# 中華民國第 63 屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

---

高中組　數學科

**佳作**

050410

## 移探究竟─關於數列前移的探討


學校名稱：高雄市立高雄高級中學

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 高二 張哲瑋<br>高二 許孟哲<br>高二 劉學承 | 劉玉蓮 |



關鍵詞：移數、組合

# 摘要

本研究針對 2022IMO 的第一題進行探討，即將兩種相同數量，不同材質的球排成一列，選中其中一個位置的球並將該球與其旁邊相同材質的球移至最左，找到特定的球數與選球方式，使得無論如何排列，皆能在移動後使最左的 n 顆球皆為相同材質。我們發現只要數列在進行操作時格數持續減少，即可達成條件。因此，我們先找到無法在進行操作時使格數持續減少的情況後，再證明其他情況皆可使格數持續減少，就可以求得解。在發現此規律後，我們針對原題進行推廣，例如將球的種類數推廣至 m 種、各類球的數量不同、多排數列並列……等情況。

# 壹、研究動機

在暑假練習 2022 IMO 題型時，發現 P1 非常有趣。題目內容是關於一個淺顯易懂的遊戲：「令有兩種材質的球排成一列，A、B 分別代表一種材質。今有 n 個球 A 和 n 個 B 球，令 k 為正整數且$k \leq 2n$，持續將從左數來第 k 個球與其旁邊所有同材質的球移至最左邊。找到所有(n,k)，使得無論如何排列，在經過操作後，皆能使最左邊的 n 個球同材質。」

在計算完這個題目之後，我們愈發覺得此題有趣，因此萌生了將此題延伸推廣的想法。

# 貳、研究目的

一、移球問題初探。

二、探討球推廣至 m 類的移數問題。

三、探討數列中每類球的數量不同時的移數問題。

四、探討數字移動後必須改變數字狀態的移數問題。

五、探討多排數列並列後的移數問題。

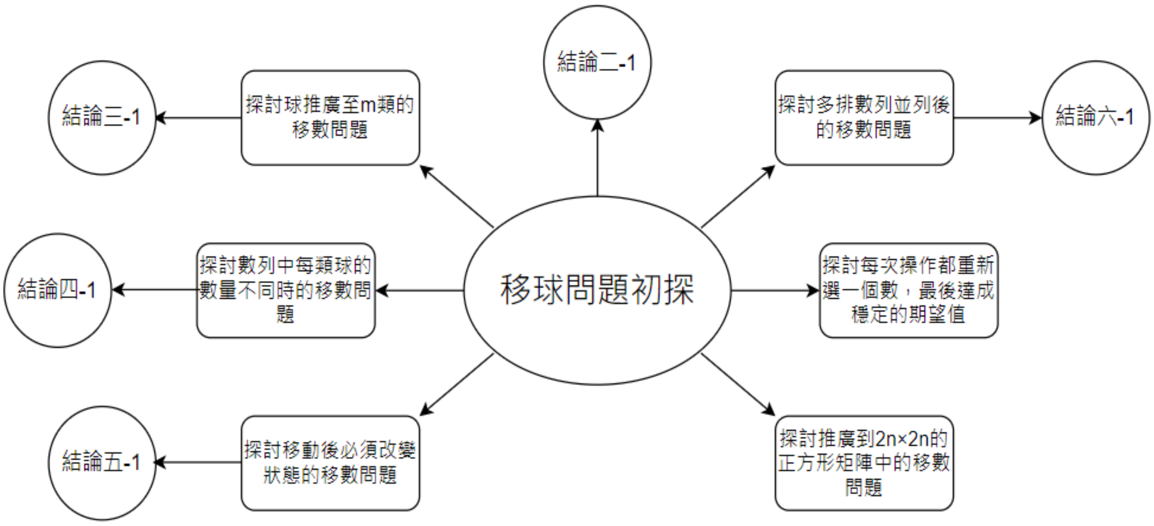
六、探討每次操作都重新選一個數，最後達成穩定的期望值。

七、探討推廣到 2n× 2n 的正方形矩陣中的移數問題。

# 參、研究設備與器材

紙、筆、電腦（Windows11、Word、C++）。

# 肆、研究過程與方法




一、名詞定義與操作方法

（一）定義

1. $S_n$：指一群特定數列的集合，其中每個數列皆有 n 個 A、n 個 B。

例：$S_2=\{AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA\}$

2. $S_n$ 中的數列形如$\{A\}^{e_1}\{B\}^{e_2}\{A\}^{e_3}\cdots\{A\}^{e_m}$或$\{A\}^{e_1}\{B\}^{e_2}\{A\}^{e_3}\cdots\{B\}^{e_m}$

(1) 其中{A}和{B}代表數列中連續皆由 A 或 B 組成的一群。

(2) $e_x$代表該群中含有 x 個 A 或 B，且$e_1+e_2+e_3+\cdots e_n=2n$。

3. 操作：係指將「從左數來第 k 個數與其左右兩邊所有相同的球」移至最左邊的一次過程，稱為一次「操作」，以「→」表示。

例：k=5，$S_4=AAABBBAB \to BBBAAAB$。

4. 格子：某個數字與其相鄰相同的球，稱為一「格」。

例：AABBBA=$\{A\}^2\{B\}^3\{A\}^1$，其中從左到右「AA」為一格、「BBB」為一格、「A」也是一格，即$e_1=2$、$e_2=3$、$e_3=1$、$e_1+e_2+e_3=6$。

5. $T_k^p(x)$：係指一個數列 x 選擇第 k 個球，在進行 p 次操作後變成的新數列。

例：$T_5^1(AAABBBAB)$=BBBAAAB。

6. 給定 k，若對所有$S_n$中的元素 x，皆能找到 p 使得$T_k^p(x)$=$\{A\}^n\{B\}^n$，則稱 k 為$S_n$的穩定值。

例：$S_3$的其中一個穩定值為 4，將其中部分元素列出如下：

(1) $\{A\}^3\{B\}^3$，即 $T_4^0(\{A\}^3\{B\}^3)=\{A\}^3\{B\}^3$

(2) $\{A\}^2\{B\}^1\{A\}^1\{B\}^2 \to \{A\}^3\{B\}^3$，

即 $T_4^1(\{A\}^2\{B\}^1\{A\}^1\{B\}^2)=\{A\}^3\{B\}^3$

(3) $\{A\}^2\{B\}^3\{A\}^1 \to \{B\}^3\{A\}^3$，即 $T_4^1(\{A\}^2\{B\}^3\{A\}^1)=\{B\}^3\{A\}^3$

(4) $\{A\}^1\{B\}^1\{A\}^1\{B\}^2\{A\}^1 \to \{B\}^2\{A\}^1\{B\}^1\{A\}^2 \to \{B\}^3\{A\}^3$，

即 $T_4^2(\{A\}^1\{B\}^1\{A\}^1\{B\}^2\{A\}^1)=\{B\}^3\{A\}^3$

(5) $\{A\}^1\{B\}^1\{A\}^1\{B\}^1\{A\}^1\{B\}^1 \to \{B\}^1\{A\}^1\{B\}^1\{A\}^2\{B\}^1 \to$

$\{A\}^2\{B\}^1\{A\}^1\{B\}^2 \to \{A\}^3\{B\}^3$，

即$T_4^3(\{A\}^1\{B\}^1\{A\}^1\{B\}^1\{A\}^1\{B\}^1)=\{A\}^3\{B\}^3$

二、移數問題初探

（一）問題分析：假設有一數列，其中排列方式為$\cdots\{A\}^2\{B\}^3\{A\}^2\cdots$。若被選中的格子是中間的 BBB，而經過一次操作後，數列會變$\{B\}^3\cdots\{A\}^4\cdots$。可以觀察到原本被隔開的三格，在經過一次操作後便合為兩格。因此，**欲達成穩定，數列中經過操作後的格數必須減少，即每個數列的$\{e\}^i$總和經操作後須為遞減函數。**

（二）題目解法：（出自參考資料一）

1. 討論 k<n 的情況

考慮$S_n$內的所有元素後，我們發現：

當 x=$\{A\}^{n-1}\{B\}^n\{A\}^1$時

由於 k<n，無論如何只能移動原本就在最左邊$\{A\}^1$，操作後格數不變，故 k<n 不合。

2. 討論 k>$\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil$的情況，則有以下反例，無法達到穩定：

取 x=$\{A\}^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}\{B\}^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}\{A\}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\{B\}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}$

因為 k> n+$\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$

所以我們只能選到最後一格$\{B\}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}$，無法達成條件。

由 1、2，可以得知在經過數次移動後，若 k<n 或 k>$\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil$，則無法達到穩定。

3. 達成穩定數列的 k，必滿足 n≤k≤ $\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil$。：

(1) 兩格：顯然滿足條件。

(2) 三格：假設由左至右分別為$e_1$、$e_2$、$e_3$格

a. 選到$e_1$格：考慮$e_1$格最大的情況：$\{A\}^{n-1}\{B\}^n\{A\}^1$，由於$k\geq n$，因此不可能選到$e_1$格。

b. 選到$e_2$格：$e_1$、$e_3$格合併，達成條件。

c. 選到$e_3$格：$e_1$、$e_3$格合併，達成條件。

(3) 四格以上：假設由左而右依序為$e_1$、$e_2 \cdots e_{y-1}$、$e_y$格（$y \geq 4$）

a. 若選擇$e_2 \sim e_{y-1}$格：無論選擇任何一格，移動後格數皆會減少，故成立。

b. 若選擇$e_1$格

由於每格中的個數小於 n，而$k \geq n$，故不可能選擇$e_1$格。

c. 若選擇$e_y$格

x=BBABBBAAAA→AAAABBABBB，格數有可能不減少。

而若選擇$e_y$格，則$e_y$格中的個數必大於$\left[\frac{n}{2}\right]$

但若四格中的個數皆大於$\left[\frac{n}{2}\right]$，則總個數大於$\left[\frac{n}{2}\right] \times 4 = 2n$，故矛盾。

由 1、2、3 可知，在經過數次移動後，皆能使最左邊的 n 個數相同的數列必滿足 n≤k≤ $\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil$。

**二-1：對任意的 $S_n$ 而言，集合內所有數列能使左邊 n 個數相同者，k 必滿足 n≤k≤ $\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil$。**

三、探討球類推廣至 m 類的移數問題

數列在進行有限次操作後，滿足數列中「種類的數量等於總格數（即形如$\{A_1\}^n\{A_2\}^n\{A_3\}^n \cdots \{A_{m-1}\}^n\{A_m\}^n$）」者，則稱該數列滿足條件。

（一）討論 k<(m-1)·n 的情況

考慮 m 為任意，$S_n$內的所有數列後，我們發現：

當 x=$\{A_1\}^{n-1}\{A_2\}^n\{A_3\}^n \cdots \{A_{m-1}\}^n\{A_m\}^n\{A_1\}^1$時，由於 k<(m-1)·n，我們只能選到$\{A_{m-1}\}^n$以前的格子，且他們都無法合成一格，因此不合。

（二）討論 k>$\left\lceil(\frac{2m-1}{2})n\right\rceil$的情況

考慮 m 為任意，$S_n$內的所有元素後，我們不難發現：

有 x=$\{A_1\}^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}\{A_2\}^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}\cdots\{A_m\}^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}\{A_1\}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\cdots\{A_m\}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}$

因為 k> (m-1)n+$\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil = \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + (m-1)(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil)$

所以我們只能選到最後一格$\{A_m\}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}$，無法達成條件。

由（一）、（二），可以得知 $S_n$ 內的每個元素皆能使最左邊的 n 個數相同的數列必滿足(m-1)·n≤ $k \leq \left\lceil\frac{2m-1}{2}n\right\rceil$。

（三）達成穩定數列的 k，必滿足(m-1)·n≤ $k \leq \left\lceil\frac{2m-1}{2}n\right\rceil$

當 y=m 時已達成條件，因此假設數列由左至右依序有

$e_1$ 、$e_2\cdots e_{y-1}$ 、$e_y$格（y> $m$）：

1. 若選擇$e_1$格：

   由於每格中的個數小於 n，而$k \geq (m-1)n$，故不可能選擇$e_1$格。

2. 若選擇$e_2$～$e_{y-1}$中任一格：

   假設選到$e_z$格(1≤ $z \leq y-1$)，則$e_{z+1}$格的數字個數必少於 n，因此$e_1$～$e_{z-1}$必有一格與$e_{z+1}$格的數字相同,將在有限次的操作後與之合併成一格。$\{A_3\}^1\{A_1\}^4\{A_2\}^4\{A_4\}^4\{A_3\}^3$

   例：m=4、k=12，

   X=$\{A_3\}^1\{A_1\}^4\{A_2\}^4\{A_4\}^4\{A_3\}^3 \rightarrow \{A_4\}^4\{A_3\}^1\{A_1\}^4\{A_2\}^4\{A_3\}^3$

   $\rightarrow \{A_2\}^4\{A_4\}^4\{A_3\}^1\{A_1\}^4\{A_3\}^3 \rightarrow \{A_1\}^4\{A_2\}^4\{A_4\}^4\{A_3\}^4$，一開始分開的兩格$\{A_3\}$最後合併為一格。

3. 若選擇$e_y$格：

   在此情況下有可能使格數不減少，但若選到$e_y$格，代表該格數量必大於$\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$。欲使數列格數恆不減少，則每格數字的數量必大於

$\left[\frac{n}{2}\right] \times 2m = [m \times n] = m \times n$，與前提矛盾。

（四）程式證明見附錄。

**結論三-1：** 考慮數列中有 m 類球的情況下達到穩定的 k，必滿足(m-1)·n≤ $k \le \left\lceil \frac{2m-1}{2} n \right\rceil$。

四、探討數列中每類球的數量不同時的移數問題

數列在進行有限次操作後，滿足數列中「球種類的數量等於總格數（即形如$\{A_1\}^n\{A_2\}^n\{A_3\}^n \cdots \{A_{m-1}\}^n\{A_m\}^n$）」者，則稱該數列滿足條件。

（一）不失一般性假設數列中有 a 個 A、b 個 B，且 a≥b：

1. 討論 k<a 的狀況，則有以下反例：

$x = \{A\}^{a-1}\{B\}^b\{A\}^1$

由於 k<n，無論如何只能移動原本就在最左邊的格子，操作後格數不變，故 k<n 不合。

2. 討論 k>a+$\left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil$的情況，則有以下反例：

$x = \{A\}^{\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor}\{B\}^{\left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil}\{A\}^{\left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil}\{B\}^{\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor}$

因為 k> a+$\left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil$

所以我們只能選到最後一格$\{B\}^{\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor}$，無法達成條件。

由 1、2，可以得知在經過數次移動後，皆能使數列達成條件者必滿足 a≤k≤ a + $\left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil$。

3. 達成穩定數列的 k，必滿足 a≤k≤ a + $\left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil$：

(1) 兩格：顯然滿足條件。

(2) 三格：假設由左至右分別為$e_1$、$e_2$、$e$格

a. 選到$e_1$格：考慮$e_1$格最大的情況：$\{A\}^{a-1}\{B\}^{b}\{A\}^{1}$，由於$k \geq a$，

因此不可能選到$e_1$格。

b. 選到$e_2$格：$e_1$、$e_3$格合併，達成條件。

c. 選到$e_3$格：$e_1$、$e_3$格合併，達成條件。

(3) 四格以上：假設由左至右分別為$e_1$ 、$e_2 \cdots e_{y-1}$ 、$e_y$格：

a. 選到$e_2 \sim e_{y-1}$格：無論選擇任何一格，移動後格數皆會減少，故成立。

b. 選到$e_1$格：由於一格中的數字的數量必小於 a，而 k 大於等於 a，故不可能選擇$e_1$格。

c. 選到$e_y$格：在此情況下有可能使格數不減少。

但若選到$e_y$格，代表該格數量必大於$\left[\frac{b}{2}\right]$，若欲使數列格數恆不減少，則 B 的數量必大於$\left[\frac{b}{2}\right] \times 2 = [b]$，與前提矛盾。

（二）不失一般性假設數列有$x_1$個$A_1$、$x_2$個$A_2$、$x_3$個$A_3 \cdots x_{m-1}$個$A_{m-1}$、$x_m$個$A_m$，且$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots x_{m-1} \geq x_m$：

1. 討論 k<$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1}$的情況，則有以下反例：

x=$\{A_1\}^{x_1-1}\{A_2\}^{x_2}\{A_3\}^{x_3} \cdots \{A_{m-1}\}^{x_{m-1}}\{A_m\}^{x_m}\{A_1\}^{1}$

可以觀察到不論如何，都只能選到$\{A_m\}^{x_m}$格之前，而該格前都無法合併成一格，因此 k<$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1}$無法滿足條件。

2. 討論 k>$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} + \left\lceil\frac{x_m}{2}\right\rceil$的情況，則有以下反例：

x=$\{A_1\}^{\left\lceil\frac{x_1}{2}\right\rceil}\{A_2\}^{\left\lceil\frac{x_2}{2}\right\rceil} \cdots \{A_m\}^{\left\lceil\frac{x_m}{2}\right\rceil}\{A_1\}^{\left\lfloor\frac{x_1}{2}\right\rfloor} \cdots \{A_m\}^{\left\lfloor\frac{x_m}{2}\right\rfloor}$

可以得知在經過數次移動後，皆能使最數列達成條件者必滿足

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} \leq$k$\leq x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} + \left\lceil\frac{x_m}{2}\right\rceil$。

**結論四-1**：考慮數列中每類數字的數量不同的移數問題，在數列中只有兩個數的情況下，可以得知在經過數次移動後，皆能使最左邊的 n 個數相同的數列必滿足 $a \le k \le a + \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil$。

**結論四-2**：考慮數列中每類數字的數量不同的移數問題，在數列中有 n 個數的情況下，可以得知在經過數次移動後，皆能使最左邊的 n 個數相同的數列必滿足$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} \le k \le x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} + \left\lceil \frac{x_m}{2} \right\rceil$。

五、探討數字移動後必須改變數字狀態的移數問題

將不同材質的球 A、B、C…改為數字 1、2、3…，方便後續討論。

（一）定義：

1. $S_N$：指一群特定數列的集合，其中每個數列皆有 $\frac{N}{2}$ 個 1、 $\frac{N}{2}$ 個 2。
2. 狀態數 s：數列中的所有數皆小於等於 s。
3. 操作：選取從數列的左邊數來第 k 個數字與其左右兩邊所有相同的數字移到數列的最左邊，同時將其數字+1。若該格數字+1 後超過 s，則該格數字變回 1。
4. 穩定：進行操作直到數列中的所有數字相同，視為穩定。

例：s=3，N=6、k=4，

$\{1\}^2\{2\}^2\{1\}^1\{2\}^1 \to \{3\}^2\{1\}^3\{2\}^1 \to \{2\}^3\{3\}^2\{2\}^1 \to \{1\}^2\{2\}^4 \to \{3\}^4\{1\}^2$
$\to \{1\}^6$

（二）討論 s=2：

1. 當 $k > \left\lceil \frac{2}{3} N \right\rceil$，有以下三種情況：

(1) N 是 3 的倍數，則有反例：

$\{1\}^{\frac{N}{3}}\{2\}^{\frac{N}{3}}\{1\}^{\frac{N}{3}} \to \{2\}^{\frac{N}{3}}\{1\}^{\frac{N}{3}}\{2\}^{\frac{N}{3}} \to \{1\}^{\frac{N}{3}}\{2\}^{\frac{N}{3}}\{1\}^{\frac{N}{3}} \to \cdots$，故不合。

(2) N 除以 3 餘 1，則有反例：

$\{1\}^{\frac{N}{3}+1}\{2\}^{\frac{N}{3}}\{1\}^{\frac{N}{3}} \to \{2\}^{\frac{N}{3}}\{1\}^{\frac{N}{3}+1}\{2\}^{\frac{N}{3}} \to \{1\}^{\frac{N}{3}}\{2\}^{\frac{N}{3}+1}\{1\}^{\frac{N}{3}} \to \cdots$，故不合。

(3) N 除以 3 餘 2，則有反例：

$\{1\}^{\frac{N}{3}+1}\{2\}^{\frac{N}{3}+1}\{1\}^{\frac{N}{3}} \to \{2\}^{\frac{N}{3}}\{1\}^{\frac{N}{3}+1}\{2\}^{\frac{N}{3}+1} \to \{1\}^{\frac{N}{3}+1}\{2\}^{\frac{N}{3}}\{1\}^{\frac{N}{3}+1} \to \cdots$，

故不合。

故 $k>[\frac{2}{3}N]$不合。

2. 當 $k\leq \left[\frac{2}{3}N\right]$，有以下三種情況：

(1) 格數=1：已達成條件。

(2) 格數=2：一次操作後 2 變為 1 或 1 變為 2，和原本的第一格合併成一格，達成穩定條件。

(3) 格數≥ 3：由鴿籠原理，其中一格數字的個數必$\leq[\frac{N}{3}]$，而這格必在有限次的操作後移動到 k 以後，於下一次操作時和下一格相同的數字合併為一格。

例：N=12、k=9、$x=\{1\}^1\{2\}^3\{1\}^4\{2\}^4$，

$\{1\}^1\{2\}^3\{1\}^4\{2\}^4 \to \{1\}^5\{2\}^3\{1\}^4 \to \{2\}^4\{1\}^5\{2\}^3 \to \{1\}^5\{2\}^7 \to$ $\{1\}^{12}$，故 $k\leq \left[\frac{2}{3}N\right]$可以達成條件。

（三）討論 s>2：

1. 當 $k>\left[\frac{1}{2}N\right]$：

(1) N 是偶數，則有反例：

$\{1\}^{\frac{N}{2}}\{2\}^{\frac{N}{2}} \to \{3\}^{\frac{N}{2}}\{1\}^{\frac{N}{2}} \to \{2\}^{\frac{N}{2}}\{3\}^{\frac{N}{2}} \to \cdots$

顯然不會合併成一格。

(2) N 是奇數，則有反例：

$\{1\}^{\frac{N}{2}+1}\{2\}^{\frac{N}{2}} \to \{3\}^{\frac{N}{2}}\{1\}^{\frac{N}{2}+1} \to \{2\}^{\frac{N}{2}+1}\{3\}^{\frac{N}{2}} \to \cdots$

顯然不會合併成一格。

2. 當 k≤ $\left\lceil\frac{1}{2}N\right\rceil$：

(1) 格數=1：已達成條件。

(2) 格數=2：一次操作後 2 變為 1 或 1 變為 2，和原本的第一格合併成一格，達成穩定條件。

(3) 格數≥ 3：由鴿籠原理，其中一格數字的個數必≤ $\left\lceil\frac{1}{2}\mathrm{N}\right\rceil$，在有限次的操作內，必有一格提升狀態至與 k 以後的數字

| |
|---|
| **結論五-1**：探討數字移動後必須改變數字狀態的移數問題，當狀態數 s=2 時，k≤ $\left\lceil\frac{2}{3}\mathrm{N}\right\rceil$可以達成條件。 |
| **結論五-2**：探討數字移動後必須改變數字狀態的移數問題，當狀態數 s>2 時，k≤ $\left\lceil\frac{1}{2}N\right\rceil$可以達成條件。 |

六、探討多列數列並列後的移數問題

（一）定義一個有 2n 行的矩陣 M：

1. 連通：選定矩陣內任一個數，上、下、左、右移動後可經過的所有相同的數，稱這些數與該數「連通」。

例：$\begin{bmatrix} A & \mathbf{B} & \mathbf{B} & A \\ A & \mathbf{B} & A & B \\ A & \mathbf{B} & \mathbf{B} & A \\ B & A & A & B \end{bmatrix}$，若選定(2,2)上的 **B**，則稱加粗標示的 **B** 與其「連通」。

2. A(a,b)：定義一個 m 列的矩陣，每列有 n 個 A、n 個 B。選定該矩陣第 a 列第 b 行進行操作，操作時將此數和與其連通的數一起往該列的最左移動。

例：n=2，m=4，A(2,2)=$\begin{bmatrix} A & \mathbf{B} & \mathbf{B} & A \\ A & \mathbf{B} & A & B \\ A & \mathbf{B} & \mathbf{B} & A \\ B & A & A & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & B & A & A \\ B & A & A & B \\ B & B & A & A \\ B & A & A & B \end{bmatrix}$。

3. 若矩陣進行有限次操作後，前 n 行的數字相同，則該矩陣滿足條件。

例：若一矩陣在有限次操作後變為$\begin{bmatrix} A & A & B & B \\ A & A & B & B \\ A & A & B & B \\ A & A & B & B \end{bmatrix}$，則該矩陣滿足條件。

（二）討論 m=2 的狀況：

1. 欲使被選定的那列移動後最左的 n 個數字相同，則該列必滿足結論：

對任意的 p(n,k)而言，所有數列能使左邊 n 個數相同者必滿足

$n \le k \le \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$。

2. 持續操作至該列最左的 n 個數字相同後，該列被分成兩格，例如：

$$\begin{bmatrix} A & A & A & A & B & B & B & B \\ A & B & A & B & A & B & A & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & B & B & B & A & A & A & A \\ B & B & A & B & A & B & A & A \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} A & A & A & A & B & B & B & B \\ A & A & A & B & B & A & B & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & B & B & B & A & A & A & A \\ B & B & B & B & A & A & A & A \end{bmatrix}$$

則顯而易見地，在其中一行達成最左 n 個數字相同後，另一行必也在有限次的移動後達成最左 n 個數字相同。

（三）由（二）-2.的結果知，若矩陣中的任一列達成最左 n 個數字相同後，必使其上下的數列在有限次的移動後達成最左 n 個數字相同。因此，只要矩陣中任一列滿足結論 1.1，則不論有多少列，該矩陣滿足條件。

**結論六-1**：探討多列數列並列後的移數問題，選擇矩陣中任一列，只要 $n \le k \le \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$，則該矩陣在進行有限次操作後必滿足前 n 行的數字相同。

# 伍、研究結果

一、對任意的 $S_n$ 而言，集合內所有數列能使左邊 n 個數相同者，k 必滿足

$n \leq k \leq \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$。

二、考慮數列中有 m 類球的情況下，達到穩定的 k 必滿足

$(m-1) \cdot n \leq k \leq \left\lceil \frac{2m-1}{2} n \right\rceil$。

三、考慮數列中數量不同的移數問題

（一）在數列中只有兩個數的情況下，可以得知在經過數次移動後，皆能使最左邊的 n 個數相同的數列必滿足 $a \leq k \leq a + \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil$。

（二）在數列中有 n 個數的情況下，可以得知在經過數次移動後，皆能使最左邊的 n 個數相同的數列必滿足

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} \leq k \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} + \left\lceil \frac{x_m}{2} \right\rceil$。

四、探討數字移動後必須改變狀態的移數問題

（一）當狀態數=2 時，$k \leq \left\lceil \frac{2}{3} N \right\rceil$可以達成條件。

（二）當狀態數>2 時，$k \leq \left\lceil \frac{1}{2} N \right\rceil$可以達成條件。

五、探討多排數列並列後的移數問題，選擇矩陣中任一列，只要 $n \leq k \leq \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$，則該矩陣在進行有限次操作後必滿足前 n 行的數字相同。

# 陸、討論

一、在研究這類問題時，我們發現了一種探討這類移數問題的想法：欲使數列達成穩定，則必須在移動的過程中使格數減少。因此，我們在解決問題時只要思考要如何舉出無法使格數減少的反例並證明穩定狀態的 k 所需要的範圍即可。這樣的解題思路或許可以應用在其他題目中。

二、在期望值的部分我們沒有算出規律性的答案，希望在未來可以解出期望值方面的題目，並且利用最佳步數的想法解出和本命題相關的最佳解。

三、我們有嘗試將題目推廣至二維，可惜沒有證明出結論。希望未來除了可以

解決二維的題目，還能推廣至三維，甚至多維。

# 柒、結論

透過觀察移動後其總格數是否跟著減少，並以反證法確認可使用的範圍，我們為這類移數問題歸納出了一個系統化的解法。希望這樣的解法未來可以被應用在其他專業領域，如統計、管理等。

# 捌、未來展望

一、探討每次操作都重新選一個數，最後達成穩定的期望值

（一）假設數列 x 的期望值是 E(p(n))。例：E(AABBAB)，即為數列 x=AABBAB 的期望值。

（二）解題思路

1. 注意到 E(AABB)和 E(BBAA)的期望值相同，都等於 0。同樣地，E(ABAB)=E(BABA)，E(ABBA)=E(BAAB)。

2. 一個數列的期望值等於（選擇一個數 k，進行一次操作後的期望值+1）×選到該數的機率之總和，粗體表示該次操作選到的數。

   例：E(ABAB)=$\frac{1}{4}(E(\boldsymbol{A}BAB)+1)+\frac{1}{4}(E(B\mathbf{A}AB)+1)+\frac{1}{4}(E(AA\mathbf{B}B)+1)+\frac{1}{4}(E(BAB\mathbf{A})+1)$，由於 E(ABAB)=E(BABA)，因此

   (1) E(ABAB)=

   $\frac{1}{2}(E(ABAB)+1)+\frac{1}{4}(E(BAAB)+1)+\frac{1}{4}(E(AABB)+1)$。

   (2) 同理，E(ABBA)= $\frac{1}{4}(E(ABBA)+1)+\frac{3}{4}(E(AABB)+1)$。

   (3) 而 E(AABB)=0，解聯立後得 E(ABAB)=$\frac{8}{3}$，E(ABBA)=$\frac{4}{3}$。

（三）經過相同的解題思維後，我們討論出了所有 p(3)的期望值，歸納為表格

如下：

| | | | |
|---|---|---|---|
| E(AAABBB) | 0 | E(ABABBA) | $\frac{39}{10}$ |
| E(AABABB) | $\frac{177}{55}$ | E(ABBABA) | $\frac{2061}{550}$ |
| E(ABAABB) | $\frac{30}{11}$ | E(AABBBA) | $\frac{3}{2}$ |
| E(ABBAAB) | $\frac{129}{55}$ | E(ABBBAA) | $\frac{6}{5}$ |
| E(ABABAB) | $\frac{2709}{550}$ | E(AABBAB) | $\frac{156}{55}$ |

（四）我們對於無法從中找到規律感到惋惜，希望未來可以找到其規律。

二、探討推廣到 2n× 2n 的正方形矩陣中的移數問題

（一）定義一個矩陣 B(a,b)：

1. 連通：選定矩陣中任一個數，上、下、左、右移動後可經過的所有相同的數，稱這些數與該數連通。

例：$\begin{bmatrix} A & \mathbf{B} & \mathbf{B} & A \\ A & \mathbf{B} & A & B \\ A & \mathbf{B} & \mathbf{B} & A \\ B & A & A & B \end{bmatrix}$，若選定$(2,2)$上的 **B**，則稱粗體標示的 **B** 與其「連通」。

2. 選定該矩陣第 a 行第 b 列進行操作，操作時將此數和與其連通的數一起往該列的最左移動後，再將這些數往最上方移動。

例：B(2,2)進行一次操作：

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{B} & \mathbf{B} & A \\ A & \mathbf{B} & A & B \\ A & \mathbf{B} & \mathbf{B} & A \\ B & A & A & B \end{bmatrix} \text{向左移動} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{B} & A & A \\ \mathbf{B} & A & A & B \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & A & A \\ B & A & A & B \end{bmatrix} \text{向上移動} \begin{bmatrix} B & B & A & A \\ B & B & A & B \\ B & A & A & A \\ B & A & A & B \end{bmatrix}。$$

3. 若在進行有限次的操作後，矩陣中的所有相同的數連通，則該矩陣滿足穩定條件。

例：若一矩陣在進行移動後形如 $\begin{bmatrix} B & B & B & A \\ B & B & A & A \\ B & A & A & A \\ B & B & A & A \end{bmatrix}$，則該矩陣滿足穩定條

件。

（二）討論 b>$\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil$的情況，則有反例：n=2，$\begin{bmatrix} A & B & A & B \\ A & B & A & B \\ A & B & A & B \\ A & B & A & B \end{bmatrix}$，因為 b 必=4：

$$\begin{bmatrix} A & B & A & B \\ A & B & A & B \\ A & B & A & B \\ A & B & A & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & A & B & A \\ B & A & B & A \\ B & A & B & A \\ B & A & B & A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B & A & B \\ A & B & A & B \\ A & B & A & B \\ A & B & A & B \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

故無法達成穩定條件。

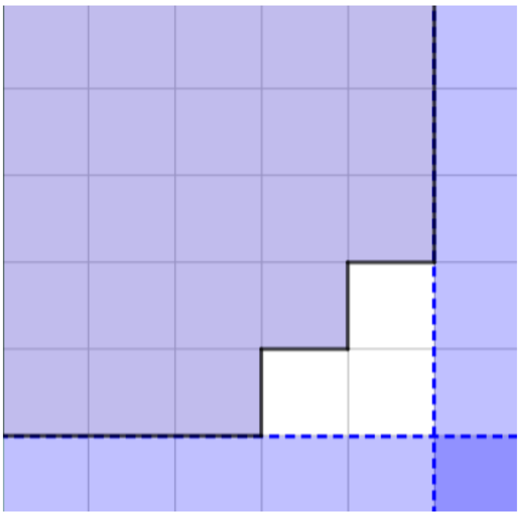
（三）討論 a>$\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil$的情況，同上有反例：n=2、a=4，$\begin{bmatrix} A & A & A & A \\ B & B & B & B \\ A & A & A & A \\ B & B & B & B \end{bmatrix}$，無法達成穩定條件。

（四）討論$a \times b < 2 \times n^2$的情況：

1. 在 B(a,b)=$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} & B \\ B & B & B & B \\ B & B & B & A \end{bmatrix}$時，若我們選到粗體的 A，則無論怎麼操作矩陣都不會變，故無法達成穩定條件。

2. 同理，B(a,b)=$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A} & B & B \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} & B & B \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} & B & B \\ \mathbf{A} & B & B & A \end{bmatrix}$時，也無法達成穩定條件。

3. 因此，我們可以觀察出：若矩陣元素「其正左方的格數和其正上方的格數（包含本身）的乘積」小於$2n^2$（即 ab<$2n^2$），則無法達成穩定條件。



以 n=3 的矩陣為例，上色處為無法達成條件者，但目前無法證明空白處都能達成條件。

## 玖、參考資料

一、TED（2022 年 7 月 16 日）。IMO 2022 Day 1 solutions and discussion〔影片〕。YouTube。 https://www.youtube.com/watch?v=nYD-qIOdi_c&t=194s

二、盧開澄(1983)。《組合數學》。儒林出版社

三、翰林高中數學 2（排列組合）

附錄：

一、

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define M 100

int m=3, n=5, pos[M], cnt=0;
set<string> st;
string ss1="";
string ss2="";
bool play(string s, int i, bool pr){
    st.clear();
    st.insert(s);
    int j, k;
    while(s!=ss1&&s!=ss2){
        for(j=i; j>=0&&s[j]==s[i]; --j);
        for(k=i; k<m*n&&s[k]==s[i]; ++k);
```

```
            s=s.substr(j+1,k-j-1)+s.substr(0,j+1)+s.substr(k);
            if(st.find(s)!=st.end()) return 0;
            else st.insert(s);
        }
        if(pr) cout<<'\n';
        return 1;
}
bool t=0;
void solve(string s){
        for(int i=0; i<m*n; ++i){
            if(pos[i]) continue;
            if(!play(s,i,0)) pos[i]=1, cout<<i+1<<':'<<s<<'\n';
        }
}
void dfs(int a=0, int b=0, int c=0, int last='0', string s=""){
        if(a==n && b==n && c==n) solve(s);
        string s1=s;
        for(int i=1; i<=n-a&&last!='a'; ++i){
            s1+='a';
            dfs(a+i,b,c,'a',s1);
        }s1=s;
        for(int i=1; i<=n-b&&last!='b'; ++i){
            s1+='b';
            dfs(a,b+i,c,'b',s1);
        }s1=s;
        for(int i=1; i<=n-c&&last!='c'; ++i){
```

```
            s1+='c';
            dfs(a,b,c+i,'c',s1);
        }
}
int main(){
        memset(pos,0,sizeof(pos));
        for(int i=0; i<n; ++i) ss1+='a', ss2+='a';
        for(int i=0; i<n; ++i) ss1+='b', ss2+='c';
        for(int i=0; i<n; ++i) ss1+='c', ss2+='b';
        dfs();
        for(int i=n; i<m*n; ++i){
            if(!pos[i]) cout<<i+1<<' ';
        }
        return 0;
}
```

## 【評語】050410

作者討論移球問題，一列球有兩種顏色(之後推廣至 m 種顏色)。每次操作將第 k 顆左右兩邊所有的同色球通通移到最左邊，此動作逐漸將同色的球集中在一邊。因此作者先找到在進行操作時格數未能持續減少的情況後，再證明其他可使格數持續減少的情況。而後作者將問題推廣，諸如將球的種類數推廣至 m 種、各類球的數量不同、多排數列並列等。作者理路清晰且多方向拓展問題，用心可嘉。

# 作品海報

# 移探究竟—關於數列前移的探討

## 壹、摘要

本研究針對2022IMO的第一題進行探討，即將兩種相同數量，不同材質的球排成一列，選中其中一個位置的球並將該球與其旁邊相同材質的球移至最左，找到特定的球數與選球方式，使得無論如何排列，皆能在移動後使最左的$n$顆球皆為相同材質。我們發現只要數列在進行操作時格數持續減少，即可達成條件。因此，我們先找到無法在進行操作時使格數持續減少的情況後，再證明其他情況皆可使格數持續減少，就可以求得解。在發現此規律後，我們針對原題進行推廣，例如將球的種類數推廣至m種、各類球的數量不同、多排數列並列、並透過期望值粗估讓數列產生格數減少的平均操作次數的情況……等情況。

## 貳、研究動機

在暑假練習2022 IMO題型時，發現P1非常有趣。題目內容是關於一個淺顯易懂的遊戲：「令有**兩種材質的球排成一列，$A$、$B$分別代表一種材質。今有$n$個球$A$和$n$個$B$球，令$k$為正整數且$k \le 2n$，持續將從左數來第$k$個球與其旁邊所有同材質的球移至最左邊。找到所有$(n,k)$，使得無論如何排列，在經過操作後，皆能使最左邊的$n$個球同材質。**」

在計算完這個題目之後，我們愈發覺得此題有趣，因此萌生了將此題延伸推廣的想法。

## 參、名詞定義

1. $S_n$：指一群特定數列的集合，其中每個數列皆有$n$個$A$、 $n$個$B$。
例：$S_2=\{AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA\}$
2. 格子：某個數字與其相鄰相同的數字，稱為一「格」。例： $AA\boldsymbol{BBB}A$，其中從左到右「$AA$」為一格、「$\boldsymbol{BBB}$」為一格、「$A$」也是 一格，共三格。連續$e$個$A$或$B$表示成$A^e$或$B^e$。
3. $S_n$中的數列形如$A^{e_1}B^{e_2}A^{e_3}\cdots A^{e_m}$或$A^{e_1}B^{e_2}A^{e_3}\cdots B^{e_m}$
(1) 其中A和B代表數列中連續皆由A或B組成的一群。
(2) $e_x$代表該群中含有x個A或B，即$e_1+e_2+e_3+\cdots e_m=2n$。
4. 操作：係指將「從左數來第k顆球與其左右兩邊所有相同的球」移至最左邊的一次過程，稱為一次「操作」，以「→」表示。例：k=5，$S_4$中的$AAABBBAB \rightarrow BBBAAAAB$，也可表示為$A^3B^3A^1B^1 \rightarrow B^3A^4B^1$。
5. $T_k^p(x)$：係指一個數列x選擇第k個球，在進行p次操作後變成的新數列。
例：$T_5^1(AAABBBAB)$=BBBAAAAB。
6. $seg(x)$：數列$x$的格子數。
7. $C_k(x)$：被選中的格子為第u格（即第k顆球屬於第u格），則稱$C_k(x)=\{i \in N| u+1 \le i \le \text{seg(x)}\}$。
8. 給定k，若對所有$S_n$中的元素x，皆能找到p使得$T_k^p(x)=A^nB^n$或$B^nA^n$，則稱k為$S_n$的穩定值。

**問題分析**：假設有一數列，其中排列方式為$\cdots A^2B^3A^2\cdots$。若被選中的格子是中間的$B^3$，而經過一次操作後，數列會變$B^3\cdots A^4\cdots$。可以觀察到原本被隔開的三格，在經過一次操作後便合為兩格。因此，
**欲達成穩定，數列中經過操作後的格數必須減少，即每個數列的$seg(x)$經操作後須為遞減，即$seg(x) \ge seg(T_k^1(x)) \ge seg(T_k^2(x)) \ge \cdots$。**

## 肆、研究過程

**移數問題初探**

1. 討論k<n的情況
考慮$S_n$內的所有元素後，我們發現：
當$x=A^{n-1}B^nA^1$時，由於k<n，只能移動原本就在最左邊$A^{n-1}$，操作後格數不變，故k<n不合。
2. 令seg(x)=t且t≥4，若欲在前三個操作後seg(x)仍=t，則$e_t$、$e_{t-1}$、$e_{t-2} > 2n-(k-1)$，
而$n \ge e_t + e_{t-1} \ge 2(2n+1-k)$，整理可得$k \ge \frac{3n}{2}+1$。
討論k>$\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil$的情況，則有以下反例，無法達到穩定：
取$x=A^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}B^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}A^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}B^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}$，因為k> n+$\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$，所以我們只能選到最後一格$B^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}$，無法達成條件。
由1、2，可以得知若對$S_n$內的所有$x$皆能找到$p$使得$T_k^p(x)=A^nB^n$或$B^nA^n$，則n≤k≤ $\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil$。
3. 達成穩定的k必滿足n≤k≤ $\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil$：
(1) 若$C_k(x)=\emptyset$：假設$(seg(x)=t)$
a. 當$t=2$時：數列已達成穩定。
b. 當$t>2$時：$A$或$B$中必有一個類被分成$e_{i_1}$、$e_{i_2}\cdots\cdots e_{i_i}$（$e_{i_1} \le e_{i_2} \le \cdots\cdots \le e_{i_i}$）：
不失一般性假設 $e_{i_1} \le \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，已知$k\le \left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil$，則$\sum_{i=u+1}^{t} e_i \ge \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$
因此在t次操作內，$i_1$必$\in C_k(x)$。
(2) 若$C_k(x) \neq \emptyset$：已知$C_k(x)$之前共有u格
a. 第u格與第u+1格合併，使格數減少。
b. 若有其他元素進入$C_k(x)$：已知$u \ge n$，則$\sum_{i=u+1}^{t} e_i \le n$
因此$C_k(x)$內的個數$\sum_{i=u+1}^{t} e_i$無法不斷增加，會在有限次移動內減少。
由(1)、(2)，達成穩定的k滿足$n\le k\le \left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil$

二-1：給定k，若對所有$S_n$中的元素x，皆能找到p使得$T_k^p(x)=A^nB^n$的k若且唯若n ≤k≤ $\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil$

## 探討數字推廣至m類的移數問題

數列在進行有限次操作後，滿足數列中「種類的數量等於總格數（即形如$A_1{}^nA_2{}^nA_3{}^n\cdots A_{m-1}{}^nA_m{}^n$）」者，稱該數列滿足條件。

（一）討論k<(m-1) n的情況

考慮m為任意，$S_n$內的所有數列後，我們發現：

當x=$A_1{}^{n-1}A_2{}^nA_3{}^n\cdots A_{m-1}{}^nA_m{}^nA_1{}^1$時，由於k<(m-1)n，只能選到$A_{m-1}{}^n$以前的格子，且無法合成一格，因此不合。

（二）討論k>$\left\lceil(\frac{2m-1}{2})n\right\rceil$的情況

考慮m為任意，$S_n$內的所有元素後，我們不難發現：

有x=$A_1{}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}A_2{}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}\cdots A_m{}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}A_1{}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\cdots A_m{}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$

因為k> (m-1)n+$\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+(m-1)(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor)$，所以只能選到最後一格$A_m{}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$，無法達成條件。

由（一）（二），可知若能找到p使得

$T_k^p(x)=A_1{}^nA_2{}^nA_3{}^n\cdots A_{m-1}{}^nA_m{}^n$，則 (m-1)n≤ $k\le\left\lceil\frac{2m-1}{2}n\right\rceil$ 。

（三）達成穩定的k必滿足(m-1)n≤ $k\le\left\lceil\frac{2m-1}{2}n\right\rceil$：

1. 數列一開始$C_k(x)$=∅：假設seg(x)＝t
   (1) 當$t=2$時：數列已達成穩定。
   (2) 當$t>2$時：必有一個元素被分成$e_{i_1}$、$e_{i_2}\cdots\cdots e_{i_i}$（$e_{i_1}\le e_{i_2}\le\cdots\cdots\le e_{i_i}$）：不失一般性設 $e_{i_1}\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，已知$k\le\left\lceil\frac{2m-1}{2}n\right\rceil$，則$\sum_{i=k+1}^{t}e_i\ge\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，因此在t次操作內，$i_1$必$\in C_k(x)$。
2. 數列$C_k(x)\ne\emptyset$：已知$C_k(x)$之前共有u格
   (1) 第u格與第u+1格合併，使格數減少。
   (2) 若有其他元素進入$C_k(x)$：已知$k\ge(\mathrm{m}-1)\mathrm{n}$，則$\sum_{i=u+1}^{t}e_i\le n$，因此$C_k(x)$內的個數$\sum_{i=u+1}^{t}e_i$無法不斷增加，會在有限次移動內減少。

由1、2，達成穩定的k滿足(m-1)n≤ $k\le\left\lceil\frac{2m-1}{2}n\right\rceil$

**結論：給定k，若對所有$S_n$中的元素x，皆能找到p使得$T_k^p(x)=A_1{}^nA_2{}^nA_3{}^n\cdots A_{m-1}{}^nA_m{}^n$的k若且唯若(m-1)n≤ $k\le\left\lceil\frac{2m-1}{2}n\right\rceil$。**

## 探討數字移動後必須改變數字狀態的移數問題

1. $S_N$：指一群特定數列的集合，其中每個數列皆有$N$個數。
2. 狀態數s：數列中的所有數皆屬於$Z_s$。
3. $Z_s$： $Z_s$是s的同餘類。
4. 操作：除了一般的操作外，同時將其數字+1後模s。
5. 穩定：進行操作直到數列中的所有數字相同，視為穩定。
   例：s=3，N=6、k=4，$1^22^21^12^1\to3^21^32^1\to2^33^22^1\to1^22^4\to3^41^2\to1^6$

（二）討論s=2：

1. 當k>$\left[\frac{2}{3}N\right]$，有以下三種情況：
   (1)N是3的倍數，則有反例：
   $1^{\frac{N}{3}}2^{\frac{N}{3}}1^{\frac{N}{3}}\to2^{\frac{N}{3}}1^{\frac{N}{3}}2^{\frac{N}{3}}\to1^{\frac{N}{3}}2^{\frac{N}{3}}1^{\frac{N}{3}}\to\cdots$，故不合。
   (2) N除以3餘1，則有反例：
   $1^{\frac{N}{3}+1}2^{\frac{N}{3}}1^{\frac{N}{3}}\to2^{\frac{N}{3}}1^{\frac{N}{3}+1}2^{\frac{N}{3}}\to1^{\frac{N}{3}}2^{\frac{N}{3}+1}1^{\frac{N}{3}}\to\cdots$，故不合。
   (3)N除以3餘2，則有反例：
   $1^{\frac{N}{3}+1}2^{\frac{N}{3}+1}1^{\frac{N}{3}}\to2^{\frac{N}{3}}1^{\frac{N}{3}+1}2^{\frac{N}{3}+1}\to1^{\frac{N}{3}+1}2^{\frac{N}{3}}1^{\frac{N}{3}+1}\to\cdots$，故不合。

故k>[$\frac{2}{3}$N]不合。

2. 當k ≤ $\left[\frac{2}{3}N\right]$ ，有以下三種情況：
   (1) seg(x)=1：已達成條件。
   (2) seg(x)=2：一次操作後2變為1或1變為2，和原本的第一格合併成一格，達成穩定條件。
   (3) seg(x)≥ 3：由鴿籠原理，其中一格數字的個數必≤[$\frac{N}{3}$]，而這格必在有限次的操作後移動到k以後，於下一次操作時和下一格相同的數字合併為一格。
   例：N=12、k=9、x=$1^12^31^42^4$，$1^12^31^42^4\to1^52^31^4\to2^41^52^3\to1^52^7\to1^{12}$，故k ≤ $\left[\frac{2}{3}\mathrm{N}\right]$可以達成條件。

（三）討論s>2：

1. 當k>$\left[\frac{1}{2}N\right]$：
   (1) N是偶數，有反例：$1^{\frac{N}{2}}2^{\frac{N}{2}}\to3^{\frac{N}{2}}1^{\frac{N}{2}}\to2^{\frac{N}{2}}3^{\frac{N}{2}}\to\cdots$，不合
   (2) N是奇數，有反例：$1^{\frac{N}{2}+1}2^{\frac{N}{2}}\to3^{\frac{N}{2}}1^{\frac{N}{2}+1}\to2^{\frac{N}{2}+1}3^{\frac{N}{2}}\to\cdots$

2. 當k ≤ $\left[\frac{1}{2}N\right]$：
   (1) seg(x)=1：已達成條件。
   (2) seg(x)=2：一次操作後2變為1或1變為2，和原本的第一格合成一格，達成穩定條件。
   (3) seg(x)≥ 3：由鴿籠原理，其中一格數字的個數必≤ $\left[\frac{1}{2}\mathrm{N}\right]$，在有限次的操作內，必有一格提升狀態至與k以後的數字

## 探討數列中每類球的數量不同時的移數問題

（一）不失一般性假設數列中有a個A、b個B，且a≥b：

1. 討論k<a的狀況，則有以下反例：$x=A^{a-1}B^bA^1$ ，由於k<n，無論如何只能移動原本就在最左邊的格子，操作後格數不變，故k<n不合。
2. 討論k>a+$\left\lceil\frac{b}{2}\right\rceil$的情況，則有反例：$x=A^{\lceil\frac{a}{2}\rceil}B^{\lceil\frac{b}{2}\rceil}A^{\lfloor\frac{a}{2}\rfloor}B^{\lfloor\frac{b}{2}\rfloor}$，因為k> a+$\left\lceil\frac{b}{2}\right\rceil=\left\lceil\frac{a}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{b}{2}\right\rceil+\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor$，我們只能選到最後一格$B^{\lfloor\frac{b}{2}\rfloor}$，無法達成條件。

由1、2，可知若能找到p使得$T_k^p(x)=A^aB^b$ ，則a ≤ k ≤ a + $\left\lceil\frac{b}{2}\right\rceil$。

3. 達成穩定的k必滿足a≤ k ≤ a + $\left\lceil\frac{b}{2}\right\rceil$
   (1) 數列一開始$C_k(x)$=∅：假設數列共有t格
   a. 當$t=2$時：數列已達成穩定。
   b. 當$t>2$時：必有一個元素被分成$e_{i_1}$、$e_{i_2}\cdots\cdots e_{i_i}$（$e_{i_1}\le e_{i_2}\le\cdots\cdots\le e_{i_i}$）：不失一般性假設 $e_{i_1}\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 已知k ≤ a + $\left\lceil\frac{b}{2}\right\rceil$，則 $\sum_{i=k+1}^{t}e_i\ge\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor$因此在t次操作內，$i_1$必$\in C_k$。
   (2) 數列$C_k(x)\ne\emptyset$：已知$C_k$之前共有u格
   a. 第u格與第u+1格合併，使格數減少。
   b. 若有其他元素進入$C_k$：已知$k\ge a$ ，則$\sum_{i=u+1}^{t}e_i\le b$因此$C_k$內的個數$\sum_{i=u+1}^{t}e_i$會在有限次移動內減少。

由1、2，達成穩定的k滿足a≤k≤ a + $\left\lceil\frac{b}{2}\right\rceil$。

（二）不失一般性設數列有$x_1$個$A_1$、$x_2$個$A_2\cdots x_{m-1}$個$A_{m-1}$、$x_m$個$A_m$且$x_1\ge x_2\ge\cdots x_{m-1}\ge x_m$（m≥ 3 ∧ $\left\lfloor\frac{x_1}{2}\right\rfloor>x_m$）：

1. 討論k<$x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}$的情況，則有以下反例：x=$A_1{}^{x_1-1}A_2{}^{x_2}A_3{}^{x_3}\cdots A_{m-1}{}^{x_{m-1}}A_m{}^{x_m}A_1{}^1$，可以觀察到不論如何，都只能選到$A_m{}^{x_m}$格之前，而該格前都無法合併成一格，因此k<$x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}$無法滿足條件。
2. 論k>$x_2+x_3+\cdots+x_m+\left\lceil\frac{x_1}{2}\right\rceil$的情況，則有以下反例：x=$A_1{}^{\lceil\frac{x_1}{2}\rceil}A_2{}^{x_2}\cdots A_m{}^{x_m}A_1{}^{\lfloor\frac{x_1}{2}\rfloor}$，我們只能選到最後一格$A_1{}^{\lfloor\frac{x_1}{2}\rfloor}$，無法達成條件。

由1、2，可知若能找到p使得$T_k^p(x)$=$A_1{}^{x_1}A_2{}^{x_2}\cdots A_{m-1}{}^{x_{m-1}}A_m{}^{x_m}$則$x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}$ ≤k ≤ $x_2+x_3+\cdots+x_m+\left\lceil\frac{x_1}{2}\right\rceil$ 。

3. 達成穩定的k必滿足$x_1+\cdots+x_{m-1}$ ≤k ≤ $x_2+\cdots+x_m+\left\lceil\frac{x_1}{2}\right\rceil$
   (1) 數列一開始$C_k(x)$=∅：假設seg(x)=t
   a. 當$t=m$時：數列已達成穩定。
   b. 當$t>m$時：必有一個元素$A_i$被分成$e_{i_1}$、$e_{i_2}\cdots\cdots e_{i_i}$（$e_{i_1}\le e_{i_2}\le\cdots\cdots\le e_{i_i}$）：不失一般性假設 $e_{i_1}\le\left\lfloor\frac{x_i}{2}\right\rfloor\le\left\lfloor\frac{x_1}{2}\right\rfloor$，已知k ≤ $x_2+x_3+\cdots+x_m+\left\lceil\frac{x_1}{2}\right\rceil$，則$\sum_{i=k+1}^{t}e_i\ge\left\lfloor\frac{x_1}{2}\right\rfloor$因此在t次操作內，$i_1$必 $\in C_k(x)$。
   (2) 數列$C_k(x)\ne\emptyset$：已知$C_k(x)$之前共有u格：
   a. 第u格與第u+1格合併，使格數減少。
   b. 若有其他元素進入$C_k(x)$：宣稱k $\ge x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}$，則$\sum_{i=u+1}^{t}e_i\le x_m$，因此$C_k(x)$內的個數$\sum_{i=u+1}^{t}e_i$無法不斷增加，會在有限次移動內減少。

由1、2， $x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}$ ≤k ≤ $x_2+x_3+\cdots+x_m+\left\lceil\frac{x_1}{2}\right\rceil$。

**結論1：假設數列中有a個1、b個2，且a≥ b，給定k，若對所有$S_n$中的元素x，皆能找到p使得$T_k^p(x)=A^aB^b$的k若且唯若滿足a≤k≤ $a+\left\lceil\frac{b}{2}\right\rceil$。**

**結論2：假設數列有$x_1$個1、$x_2$個2、$x_3$個3⋯$x_m$個$m$、$x_n$個 n(m=n-1)，且$x_1\ge x_2\ge x_3\ge\cdots x_m\ge x_n$ ，給定k，若對所有$S_n$中的元素x，皆能找到p使得$T_k^p(x)$=$A_1{}^{x_1}A_2{}^{x_2}\cdots A_{m-1}{}^{x_{m-1}}A_m{}^{x_m}$的k若且唯若滿足$x_1+x_2+\cdots+x_m$ ≤k≤ $x_1+x_2+\cdots+x_m+\left\lceil\frac{x_n}{2}\right\rceil$。**

結論1：當狀態數s=2時，k≤ $\left[\frac{2}{3}N\right]$可以達成條件。

結論2：當狀態數s>2時，k≤ $\left[\frac{1}{2}N\right]$可以達成條件。

## 肆、研究過程

### 探討多列數列並列後的移數問題

1. 連通：選定矩陣內任一個數，上、下、左、右移動後可經過的所有相同的數，稱這些數與該數「連通」。
2. A(a,k)：定義一個m列的矩陣，每列有n個1、n個2。選定該矩陣第a列第b行進行操作，操作時將此數和與其連通的數一起往該列的最左移動。例：n=2，m=4，

$$A(2,2)=\begin{bmatrix}1&\mathbf{2}&\mathbf{2}&1\\1&\mathbf{2}&1&2\\1&\mathbf{2}&\mathbf{2}&1\\2&1&1&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&2&1&1\\2&1&1&2\\2&2&1&1\\2&1&1&2\end{bmatrix}$$

3. 若矩陣進行有限次操作後，前n行的數字相同，則該矩陣滿足條件。
4. (1) 若欲達成條件，則顯而易見的必須有至少一列達成條件二-1：對於該數列，能找到p使得$T_k^p(x)=A^nB^n$的k若且唯若滿足n≤k≤ $\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil$；又欲使穩定數列移動，必須取到$B^n$，因此k>n。
   (2) 其中一列移動後形如$A^nB^n$，我們擷取矩陣的其中一部份如：$\begin{bmatrix}A^n & B^n\\ P(x,y) & P(y,x)\end{bmatrix}$，其中P(x,y)是由A、B組成的數列，其中有x個A、y個B，x+y=n且$y>0$，即$n>x$

（二）討論n是偶數的情況：

1. 顯而易見地，至少一列必須滿足n≤k≤ $\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil$。
2. 則有反例：$\begin{bmatrix}A^n & B^n\\ A^{\frac{n}{2}}B^{\frac{n}{2}} & A^{\frac{n}{2}}B^{\frac{n}{2}}\end{bmatrix}$，操作如下：

$\begin{bmatrix}A^n & B^n\\ A^{\frac{n}{2}}B^{\frac{n}{2}} & A^{\frac{n}{2}}B^{\frac{n}{2}}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}B^n & A^n\\ B^{\frac{n}{2}}A^{\frac{n}{2}} & B^{\frac{n}{2}}A^{\frac{n}{2}}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}A^n & B^n\\ A^{\frac{n}{2}}B^{\frac{n}{2}} & A^{\frac{n}{2}}B^{\frac{n}{2}}\end{bmatrix}\rightarrow\cdots$，無法達成條件。

（三）討論n是奇數的情況：

1. 顯而易見地，至少一列必須滿足n≤k≤ $\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil$。
2. 假設經過操作後形如$\begin{bmatrix}A^n & B^n\\ P(x,y) & P(y,x)\end{bmatrix}$，**欲證明在有限次的步數內x數必上升（條件1）**：
   (1)第一次操作：$\begin{bmatrix}A^n & B^n\\ P(x,y) & P(y,x)\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}B^n & A^n\\ B^x & P(x+y,y)\end{bmatrix}$
   a. 若隨著$B^n$一起移動的B有大於x個，則滿足條件1（因為$B^n$底下有大於x個B，x上升）。
   b. 若隨著$B^n$一起移動的B有恰x個，則：
      (a) 若$P(x+y,y)$中前y個數不全為A，則$B^n$底下有大於x個B，滿足條件1。
      (b) 若$P(x+y,y)$中前y個數全為A，則$\begin{bmatrix}B^n & A^n\\ B^xA^y & P(x,y)\end{bmatrix}$
   (2) 第二次操作：$\begin{bmatrix}B^n & A^n\\ B^xA^y & P(x,y)\end{bmatrix}$
   a. 若隨著$A^n$一起移動的A有大於x個，則滿足條件1。
   b. 若隨著$A^n$一起移動的A有恰x個，則：
      (a) $x>y$：$\begin{bmatrix}A^n & B^n\\ A^xB^x & A^yB^y\end{bmatrix}$，x+x>x+y=n，$B^n$與$B^x$相連。
      (b) $x<y$：$\begin{bmatrix}A^n & B^n\\ A^xB^x & A^yB^y\end{bmatrix}$，x+x<x+y=n，$A^n$與$A^y$相連。
   (3) 第三次操作：$\begin{bmatrix}A^n & B^n\\ A^xB^x & A^yB^y\end{bmatrix}$
   a. 若$x>y$，則$B^n$會和下排的$B^x$一起移動，又$B^n$下已有$B^y$，因此$\begin{bmatrix}A^n & B^n\\ A^xB^x & A^yB^y\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}B^n & A^n\\ B^{x+y} & A^{x+y}\end{bmatrix}$，滿足條件1。
   b. 若x < y，則$\begin{bmatrix}A^n & B^n\\ A^xB^x & A^yB^y\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}B^n & A^n\\ B^yA^x & B^xA^y\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}A^n & B^n\\ A^yB^yA^xB^x\end{bmatrix}$此時因$y+y>x+y=2n$，則$B^n$與$B^y$相連一起移動，又$B^n$下已有$B^x$，因此$\begin{bmatrix}A^n & B^n\\ A^yB^yA^xB^x\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}B^n & A^n\\ B^{x+y} & A^{x+y}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}B^n & A^n\\ B^n & A^n\end{bmatrix}$，滿足條件1。

綜上所述，在5步數內x數必上升，n是奇數時可達成條件。

### 數列第一次格數減少時所需的移動次數之期望值

（一）令一數列$x\in S_n$共有2t格：定隨機變數X為數列第一次格數減少時所需的移動次數，期望值E(X)。

（二）若$seg(x)$為奇數：

數列 $x$ 形如$A^{e_1}B^{e_2}\cdots B^{e_{m-1}}A^{e_m}$或$B^{e_1}A^{e_2}\cdots A^{e_{m-1}}B^{e_m}$：

1. 取到第 $u$ 格，$u$ 在2到 $m-1$ 之間：第 $u+1$ 格與第 $u-1$ 格合併，則$X=1$。
2. 取到第 $m$ 格：與第一格合併，則 $X=1$。

故 $P(X=1)=1$，$E(X)=1$。

（三）若 $seg(x)=2t$ 為偶數：

1. $x$ 形如$A^{e_1}B^{e_2}\cdots A^{e_{m-1}}B^{e_m}$或$B^{e_1}A^{e_2}\cdots B^{e_{m-1}}A^{e_m}$：
   (1) 因 $A$、$B$ 球各 $n$ 個，滿足：$\begin{cases}e_1+e_3+\cdots+e_{2t-1}=n\\ e_2+e_4+\cdots+e_{2t}=n\end{cases}$
   $(\forall e_i\geq 1)$，數列x組合方式共有$H_{n-t}^t\times H_{n-t}^t$種。
   (2)若有某一格之數量≤ $2n-k$，則該格必∈ $C_k(x)$，使第u+1格與第u-1格合併，滿足條件。
2. 討論$2n-k\geq n-(t-1)$，即k-n-t+1≤ 0時：
   因$\sum_{i=1}^{t}e_{2i}=n$，$e_{2t}=n-\sum_{i=1}^{t-1}e_{2i}\leq n-(t-1)$，
   可得$2n-k\geq n-(t-1)\geq e_{2t}$，則使$e_{2t}\leq 2n-k$，
   即一次操作後即可使格數減少。
3. 討論$k-n-t+1>0$時：
   (1) X=1：則$e_{2t}\leq 2n-k$，又$\forall e_i\leq 2n-k$，又$\forall e_i\geq 1$
   可推得$1\leq e_{2t}\leq 2n-k$，由$1\leq e_{2t}\leq 2n-k$，又
   $\sum_{i=1}^{t}e_{2i}=n$，$\therefore k-n\leq\sum_{i=2}^{2t-2}e_i\leq n-1$。
   令$e_i'=e_i-1$，則$k-n-t+1\leq\sum_{i=2}^{2t-2}e_i'\leq n-t$，可推得偶數共有$H_{n-t}^t-H_{k-n-t}^t$種取法。
   $P(X=1)=\frac{H_{n-t}^t}{H_{n-t}^t}\times\frac{H_{n-t}^t-H_{k-n-t}^t}{H_{n-t}^t}=\frac{H_{n-t}^t-H_{k-n-t}^t}{H_{n-t}^t}$。
   (2) X=2：$e_{2t}>2n-k$，移動後下一格必須∈ $C_k(x)$，所以$e_{2t-1}\leq 2n-k$。由$e_{2t}>2n-k$，又$\sum_{i=2}^{2t}e_i=n$，因此$\sum_{i=2}^{2t-2}e_i\geq k-n$，又因$e_{2t}>2n-k$，偶數共有$H_{k-n-t}^t$種取法，奇數共有$H_{n-t}^t-H_{k-n-t}^t$種取法。
   $P(X=2)=\frac{H_{k-n-t}^t}{H_{n-t}^t}\times\frac{H_{n-t}^t-H_{k-n-t}^t}{H_{n-t}^t}$。
   (3) $X=3$：$e_{2t}>2n-k$，移動後$e_{2t-1}>2n-k$，因$e_{2t}>2n-k>\frac{n}{2}$，若$e_{2t-2}>2n-k>\frac{n}{2}$，則$e_{2t}+e_{2t-2}>n$，與原命題不合所以數列必須滿足$e_{2t}$、$e_{2t-1}>2n-k$，則數列共有$H_{n-t}^t-H_{k-n-t}^t$種取法。因此 $P(X=3)=\left(\frac{H_{n-t}^t-H_{k-n-t}^t}{H_{n-t}^t}\right)^2$。
   (4) 由上，在$seg(x)=2t$且$k-n-t+1>0$時，
   $E(X)=1+\frac{C_t^{k-n}}{C_t^n}+\left(\frac{C_t^{k-n}}{C_t^n}\right)^2$

**結論：**探討多列數列並列後的移數問題，矩陣滿足至少一列必須滿足$\boldsymbol{n<k\leq\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil}$且**n**是奇數，則該矩陣在進行有限次操作後必滿足前n行的數字相同。

**結論：**探討當一數列$x\in S_n$，第一次格數減少時所需的移動次數之期望值，可知

$$\begin{cases}seg(x)\text{為奇數時，}E(X)=1\\ seg(x)=2t\text{為偶數時}\begin{cases}k-n-t+1\leq 0\text{時，}E(X)=1\\ k-n-t+1>0\text{時，}E(X)=1+\frac{C_t^{k-n}}{C_t^n}+\left(\frac{C_t^{k-n}}{C_t^n}\right)^2\end{cases}\end{cases}$$

## 陸、未來展望

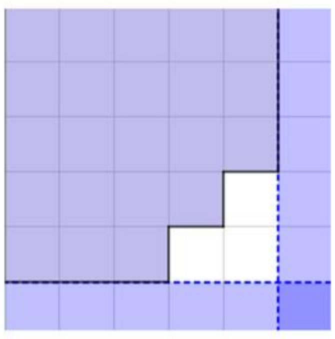
### 探討推廣到2n×2n的正方形矩陣中

定義一個矩陣B(a,b)：

1. 連通：選定矩陣中任一個數，上、下、左、右移動後可經過的所有相同的數，稱這些數與該數連通。
2. 選定該矩陣第a行第b列進行操作，操作時將此數和與其連通的數一起往該列的最左移動後，再將這些數往最上方移動。

例：B(2,2)進行一次操作：$\begin{bmatrix}1&\mathbf{2}&\mathbf{2}&1\\1&\mathbf{2}&1&2\\1&\mathbf{2}&\mathbf{2}&1\\2&1&1&2\end{bmatrix}$向左移動$\begin{bmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{2}&1&1\\\mathbf{2}&1&1&2\\\mathbf{2}&\mathbf{2}&1&1\\2&1&1&2\end{bmatrix}$向上移動$\begin{bmatrix}2&2&1&1\\2&2&1&2\\2&1&1&1\\2&1&1&2\end{bmatrix}$。

3. 若在進行有限次的操作後，矩陣中的所有相同的數連通，則該矩陣滿足穩定條件。
4. 討論後，我們得出$\begin{cases}a>\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil\\ b>\left\lceil\frac{3n}{2}\right\rceil\\ a\times b<2\times n^2\end{cases}$者不成立，畫出示意圖如右（以n=3的矩陣為例）：



5. 上色處為無法達成條件者，但無法完全證明空白處皆符合條件。

## 柒、結論

透過觀察移動後其總格數是否跟著減少，並以反證法確認可使用的範圍，我們為這類移數問題歸納出了一個系統化的解法。希望這樣的解法未來可以被應用在其他專業領域，如統計、管理等。