部。由尤拉定理得知: O,G,H 在同一條直線(尤拉線)上，並滿足$\overline{OG}:\overline{GH}=1:2$ 。

考慮ΔODG和ΔHAG ，因為$\angle ODG=\angle HAG$ ($\overline{OD}//\overline{AH}$)，且$\angle OGD=\angle HGA$

所以$\Delta ODG\sim\Delta HAG$ (AA相似)，可得$\overline{OD}:\overline{AH}=\overline{OG}:\overline{GH}=1:2$。



圖(三)

$$\boxed{d\left(H,\overleftrightarrow{BC}\right)}=\overline{AF}-\overline{AH}=h_a-2\overline{OD}=\frac{2\Delta}{a}-2d\left(O,\overleftrightarrow{BC}\right)$$

$$=2R(\sin B\sin C-\cos A)=\boxed{3d\left(G,\overleftrightarrow{BC}\right)-2d\left(O,\overleftrightarrow{BC}\right)}$$

同理可得：

$$d\left(H,\overleftrightarrow{CA}\right)=\frac{2\Delta}{b}-2d\left(O,\overleftrightarrow{CA}\right)=2R(\sin C\sin A-\cos B)$$

$$d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)=\frac{2\Delta}{c}-2d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)=2R(\sin A\sin B-\cos C)$$

$$\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)=2\Delta\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-2\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)=2\Delta\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-2(R+r)$$

$$=2R(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)-2R\,(\cos A+\cos B+\cos C)$$

另一方面，$-\cos A+\sin B\sin C=\cos(B+C)+\sin B\sin C=\cos B\cos C$，即

$\boxed{d\left(H,\overleftrightarrow{BC}\right)=2R\cos B\cos C}$

同理可得：

$-\cos B+\sin C\sin A=\cos C\cos A$，即$\boxed{d\left(H,\overleftrightarrow{CA}\right)=2R\cos C\cos A}$

$-\cos C+\sin A\sin B=\cos A\cos B$，即$\boxed{d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)=2R\cos A\cos B}$

合併可得:

$$\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})=2R(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$$

得證。

推論 1：

銳角三角形ΔABC中，設O,G,H依序為其外心、重心、垂心，則

$$\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})+\frac{1}{3}\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})$$

證明：

$$\frac{2}{3}\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$$

$$=\frac{2}{3}(r+R)+\frac{1}{3}[2\Delta\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-2(R+r)]$$

$$=\frac{2\Delta}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)\text{得證。}$$

更精確的來說，$d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$會成立，若$\overleftrightarrow{AB}$替換成$\overleftrightarrow{BC}$,$\overleftrightarrow{CA}$亦成立。

定理1.2：

ΔABC中，設G為其重心，I 為其內心，則

(1) $\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})=\frac{2\Delta}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{2R}{3}(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)$

(2) $\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})=3r=3R(\cos A+\cos B+\cos C-1)$

(3) $\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})\geq\sum d\left(I,\overleftrightarrow{AB}\right)$ ，僅當ΔABC為正三角形時，等號成立。

證明：

(1)與(2)在定理 1.1 的證明中已明確指出，任意三角形皆成立。

(3) $\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)-\sum d\left(I,\overleftrightarrow{AB}\right)$

$$=\frac{2\Delta}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3r$$

$$=\frac{2\Delta}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{3\Delta}{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\Delta}{3}\left(\frac{ab+bc+ac}{abc}\right)-\frac{6\Delta}{a+b+c}$$

$$=\frac{2\Delta[(a+b+c)(ab+bc+ac)-9abc]}{3abc(a+b+c)}$$

利用算幾不等式可得$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$且$\frac{ab+bc+ca}{3}\geq\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

合併可得$(a+b+c)(ab+bc+ac)\geq 9abc$

所以$\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)-\sum d\left(I,\overleftrightarrow{AB}\right)\geq 0$，當 $a=b=c$ (ΔABC為正三角形)時，等號成立。

得證。

定理 1.3：

銳角ΔABC中，設I為其內心，H 為垂心，則$\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})\geq\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})$，僅當$\Delta ABC$ 為正Δ時，等號成立。

證明：

我們分 3 個步驟來處理。

步驟 1：

由定理 1.1 得知：

$$\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})-\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)=3r-[2\Delta\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-2(r+R)]$$

$$=5r+2R-2r(\frac{a+b+c}{2})(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

$$=r[5+\frac{2R}{r}-(\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}+3)]$$

$$=r[2+\frac{2R}{r}-(\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c})]$$

步驟 2：

證明$\frac{2R}{r}=\frac{4abc}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$。

由三角形面積公式:$R=\frac{abc}{4\Delta}$，$r=\frac{\Delta}{\frac{a+b+c}{2}}$及$\Delta^2=(\frac{a+b+c}{2})(\frac{-a+b+c}{2})(\frac{a-b+c}{2})(\frac{a+b-c}{2})$ 得知

$$\frac{2R}{r}=\frac{(\frac{abc}{2\Delta})}{\left[\frac{\Delta}{(\frac{a+b+c}{2})}\right]}=\frac{abc(a+b+c)}{4\Delta^2}=\frac{4abc}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

步驟 3：

由步驟 1 和 2 得知

$$\sum d\left(I,\overleftrightarrow{AB}\right)-\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$$

$$=r[2+\frac{4abc}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}-(\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c})]$$

令$b+c-a=x$，$a-b+c=y$，$a+b-c=z$

則$a=\frac{y+z}{2}$，$b=\frac{x+z}{2}$，$c=\frac{x+y}{2}$，且 $x>0$，$y>0$，$z>0$

$$\sum d\left(I,\overleftrightarrow{AB}\right)-\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$$

$$=r\left[2+\frac{\frac{1}{2}(x+y)(y+z)(x+z)}{xyz}-\frac{\left(\frac{2x+y+z}{2}\right)}{\left(\frac{y+z}{2}\right)}-\frac{\left(\frac{2y+x+z}{2}\right)}{\left(\frac{x+z}{2}\right)}-\frac{\left(\frac{2z+x+y}{2}\right)}{\left(\frac{x+y}{2}\right)}\right]$$

$$=r[2+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y+y^2x+y^2z+z^2y+z^2x+x^2z+2xyz}{xyz}\right)-\left(\frac{2x}{y+z}+1\right)-\left(\frac{2y}{x+z}+1\right)$$

$$-(\frac{2z}{x+y}+1)]$$

$$=r\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y+y^2x+y^2z+z^2y+z^2x+x^2z}{xyz}\right)-2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)\right]$$

$$=\frac{r}{2xyz(x+y)(y+z)(x+z)}[(x^2y+y^2x+y^2z+z^2y+z^2x+x^2z)(x+y)(y+z)(x+z)$$
$$-4x^2yz(x+y)(x+z)-4xy^2z(x+y)(y+z)-4xyz^2(y+z)(x+z)]$$
$$=\frac{r}{2xyz(x+y)(y+z)(x+z)}[x^4y^2+x^4z^2+y^4x^2+y^4z^2+z^4x^2+z^4y^2-2x^4yz$$
$$-2y^4xz-2z^4xy+2x^3y^3+2y^3z^3+2x^3z^3-6x^2y^2z^2]$$
$$=\frac{r}{2xyz(x+y)(y+z)(x+z)}[(x^4y^2+x^4z^2-2x^4yz)+(y^4x^2+y^4z^2-2y^4xz)$$
$$+(z^4x^2+z^4y^2-2z^4xy)+2(x^3y^3+y^3z^3+x^3z^3-3x^2y^2z^2)]$$
$$=\frac{r}{2xyz(x+y)(y+z)(x+z)}[x^4(y-z)^2+y^4(x-z)^2+z^4(x-y)^2+2(x^3y^3+y^3z^3+x^3z^3$$
$$-3x^2y^2z^2)]$$

利用算幾不等式可知$\frac{x^3y^3+y^3z^3+x^3z^3}{3}\geq\sqrt[3]{x^6y^6z^6}=x^2y^2z^2$，

並推得$\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})-\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})\geq 0$

當$\mathrm{x}=\mathrm{y}=\mathrm{z}$時，等號成立。

而$\mathrm{x}=\mathrm{y}=\mathrm{z}$時，可推得$a=b=c$，即正$\Delta$時，等號成立。

得證。

定理$\mathbf{1.4}$：

銳角ΔABC 中，設 I,O,G,H 依序為內心、外心、重心、垂心，則

$$\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})\geq\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})\geq\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})\geq\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})$$

僅當ΔABC 為正Δ時，等號成立。

證明：

由推論 1 得知$\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})+\frac{1}{3}\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})$，

由定理 1.2 及定理 1.3 得知$\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})\geq\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})\geq\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})$，故可得

$$\begin{aligned}\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})-\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})&=\left[\frac{3}{2}\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})-\frac{1}{2}\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})\right]-\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})\\&=\frac{1}{2}\left[\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})-\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})\right]\geq 0\end{aligned}$$

合併可得

$$\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})\geq\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})\geq\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})\geq\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})$$

由定理 1.2 及定理 1.3 可知僅當ΔABC 為正Δ時，等號成立。

得證。

二、等腰銳角三角形

在這一小節，我們討論等腰銳角ΔABC 中，外心、重心、垂心、內心到三邊之距離和之間的差距。

定理 2：

銳角ΔABC中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，設 I,O,G,H依序為其內心、外心、重心、垂心，則

(1) $\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)-\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)=R(2\cos B+1)(2\cos B-1)^2\geq 0$

(2) $\sum d\left(I,\overleftrightarrow{AB}\right)-\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)=R(2\cos B)(2\cos B-1)^2\geq 0$

(3) $\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)-\sum d\left(I,\overleftrightarrow{AB}\right)=\frac{R}{3}(2-2\cos B)(2\cos B-1)^2\geq 0$

(4) $\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)-\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)=\frac{R}{3}(2\cos B+1)(2\cos B-1)^2\geq 0$

證明：

因為銳角ΔABC滿足$\overline{AB}=\overline{AC}$，所以$\angle B=\angle C$ ，且$\angle A=\pi-2\angle B$

利用定理 1.1 我們可計算：

(1) $\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)-\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$

$=R(\cos A+\cos B+\cos C)-2R(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$

$=R(\cos A+2\cos B-4\cos A\cos B-2\cos^2 B)$

$=R(-\cos 2B+2\cos B+4\cos 2B\cos B-2\cos^2 B)$

利用二倍角公式：$\cos 2B=2\cos^2 B-1$，可得

$R(-\cos 2B+2\cos B+4\cos 2B\cos B-2\cos^2 B)$

$=R(1-2\cos^2 B+2\cos B+8\cos^3 B-4\cos B-2\cos^2 B)$

$=R(8\cos^3 B-4\cos^2 B-2\cos B+1)$

$=R(2\cos B+1)(2\cos B-1)^2\geq 0$

(2) $\sum d\left(I,\overleftrightarrow{AB}\right)-\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$

$=3R(\cos A+\cos B+\cos C-1)-2R(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$

$=R(3\cos A+6\cos B-3-4\cos A\cos B-2\cos^2 B)$

$=R(-3\cos 2B+6\cos B-3+4\cos 2B\cos B-2\cos^2 B)$

利用二倍角公式：$\cos 2B=2\cos^2 B-1$，可得

$R(-3\cos 2B+6\cos B-3+4\cos 2B\cos B-2\cos^2 B)$

$=R(-6\cos^2 \mathrm{B}+3+6\cos B-3+8\cos^3 B-4\cos B-2\cos^2 B)$

$=R(8\cos^3 B-8\cos^2 B+2\cos B)$

$=R(2\cos B)(2\cos B-1)^2\geq 0$

(3) $\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})-\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})$

$$=\frac{2R}{3}(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)-3R(\cos A+\cos B+\cos C-1)$$

$$=\frac{R}{3}(4\sin A\sin B+2\sin^2 B-9\cos A-18\cos B+9)$$

$$=\frac{R}{3}(4\sin 2B\sin B+2\sin^2 B+9\cos 2B-18\cos B+9)$$

利用二倍角公式：$\sin 2B=2\sin B\cos B$、$\cos 2B=2\cos^2 B-1$，可得

$$\frac{R}{3}(4\sin 2B\sin B+2\sin^2 B+9\cos 2B-18\cos B+9)$$

$$=\frac{R}{3}(8\sin^2 B\cos B+2-2\cos^2 B+18\cos^2 B-9-18\cos B+9)$$

$$=\frac{R}{3}(8\cos B-8\cos^3 B+2-2\cos^2 B+18\cos^2 B-18\cos B)$$

$$=\frac{R}{3}(-8\cos^3 B+16\cos^2 B-10\cos B+2)$$

$$=\frac{R}{3}(2-2\cos B)(2\cos B-1)^2\geq 0$$

(4)由(1)，再合併推論 1，可知：

$$\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})-\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})$$

$$=\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})-\left[\frac{2}{3}\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})+\frac{1}{3}\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})-\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})\right]$$

$$=\frac{R}{3}(2\cos B+1)(2\cos B-1)^2\geq 0$$

得證。

三、直角三角形

在這一小節，我們討論在直角ΔABC中，外心、重心、垂心、內心到三邊之距離總和的大小關係。

定理 3.1：

直角ΔABC中，$\angle C=90°$，設I,O,G,H依序為其內心、外心、重心、垂心，則

(1) $\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})=3R(\cos A+\cos B-1)$

(2) $\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})=R(\cos A+\cos B)$

(3) $\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})=\frac{2R}{3}(\cos A+\cos B+\cos A\cos B)$

(4) $\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})=2R\cos A\cos B$

證明：

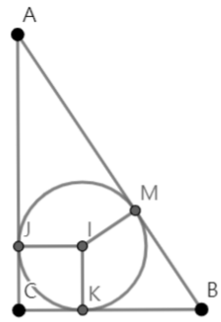
(1)如圖(四)，I 為直角ΔABC之內心，$r=\overline{CK}$

由於$\overline{AJ}=\overline{AM}$，$\overline{BM}=\overline{BK}$，$\overline{CK}=\overline{CJ}$，所以

$S=\frac{a+b+c}{2}=\overline{AM}+\overline{BM}+\overline{CK}=c+\overline{CK}$，$\mathrm{r}=\overline{CK}=\frac{a+b-c}{2}$。

另一方面，$\overline{AB}=2R$，$\overline{AC}=2R\cos A$，$\overline{BC}=2R\cos B$，所以

$$\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})=3r=\frac{6R(\cos A+\cos B-1)}{2}=3R(\cos A+\cos B-1)$$

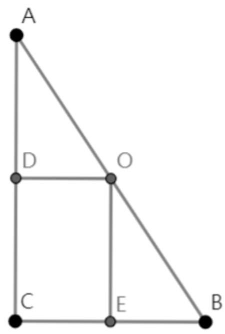


圖(四)

(2)如圖(五)，O 為直角ΔABC之外心，$\overline{OA}=\overline{OB}=R$

$\boxed{d(O,\overleftrightarrow{AB})=0}$，$\boxed{d(O,\overleftrightarrow{BC})=R\sin B=R\cos A}$，$\boxed{d(O,\overleftrightarrow{CA})=R\sin A=R\cos B}$

$$\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})=R(\cos A+\cos B)$$



圖(五)

(3)由定理 1.2 可知

$$\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})=\frac{2R}{3}(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)$$

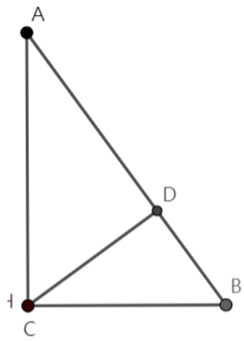
$$=\frac{2R}{3}(\cos A+\cos B+\cos A\cos B)$$

(4)如圖(六)，H 為直角ΔABC之垂心。

$\boxed{d(H,\overleftrightarrow{BC})=d(H,\overleftrightarrow{CA})=0}$

$\boxed{d(H,\overleftrightarrow{AB})=\overline{AC}\sin A=2R\sin B\sin A=2R\cos A\cos B}$

$\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})=d(H,\overleftrightarrow{AB})=2R\cos A\cos B$ 得證。



圖(六)

推論 2：

直角ΔABC中，$\angle C=90°$，設O,G,H依序為其外心、重心、垂心，則

$$\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})+\frac{1}{3}\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})$$

證明：

$$\frac{2}{3}\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$$

$$=\frac{2R}{3}(\cos A+\cos B)+\frac{2R}{3}\cos A\cos B$$

$$=\frac{2R}{3}(\cos A+\cos B+\cos A\cos B)=\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})$$

得證。

更精準地來說，

$$d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)=\frac{2R}{3}\sin A\sin B=\frac{2R}{3}\cos A\cos B=\frac{2}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 2R\cos A\cos B$$

$$=\frac{2}{3}d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$$

$$d\left(G,\overleftrightarrow{BC}\right)=\frac{2R}{3}\sin B\sin C=\frac{2R}{3}\cos A=\frac{2}{3}\times R\cos A+\frac{1}{3}\times 0=\frac{2}{3}d\left(O,\overleftrightarrow{BC}\right)+\frac{1}{3}d\left(H,\overleftrightarrow{BC}\right)$$

$$d\left(G,\overleftrightarrow{CA}\right)=\frac{2R}{3}\sin A\sin C=\frac{2R}{3}\cos B=\frac{2}{3}\times R\cos B+\frac{1}{3}\times 0=\frac{2}{3}d\left(O,\overleftrightarrow{CA}\right)+\frac{1}{3}d\left(H,\overleftrightarrow{CA}\right)$$

定理 3.2：

直角ΔABC中，$\angle C=90°$，設I,O,G,H依序為其內心、外心、重心、垂心，則

$$\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)>\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)>\sum d\left(I,\overleftrightarrow{AB}\right)>\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$$

證明：

利用定理 3.1，我們可計算

(1) $\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)-\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)$

$$=R(\cos A+\cos B)-\frac{2R}{3}(\cos A+\cos B+\cos A\cos B)$$

$$=\frac{R}{3}(\cos A+\cos B-2\cos A\cos B)$$

$$=\frac{R}{3}[\cos A\,(1-\cos B)+\cos B\,(1-\cos A)]>0$$

(2) $\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})-\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})$

$=\frac{2R}{3}(\cos A+\cos B+\cos A\cos B)-3R(\cos A+\cos B-1)$

$=\frac{R}{3}(2\cos A+2\cos B+2\cos A\cos B-9\cos A-9\cos B+9)$

$=\frac{R}{3}[9-7(\sin A+\cos A)+2\sin A\cos A]$

令$\sin A+\cos A=t$，則$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$，且$2\sin A\cos A=t^2-1$，可得

$9-7(\sin A+\cos A)+2\sin A\cos A$

$=(t^2-1)-7t+9$

$=(t-\frac{7}{2})^2-\frac{17}{4}\ge\left(\sqrt{2}-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{17}{4}=10-7\sqrt{2}>0$

$\therefore\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})>\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})$

(3) $\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})-\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})$

$=3R(\cos A+\cos B-1)-2R\cos A\cos B$

$=R(3\cos A+3\cos B-3-2\cos A\cos B)$

$=R[3(\sin A+\cos A)-3-2\sin A\cos A]$

令$\sin A+\cos A=t$，則$\sin 2A=2\sin A\cos A=t^2-1$

又$0<\sin 2A<1$，$\therefore 1<t<\sqrt{2}$。可得

$3(\sin A+\cos A)-3-2\sin A\cos A$

$=-(t^2-1)+3t-3=-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}>-\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=0$

$\therefore\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})>\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})$

合併(1), (2), (3)，定理得證

四、鈍角三角形

在這一小節，我們討論在鈍角ΔABC中，外心、重心、垂心、內心到三邊之距離總和。

定理 4.1：

鈍角 ΔABC 中，$\angle C > 90°$，設 I, O, G, H 依序為內心、外心、重心、垂心

(1) $\sum d(I, \overleftrightarrow{AB}) = 3R(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$

(2) $\sum d(O, \overleftrightarrow{AB}) = R(\cos A + \cos B - \cos C)$

(3) $\sum d(G, \overleftrightarrow{AB}) = \dfrac{2R}{3}(\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A)$

(4) $\sum d(H, \overleftrightarrow{AB}) = 2R(\cos A \cos B - \cos B \cos C - \cos C \cos A)$

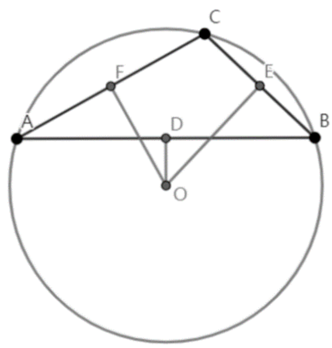
證明：

由定理 1.2 可知(1)與(3)是正確的。

(2)如圖(七)， O 為鈍角 ΔABC之外心，$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$ 。

$\widehat{AB} = 2\angle C$ ，進一步可得$\widehat{ACB} = \angle AOB = 360° - 2\angle C$。

作$\overline{OD} \perp \overline{AB}$，$\overline{OE} \perp \overline{BC}$，$\overline{OF} \perp \overline{AC}$，則



圖(七)

$\angle BOD = \frac{1}{2}\angle AOB = 180° - \angle C$，$\angle BOE = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\widehat{BC} = \angle A$，

$\angle COF = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\widehat{AC} = \angle B$。由上可得$\boxed{d(O, \overleftrightarrow{AB}) = \overline{OB}\cos(\angle BOD) = -R\cos C}$

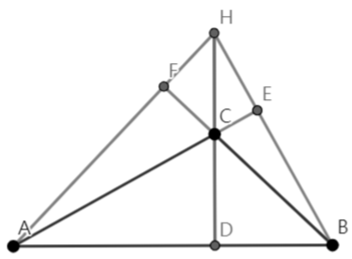
$\boxed{d(O, \overleftrightarrow{BC}) = \overline{OB}\cos(\angle BOE) = R\cos A}$，$\boxed{d(O, \overleftrightarrow{AC}) = \overline{OC}\cos(\angle COF) = R\cos B}$

$$\begin{aligned}\sum d(O, \overleftrightarrow{AB}) &= d(O, \overleftrightarrow{AB}) + d(O, \overleftrightarrow{BC}) + d(O, \overleftrightarrow{AC}) \\ &= R(\cos A + \cos B - \cos C)\end{aligned}$$

(4)如圖(八)，H為鈍角ΔABC的垂心，

$\overline{CF} = \overline{AC}\cos(\angle ACF) = b\cos(180° - \angle ACB) = -b\cos C$

另一方面，$\frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} = \tan(\angle HCF) = \tan(90° - \angle CBA) = \cot B$



圖(八)

以上面兩式，合併正弦定理$\left(\frac{b}{\sin B} = 2R\right)$可知

$$\boxed{\begin{aligned}&d(H, \overleftrightarrow{BC}) = \overline{HF} = \overline{CF}\cdot\cot B = -b\cos C\cot B = -b\cos C \times \frac{\cos B}{\sin B} \\ &= -\frac{b}{\sin B}(\cos B\cos C) = -2R\cos B\cos C\end{aligned}}$$

同理可得$\boxed{d(H,\overleftrightarrow{AC})=-2R\cos A\cos C}$

$\frac{\overline{CF}}{\overline{CH}}=\cos(\angle HCF)=\cos(90°-\angle CBA)=\sin B$，$\overline{CD}=\overline{AC}\sin(\angle CAB)=b\sin A$，

以上面兩式，合併正弦定理($\frac{b}{\sin B}=2R$)可知

$$\boxed{\begin{aligned} d(H,\overleftrightarrow{AB})&=\overline{CH}+\overline{CD}=\frac{\overline{CF}}{\sin B}+b\sin A=-\frac{b\cos C}{\sin B}+2R\sin B\sin A\\ &=2R(-\cos C+\sin B\sin A)=2R(\cos(A+B)+\sin B\sin A)\\ &=2R(\cos A\cos B-\sin A\sin B+\sin A\sin B)=2R\cos A\cos B \end{aligned}}$$

$$\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})=2R(\cos A\cos B-\cos B\cos C-\cos C\cos A)$$

得證。

推論 3：

鈍角ΔABC中，$\angle C>90°$，設O,G,H依序為其外心、重心、垂心，則

(1)$d(G,\overleftrightarrow{AB})=-\frac{2}{3}d(O,\overleftrightarrow{AB})+\frac{1}{3}d(H,\overleftrightarrow{AB})$

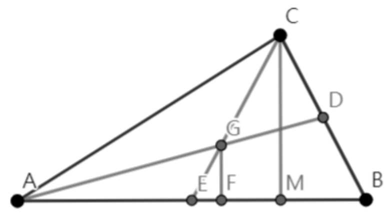
(2)$d(G,\overleftrightarrow{BC})=\frac{2}{3}d(O,\overleftrightarrow{BC})-\frac{1}{3}d(H,\overleftrightarrow{BC})$

(3)$d(G,\overleftrightarrow{CA})=\frac{2}{3}d(O,\overleftrightarrow{CA})-\frac{1}{3}d(H,\overleftrightarrow{CA})$

證明：

如圖(九)， G 為鈍角ΔABC的重心，則

$$\begin{aligned} d(G,\overleftrightarrow{AB})&=\frac{1}{3}h_c=\frac{1}{3}\times\frac{2\Delta}{c}=\frac{1}{3}\times\frac{2\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right)}{c}\\ &=\frac{1}{3}b\sin A=\frac{1}{3}(2R\sin B\sin A)=\frac{2R}{3}\sin A\sin B \end{aligned}$$



圖(九)

同理可證$d(G,\overleftrightarrow{BC})=\frac{2R}{3}\sin B\sin C$、$d(G,\overleftrightarrow{CA})=\frac{2R}{3}\sin A\sin C$

$$\begin{aligned} &(1)-\frac{2}{3}d(O,\overleftrightarrow{AB})+\frac{1}{3}d(H,\overleftrightarrow{AB})\\ &=\frac{2}{3}(R\cos C)+\frac{1}{3}(2R\cos A\cos B)=\frac{2R}{3}(\cos C+\cos A\cos B)\\ &=\frac{2R}{3}(-\cos(A+B)+\cos A\cos B)=\frac{2R}{3}(-\cos A\cos B+\sin A\sin B+\cos A\cos B)\\ &=\frac{2R}{3}\sin A\sin B=d(G,\overleftrightarrow{AB}) \end{aligned}$$

(2)$\frac{2}{3}d(O,\overleftrightarrow{BC})-\frac{1}{3}d(H,\overleftrightarrow{BC})$

$$= \frac{2}{3}(R\cos A) - \frac{1}{3}(-2R\cos B\cos C) = \frac{2R}{3}(\cos A + \cos B\cos C)$$

$$= \frac{2R}{3}(-\cos(B+C) + \cos B\cos C) = \frac{2R}{3}(-\cos B\cos C + \sin B\sin C + \cos B\cos C)$$

$$= \frac{2R}{3}\sin B\sin C = d(G, \overleftrightarrow{BC})$$

(3) $\frac{2}{3}d(O, \overleftrightarrow{CA}) - \frac{1}{3}d(H, \overleftrightarrow{CA})$

$$= \frac{2}{3}(R\cos B) - \frac{1}{3}(-2R\cos A\cos C) = \frac{2R}{3}(\cos B + \cos A\cos C)$$

$$= \frac{2R}{3}(-\cos(A+C) + \cos A\cos C) = \frac{2R}{3}(-\cos A\cos C + \sin A\sin C + \cos A\cos C)$$

$$= \frac{2R}{3}\sin A\sin C = d(G, \overleftrightarrow{CA})$$

得證。

定理4.2

鈍角ΔABC中，$\angle C > 90°$，設O、G依序為外心、重心，則$\sum d\left(O, \overleftrightarrow{AB}\right) > \sum d\left(G, \overleftrightarrow{AB}\right)$。

證明：

對於任意一個鈍角ΔABC，其中$\angle C > 90°$，我們製造一個對應的直角$\Delta A'B'C'$，

滿足：$\angle C' = 90°$，$\angle A' = \angle A + \frac{1}{2}(\angle C - 90°)$，$\angle B' = \angle B + \frac{1}{2}(\angle C - 90°)$，且

$\Delta A'B'C'$的外接圓半徑$R' = \Delta ABC$ 的外接圓半徑R。設O'、G'依序為$\Delta A'B'C'$的外心、重心。在上述的 ΔABC 及 $\Delta A'B'C'$中，我們可知：$\angle C > \angle C' = 90°$、$\angle A < \angle A' < 90°$、$\angle B < \angle B' < 90°$ ，並可推得：$-\cos C > 0$、$\cos A > \cos A'$、$\cos B > \cos B'$、

$1 = \sin C' > \sin C$、$\sin A' > sin\, A$及$\sin B' > sin\, B$。

由定理 3.1 及定理 4.1，合併上述討論可得：

$$\sum d(O, \overleftrightarrow{AB}) = R(\cos A + \cos B - \cos C) > R'(\cos A' + \cos B') = \sum d(O', \overleftrightarrow{A'B'})\text{。}$$

$$\sum d\left(G', \overleftrightarrow{A'B'}\right) = \frac{2}{3}R'(\cos A' + \cos B' + \cos A'\cos \mathrm{B}')$$

$$= \frac{2}{3}R'(\sin A' + \sin B' + \sin A'\sin B') > \frac{2}{3}R(\sin A\sin C + \sin B\sin C + \sin A\sin B)$$

$$= \sum d\left(G, \overleftrightarrow{AB}\right)\text{。}$$

由於$\Delta A'B'C'$是直角Δ，利用定理 3.2 可知$\sum d\left(O', \overleftrightarrow{A'B'}\right) > \sum d\left(G', \overleftrightarrow{A'B'}\right)$，進而推得

$$\sum d\left(O, \overleftrightarrow{AB}\right) > \sum d\left(G, \overleftrightarrow{AB}\right)\text{。}$$

得證。

五、等腰鈍角三角形

在這一小節，我們討論在等腰鈍角ΔABC中，外心、重心、垂心、內心到三邊的距離總和的大小順序。

定理 5.1：

鈍角ΔABC 中，$\angle C > 90°$，$\overline{CA} = \overline{CB}$，設 I, O, G, H 依序為內心、外心、重心、垂心，則

(1) $\sum d(H,\overleftrightarrow{AB}) - \sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) = (8\cos^3 A - 6\cos A + 1)R = (2\cos 3A + 1)\,R$

(2) $\sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) - \sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) = \dfrac{R}{3}(8\cos^3 A + 8\cos^2 A - 2\cos A - 5)$

(3) $\sum d(H,\overleftrightarrow{AB}) - \sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) = \dfrac{R}{3}(32\cos^3 A + 8\cos^2 A - 20\cos A - 2)$

(4) $\sum d(H,\overleftrightarrow{AB}) - \sum d(I,\overleftrightarrow{AB}) = 2R\cos A\,(4\cos^2 A + 4\cos A - 5)$

證明:

由於$\overline{CA} = \overline{CB}$，即$\angle A$=$\angle B$且$\angle C = 180° - 2\angle A$，所以

$\cos C = -\cos 2A = 1 - 2\cos^2 A$

$\sin C \sin A = \sin(180° - 2\angle A)\sin A = \sin 2A \sin A = (2\sin A\cos A)\sin A$

$= 2(1-\cos^2 A)\cos A = 2\cos A - 2\cos^3 A$

(1)由定理 4 .1得知

$$\sum d(H,\overleftrightarrow{AB}) - \sum d(O,\overleftrightarrow{AB})$$

$= 2R(\cos A\cos B - \cos C\cos B - \cos C\cos A) - R(\cos A + \cos B - \cos C)$

$= R(2\cos^2 A - 4\cos A\cos C - 2\cos A + \cos C)$

$= R[2\cos^2 A - 4\cos A\,(1 - 2\cos^2 A) - 2\cos A + 1 - 2\cos^2 A]$

$= R[8\cos^3 A - 6\cos A + 1] = R(2\cos 3A + 1)$

(2)由定理 4.1得知

$$\sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) - \sum d(G,\overleftrightarrow{AB})$$

$$= R(\cos A + \cos B - \cos C) - \frac{2R}{3}(\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A)$$

$$= \frac{R}{3}(6\cos A - 3\cos C - 2\sin^2 A - 4\sin A\sin C)$$

$$= \frac{R}{3}(6\cos A - 3 + 6\cos^2 A - 2 + 2\cos^2 A - 8\cos A + 8\cos^3 A)$$

$$= \frac{R}{3}(8\cos^3 A + 8\cos^2 A - 2\cos A - 5)$$

(3)由(1)、(2)兩式相加可得。

(4)由定理 4.1得知

$$\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)-\sum d\left(I,\overleftrightarrow{AB}\right)$$

$= 2R(\cos A\cos B-\cos B\cos C-\cos C\cos A)-3R(\cos A+\cos B+\cos C-1)$

$= R(2\cos^2 A-4\cos C\cos A-6\cos A-3\cos C+3)$

$= R(2\cos^2 A-4(1-2\cos^2 A)\cos A-6\cos A-3(1-2\cos^2 A)+3)$

$= R(8\cos^3 A+8\cos^2 A-10\cos A)$

$= 2R\cos A\,(4\cos^2 A+4\cos A-5)$

得證。

接下來我們要分四個區塊去處理定理 5.1 中(1), (2), (3), (4)的大小關係。由於等腰ΔABC中 $\angle C>90°$，故 $0<\angle A<45°$，且$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos A<1$。

(1) $2\cos 3A+1=0$，可解出$\angle A=40°$。當 $0<\angle A<40°$時，$2\cos 3A+1>0$；而在 $40°<\angle A<45°$時，$2\cos 3A+1<0$。

(2)令$f_1(x)=8x^3+8x^2-2x-5$，則$f_1'(x)=24x^2+16x-2=24(x-\frac{-2-\sqrt{7}}{6})(x-\frac{-2+\sqrt{7}}{6})$

所以$f_1(x)$在$(\frac{-2+\sqrt{7}}{6},\infty)$ 嚴格遞增，當$\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1$時，$f_1(x)>f_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-1>0$

即$8\cos^3 A+8\cos^2 A-2\cos A-5>0$ 恆成立。

(3)令$f_2(x)=32x^3+8x^2-20x-2$，則$f_2'(x)=96x^2+16x-20$

$=96(x-\frac{-1-\sqrt{31}}{12})(x-\frac{-1+\sqrt{31}}{12})$，所以$f_2(x)$在$(\frac{-1+\sqrt{31}}{12},\infty)$ 嚴格遞增，當$\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1$時，

$f_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)f_2(1)=\left(2-2\sqrt{2}\right)\times 18<0$，又$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)\subseteq(\frac{-1+\sqrt{31}}{12},\infty)$，故$f_2(x)=0$ 在$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$有唯一正根，令為$\cos\alpha$；另一方面，

$f_2(\cos 43.33°)f_2(\cos 43.34°)=-0.0135\cdots$，所以$\alpha\risingdotseq 43.33°$。

當$\angle A>\alpha$時$(\cos A<\cos\alpha)$，$f_2(\cos A)<0$；當$\angle A<\alpha$時，$f_2(\cos A)>0$

(4)$4x^2+4x-5=4\left(x-\frac{-1-\sqrt{6}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{6}}{2}\right)$，令$\cos\beta=\frac{-1+\sqrt{6}}{2}$，當$\cos\beta<x<1$時，

$4x^2+4x-5>0$；當$\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\cos\beta$時，$4x^2+4x-5<0$。

而$\beta=\cos^{-1}(\frac{-1+\sqrt{6}}{2})\risingdotseq 43.55°$。

由以上的討論可歸納為:

1. 由(2)合併定理 1.2 得知$\sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(I,\overleftrightarrow{AB})$ 。
2. 當 $0 < \angle A < 40°$時，由(1)得知：$\sum d(H,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(O,\overleftrightarrow{AB})$，$\angle A = 40°$時，等號成立
3. 當 $40° < \angle A < \alpha$時，由(1)、(3)得知：$\sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(H,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(G,\overleftrightarrow{AB})$。
4. 當$\alpha < \angle A < \beta$時，由(3)、(4)得知：$\sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(H,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(I,\overleftrightarrow{AB})$。
5. 當$\beta < \angle A < 45°$時，由(4)得知：$\sum d(I,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(H,\overleftrightarrow{AB})$。

整理成定理 5.2 。

定理 5.2

鈍角ΔABC中，$\angle C > 90°$，$\overline{\mathrm{CA}} = \overline{\mathrm{CB}}$，設 I, O, G, H 依序為內心、外心、重心、垂心，令$\cos\alpha$為

$32x^3 + 8x^2 - 20x - 2 = 0$在 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ 的唯一正根($\alpha \doteqdot 43.33°$)，

$\beta = \cos^{-1}(\frac{-1+\sqrt{6}}{2}) \doteqdot 43.55°$，則

(1) $\sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(I,\overleftrightarrow{AB})$恆成立

(2) 當 $0 < \angle A < 40°$時，$\sum d(H,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(I,\overleftrightarrow{AB})$

(3) 當$40° < \angle A < \alpha$時，$\sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(H,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(I,\overleftrightarrow{AB})$

(4) 當$\alpha < \angle A < \beta$時，$\sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(H,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(I,\overleftrightarrow{AB})$

(5) 當$\beta < \angle A < 45°$時，$\sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(I,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(H,\overleftrightarrow{AB})$。

六、$\sum \boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{G},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right)+\frac{1}{3}\sum \boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{O},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right)-\frac{1}{3}\sum \boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{I},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right)-\frac{1}{3}\sum \boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{H},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right)=\boldsymbol{R}$

在這一小節，我們給出在銳角及直角ΔABC中，各心到三邊距離總和的關聯性。

定理6.1：

銳角 ΔABC 中，設I,O,G,H 依序為內心、外心、重心、垂心，則

$\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{3}\sum d\left(I,\overleftrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{3}\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)=R$。

證明：

由定理1.1得知$\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)-\sum d\left(I,\overleftrightarrow{AB}\right)=-2R(\cos A+\cos B+\cos C)+3R$
$=-2\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)+3R;$

由推論 1 得知

$\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right);$

合併兩式可得:

$$\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{3}\sum d\left(I,\overleftrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{3}\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$$

$$=\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\left[-2\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)+3R\right]-\frac{1}{3}\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$$

$$=\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)-\frac{2}{3}\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{3}\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)+R$$

$=R$。

得證。

定理6.2：

直角ΔABC中，設I,O,G,H 依序為內心、外心、重心、垂心，則

$\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{3}\sum d\left(I,\overleftrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{3}\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)=R$。

證明：

由定理 3.1 及推論 2 ，如同定理 6.1 的手法，可證明其正確。

而在鈍角ΔABC中，並沒有如同定理 6.1 、定理 6.2 的關係。

伍、研究結果

一、$\Delta \boldsymbol{ABC}$的外心 $\boldsymbol{O}$ 、重心 $\boldsymbol{G}$ 、垂心 $\boldsymbol{H}$ 、內心 $\boldsymbol{I}$ 到三邊之距離，列表如下：

	銳角$\triangle ABC$	直角$\triangle ABC, \angle C = 90°$	鈍角$\triangle ABC, \angle C > 90°$
$d(O,\overleftrightarrow{AB})$	$R\cos C$	$R\cos C = 0$	$-R\cos C$
$d(O,\overleftrightarrow{BC})$	$R\cos A$	$R\cos A$	$R\cos A$
$d(O,\overleftrightarrow{CA})$	$R\cos B$	$R\cos B$	$R\cos B$
$d(G,\overleftrightarrow{AB})$	$\frac{2R}{3}(\sin A\sin B)$	$\frac{2R}{3}(\sin A\sin B)$	$\frac{2R}{3}(\sin A\sin B)$
$d(G,\overleftrightarrow{BC})$	$\frac{2R}{3}(\sin B\sin C)$	$\frac{2R}{3}(\sin B\sin C)$	$\frac{2R}{3}(\sin B\sin C)$
$d(G,\overleftrightarrow{CA})$	$\frac{2R}{3}(\sin C\sin A)$	$\frac{2R}{3}(\sin C\sin A)$	$\frac{2R}{3}(\sin C\sin A)$
$d(H,\overleftrightarrow{AB})$	$2R\cos A\cos B$	$2R\cos A\cos B$	$2R\cos A\cos B$
$d(H,\overleftrightarrow{BC})$	$2R\cos B\cos C$	$2R\cos B\cos C = 0$	$-2R\cos B\cos C$
$d(H,\overleftrightarrow{CA})$	$2R\cos C\cos A$	$2R\cos C\cos A = 0$	$-2R\cos C\cos A$
$d(I,\overleftrightarrow{AB}) = d(I,\overleftrightarrow{BC}) = d(I,\overleftrightarrow{CA})$	$r = R(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$	r	r

二、銳角$\Delta \boldsymbol{ABC}$中，$\sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{O},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) \geq \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{G},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) \geq \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{I},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) \geq \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{H},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}})$，僅當$\Delta \boldsymbol{ABC}$為正$\Delta$時，等號成立。

三、直角$\Delta \boldsymbol{ABC}$中，$\sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{O},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{G},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{I},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{H},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}})$。

四、鈍角$\Delta \boldsymbol{ABC}$ 中，$\sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{O},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{G},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{I},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}})$。

五、等腰鈍角$\Delta \boldsymbol{ABC}$中，若$\angle \boldsymbol{C} > 90°$，則

(一)、$\boldsymbol{0} < \angle \boldsymbol{A} < 40°$時，$\sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{H},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{O},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{G},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{I},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}})$

(二)、$\boldsymbol{40°} < \angle \boldsymbol{A} < \boldsymbol{\alpha}$時，$\sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{O},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{H},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{G},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{I},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}})$

(三)、$\boldsymbol{\alpha} < \angle \boldsymbol{A} < \boldsymbol{\beta}$時，$\sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{O},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{G},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{H},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{I},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}})$

(四)、$\boldsymbol{\beta} < \angle \boldsymbol{A} < 45°$時，$\sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{O},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{G},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{I},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) > \sum \boldsymbol{d}(\boldsymbol{H},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}})$。

其中$\boldsymbol{\alpha} \fallingdotseq \boldsymbol{43.33°}$，$\boldsymbol{\beta} = \cos^{-1}(\frac{-1+\sqrt{6}}{2}) \fallingdotseq \boldsymbol{43.55°}$

六、銳角$\Delta \boldsymbol{ABC}$及直角$\Delta \boldsymbol{ABC}$皆滿足$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{G},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) = \frac{2}{3}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{O},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}) + \frac{1}{3}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{H},\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}})$，將$\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}$替換成$\overleftrightarrow{\boldsymbol{BC}}$或$\overleftrightarrow{\boldsymbol{CA}}$亦成立。

七、鈍角$\Delta \boldsymbol{ABC}$中，若$\angle \boldsymbol{C} > 90°$，則

(一)、$\boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{G}, \overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right) = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{O}, \overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{H}, \overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right)$

(二)、$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{G}, \overleftrightarrow{\boldsymbol{BC}}) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{O}, \overleftrightarrow{\boldsymbol{BC}}\right) - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{H}, \overleftrightarrow{\boldsymbol{BC}})$

(三)、$\boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{G}, \overleftrightarrow{\boldsymbol{CA}}\right) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{O}, \overleftrightarrow{\boldsymbol{CA}}\right) - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{H}, \overleftrightarrow{\boldsymbol{CA}}\right)$。

八、銳角$\Delta \boldsymbol{ABC}$及直角$\Delta \boldsymbol{ABC}$皆滿足

$$\sum \boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{G}, \overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\sum \boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{O}, \overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right) - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\sum \boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{I}, \overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right) - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\sum \boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{H}, \overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right) = \boldsymbol{R}$$ 。

陸、討論

在銳角ΔABC及直角ΔABC中，等式 $d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$成立。

將$\overleftrightarrow{AB}$替換成$\overleftrightarrow{BC}$或$\overleftrightarrow{CA}$亦成立。

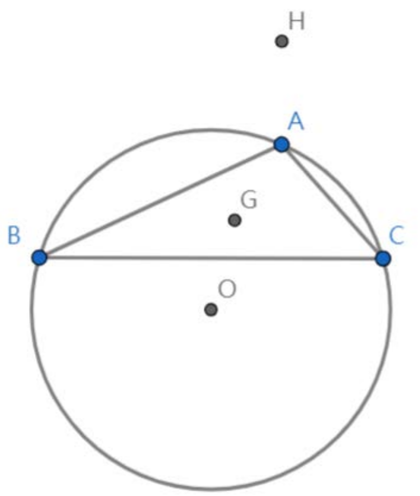
在鈍角ΔABC中，若$\angle C>90°$，則

$$d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)=-\frac{2}{3}d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$$

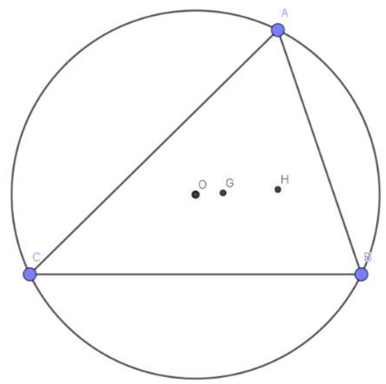
$$d(G,\overleftrightarrow{BC})=\frac{2}{3}d\left(O,\overleftrightarrow{BC}\right)-\frac{1}{3}d(H,\overleftrightarrow{BC})$$

$$d\left(G,\overleftrightarrow{CA}\right)=\frac{2}{3}d\left(O,\overleftrightarrow{CA}\right)-\frac{1}{3}d(H,\overleftrightarrow{CA})$$

其中會差幾個負號，是因為在鈍角三角形中，外心、重心、垂心三點分別分散在邊$\overleftrightarrow{AB}\left(\overleftrightarrow{CA}、\overleftrightarrow{BC}\right)$的兩側，而在銳角及直角三角形中，他們會在邊$\overleftrightarrow{AB}\left(\overleftrightarrow{CA}、\overleftrightarrow{BC}\right)$的同側或直線$\overleftrightarrow{AB}$上，如圖(十)、圖(十一)



圖(十)



圖(十一)

故在鈍角三角形中，並不會有像銳角三角形及直角三角形中，保有「$\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)\geq\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)\geq\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$ (當ΔABC為正Δ，等號成立)」的大小關係。

許多在銳角三角形及直角三角形才有的恆等式，在鈍角三角形中也以不同的樣貌呈現。

柒、結論

此研究結果求出了三角形的四心到各邊之距離及總和，並比較其大小，更討論其相互之間關係，在銳角三角形及直角三角形，我們有明確的結論；在鈍角三角形，還有部分的情況尚不清楚，更待我們持續不斷的努力。

捌、參考文獻及其他

一、卡諾定理。維基百科。取自 https://zh.wikipedia.org/zh-tw/卡诺定理
二、尤拉線。維基百科。取自 https://zh.wikipedia.org/zh-tw/歐拉線

【評語】050411

本作品欲比較外心、重心、垂心、內心到三邊之距離和的大小，本作品是科展作品中少見的幾何不等式作品，相當有意思。雖然距離和的公式可以硬算出來，但是要加以比較大小關係，則必須在適當的變數假設下才可完成。作者成功通過三角恆等式給出距離的公式並分別給出三角形是銳角、直角、鈍角時距離和大小的比較，作品內容相當完整。

作品海報

從心開始—
三角形的四心到各邊距離和

壹、研究動機

在參考文獻一中，任意銳角 ΔABC 中，其外心到三邊之距離總和可表示成內切圓半徑與外接圓半徑之和，此性質稱為卡諾定理。我們試著找出重心、垂心、內心到三邊之距離總合，並做一系列的相關探討。

貳、研究目的

1.求出四心到各邊之距離
2.比較四心到各邊之距離總和的大小
3.四心到各邊之距離總和之關係

參、研究設備及器材

筆、紙、Geogebra、WolframAlpha

肆、研究過程及方法

首先我們要討論三角形 ABC 的外心、重心、垂心、內心到三邊之距離，我們用外接圓半徑來控制三角形的尺寸大小，用 $\angle A, \angle B, \angle C$ 來描述三角形的形狀，故其距離皆用 R 及 $\angle A, \angle B, \angle C$ 來表示。

由於重心、內心恆在三角形的內部，但外心、垂心會因三角形的類型而改變，故我們分銳角、直角、鈍角三角形去探討。

特地討論等腰三角形，是想了解在銳角三角形時，各心到三邊距離總和的差距；在鈍角三角形時，是想知道大小順序中，三內角所扮演的角色。

最後我們給出各心到三邊之距離總和，其相互之間的關係可用恆等式去連接。

符號定義

在 ΔABC 中，設 $\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$。$S=\frac{a+b+c}{2}$。h_a、h_b、h_c 依序為 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 邊上的高；設 r、R 依序為內切圓半徑、外接圓半徑。ΔABC 的面積 $=\Delta$。
P 點到直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的距離設為 $d\left(P,\overleftrightarrow{AB}\right)$，$\sum d\left(P,\overleftrightarrow{AB}\right)$ 定義 $d\left(P,\overleftrightarrow{AB}\right)+d\left(P,\overleftrightarrow{BC}\right)+d\left(P,\overleftrightarrow{AC}\right)$。

一、銳角三角形

我們利用三角函數和簡單的幾何所推得的三角形四心到各邊之距離和的公式整理成定理 1，接著導出類似尤拉線的性質放進推論 1；也導出他們之間的大小關係放在定理 1.2。

定理 1

銳角 ΔABC 中，設 I,O,G,H 依序為內心、外心、重心、垂心，則

(1) $\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})=3r=3R(\cos A+\cos B+\cos C-1)$

(2) $\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})=R(\cos A+\cos B+\cos C)=R+r$

(3) $\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})=\frac{2\Delta}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{2R}{3}(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)$

(4) $\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})=2\Delta\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-2(R+r)$
$=2R(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$

推論 1：

$$\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$$

定理1.2：

$$\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)\geq\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)\geq\sum d\left(I,\overleftrightarrow{AB}\right)\geq\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$$

僅當 ΔABC 為正 Δ時，等號成立。

二、等腰銳角三角形

由定理1.2我們已知在銳角三角形中 $\sum d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)\geq\sum d\left(G,\overleftrightarrow{AB}\right)\geq\sum d\left(I,\overleftrightarrow{AB}\right)\geq\sum d\left(H,\overleftrightarrow{AB}\right)$ 恆成立，接下來我們來看看在等腰銳角三角形中四心到各邊距離和的差值整理成定理 2

定理 2：

銳角 ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，設 I,O,G,H 依序為其內心、外心、重心、垂心，則

(1) $\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})-\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})=R(2\cos B+1)(2\cos B-1)^2\geq 0$

(2) $\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})-\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})=R(2\cos B)(2\cos B-1)^2\geq 0$

(3) $\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})-\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})=\frac{R}{3}(2-2\cos B)(2\cos B-1)^2\geq 0$

(4) $\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})-\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})=\frac{R}{3}(2\cos B+1)(2\cos B-1)^2\geq 0$

三、直角三角形

我們接著用類似銳角三角形的方法來推得直角三角形四心到各邊之距離和和其之間的關係，分別整理成定理 3.1 、推論 2 ，定理 3.2。

定理 3.1

直角 ΔABC 中，$\angle C=90°$，設 I,O,G,H 依序為其內心、外心、重心、垂心，則

(1) $\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})=3R(\cos A+\cos B-1)$

(2) $\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})=R(\cos A+\cos B)$

(3) $\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})=\frac{2R}{3}(\cos A+\cos B+\cos A\cos B)$

(4) $\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})=2R\cos A\cos B$

推論 2

$\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})+\frac{1}{3}\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})$

定理 3.2

$\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})>\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})>\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})>\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})$

四、鈍角三角形

接著我們討論在鈍角 ΔABC 中，外心、重心、垂心、內心到三邊之距離總和和其之間的關係，分別整理成定理 4.1 、推論 3 ，定理 4.2。

定理 4.1

鈍角 ΔABC 中，$\angle C>90°$，設 I,O,G,H 依序為內心、外心、重心、垂心

(1) $\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})=3R(\cos A+\cos B+\cos C-1)$

(2) $\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})=R(\cos A+\cos B-\cos C)$

(3) $\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})=\frac{2R}{3}(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)$

(4) $\sum d(H,\overleftrightarrow{AB})=2R(\cos A\cos B-\cos B\cos C-\cos C\cos A)$

推論 3

(1) $d(G,\overleftrightarrow{AB})=-\frac{2}{3}d(O,\overleftrightarrow{AB})+\frac{1}{3}d(H,\overleftrightarrow{AB})$

(2) $d(G,\overleftrightarrow{BC})=\frac{2}{3}d(O,\overleftrightarrow{BC})-\frac{1}{3}d(H,\overleftrightarrow{BC})$

(3) $d(G,\overleftrightarrow{CA})=\frac{2}{3}d(O,\overleftrightarrow{CA})-\frac{1}{3}d(H,\overleftrightarrow{CA})$

定理 4.2

$$\sum d(O,\overleftrightarrow{AB})>\sum d(G,\overleftrightarrow{AB})>\sum d(I,\overleftrightarrow{AB})$$

其中，我們發現了鈍角三角形並沒有像定理 1.2 和推論 1 的性質，我們也可以藉由任意帶幾組數據發現垂心到三邊之距離和與其他三心的大小比較會隨著數據的改變，有時會有不同的結果。

五、等腰鈍角三角形

既然在鈍角三角形中，定理 1.2 不恆成立，所以接下來我們決定來探討等腰鈍角三角形，讓影響角度的變數剩下一個底角，接著來探討四心到各邊之距離和與底角角度的關係。結果整理成定理 5 。

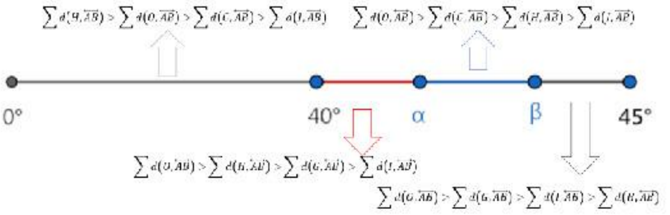
定理 5

鈍角 ΔABC 中，$\angle C>90°$，$\overline{CA}=\overline{CB}$，設 I,O,G,H 依序為內心、外心、重心、垂心，

令 $\cos\alpha$ 為 $32x^3+8x^2-20x-2=0$ 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$ 的唯一正根 ($\alpha\doteqdot 43.33°$)，

$\beta=\cos^{-1}(\frac{-1+\sqrt{6}}{2})\doteqdot 43.55°$，則

(1) $\sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(I,\overleftrightarrow{AB})$ 恆成立
(2) 當 $0 < \angle A < 40°$ 時，$\sum d(H,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(I,\overleftrightarrow{AB})$
(3) 當 $40° < \angle A < \alpha$ 時，$\sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(H,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(I,\overleftrightarrow{AB})$
(4) 當 $\alpha < \angle A < \beta$ 時，$\sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(H,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(I,\overleftrightarrow{AB})$
(5) 當 $\beta < \angle A < 45°$ 時，$\sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(I,\overleftrightarrow{AB}) > \sum d(H,\overleftrightarrow{AB})$。



六、$\sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) + \frac{1}{3}\sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) - \frac{1}{3}\sum d(I,\overleftrightarrow{AB}) - \frac{1}{3}\sum d(H,\overleftrightarrow{AB}) = R$

最後，我們討論在銳角及直角三角形中，四心到各邊之距離和的恆等式。

定理 6: $\sum d(G,\overleftrightarrow{AB}) + \frac{1}{3}\sum d(O,\overleftrightarrow{AB}) - \frac{1}{3}\sum d(I,\overleftrightarrow{AB}) - \frac{1}{3}\sum d(H,\overleftrightarrow{AB}) = R$。

除了上面的所有定理外，我們還將ΔABC 的外心O 、重心G 、垂心H 、內心I 到三邊之距離整理成一個表格。如下：

	銳角ΔABC	直角ΔABC, $\angle C = 90°$	鈍角ΔABC, $\angle C > 90°$
$d(O,\overleftrightarrow{AB})$	$R\cos C$	$R\cos C = 0$	$-R\cos C$
$d(O,\overleftrightarrow{BC})$	$R\cos A$	$R\cos A$	$R\cos A$
$d(O,\overleftrightarrow{CA})$	$R\cos B$	$R\cos B$	$R\cos B$
$d(G,\overleftrightarrow{AB})$	$\frac{2R}{3}(\sin A\sin B)$	$\frac{2R}{3}(\sin A\sin B)$	$\frac{2R}{3}(\sin A\sin B)$
$d(G,\overleftrightarrow{BC})$	$\frac{2R}{3}(\sin B\sin C)$	$\frac{2R}{3}(\sin B\sin C)$	$\frac{2R}{3}(\sin B\sin C)$
$d(G,\overleftrightarrow{CA})$	$\frac{2R}{3}(\sin C\sin A)$	$\frac{2R}{3}(\sin C\sin A)$	$\frac{2R}{3}(\sin C\sin A)$
$d(H,\overleftrightarrow{AB})$	$2R\cos A\cos B$	$2R\cos A\cos B$	$2R\cos A\cos B$
$d(H,\overleftrightarrow{BC})$	$2R\cos B\cos C$	$2R\cos B\cos C = 0$	$-2R\cos B\cos C$
$d(H,\overleftrightarrow{CA})$	$2R\cos C\cos A$	$2R\cos C\cos A = 0$	$-2R\cos C\cos A$
$d(I,\overleftrightarrow{AB}) = d(I,\overleftrightarrow{BC}) = d(I,\overleftrightarrow{CA})$	$r = R(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$	r	r

伍、研究結果

此研究討論三角形ABC 的外心、重心、垂心、內心到三邊之距離，並依銳角、直角及鈍角三角形，去比較各距離總和之大小關係及相互之間的關聯性。其主要結果為：

1. 用外接圓半徑 R 及 $\angle A, \angle B, \angle C$ 表示各心到三邊之距離。
2. 設外心、重心、垂心、內心到三邊之距離總和依序為 d_1, d_2, d_3, d_4 ，其大小關係為：
(1) 在銳角 Δ 中，$d_1 \geq d_2 \geq d_4 \geq d_3$，僅當正 Δ 時，等號成立。
(2) 在直角 Δ 中，$d_1 > d_2 > d_4 > d_3$。
(3) 在鈍角 Δ 中，$d_1 > d_2 > d_4$ 恆成立。d_3 與 d_1、d_2、d_4 比較，並無絕對關係，但在等腰鈍角 Δ，我們給出其大小順序的臨界值。
3. 在銳角 Δ 及直角 Δ 中，等式 $d_2 = \frac{2}{3}d_1 + \frac{1}{3}d_3$ 和 $d_2 + \frac{1}{3}d_1 - \frac{1}{3}d_3 - \frac{1}{3}d_4 = R$ 恆成立。

陸、參考資料

一、卡諾定理。維基百科。取自 https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%8D%A1%E8%AF%BA%E5%AE%9A%E7%90%86
二、尤拉線。維基百科。取自 https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%AD%90%E6%8B%89%E7%B7%9A