中華民國第63屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

(鄉土)教材獎

050409

正多邊形旋轉之旋心角恆定討論

學校名稱：臺中市私立弘文高級中學

作者：	指導老師：
高一 陳定澤 高一 羅樺 高一 沈宏霖	余政和

關鍵詞：旋心角、旋轉角、旋轉內角

摘要

我們從正方形旋轉的國中模擬考題出發，從國中數學的「三角形全等、相似」、「圓周角」、「平行關係」與高中數學的「矩陣旋轉」、來對「正多邊形旋轉」進行討論。在簡單的全等問題中，找出旋心角度數，並延伸找到不同旋轉中心，旋轉相同角度後所得的圖形會互相平行。在原題目之後，我們對於不同旋轉中心之間，也找到旋心角角度的恆定關係。在角度之外，我們對於旋轉後突出的三角形的周長與面積也找到恆定或極值的關係。我們利用「三角形相關幾何性質」證明周長與面積關係；利用「交比性質」來證明不同旋轉中心、不同旋轉角與旋心角三者之間的相互函數關係。最後，我們將所有性質與關係，都推廣並證明至任意正多邊形。

壹、研究動機

在國三準備會考時，數學模擬考題中出現了一題關於「幾何旋轉」的問題，題目內容如下：「給定正方形$A_1A_2A_3A_4$，若以此正方形的重心為中心，依順時針方向旋轉$40°$至正方形$B_1B_2B_3B_4$，若$\overline{B_1B_4}$與$\overline{A_1A_2}$交於P_1、$\overline{B_1B_2}$與$\overline{A_1A_2}$交於P_2，試求$\angle P_1OP_2 =$？」

當正方形順時針旋轉$40°$時，旋轉後的正方形與原來正方形的同邊交點連線至中心點所形成的角度，原本想說因為是旋轉$40°$，所以其連線至中心的角應該也是$40°$或與$40°$有倍數相關的角度，但答案卻是$45°$。這令我們非常的驚訝，除了懷疑答案之外，更是思考著$40°$與$45°$之間可能存在的關聯。然而，在真正證明過後，才發現其旋轉後的旋心角與旋轉角度一點關係都沒有，這便激起了我們的興趣。因此，在找了幾名志同道合的同學後，我們決定在升高中之後，來對這個有趣的題目做深入的研究。

既然旋轉幾度跟旋心角的角度無關，接下來我們便想到是否在其他地方做旋轉、或者是在其他正多邊形的對稱中心做旋轉時，是否也會有漂亮的結論。因此我們便開始先利用電腦繪圖程式 Geogebra 去進行不同對稱中心的旋轉，以及其他正多邊形的旋轉作圖，來做推廣與其他部分的延伸。

貳、研究目的

一、旋轉中心在正多邊形重心時：

（一）、找出在原題目中旋心角與正方形旋轉角度的關聯。

（二）、把原題目推廣至任意正多邊形，並找出該正多邊形與其旋心角的角度關係。

二、旋轉中心在正多邊形任意點時：

（一）、找出其他任意點旋轉時，其旋轉角度與旋心角之間的關係。

（二）、推廣至任意正多邊形，在任意點旋轉時，旋轉角與中心角度的關係。

三、找出旋轉後突出之三角形的周長關係。

四、找出旋轉角、旋轉內角、旋心角之間的變化紀錄，並證明其相關關係。

五、找出旋轉角度與突出三角形面積之關聯性。

六、將研究結果套用到生活中的應用。

參、研究設備、軟體及器材

計算紙、筆、電腦、Microsoft Office Excel 2021、Geogebra

肆、研究過程及方法

一、文獻探討與前置作業

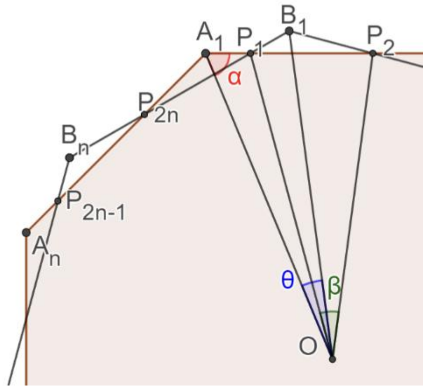
我們一開始是利用畫圖的方式來解答，想要利用三角形的相似或三角形全等的方式來將原題目所求角度來表達出來。因此為了方便後面說明書的用詞使用，我們需要先定義一些我們圖形與用詞的意思。

（一）、名詞與圖形定義

定義 1：$A_1A_2A_3 \dots A_n$、$B_1B_2B_3 \dots B_n$ 與 O

已知$A_1A_2A_3 \dots A_n$為原本一開始的正 n 邊形，而B_1為 A_1依著旋轉中心O 旋轉後的點，B_2為 A_2依著旋轉中心O 旋轉後的點，B_3為 A_3依著旋轉中心O 旋轉後的點，依此類推到B_n。

右方圖（1）為示意例圖。



圖（1）

定義 2：原正多邊形與旋轉後正多邊形的交點$P_1P_2P_3 \dots P_{2n}$

原正多邊形$A_1A_2A_3 \dots A_n$，經由旋轉中心O做旋轉（通常指順時針）後產生$B_1B_2B_3 \dots B_n$。此時 $\overline{B_1B_n}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 所相交的點為 P_1，$\overline{B_1B_2}$ 與$\overline{A_1A_2}$ 所相交的點為 P_2，$\overline{B_1B_2}$ 與 $\overline{A_2A_3}$ 所相交的點為 P_3，……，依此類推到 P_{2n}。

定義 3：旋心角。

一個正 n 邊形$A_1A_2A_3 \dots A_n$，旋轉到正 n 邊形$B_1B_2B_3 \dots B_n$，兩者依上述之定義，相交於$P_1P_2P_3 \dots P_{2n}$，則稱$\angle P_1OP_2$為旋心角，後續說明書中，為了方便表達與說明，故稱此角為 β。

定義 4：旋轉角。

將正多邊形$A_1A_2A_3 \dots A_n$旋轉成正多方形$B_1B_2B_3 \dots B_n$時，其頂點與旋轉中心所夾的角度稱為旋轉角，即$\angle A_1OB_1$。後續說明書中，為了方便表達與說明，稱此角為 θ。

定義 5：旋轉內角。

原圖形中，$\angle A_2A_1O$所夾的角度稱為旋轉內角。續說明書中，為了方便表達與說明，故稱此角為 α。

定義 6：$[\triangle ABC]$ 表示 $\triangle ABC$ 之周長。

為了方便後續的表達與說明，我們以$[\triangle ABC]$的符號，來表示 $\triangle ABC$ 之周長。

二、研究流程架構

（一）、利用全等證明原題目旋心角為$45°$。

（二）、利用全等推廣至正 n 邊形在重心旋轉時，旋心角為$\frac{180°}{n}$。

（三）、利用旋轉矩陣推廣正 n 邊形在重心旋轉時，$[\triangle B_1P_1P_2] = \overline{A_1A_2}$。

（四）、利用坐標化的方式求得旋轉相同角度後所得的圖形會互相平行。

（五）、正 n 邊形中，若以與$\overline{A_1A_2}$平行直線上的任意點旋轉時，其兩三角形周長

$[\triangle B_1P_1P_2] + [\triangle A_1P_2P_3]$為定值。

若該平行線過重心，則$[\triangle B_1P_1P_2] + [\triangle A_1P_2P_3] = 2\overline{A_1A_2}$。

（六）、利用相似與平行性質證明A_1、B_1、P_2、O、P_{2n} 五點共圓。

（七）、利用五點共圓證明若以通過 A_1 之直線上任意點旋轉時，其旋心角角度不變。

（八）、利用交比性質與其他幾何共圓性質求出正 n 邊形旋轉後，其旋心角、旋轉角與旋轉內角之間的關係。

（九）、利用一些幾何性質與微分概念證明旋轉 $\frac{180°}{n}$ 時，兩多邊形重疊面積會有最小值。

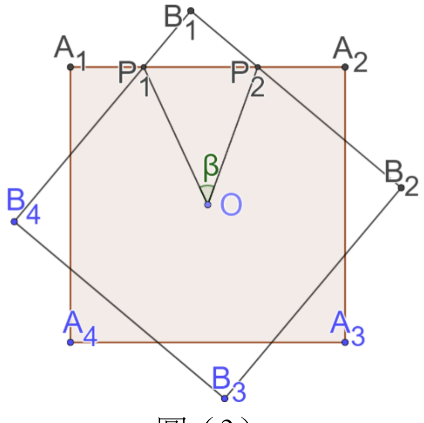
三、研究過程

首先，原題目為「給定正方形$A_1A_2A_3A_4$，若以此正方形的重心為中心，依順時針方向旋轉 $40°$ 至正方形$B_1B_2B_3B_4$，若 $\overline{B_1B_4}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 交於 P_1、$\overline{B_1B_2}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 交於P_2，試求$\angle P_1OP_2 =$？」在一開始進行研究時，我們利用畫圖觀察，並利用國中的全等相似的幾何方式，嘗試得到我們的答案。因此，我們很快得到了利用三角形全等的解題過程。

原題目：

如右方圖（1），給定正方形$A_1A_2A_3A_4$，若以此正方形的重心為中心，依順時針方向旋轉 $40°$ 至正方形$B_1B_2B_3B_4$，若 $\overline{B_1B_4}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 交於 P_1、$\overline{B_1B_2}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 交於P_2，試求$\angle P_1OP_2 =$？

右方圖（2）為例的示意例圖。



圖（2）

〈解題過程〉

如圖（2），四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 順時針旋轉 $40°$ 的圖形。

連 $\overline{A_1O}$、$\overline{A_2O}$、$\overline{B_1O}$

$\because \overline{A_1O}=\overline{B_1O}=\overline{A_2O}=\overline{B_2O}=\sqrt{2}\times\overline{A_1A_2}$

$\therefore A_1$、B_1、A_2、B_2為以O為中心，$\overline{A_1O}$為半徑的圓

$\because$ 四邊形$B_1B_2B_3B_4$為四邊形$A_1A_2A_3A_4$順時針轉 $40°$

$\therefore \angle A_1OB_1=40°\Rightarrow \widehat{A_1B_1}=40^{\circ}$（圓心角）

連 $\overline{\mathrm{B_4O}}\Rightarrow \angle \mathrm{B_1OB_4}=90^{\circ}=\mathrm{B_1\widehat{A_1}B_4}$ （圓心角）

$\Rightarrow \widehat{A_1B_4}=\widehat{B_1B_4}-\widehat{A_1B_1}=90°-40°=50^{\circ}$

連 $\overline{A_1B_1}\Rightarrow \angle A_1B_1B_4=\frac{1}{2}\widehat{A_1B_4}=25^{\circ}$ (圓周角) ……①

$\angle A_1OA_2=90^{\circ}=A_1\widehat{B_1}A_2$ (圓心角)

$\widehat{B_1A_2}=A_1\widehat{B_1}A_2-\widehat{A_1B_1}=50^{\circ}$

$\angle B_1A_1A_2=\frac{1}{2}\widehat{B_1A_2}=25^{\circ}$ (圓周角) ……②

由①、②可得，在$\triangle P_1A_1B_1$中，$\overline{A_1P_1}=\overline{B_1P_1}$

在$\triangle A_1OP_1$與$\triangle B_1OP_1$中

$\because \overline{A_1O}=\overline{B_1O}$ (旋轉半徑)，$\overline{P_1O}=\overline{P_1O}$ (共邊)，$\overline{A_1P_1}=\overline{B_1P_1}$ (已證)

$\therefore \triangle A_1OP_1\cong\triangle B_1OP_1$ (SSS全等)

$\Rightarrow \angle A_1P_1O=\angle B_1P_1O$ (對應角相等)

$\Rightarrow \angle P_8P_1O=\angle A_1P_1O-\angle A_1P_1P_8=\angle B_1P_1O-\angle B_1P_1P_2=\angle P_2P_1O$

在$\triangle A_1P_1P_8$與$\triangle B_1P_1P_2$中

$\because \angle A_1P_1P_8=\angle B_1P_1P_2$ (對頂角)，$\angle P_1A_1P_8=\angle P_1B_1P_2$(正方形)，$\overline{A_1P_1}=\overline{B_1P_1}$ (已證)

$\therefore \triangle A_1P_1P_8\cong\triangle B_1P_1P_2$ (ASA全等)

$\Rightarrow \overline{P_1P_8}=\overline{P_1P_2}$ (對應邊相等)

在$\triangle P_1OP_8$與$\triangle P_1OP_2$中

$\because \angle P_8P_1O = \angle P_2P_1O$（已證），$\overline{P_1O} = \overline{P_1O}$（共邊），$\overline{P_1P_8} = \overline{P_1P_2}$（已證）

$\therefore \triangle P_1OP_8 \cong \triangle P_1OP_2$（SAS 全等）

同理，我們可以一樣的方法，證明出以下八個三角形全等：

$\triangle P_1OP_8 \cong \triangle P_1OP_2 \cong \triangle P_3OP_2 \cong \triangle P_3OP_4 \cong \triangle P_5OP_4 \cong \triangle P_5OP_6 \cong \triangle P_7OP_6 \cong \triangle P_7OP_8$

$\therefore \angle P_8OP_1 = \angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3 = \angle P_3OP_4 = \angle P_4OP_5 = \angle P_5OP_6 = \angle P_6OP_7 = \angle P_7OP_8$

$\Rightarrow \angle P_1OP_2 = \dfrac{360°}{8} = 45°$

至此，我們算出了原題目的答案為45°。

然而，在解出原題目的過程中，我們發現不僅上面圍繞著 O 點的八個三角形都全等，外圍正方形直角所圍出的八個直角三角形也都全部全等。即：

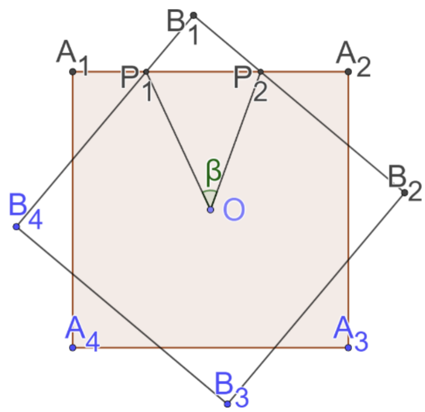
$\triangle A_1P_1P_8 \cong \triangle B_1P_1P_2 \cong \triangle A_2P_3P_2 \cong \triangle B_2P_3P_4 \cong \triangle A_3P_5P_4 \cong \triangle B_3P_5P_6 \cong \triangle A_4P_7P_6 \cong \triangle B_4P_7P_8$

而且在證明的過程中，我們發現不管旋轉角 θ 為多少，都會一樣得到圍繞著 O 點的八個三角形全等以及八個直角三角形也都全部全等。

定理 1：

給定正方形$A_1A_2A_3A_4$，若以此正方形的重心為中心，依順時針方向旋轉 θ 至正方形$B_1B_2B_3B_4$，若 $\overline{B_1B_4}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 交於 P_1、$\overline{B_1B_2}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 交於P_2，則 $\angle P_1OP_2 = 45°$。

右方圖（2）為範例圖



圖（2）

〈證明〉

大多的證明都與上述原題目的證明相同，只有在少數角度為 40° 時，改修正成 θ。即 $\widehat{A_1B_1} = \theta$，$\widehat{A_1B_4} = \widehat{B_1B_4} - \widehat{A_1B_1} = 90° - \theta$，$\angle A_1B_1B_4 = \dfrac{1}{2}\widehat{A_1B_4} = \dfrac{90° - \theta}{2}$。

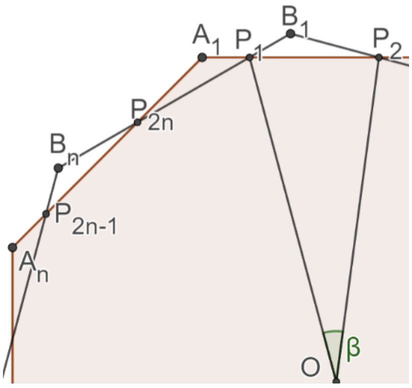
因此，我們一樣仿照原題目證明，一樣可以得到圍繞著 O 點的八個三角形全等，即 $\angle P_1OP_2 = \dfrac{360°}{8} = 45°$

除此之外，我們以正 n 邊形來做旋轉中心在重心 O 點時的旋轉發現以下性質：

定理 1-1：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3 \dots A_n$，若以此正 n 邊形的重心 O 為中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形 $B_1B_2B_3 \dots B_n$，若 $\overline{B_1B_n}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 交於 P_1、$\overline{B_1B_2}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 交於P_2，則$\angle P_1OP_2 = \dfrac{360°}{2n} = \dfrac{2\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{n}$ 。

右方圖（3）為範例圖。



圖（3）

〈證明〉

我們用與原題目解題過程以及**定理** 1 證明過程相同的方式來進行證明。由於是以正 n 邊形的重心 O 為中心，依順時針方向旋轉 θ，因此都會有以 O 為圓心的原正 n 邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_n$ 與旋轉後正 n 邊形 $B_1B_2B_3 \dots B_n$ 這 $2n$ 個點共圓的情況。即：

$\widehat{A_1B_1} = \theta$，$\widehat{A_1B_n} = \widehat{B_1B_n} - \widehat{A_1B_1} = \dfrac{360°}{n} - \theta$，$\angle A_1B_1B_n = \dfrac{1}{2}\widehat{A_1B_n} = \dfrac{360°}{2n} - \dfrac{\theta}{2}$ 。

我們一樣可以證明出 $\overline{A_1P_1} = \overline{B_1P_1}$，進而去推導出圍繞著$O$點的$2n$個三角形都會全等。

因此我們可得到$\angle P_1OP_2 = \dfrac{360°}{2n} = \dfrac{2\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{n}$ 。

至此，我們將原題目推廣至旋轉任意角度 θ，以及以任意正 n 邊形重心 O 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 的所有可能。這些結果都會有圍繞著 O 點的 $2n$ 個三角形都會全等，也就能更進一步推導出$\angle P_1OP_2 = \dfrac{360°}{2n} = \dfrac{2\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{n}$ 。

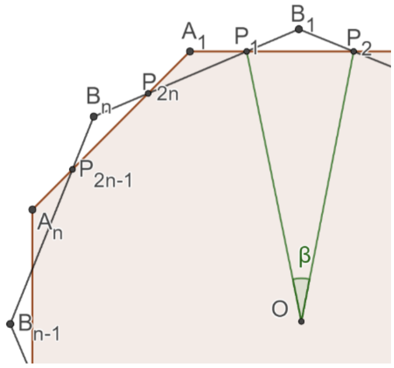
更有甚者，我們得到了以下的性質：

定理 2：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3\dots A_n$，若以此正 n 邊形的重心 O 為中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形 $B_1B_2B_3\dots B_n$，若 $\overline{B_1B_n}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 交於 P_1、$\overline{B_1B_2}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 交於P_2，則

$\overline{A_1A_2} = [\triangle A_1P_1P_{2n}] = [\triangle B_1P_1P_2] = \cdots = [\triangle B_nP_{2n}P_{2n-1}]$

右方圖（4）為範例圖。



圖（4）

〈證明〉

根據**定理** 1-1 的結論，我們可以得到以正 n 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_n$ 與正 n 邊形 $B_1B_2B_3\dots B_n$的這 $2n$ 個頂點中，與 P_1、P_2、P_3、……、P_{2n} 所形成的 $2n$ 個三角形，皆會不受到旋轉角度 θ 大小的影響而全部對應全等。即

$$\triangle A_1P_1P_{2n} \cong \triangle B_1P_1P_2 \cong \triangle A_2P_3P_2 \cong \triangle B_2P_3P_4 \cong \triangle A_3P_5P_4 \cong \cdots\cdots \cong \triangle B_nP_{2n-1}P_{2n}$$

因此，以$[\triangle B_1P_1P_2]$來說：$\overline{B_1P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{B_1P_2} = \overline{A_1P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{A_2P_2} = \overline{A_1A_2}$。而因為 $2n$ 個三角形都能對應全等，所以每個三角形的周長都等於正 n 邊形的邊長。

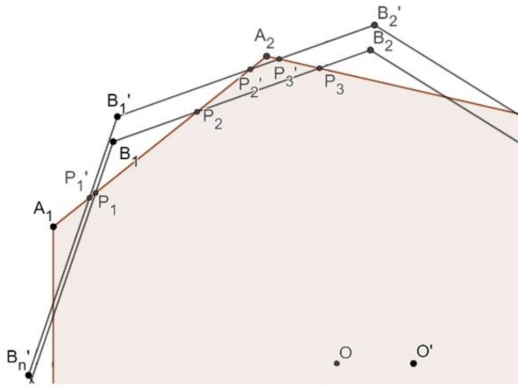
研究到這邊，我們將所有旋轉中心在正多邊形重心的旋轉狀況，都完整地討論過了。於是我們便開始思考著，若我們的旋轉中心不在正多邊形的重心時，那麼會不會有其他不同的規律與其他恆定的值出現？

首先，我們發現了以下定理三及定理四的性質。但在定理三中，為了證明的嚴謹性，我們對正 n 邊形的頂點以以下的方式將之坐標化：

$A_1A_2A_3\dots A_n$為以原點為圓心，半徑為 1 的單位圓上的正 n 邊形。A_1為 x 軸負向順時針旋轉的第一個點，A_2為第二個點，依此類推至A_n。其中，如果是正$(2m+1)$邊形，則A_{m+1}坐標為(1,0)；相反地，如果是正$(2m)$邊形，則是上下對稱。$(m \in N)$

定理 3：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3\dots A_n$，若以此正 n 邊形的重心 O 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B_1B_2B_3\dots B_n$；若另以此正 n 邊形內的任意點 $O'(s,t)$ 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B'_1B'_2B'_3\dots B'_n$，則正 n 邊形 $B_1B_2B_3\dots B_n$ 與正 n 邊形$B'_1B'_2B'_3\dots B'_n$ 會互相平行。



圖（5）

右方圖（5）為範例圖。

〈證明〉

$$A_1\left(cos\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}\right),sin\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}\right)\right)\text{旋轉 }\theta$$

$$\Rightarrow B_1\left(cos\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right),sin\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)\right)$$

$$A_2\left(cos\left(180°-\frac{3}{2}\times\frac{360°}{n}\right),sin\left(180°-\frac{3}{2}\times\frac{360°}{n}\right)\right)\text{旋轉 }\theta$$

$$\Rightarrow B_2\left(cos\left(180°-\frac{3}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right),sin\left(180°-\frac{3}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)\right)$$

$$\Rightarrow \text{斜率}m_{B_1B_2}=\frac{sin\left(180°-\frac{3}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)-sin\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)}{cos\left(180°-\frac{3}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)-cos\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)}$$

A_1以$O'(s,t)$作為$(0,0)$後

$$\Rightarrow\left(cos\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)-s,sin\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)-t\right)\text{，順轉 }\theta$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}cos\theta & sin\theta\\ -sin\theta & cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cos\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}\right)-s\\ sin\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}\right)-t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}cos\theta cos\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}\right)-s\ \ cos\theta+sin\theta sin\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}\right)-t\ \ sin\theta\\ cos\theta sin\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}\right)-t\ \ cos\theta-sin\theta cos\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}\right)+s\ \ sin\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} cos\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)-s\ \ cos\,\theta-t\ \ sin\,\theta \\ sin\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)-t\ \ cos\,\theta+s\ \ sin\,\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B_1'\begin{pmatrix} cos\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)+s(1-cos\theta)-t\ \ sin\theta\,, \\ sin\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)+ssin\theta+t(1-cos\theta) \end{pmatrix}$$

A_2以$O'(s,t)$作為$(0,0)$後

$$\Rightarrow\left(cos\left(180°-\frac{3}{2}\times\frac{360°}{n}\right)-s,\ sin\left(180°-\frac{3}{2}\times\frac{360°}{n}\right)-t\right)$$，順轉 θ

$$\Rightarrow B_2'=\begin{bmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ -sin\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cos\left(180°-\frac{3}{2}\times\frac{360°}{n}\right)-s \\ sin\left(180°-\frac{3}{2}\times\frac{360°}{n}\right)-t \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} cos\left(180°-\frac{3}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)-s\ \ cos\theta\ \ -t\ \ sin\theta \\ sin\left(180°-\frac{3}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)-t\ \ cos\theta\ \ +s\ \ sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B_2'\begin{pmatrix} cos\left(180°-\frac{3}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)+s(1-cos\theta)-t\ \ sin\theta\,, \\ sin\left(180°-\frac{3}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)+s\ \ sin\theta+t(1-cos\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m_{B_1'B_2'}=\frac{sin\left(180°-\frac{3}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)-sin\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)}{cos\left(180°-\frac{3}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)-cos\left(180°-\frac{1}{2}\times\frac{360°}{n}-\theta\right)}$$

∵ 兩條線的斜率相同

∴ 兩個圖形為平行

我們在做平行的證明時，免不了的要利用 Geogebra 的程式先來驗證結果。然而在正方形繪圖時，我們也發現了當旋轉中心在同一個水平線時，三角形周長部分會有以下性質：

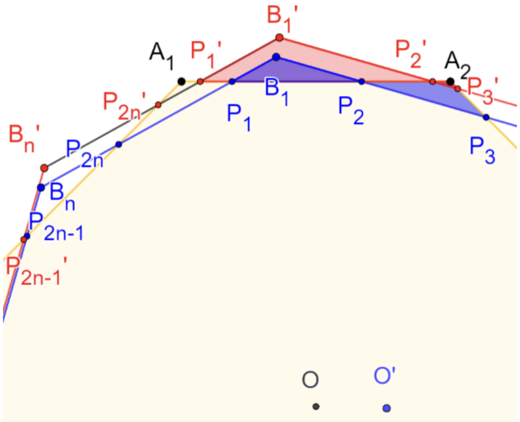
$$[\Delta B_1P_1P_2]+[\Delta A_2P_2P_3]=[\Delta B_1{}'P_1{}'P_2{}']+[\Delta A_2P_2{}'P_3{}']$$

定理 4：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3\ldots A_n$，若以此正 n 邊形內任意一點 O 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B_1B_2B_3\ldots B_n$；若另以此正 n 邊形內，平行$\overline{A_1A_2}$且過 O 直線上的異於 O 之任意點 O' 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B'_1B'_2B'_3\ldots B'_n$，則

$[\Delta B_1P_1P_2]+[\Delta A_2P_2P_3]=[\Delta B_1{'}P_1{'}P_2{'}]+[\Delta A_2P_2{'}P_3{'}]$

右方圖（6）為範例圖。



圖（6）

〈證明〉

由前述證明已知$\angle B_1P_2P_1=\theta=\angle A_2P_2P_3=\angle A_2P_2{'}P_3{'}$

又$\angle B_1=\angle B_1'=\angle A_2=\dfrac{(n-2)\pi}{n}$

$$\therefore\ \angle B_1P_1P_2=\angle B_1{'}P_1{'}P_2{'}=\angle A_2P_3{'}P_2{'}=\angle A_2P_3P_2=\pi-\left[\frac{(n-2)\pi}{n}\right]-\theta=\frac{2\pi}{n}-\theta$$

由正弦定理可知

$$[\Delta B_1P_1P_2]=\overline{B_1P_2}\times\left(1+\frac{\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\theta\right)}+\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\theta\right)}\right)$$

$$[\Delta B_1{'}P_1{'}P_2{'}]=\overline{B_1{'}P_2{'}}\times\left(1+\frac{\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\theta\right)}+\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\theta\right)}\right)$$

$$[\Delta A_2P_2P_3]=\overline{A_2P_2}\times\left(1+\frac{\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\theta\right)}+\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\theta\right)}\right)$$

$$[\Delta A_2P_2{'}P_3{'}]=\overline{A_2P_2{'}}\times\left(1+\frac{\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\theta\right)}+\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\theta\right)}\right)$$

即原題目證明可轉化為要證明

$$\overline{B_1P_2}+\overline{A_2P_2}=\overline{B_1{'}P_1{'}}+\overline{A_2P_2{'}}$$

接著，我們分別對四個三角形作高

得$\overline{B_1E}$、$\overline{B_1'F}$ 、$\overline{A_2G}$ 、$\overline{A_2H}$

$$\Rightarrow \overline{B_1P_2}+\overline{A_2P_2}=\overline{B_1E}\times\frac{1}{\sin\theta}+\overline{A_2G}\times\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \overline{B_1'P_2'}+\overline{A_2P_2'}=\overline{B_1'F}\times\frac{1}{\sin\theta}+\overline{A_2H}\times\frac{1}{\sin\theta}$$

即再轉換成

$$\overline{B_1E}+\overline{A_2G}=\overline{B_1'F}+\overline{A_2H}$$

$$\Rightarrow \overline{B_1'F}-\overline{B_1E}=\overline{A_2G}-\overline{A_2H}$$

為了方便計算，我們將$\overline{A_1A_2}$視為平行 x 軸之水平線，且 O 為$(0,t)$、O'為(s,t)

此時($\overline{B_1'F}-\overline{B_1E}$)即為 B_1' 與 B_1 的 y 坐標差距；

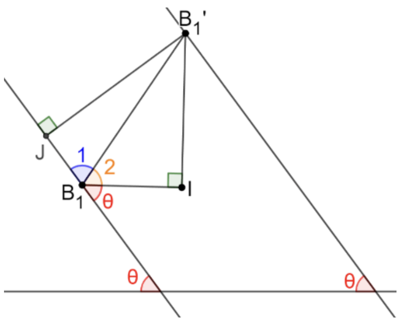
($\overline{A_2G}-\overline{A_2H}$)即為 $\overline{B_1'H}$ 與 $\overline{B_1G}$ 的平行線間距離。

令$A_1(\cos\varphi,\sin\varphi)$，經由$O(0,t)$旋轉後

得$B_1(\cos(\varphi-\theta)-t\sin\theta,\ \sin(\varphi-\theta)+t(1-\cos\theta))$

同理得$B_1'(\cos(\varphi-\theta)+s(1-\cos\theta)-t\sin\theta,\ \sin(\varphi-\theta)+s\times\sin\theta+t(1-\cos\theta))$

$$\Rightarrow \overline{B_1'F}-\overline{B_1E}=s\times\sin\theta$$



放大 B_1、B_1' 間，並令 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 如圖所示

$\Rightarrow \overline{B_1I}=\ s\times(1-\cos\theta)$

$\overline{B_1'I}=\ s\times\sin\theta$

而此時B_1與B_1'的 x 坐標差距為$s(1-\cos\theta)$

$$\Rightarrow \overline{B_1B_1{}'} = \sqrt{s^2(1-cos\theta)^2 + s^2 \times sin^2\theta} = s\sqrt{2-2cos\theta} = S \times 2 \times sin\frac{\theta}{2}$$

$$sin\angle 1 = sin(\angle 2 + \theta) = \frac{sin\theta}{2 \times sin\frac{\theta}{2}} \times cos\theta + \frac{1-cos\theta}{2 \times sin\frac{\theta}{2}} \times sin\theta = \frac{sin\theta}{2 \times sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \overline{A_2G} - \overline{A_2H} = \overline{B_1{}'J}$$

$$= \overline{B_1B_1{}'} \times sin\angle 1 = (s \times 2 \times sin\frac{\theta}{2}) \times \frac{sin\theta}{2 \times sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= s \times sin\theta = \overline{B_1'F} - \overline{B_1E}$$

$\therefore [\Delta B_1P_1P_2] + [\Delta A_2P_2P_3] = [\Delta B_1{}'P_1{}'P_2{}'] + [\Delta A_2P_2{}'P_3{}']$

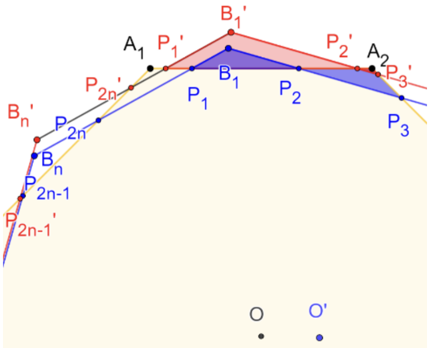
然而我們在證明**定理** 4 時，發現了$[\Delta B_1'P_1P_2] + [\Delta A_2P_2'P_3{}'] = 2\overline{A_1A_2}$

定理 4-1：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3 \dots A_n$，若以此正 n 邊形內重心點 $O(0,0)$ 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形 $B_1B_2B_3 \dots B_n$；若另以此正 n 邊形內，平行$\overline{A_1A_2}$且過 O 直線上的異於 O 之任意點 O' 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B'_1B'_2B'_3 \dots B'_n$，則

$[\Delta B_1P_1P_2] + [\Delta A_2P_2P_3] = [\Delta B_1{}'P_1{}'P_2{}'] + [\Delta A_2P_2{}'P_3{}'] = 2\overline{A_1A_2}$

右方圖（6）為範例圖。



圖（6）

〈證明〉

由**定理 1-1** 可得圍繞著O點的 $2n$ 個三角形會互相全等，因此我們可以得知

在 $\Delta A_1P_1P_n$ 與 $\Delta B_1P_1P_2$ 中，$\overline{A_1P_1} = \overline{B_1P_2}$ ；在 $\Delta B_1P_1P_2$ 與 $\Delta A_2P_3P_2$ 中，$\overline{B_1P_2} = \overline{A_2P_2}$

再由**定理 4** 可得$[\Delta B_1P_1P_2] + [\Delta A_2P_2P_3] = [\Delta B_1{}'P_1{}'P_2{}'] + [\Delta A_2P_2{}'P_3{}']$

所以$[\Delta B_1P_1P_2] = \overline{A_1A_2} = [\Delta A_2P_2P_3]$

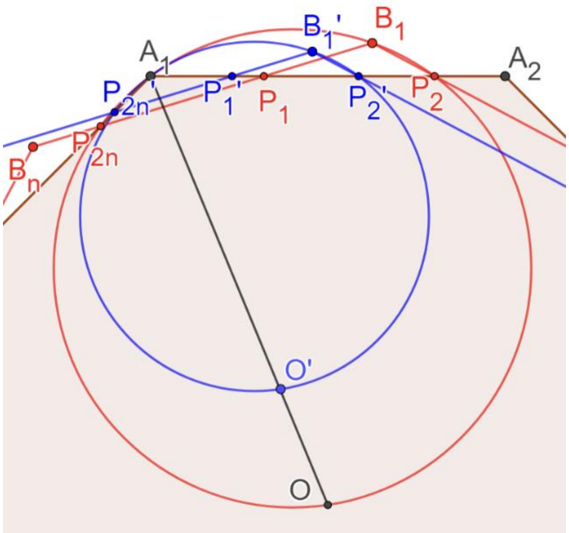
故$[\Delta B_1P_1P_2] + [\Delta A_2P_2P_3] = [\Delta B_1{}'P_1{}'P_2{}'] + [\Delta A_2P_2{}'P_3{}'] = 2\overline{A_1A_2}$

研究至此，我們從原本探討角度到探討周長恆定的性質。我們先自學高二的內容，將矩陣旋轉的方法學會，進而拿來證明我們用 Geogebra 畫圖所觀察到的周長性質。而在藉由 Geogebra 畫圖觀察性時，我們不僅發現周長的恆定關係，也無意間發現在旋轉的圖形上出現多點共圓的情形。

定理 5：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3\dots A_n$，若以此正 n 邊形內過A_1直線上任一點 O 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B_1B_2B_3\dots B_n$，則A_1、B_1、P_2、O、P_{2n} 五點共圓。

右方圖（7）為範例圖。



圖（7）

〈證明〉

①連接$\overline{OB_1}$，因為旋轉不變的性質，可知：$\angle A_2A_1O=\angle B_2B_1O=\angle P_2B_1O$

則：$\angle P_{2n}B_1O=\angle P_{2n}A_1O=\dfrac{(n-2)\pi}{n}-\alpha$，故$A_1$、$B_1$、$O$、$P_{2n}$四點共圓。

②在$\Delta A_1P_1P_{2n}$和$\Delta B_1P_1P_2$中

$\because \angle P_{2n}A_1P_1=\dfrac{(n-2)\pi}{n}=\angle P_2B_1P_1$　(皆為正 n 邊形內角)

故A_1、B_1、P_2、P_{2n}四點共圓

總結①、②可得A_1、B_1、P_2、O、P_{2n}五點共圓。

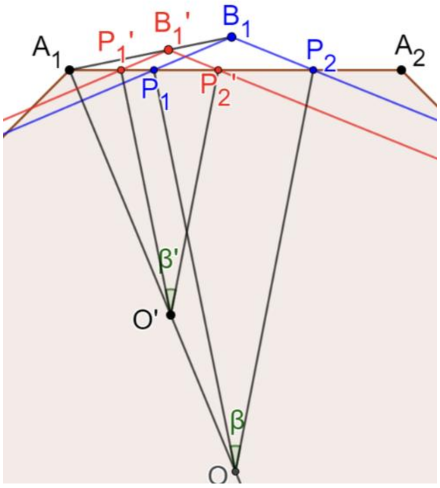
接下來，我們繼續畫圖的過程中，我們發現到當 O 點在通過 A_1 的對角線上任意點時，旋心角 β 的角度都相同。

定理 6：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3\ldots A_n$，若以此正 n 邊形內過A_1直線上任一點 O 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B_1B_2B_3\ldots B_n$；若另以此正 n 邊形內過A_1直線上異於 O 點之另一點 O' 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B'_1B'_2B'_3\ldots B'_n$，則

$$\angle P_1OP_2=\angle P_1'O'P_2'$$

右方圖（8）為範例圖。



圖（8）

〈證明〉

由定理 5 知，A_1、B_1、P_2、O共圓

得$\angle A_1OB_1=\theta$(旋轉角)$=\angle A_1P_2B_1$(共弧)

且$\angle A_1P_2O=\frac{1}{2}\widehat{A_1O}=\frac{1}{2}\widehat{B_1O}=\angle A_2P_2O=90°-\frac{1}{2}\theta(\overline{A_1O}=\overline{B_1O})$

同理：A_1、B_1'、P_2'、O'共圓

得$\angle A_1P_2'O=\angle A_2P_2'O=90°-\frac{1}{2}\theta$

$\therefore\overline{P_2'O'}\parallel\overline{P_2O}$ …… ①

由$\angle A_1B_1'O'=90°-\frac{1}{2}\theta=\angle A_1B_1O$

得A_1、B_1'、B_1三點共線

則$\overline{A_1P_1'}:\overline{A_1P_1}=\overline{A_1B_1'}:\overline{A_1B_1}$ ($\overline{B_1'P_1'}\parallel\overline{B_1P_1}$根據定理三)

$=\overline{A_1P_2'}:\overline{A_1P_2}$ ($\overline{B_1'P_2'}\parallel\overline{B_1P_2}$根據定理三)

$=\overline{A_1O'}:\overline{A_1O}$ ($\overline{P_2'O'}\parallel\overline{P_2O}$已證)

$\therefore\overline{P_2'O'}\parallel\overline{P_2O}$ …… ②

由①得$\angle A_1O'P_2'=\angle A_1OP_2$

由②得$\angle A_1O'P_1'=\angle A_1OP_1$

相減得$\angle P_1'O'P_2'=\angle P_1OP_2$

接下來，要證明旋心角、旋轉角與旋轉內角三者之間關係之前，我們有一些性質需要先行提出。

接下來，我們先證明一個交比性質：

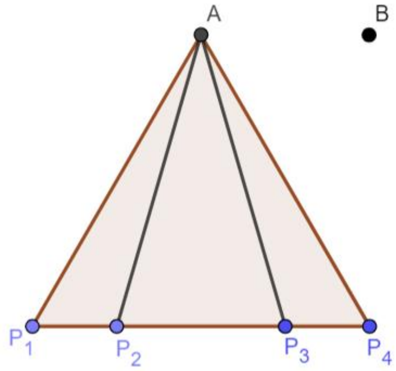
引理 1：正弦函數的應用：交比性質

P_1、P_2、P_3、P_4四點共線，而 A、B 不在同一直線上，則：

$$\left|\frac{\overline{P_1P_4}\times\overline{P_3P_2}}{\overline{P_1P_3}\times\overline{P_4P_2}}\right| = \frac{\sin\angle P_1AP_4\times\sin\angle P_3AP_2}{\sin\angle P_1AP_3\times\sin\angle P_4AP_2}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{符號記為}\\ (P_1,P_2；P_3,P_4) = A(P_1,P_2；P_3,P_4)\end{matrix}\right\}$$

右方圖（9）為範例圖



圖（9）

〈證明〉

$\overline{AP_1}:\overline{P_1P_4} = \sin\angle AP_4P_1 : \sin\angle P_1AP_4$

$\Rightarrow \overline{P_1P_4} = \overline{AP_1}\times\dfrac{\sin\angle P_1AP_4}{\sin\angle AP_4P_1}$

$$\frac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_1P_3}} = \frac{\overline{AP_1}\times\frac{\sin\angle P_1AP_4}{\sin\angle AP_4P_1}}{\overline{AP_1}\times\frac{\sin P_1AP_3}{\sin\angle AP_3P_1}} = \frac{\sin\angle P_1AP_4\times\sin\angle AP_3P_1}{\sin\angle P_3AP_4\times\sin\angle AP_1P_3} - ①$$

$$\frac{\overline{P_3P_2}}{\overline{P_4P_2}} = \frac{\overline{AP_2}\times\frac{\sin\angle P_3AP_2}{\sin AP_3P_2}}{\overline{AP_2}\times\frac{\sin\angle P_4AP_2}{\sin\angle AP_4P_2}} = \frac{\sin\angle P_3AP_2\times\sin\angle AP_4P_2}{\sin\angle AP_3P_2\times\sin\angle P_4AP_2} - ②$$

①×②且 $\because \angle AP_4P_2 = \angle AP_4P_1$， $\angle AP_3P_2 = \angle AP_3P_1$

$$\Rightarrow \frac{\overline{P_1P_4}\times\overline{P_3P_2}}{\overline{P_1P_3}\times\overline{P_4P_2}} = \frac{\sin\angle P_1AP_4\times\sin\angle AP_3P_1\times\sin\angle P_3AP_2\times\sin\angle AP_4P_2}{\sin\angle AP_4P_1\times\sin\angle P_1AP_3\times\sin\angle AP_3P_2\times\sin\angle P_4AP_2}$$

$$= \frac{\sin\angle P_1AP_4\times\sin\angle P_3AP_2}{\sin\angle P_1AP_3\times\sin\angle P_4AP_2}$$

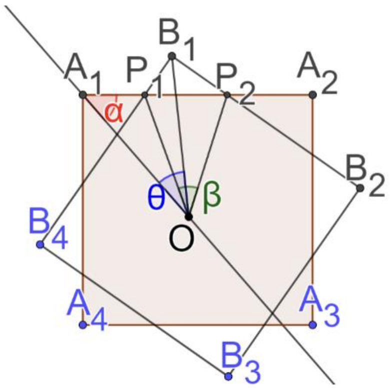
$\Rightarrow A(P_1,P_2；P_3,P_4) = (P_1,P_2；P_3,P_4)$

同理，對於任意不在$\overline{P_1P_4}$線上的 B，則有：

$B(P_1,P_2；P_3,P_4) = (P_1,P_2；P_3,P_4)$

$\Rightarrow A(P_1,P_2；P_3,P_4) = (P_1,P_2；P_3,P_4) = B(P_1,P_2；P_3,P_4)$

接下來，我們要開始進行旋心角、旋轉角與旋轉內角三者之間關係的研究。



圖（10）

首先，我們針對左圖（9）的圖樣，去做旋心角、旋轉角與旋轉內角三者之間的角度變化紀錄，以求能在觀察數據之間找到他們三者的關係。然而，隨著觀察的數據越多，我們僅僅只能去看出一些遞增遞減的趨勢規律。因此我們認為，這三數之間的關係不是一般的線性函數或多次函數的關係，而是另一種轉化過後的函數關係。

θ\a	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
5	87.4809	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
10	82.385	84.8441	87.3813	90	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
15	77.2137	79.5303	81.9584	84.507	87.1847	90	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
20	71.9709	74.062	76.2872	78.6619	81.2025	83.9267	86.853	90	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
25	66.6632	68.4494	70.3766	72.4656	74.7401	77.2279	79.9605	82.9733	86.3058	90	X	X	X	X	X	X	X	X
30	61.2997	62.7098	64.2491	65.9404	67.8114	69.8961	72.236	74.8825	77.8963	81.3599	85.3588	90	X	X	X	X	X	X
35	55.8921	56.8674	57.9415	59.1344	60.4709	61.9831	63.7123	65.7133	68.059	70.8481	74.2156	78.3474	83.4973	90	X	X	X	X
40	50.4539	50.9524	51.5046	52.122	52.8195	53.6167	54.5402	55.6263	56.9265	58.5159	60.5082	63.0825	66.536	71.3894	78.6057	90	X	X
45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	X
50	39.5461	39.0476	38.4954	37.878	37.1805	36.3833	35.4598	34.3737	33.0735	31.4841	29.4918	26.9175	23.464	18.6106	11.3943	X	X	X
55	34.1079	33.1326	32.0585	30.8656	29.5291	28.0169	26.2877	24.2867	21.941	19.1519	15.7844	11.6526	6.5027	X	X	X	X	X
60	28.7003	27.2902	25.7509	24.0596	22.1886	20.1039	17.764	15.1175	12.1017	8.6401	4.6412	X	X	X	X	X	X	X
65	23.3368	21.5506	19.6234	17.5344	15.2599	12.7721	10.0395	7.0267	3.6942	X	X	X	X	X	X	X	X	X
70	18.0291	15.938	13.7128	11.3381	8.7975	6.0733	3.147	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
75	12.7863	10.4697	8.0416	5.493	2.8153	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
80	7.615	5.1559	2.6187	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
85	2.5191	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
90	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

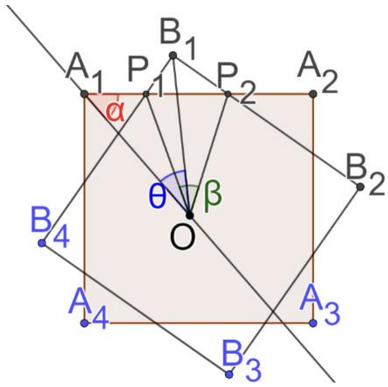
接下來，我們嘗試利用三角函數的交比性質來找出三者的關係：

定理 7：

給定正四邊形$A_1A_2A_3A_4$，若以此正四邊形內過A_1直線上任一點 O 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B_1B_2B_3B_4$。此時$\angle P_1A_1O=\alpha$、$\angle P_1OP_2=\beta$。則

$$tan\,\beta=\frac{cos\left(\alpha+\frac{\theta}{2}\right)}{sin\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)}$$

右方圖（11）為正四邊形的示意圖。



圖（11）

〈證明〉

令 $\overline{A_1O}$ 與 $\overline{B_1B_4}$ 交於 E 點

首先已知A_1、B_1、P_2、O、P_8 共圓

$$\Rightarrow \angle P_2OA_1 = \frac{1}{2}\widehat{P_2A_1} = \frac{1}{2}\left(\widehat{P_2B_1} + \widehat{B_1A_1}\right) = \angle B_1A_1P_2 + \angle B_1OA_1$$

$$= \left(90° - \frac{\theta}{2} - \alpha\right) + \theta = 90° + \frac{\theta}{2} - \alpha$$

則$A_1(P_8, E, P_1, B_1) = O(P_8, E, P_1, B_1)$

$$\Rightarrow \frac{sin\,\angle P_8A_1B_1 \times sin\,\angle P_1A_1E}{sin\,\angle P_8A_1P_1 \times sin\,B_1A_1E} = \frac{sin\,P_8OB_1 \times sin\,\angle P_1OE}{sin\,\angle P_8OP_1 \times sin\,\angle B_1OE}$$

$$\Rightarrow \frac{sin\left(180° - \frac{\theta}{2} - \alpha\right) \times sin\,\alpha}{sin\,90° \times sin\left(90° - \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{sin\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right) \times sin\,90° + \left(\frac{\theta}{2} - \alpha - \beta\right)}{sin(90° - \beta) \times \sin\ \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{sin\left(\frac{\theta}{2} + \alpha\right) \times sin\,\alpha}{cos\,\frac{\theta}{2}} = \frac{sin\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right) \times cos\left(\alpha + \beta - \frac{\theta}{2}\right)}{cos\,\beta \times sin\,\theta} \qquad \left(sin\,\theta = 2\,sin\,\frac{\theta}{2} \times cos\,\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\,cos\,\beta\,sin\,\alpha\,sin\,\frac{\theta}{2} = cos\left(\alpha + \beta - \frac{\theta}{2}\right) = cos\,\beta\,cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) - sin\,\beta\,sin\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)$$

$cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) - cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right) = 2\,sin\,\alpha\,sin\,\frac{\theta}{2}$ 　　代入

$$\Rightarrow cos\,\beta\,cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) - cos\,\beta\,cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right) = cos\,\beta\,cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) - sin\,\beta\,sin\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow cos\,\beta\,cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right) = sin\,\beta\,sin\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow tan\,\beta = \frac{cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)}{sin\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)}$$

同理，逆時針旋轉也會成立，但因為逆時針旋轉是與順時針旋轉不同，O 點相對於A_1做順時針旋轉，對稱之後即可視為 O 點相對於A_2做相反的逆時針旋轉。所以若為逆時針旋轉的話，對稱之後須將 $\angle A_2A_1O$ 視為 $\angle A_1A_2O$。

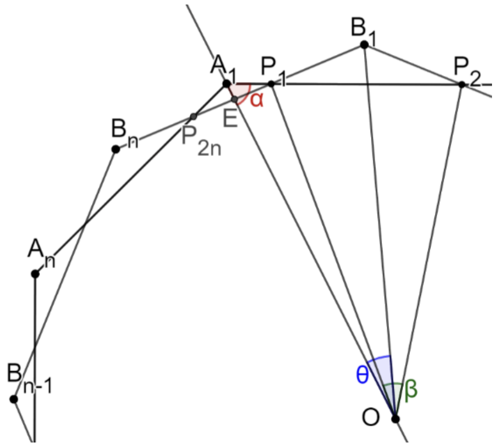
證出正方形中，旋轉角、旋轉內角及旋心角三角度之間的關係後，我們試著將其過程推廣至正 n 邊形。

定理 7-1：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3\ldots A_n$，若以此正 n 邊形內過A_1直線上任一點 O 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B_1B_2B_3\ldots B_n$。此時$\angle P_1A_1O=\alpha$、$\angle P_1OP_2=\beta$。則

$$tan\beta=\frac{cos\left(\alpha+\frac{\theta}{2}\right)sin\frac{2\pi}{n}}{cos\left(\alpha+\frac{\theta}{2}\right)cos\frac{2\pi}{n}+cos\left(\alpha-\frac{\theta}{2}-\frac{(n-2)\pi}{n}\right)}$$

右方圖（12）為示意圖。



圖（12）

〈證明〉

$$\angle B_1A_1O=\frac{180°-\theta}{2}=90°-\frac{\theta}{2}\Rightarrow\angle B_1A_1P_2=90°-\frac{\theta}{2}-\alpha\Rightarrow\angle P_2OA_1=90°+\frac{\theta}{2}-\alpha$$

$$\angle P_{2n}A_1P_2=\angle P_{2n}B_1P_2=\frac{(n-2)}{n}\pi$$

利用交比性質：

$$\frac{sin\angle P_{2n}A_1B_1\times sin\angle EA_1P_1}{sin\angle P_{2n}A_1P_1\times sin\angle EA_1B_1}=\frac{sin\angle P_{2n}OB_1\times sin\angle EOP_1}{sin\angle P_{2n}OP_1\times sin\angle EOB_1}$$

$$\Rightarrow\frac{sin\left(\frac{n-2}{n}\pi+90°-\frac{\theta}{2}-\alpha\right)\times sin\alpha}{sin\frac{n-2}{n}\pi\times sin(90°-\frac{\theta}{2})}=\frac{sin\left(90°+\frac{\theta}{2}+\alpha-\frac{n-2}{n}\pi\right)\times sin\left(90°+\frac{\theta}{2}-\alpha-\beta\right)}{sin\left(\frac{2\pi}{n}-\beta\right)\times sin\theta}$$

$$\Rightarrow sin\alpha sin\theta \times sin\left(\frac{2\pi}{n} - \beta\right) = sin\left(\frac{n-2}{n}\pi\right) \times cos\frac{\theta}{2} \times cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2} + \beta\right)$$

$$\Rightarrow 2sin\alpha sin\frac{\theta}{2} \times \left(sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)cos\beta - cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)sin\beta\right)$$

$$= sin\theta\left(cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)cos\beta - sin\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)sin\beta\right)$$

$$\Rightarrow \left[cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right) - cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)\right]\left[cos\frac{2\pi}{n}sin\beta - sin\frac{2\pi}{n}cos\beta\right]$$

$$= sin\left(\frac{n-2}{n}\pi\right)cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)cos\beta - sin\left(\frac{n-2}{n}\pi\right)sin\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)sin\beta$$

$$\Rightarrow cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)cos\frac{2\pi}{n}sin\beta - cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)cos\frac{2\pi}{n}sin\beta - cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)sin\frac{2\pi}{n}cos\beta$$

$$= -sin\left(\frac{n-2}{n}\pi\right)sin\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)sin\beta$$

$$\Rightarrow cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)cos\frac{2\pi}{n}tan\beta - cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)cos\frac{2\pi}{n}tan\beta + sin\theta sin\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)tan\beta$$

$$= cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\Rightarrow cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)cos\frac{2\pi}{n}tan\beta + cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)cos\left(\frac{n-2}{n}\pi\right)tan\beta + sin\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)sin\left(\frac{n-2}{n}\pi\right)tan\beta$$

$$= cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)sin\frac{2\pi}{n}$$

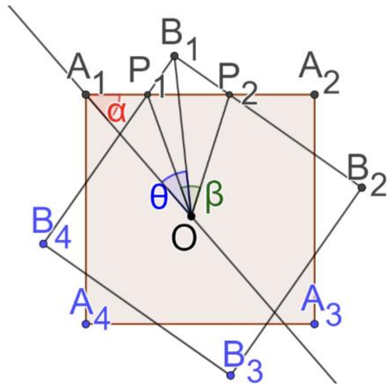
$$\Rightarrow tan\beta\left(cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)cos\frac{2\pi}{n} + cos\left(\alpha - \frac{b}{2} - \frac{n-2}{n}\pi\right)\right) = cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\Rightarrow tan\beta = \frac{cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)sin\frac{2\pi}{n}}{cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)cos\frac{2\pi}{n} + cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2} - \frac{n-2}{n}\pi\right)}$$

值得一提的是，我們在上述**定理 7** 及**定理 7-1** 的計算推演中，我們利用除法的方式，來進行公式的化簡。然而，這樣做其實是不夠嚴謹的。因為若被我們當作除數的數字本身為 0 時，將會造成計算上的謬誤。因此，我們接下來討論當**定理 7** 最後公式中的分母 $sin\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)=0$ 時的特殊狀況。

當 $sin\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)=0$

$\Rightarrow\ \ \alpha-\frac{\theta}{2}=0\Rightarrow\alpha=\frac{\theta}{2}$



圖（11）

如右圖（11），已知A_1、B_1、P_2、O、P_8共圓

則$\angle P_8P_2O+\angle P_8A_1O=\frac{1}{2}\widehat{A_1OP_8}=\angle P_8B_1P_2=90°$

$\Rightarrow\angle P_8P_2O+\alpha=90°\Rightarrow\angle P_8P_2O=90°-\alpha$

$\angle B_1P_8P_2=\frac{1}{2}\widehat{B_1P_2}=\angle B_1A_1P_2=90°-\alpha-\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow\angle P_8OP_2+\angle OP_2P_1+\angle P_2B_1P_8+\angle B_1P_8O=360°$

$\Rightarrow\angle P_8OP_2+(90°-\alpha+\theta+\angle A_1P_2P_8)+90°+\left(90°-\frac{\theta}{2}\right)=360°$

$\Rightarrow\angle P_8OP_2+\angle A_1P_2P_8=90°$

同理四邊形$A_1B_1P_2O$中$\Rightarrow\angle P_8OP_2+\angle A_1B_1P_1=90°$且$\angle A_1P_2P_8=\frac{1}{2}\widehat{A_1P_8}=\angle A_1B_1P_1$

$\Delta A_1B_1P_2$中$\angle B_1A_1P_2=90°-\alpha-\frac{\theta}{2}$且$\alpha=\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow\angle B_1A_1P_2=90°-2\alpha\Rightarrow\angle B_1P_2A_1=\theta=2\alpha$

得$\angle A_1B_1P_2+\angle B_1A_1P_2+\angle B_1P_2A_1=180°$

$\Rightarrow \angle A_1B_1P_2+(90°-2\alpha)+2\alpha=180° \Rightarrow \angle \mathrm{A_1B_1P_2}=90°$

$\angle A_1B_1P_2=90° \Rightarrow \angle A_1B_1P_1+\angle P_1B_1P_2=\angle A_1B_1P_2 \Rightarrow \angle A_1B_1P_1+90°=90°$

$\Rightarrow \angle A_1B_1P_2=0°$

$\Rightarrow \angle A_1B_1P_1=\angle A_1P_2P_8=0°$

亦即當**定理 7** 公式中的分母為0時，我們可以得到 P_1 與 P_8 共點於 A_1 點。因此，此時的 A_1、B_1、P_2、O、P_8 五點共圓，將會變成 A_1、B_1、P_2、O 四點共圓。而且此時的 $\overline{A_1O}$ 與 $\overline{P_2O}$ 兩線將會垂直。

最後，要證明旋心角與面積的關係之前，我們須使用**引理 2** 來幫助我們。

引理 2：

周長為固定 $2s$ 的三角形中，給定一個頂點 θ，所圍成的三角形面積最大值發生在等腰三角形。

〈證明〉

由餘弦定理可得$[2s-(a+b)]^2=a^2+b^2-2ab\times cos\theta$

$\therefore b=\dfrac{s(s-a)}{2s-a-acos\,\theta}$則三角形面積：$\dfrac{1}{2}ab\times sin\theta=\dfrac{1}{2}a\times\dfrac{s(s-a)}{2s-a(1+cos\ \theta)}\times sin\theta=A(a)$

令 $1+cos\ \theta=t$，則面積最大值發生在$M(a)=\dfrac{a(s-a)}{2s-at}$ 為最大值時：

$\Rightarrow \dfrac{d}{da}M(a)=\dfrac{2s^2-4as+ta^2}{(2s-ta)^2}$

令$\dfrac{d}{da}M(a)=0$

$$a=\frac{2s^2\pm s\sqrt{2(2-t)}}{t}=\frac{2s\left(1\pm sin\frac{\theta}{2}\right)}{1+cos\ \ \theta}$$則最大值發生在$a=2s\dfrac{(1-sin\frac{\theta}{2})}{1+cos\,\theta}=\dfrac{s}{(1+sin\frac{\theta}{2})}$

又$b=\dfrac{2s(s-a)}{2s-a(1+\cos\theta)}=\dfrac{2s(s-\frac{s}{1+sin\ \theta})}{2s-\frac{s(1+cos\ \ \theta)}{1+sin\ \ \frac{\theta}{2}}}=\dfrac{2s^2(\frac{sin\frac{\theta}{2}}{1+sin\frac{\theta}{2}})}{2s(1-\frac{1-sin\ \ \frac{\theta}{2}}{1+sin\ \ \frac{\theta}{2}})}=\dfrac{s\frac{sin\ \ \frac{\theta}{2}}{1+sin\frac{\theta}{2}}}{sin\frac{\theta}{2}}=a$

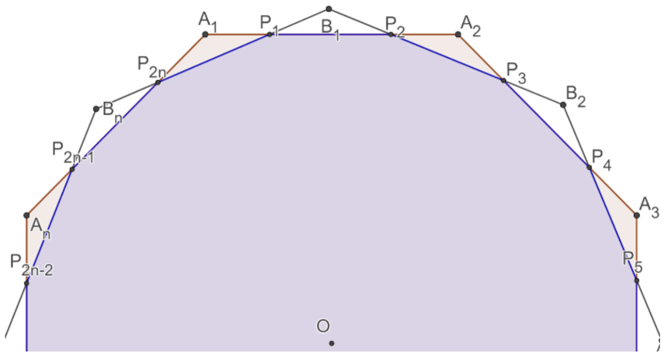
∴最大值發生在等腰三角形

在引入**引理** 2 後，我們進行**定理 8** 的說明。

定理 8：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3\ldots A_n$，若以此正 n 邊形的重心 O 為中心，依順時針轉 θ 至正 n 邊形$B_1B_2B_3\ldots B_n$，則當 $\theta=\frac{180°}{n}$ 時，$A_1A_2A_3\ldots A_n$ 與 $B_1B_2B_3\ldots B_n$ 重疊的面積會有最大值。

右方圖（13）為示意圖。



圖（13）

〈證明〉

我們已用$\Delta A_1P_1P_{2n}$來去證明$\angle P_1A_1P_{2n}$恆為 $180°-\frac{360°}{n}$，可以以引理 2 來去說明。

在$\Delta A_1P_1P_{2n}$中，$\overline{P_1A_1}=\overline{P_{2n}A_1}$ 時三角形為最大。而兩邊相等時，旋轉角為 $\frac{180°}{n}$ 且可知外面 n 個三角形皆全等，與原題目的證明方法相同。

最後，可以知道兩正 n 邊形重疊區域面積最小值發生在外邊三角形面積有最大值時。

∴ 我們就可以知道正 n 邊形重疊區域最小值發生在 $\dfrac{180°}{n}$

伍、研究結果

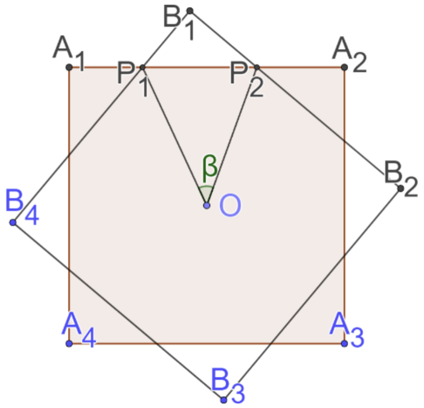
我們研究正多邊形旋轉時，其產生的旋心角度數、周長、面積的相關性。

一、從原題目的順轉40°延伸成順時鐘旋轉任意角度。

定理 1：

給定正方形$A_1A_2A_3A_4$，若以此正方形的重心為中心，依順時針方向旋轉 θ 至正方形$B_1B_2B_3B_4$，若 $\overline{B_1B_4}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 交於 P_1、$\overline{B_1B_2}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 交於P_2，則$\angle P_1OP_2 = 45°$。

右方圖（2）為範例圖。



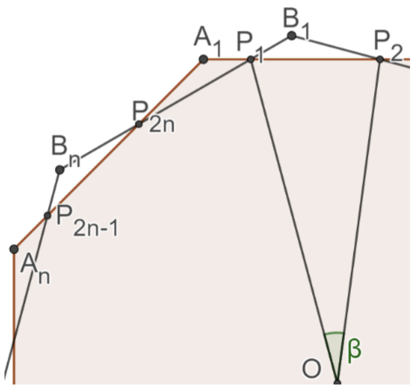
圖（2）

二、把原題目推廣至任意正多邊形，並找出該正多邊形與其旋心角的角度關係。

定理 1-1：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3 \ldots A_n$，若以此正 n 邊形的重心 O 為中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形 $B_1B_2B_3 \ldots B_n$，若 $\overline{B_1B_n}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 交於 P_1、$\overline{B_1B_2}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 交於P_2，則$\angle P_1OP_2 = \dfrac{360°}{2n} = \dfrac{2\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{n}$。

右方圖（3）為範例圖。



圖（3）

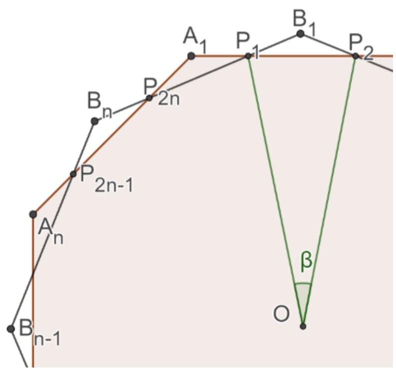
三、因此也找到了周長相關的性質。

定理 2：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3 \ldots A_n$，若以此正 n 邊形的重心 O 為中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形 $B_1B_2B_3 \ldots B_n$，若 $\overline{B_1B_n}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 交於 P_1、$\overline{B_1B_2}$ 與 $\overline{A_1A_2}$ 交於P_2，則

$$\overline{A_1A_2} = [\triangle A_1P_1P_{2n}] = [\triangle B_1P_1P_2] = \cdots = [\triangle B_nP_{2n}P_{2n-1}]$$

右方圖（4）為範例圖。



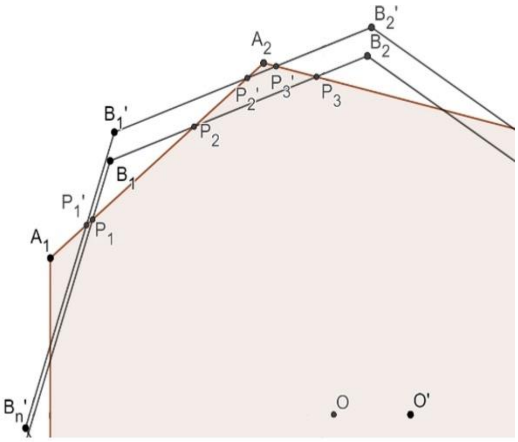
圖（4）

四、並推論出兩正多邊形旋轉任意角度時會互相平行。

定理 3：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3 \dots A_n$，若以此正 n 邊形的重心 O 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B_1B_2B_3 \dots B_n$；若另以此正 n 邊形內的任意點 $O'(s,t)$ 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B'_1B'_2B'_3 \dots B'_n$，則正 n 邊形$B_1B_2B_3 \dots B_n$ 與正 n 邊形$B'_1B'_2B'_3 \dots B'_n$ 會互相平行。

右方圖（5）為的範例圖。



圖（5）

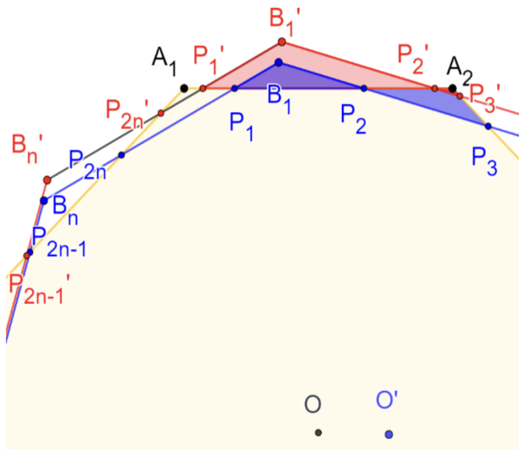
五、發現兩三角形周長總和為定值。

定理 4：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3 \dots A_n$，若以此正 n 邊形內一點 $O(0,t)$ 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B_1B_2B_3 \dots B_n$；若另以此正 n 邊形內的任意點 $O'(s,t)$ 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B'_1B'_2B'_3 \dots B'_n$，則

$$[\Delta B_1P_1P_2]+[\Delta A_2P_2P_3]=[\Delta B_1'P_1'P_2']+[\Delta A_2P_2'P_3']$$

右方圖（6）為的範例圖。



圖（6）

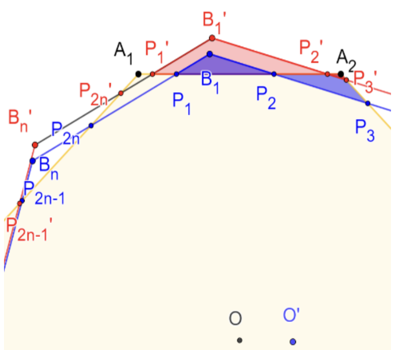
六、以及$[\Delta B_1'P_1P_2]+[\Delta A_2P_2'P_3']=2\overline{A_1A_2}$ 的性質：

定理 4-1：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3 \dots A_n$，若以此正 n 邊形內重心點 $O(0,0)$ 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形 $B_1B_2B_3 \dots B_n$；若另以此正 n 邊形內，平行$\overline{A_1A_2}$且過 O 直線上的異於 O 之任意點 O' 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B'_1B'_2B'_3 \dots B'_n$，則

$$[\Delta B_1P_1P_2]+[\Delta A_2P_2P_3]=[\Delta B_1'P_1'P_2']+[\Delta A_2P_2'P_3']=2\overline{A_1A_2}$$

右方圖（6）為範例圖。



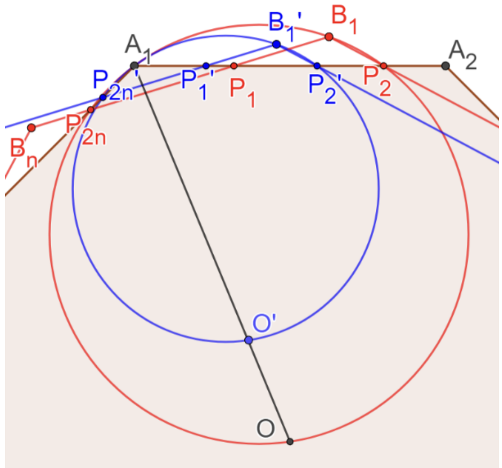
圖（6）

七、旋轉後的共圓幾何性質

定理 5：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3\ldots A_n$，若以此正 n 邊形內過A_1直線上任一點 O 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形 $B_1B_2B_3\ldots B_n$，則 A_1、B_1、P_2、O、P_{2n} 五點共圓。

右方圖（7）為範例圖。



圖（7）

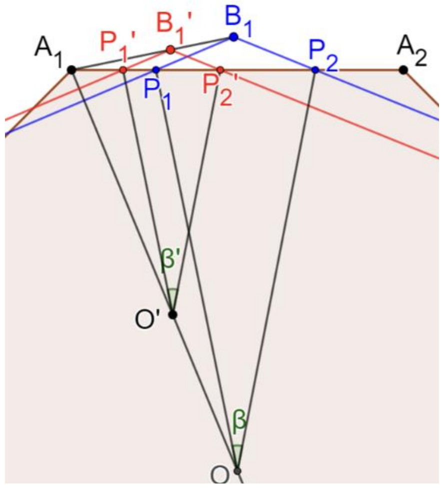
八、找出其他任意點旋轉時，其旋轉角度與旋心角之間的關係。

當 O 點在 $\overline{A_1A_3}$ 上任意點時，旋心角 β 的角度都相同。

定理 6：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3\ldots A_n$，若以此正 n 邊形內過A_1直線上任一點 O 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B_1B_2B_3\ldots B_n$；若另以此正 n 邊形內過A_1直線上異於 O 點之另一點 O' 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形 $B'_1B'_2B'_3\ldots B'_n$，則$\angle P_1OP_2=\angle P_1'O'P_2'$

右方圖（8）為範例圖。



圖（8）

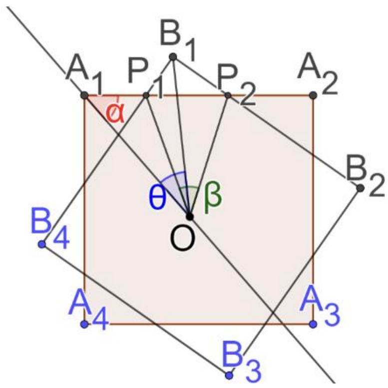
九、正四邊形旋轉角、旋轉內角及旋心角三者之間的關係

定理 7：

給定正四邊形$A_1A_2A_3A_4$，若以此正四邊形內過A_1直線上任一點 O 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B_1B_2B_3B_4$。此時$\angle P_1A_1O=\alpha$、$\angle P_1OP_2=\beta$。則

$$\tan\beta=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)}$$

右方圖（11）為正四邊形的示意圖。



圖（11）

當**定理**7 公式中的分母為 0 時，我們可以得到P_1與P_8共點於A_1點。因此，此時的A_1、B_1、P_2、O、P_8五點共圓，將會變成A_1、B_1、P_2、O四點共圓。而且此時的 $\overline{A_1O}$ 與 $\overline{P_2O}$ 兩線將會垂直。

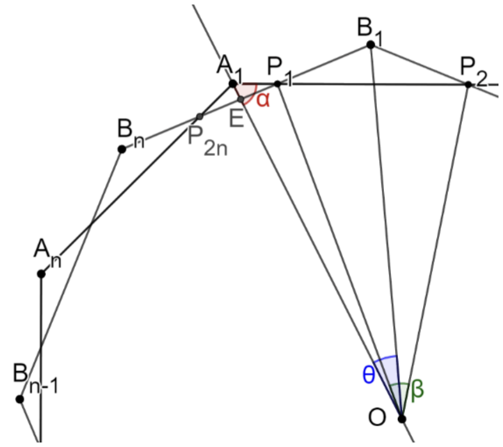
十、推廣至任意正多邊形，在任意點旋轉時，旋轉角與中心角度的關係。

定理 7-1：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3\dots A_n$，若以此正 n 邊形內過A_1直線上任一點 O 為旋轉中心，依順時針方向旋轉 θ 至正 n 邊形$B_1B_2B_3\dots B_n$。此時$\angle P_1A_1O=\alpha$、$\angle P_1OP_2=\beta$。則

$$tan\beta=\frac{cos\left(\alpha+\frac{\theta}{2}\right)sin\frac{2\pi}{n}}{cos\left(\alpha+\frac{\theta}{2}\right)cos\frac{2\pi}{n}+cos\left(\alpha-\frac{\theta}{2}-\frac{(n-2)\pi}{n}\right)}$$

右方圖（12）為示意圖。



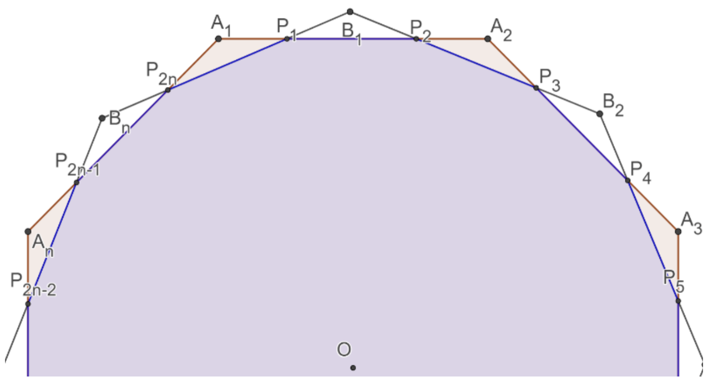
圖（12）

十一、發現在旋轉 $\frac{180°}{n}$ 時，重疊面積為最小值。

定理 8：

給定正 n 邊形$A_1A_2A_3\dots A_n$，若以此正n邊形的重心O為中心，依順時針轉 θ 至正 n 邊形$B_1B_2B_3\dots B_n$，則當 $\theta=\frac{180°}{n}$ 時，$A_1A_2A_3\dots A_n$ 與 $B_1B_2B_3\dots B_n$ 重疊的面積會有最大值。

右方圖（13）為示意圖。



圖（13）

陸、討論與應用

從一題關於正方形旋轉的國中會考模擬考題出發，利用國中的相似全等性質來證明較符合對稱圖形的重心位置旋轉。在利用 Geogebra 繪圖協助理解的過程中，意外得到邊長也有漂亮的恆定性質。但為了證明這性質，我們只好自學高二矩陣相關單元，利用旋轉矩陣與幾何的方式並用，才得以證明出這項定理。我們嘗試將旋轉中心的位置從重心移開，卻也得到了角度的相關性質。最後，我們也找出了旋轉角度與面積的關聯性。

從旋轉後的度數關係，到旋轉後兩個四邊形所圍成的三角形周長相同，且等於四邊形的周長。我們可以利用本研究的結果，在工業上應用兩個相互旋轉交疊的引擎或碟盤，以更精準的角度計算，減少引擎或碟盤運轉時的消耗磨損，增加器材的使用年限，也可以利用精準的旋轉關係來提升高科技機器人在工作上的精準度，像是機器手臂在修葺與研究上的使用。更有甚者，也可以精準計算長度後，利用最精準的設計，減少廠房的空間浪費。

柒、參考資料

1. 陳界山（2019）。高中數學第四冊。南一書局，111 年 6 月再版二刷。
2. 陳界山（2021）。高中數學第六冊。南一書局，110 年 12 月初版。
3. 黃文聖、陳韋程、江宗翰（2021）。幾何配數歸，碰出新滋味。第 61 屆全國中小學科學展覽會高中職組數學科。
4. 許凱宣、徐紹敦（2019）。翻轉正 n 邊形邊上點的猜想。第 59 屆全國中小學科學展覽會高中職組數學科。
5. 董展宏、施啟文、吳培毅、陳冠宏（1993）。定周長包含定點所圍三角形最大面積之理論研究。第 33 屆全國中小學科學展覽會高中職組數學科。

【評語】050409

旋轉中心在正方形任意點時，作者找出旋轉角度與旋心角之間的關係，而後推廣至任意正多邊形。作者證明旋轉角、旋轉內角、旋心角之間的相關關係，並找出旋轉角度與突出三角形面積之關聯性。作者適切運用三角函數，獲得了有趣的結果。建議作者對所完成的計算再深入觀察思考，開拓作品深廣度。

作品海報

正多邊形旋轉之旋心角恆定討論

摘要

我們從正方形旋轉的國中模擬考題出發，從國中數學的「三角形全等、相似」、「圓周角」、「平行關係」與高中數學的「矩陣旋轉」、來對「正多邊形旋轉」進行討論。在簡單的全等問題中，找出旋心角度數，並延伸找到不同旋轉中心，旋轉相同角度後所得的圖形會互相平行。在原題目之後，我們對於不同旋轉中心之間，也找到旋心角角度的恆定關係。在角度之外，我們對於旋轉後突出的三角形的周長與面積也找到恆定或極值的關係。我們利用「三角形相關幾何性質」證明周長與面積關係；利用「交比性質」來證明不同旋轉中心、不同旋轉角與旋心角三者之間的相互函數關係。最後，我們將所有性質與關係，都推廣並證明至任意正多邊形。

肆、研究過程方法與結果

一、文獻探討與前置作業

1、$A_1A_2A_3\ldots A_n$、$B_1B_2B_3\ldots B_n$與O。

定義：

已知$A_1A_2A_3\ldots A_n$為原本一開始的正n邊形，而B_1為A_1依著旋轉中心O旋轉後的點，B_2為A_2依著旋轉中心O旋轉後的點，B_3為A_3依著旋轉中心O旋轉後的點，依此類推到B_n。

2、原正多邊形與旋轉後正多邊形的交點$P_1P_2P_3\ldots P_{2n}$。

定義：

原正多邊形$A_1A_2A_3\ldots A_n$，經由旋轉中心O做旋轉（通常指順時針）後產生$B_1B_2B_3\ldots B_n$。此時 $\overline{B_1B_n}$與 $\overline{A_1A_2}$所相交的點為P_1，$\overline{B_1B_2}$與$\overline{A_1A_2}$ 所相交的點為P_2，$\overline{B_1B_2}$與$\overline{A_2A_3}$所相交的點為P_3，依此類推到P_{2n}。

3、旋心角、旋轉角、旋轉內角。

定義：

一個正n邊形$A_1A_2A_3\ldots A_n$，旋轉到正n邊形$B_1B_2B_3\ldots B_n$，兩者依上述之定義，相交於$P_1P_2P_3\ldots P_{2n}$，則稱$\angle P_1OP_2$為旋心角，後續說明中，稱此角為β；其頂點與旋轉中心所夾的角度稱為旋轉角，即$\angle A_1OB_1$，後續說明中，稱此角為θ；$\angle A_2A_1O$所夾的角度稱為旋轉內角，後續說明中，稱此角為α。

右上方圖（一）為示意圖。

4、$[\triangle ABC]$表示$\triangle ABC$之周長。

定義：

為了方便後續的表達與說明，我們以$[\triangle ABC]$的符號，來表示$\triangle ABC$之周長。

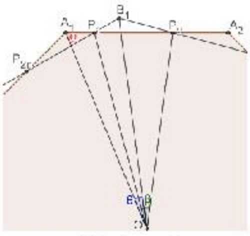
在**定理7**與**定理7-1**中，我們為了證明出旋心角、旋轉角與旋轉內角間的關係。我們先介紹交比性質：

引理1：正弦函數的應用：交比性質

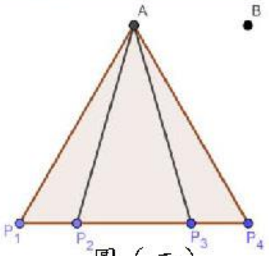
P_1、P_2、P_3、P_4四點共線，而A、B不在同一直線上，則：

$$\left|\frac{\overline{P_1P_4}\times\overline{P_3P_2}}{\overline{P_1P_3}\times\overline{P_4P_2}}\right|=\frac{\sin\angle P_1AP_4\times\sin\angle P_3AP_2}{\sin\angle P_1AP_3\times\sin\angle P_4AP_2}。$$

下右方圖(二)為示意圖。



圖（一）



圖（二）

引理2：

周長為固定$2s$的三角形中，給定一個頂點θ，所圍成的三角形面積最大值發生在等腰三角形。

二、研究流程架構

(一)、利用全等證明原題目角度為45°。

(二)、利用全等推廣至正n邊形在重心旋轉時，旋心角為$\frac{\pi}{n}$。

(三)、利用旋轉矩陣推廣正n邊形在重心旋轉時$[\triangle B_1P_1P_2]=\overline{A_1A_2}$。

(四)、討論出當**定理2**旋轉超過$\frac{2\pi}{n}$時，其延長線段的交點(T_1)與P_1與A_2所圍成的三角形仍然會有**定理2**的性質，即$[\triangle A_2P_1T_1]=\overline{A_1A_2}$。

(五)、用坐標化求得旋轉相同角度後所得的圖形會互相平行。

(六)、利用三角函數與一些幾何旋轉性質證明出正n邊形中，若以與$\overline{A_1A_2}$平行直線上的任意點旋轉時，其兩三角形周長$[\triangle B_1P_1P_2]+[\triangle A_1P_2P_3]$為定值。若該平行線過重心，則$[\triangle B_1P_1P_2]+[\triangle A_1P_2P_3]=2\overline{A_1A_2}$

(七)、利用相似與平行性質證明A_1、B_1、P_2、O、P_{2n}共圓。

(八)、利用**定理5**五點共圓性質證明若以通過A_1之直線上任意點旋轉時，其旋心角角度不變。

(九)、利用**引理1**交比性質與其他幾何共圓性質，求出正n邊形旋轉後，其旋心角、旋轉角與旋轉內角三者之間的關係。

(十)、討論旋轉超過$\frac{2\pi}{n}$時，延長線的交點，其所形成的旋心角性質。

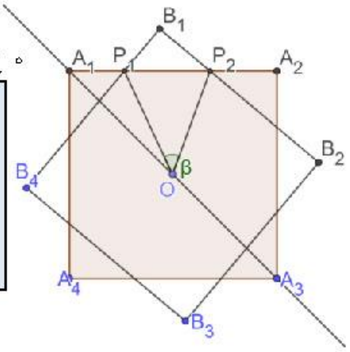
(十一)、利用一些幾何性質與微分概念證明旋轉$\frac{\pi}{n}$時，兩多邊形重疊面積會有最小值。

(十二)、利用**定理2**的$[\triangle B_1P_1P_2]=\overline{A_1A_2}$性質與三角函數，求出在正$n$邊形重心旋轉任意角度時，兩正$n$邊形所重疊的面積。

(十三)、將我們的研究結果應用到工業與科技產品上。

三、研究過程與結論

我們利用國中全等性質證明原題目旋心角為45°，並推廣至旋轉任意角度。



圖(三)

定理1：

給定正方形$A_1A_2A_3A_4$，若以此正方形的重心為中心，依順時針方向旋轉θ至正方形$B_1B_2B_3B_4$，若 $\overline{B_1B_4}$與$\overline{A_1A_2}$交於P_1、$\overline{B_1B_2}$與 $\overline{A_1A_2}$交於P_2，則$\angle P_1OP_2 = 45°$。

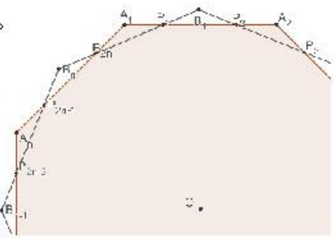
右方圖(三)為示意圖。

〈證明〉$\widehat{A_1B_1} = \theta$，$\widehat{A_1B_4} = \widehat{B_1B_4} - \widehat{A_1B_1} = 90° - \theta$

$$\angle A_1B_1B_4 = \frac{1}{2}\widehat{A_1B_4} = \frac{90°-\theta}{2}。$$

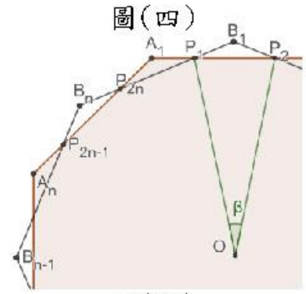
因此，我們得到圍繞著O點的八個三角形全等，即$\angle P_1OP_2 = \dfrac{360°}{8} = 45°$。

除此之外，我們以正n邊形來做旋轉中心在重心O點時的旋轉發現以下性質：


圖(四)

定理 1-1：

給定正n邊形$A_1A_2A_3 \dots A_n$，若以此正n邊形的重心O為中心，依順時針方向旋轉θ至正n邊形$B_1B_2B_3 \dots B_n$，若$\overline{B_1B_n}$與$\overline{A_1A_2}$交於P_1、$\overline{B_1B_2}$與$\overline{A_1A_2}$交於P_2，則$\angle P_1OP_2 = \frac{360°}{2n} = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$。右方圖(四)為示意圖。

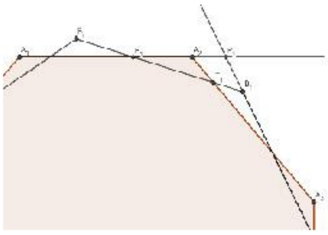


圖(五)

定理 2：

給定正n邊形$A_1A_2A_3 \dots A_n$，若以此正n邊形的重心O為中心，依順時針方向旋轉θ至正n邊形$B_1B_2B_3 \dots B_n$，若$\overline{B_1B_n}$與$\overline{A_1A_2}$交於P_1、$\overline{B_1B_2}$ 與$\overline{A_1A_2}$交於P_2，則：$\overline{A_1A_2} = [\triangle A_1P_1P_{2n}] = [\triangle B_1P_1P_2] = \cdots = [\triangle B_nP_{2n}P_{2n-1}]$。

右方圖(五)為示意圖。

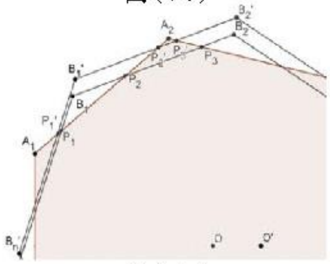

圖(六)

定理 2-1：

給定正n邊形$A_1A_2A_3 \dots A_n$依順時針方向旋轉θ至正n邊形$B_1B_2B_3B_4$，但當旋轉超過$\frac{2\pi}{n}$時，$\overline{A_1A_2}$與$\overline{B_1B_2}$會沒有交點P_2，會變成P_1、A_2及$\overline{B_1B_n}$和$\overline{A_2A_3}$的交點(T_1)所形成的三角形周長與正n邊形的邊長相等。即：

$$[\triangle A_2P_1T_1] = \overline{A_1A_2}。$$

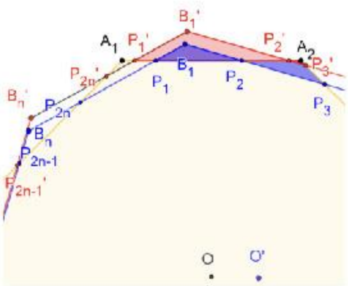
右方圖(六)為示意圖。


圖(七)

定理 3：

給定正n邊形$A_1A_2A_3 \dots A_n$，若以此正n邊形的重心O為旋轉中心，依順時針方向旋轉θ至正n邊形$B_1B_2B_3 \dots B_n$；若另以此正n邊形內的任意點$O'(s,t)$為旋轉中心，依順時針方向旋轉θ至正n邊形$B'_1B'_2B'_3 \dots B'_n$，則正n邊形$B_1B_2B_3 \dots B_n$與正n邊形$B'_1B'_2B'_3 \dots B'_n$會互相平行。

右方圖(七)為示意圖。



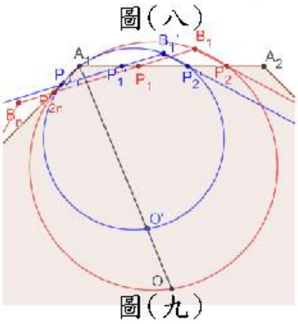
圖(八)

定理 4：

給定正n邊形$A_1A_2A_3 \dots A_n$，若以此正n邊形的重心O為旋轉中心，依順時針方向旋轉θ至正n邊形$B_1B_2B_3 \dots B_n$；若另以此正n邊形內，平行$\overline{A_1A_2}$且過O直線上的異於O之任意點O'為旋轉中心，依順時針方向旋轉θ至正n邊形$B'_1B'_2B'_3 \dots B'_n$，則：

$$[\Delta B_1P_1P_2] + [\Delta A_2P_2P_3] = [\Delta B_1'P_1'P_2'] + [\Delta A_2P_2'P_3']。$$

右方圖(八)為示意圖。



圖(九)

定理 5：

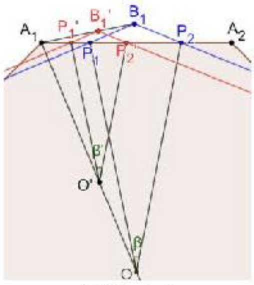
給定正n邊形$A_1A_2A_3 \dots A_n$，若以此正n邊形內過A_1直線上任一點O為旋轉中心，依順時針方向旋轉θ至正n邊形$B_1B_2B_3 \dots B_n$，則A_1、B_1、P_2、O、P_{2n}五點共圓。

右方圖(九)為示意圖。

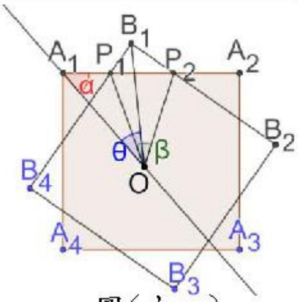
定理 6：

給定正n邊形$A_1A_2A_3\ldots A_n$，若以此正n邊形內過A_1直線上任一點O為旋轉中心，依順時針方向旋轉θ至正n邊形$B_1B_2B_3\ldots B_n$，若另以此正n邊形內過A_1直線上異於O點之另一點O'為旋轉中心，依順時針方向旋轉θ至正n邊形$B'_1B'_2B'_3\ldots B'_n$，則$\angle P_1OP_2=\angle P'_1O'P'_2$

下左方圖(十)為示意圖。



圖(十)



圖(十一)

我們為了得到旋心角、旋轉角、旋轉內角的關係，利用了**定理5**、**引理1**以及三角函數的計算技巧：

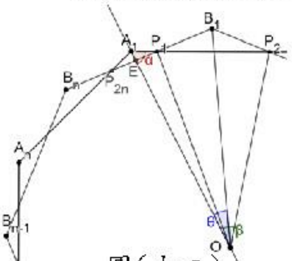
定理 7：

給定正四邊形$A_1A_2A_3A_4$，若以此正四邊形內過A_1直線上任一點O為旋轉中心，依順時針方向旋轉θ至正四邊形$B_1B_2B_3B_4$。此時$\angle P_1A_1O=\alpha$、$\angle P_1OP_2=\beta$。則：$\tan\beta=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)}$。

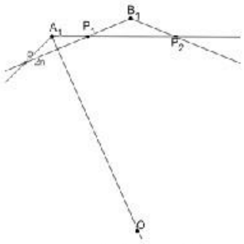
上右方圖(十一)為示意圖。

當**定理7**公式中的分母為0時，我們可以得到P_1與P_8共點於A_1點。因此，此時的A_1,B_1,P_2,O,P_8五點共圓，將會變成A_1,B_1,P_2,O四點共圓。而且此時的$\overline{A_1O}$與$\overline{P_2O}$兩線將會垂直。

我們將結果推廣到正n邊形：



圖(十二)



圖(十五)

定理 7-1：

給定正n邊形$A_1A_2A_3\ldots A_n$，以此正n邊形內過A_1直線上任一點O為旋轉中心，依順時針方向旋轉θ至正n邊形$B_1B_2B_3\ldots B_n$。此時$\angle P_1A_1O=\alpha$、$\angle P_1OP_2=\beta$。則：

$$\tan\beta=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{2\pi}{n}}{\cos\left(\alpha+\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\left(\alpha-\frac{\theta}{2}-\frac{(n-2)\pi}{n}\right)}$$

上左方圖(十二)為示意圖。

同理，逆時針旋轉也會成立，但因為逆時針旋轉是與順時針旋轉的對稱點不同。所以若為逆時針旋轉的話，須將$\angle A_2A_1O$視為$\angle A_1A_2O$。

在**定理 7-2** 中，我們討論上述定理旋轉超過特定角度沒有交點時的狀況。

定理 7-2：

給定正n邊形$A_1A_2A_3\ldots A_n$依順時針方向旋轉θ至正n邊形$B_1B_2B_3\ldots B_n$，但當旋轉超過$\frac{2\pi}{n}$時，$\overline{A_1A_2}$與$\overline{B_1B_2}$會沒有交點，即P_2不在原正n邊形上，但若把$\overline{A_1A_2}$與$\overline{B_1B_2}$延長仍然可以得到與**定理 7-1** 相同性質。

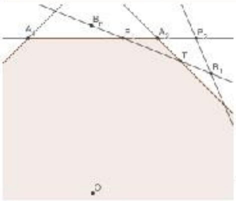
下左方圖(十三)為示意圖。

我們為了探討旋轉角與兩正n邊形重疊面積的極值關係，利用了**引理 2**：

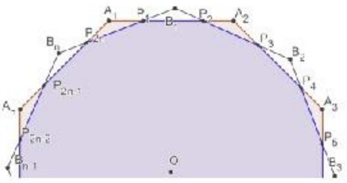
定理 8：

給定正n邊形$A_1A_2A_3\ldots A_n$，若以此正n邊形的重心O為中心，依順時針轉θ至正n邊形$B_1B_2B_3\ldots B_n$，則當$\theta=\frac{\pi}{n}$時，$A_1A_2A_3\ldots A_n$與$B_1B_2B_3\ldots B_n$重疊的面積會有最小值。

下右方圖(十四)為示意圖。



圖(十三)



圖(十四)

我們延伸至旋轉任意角度：

定理 9：

給定正n邊形$A_1A_2A_3\ldots A_n$，且$\overline{OA_1}=1$，若以此正n邊形的重心O為中心，依順時針旋轉θ至正n邊形$B_1B_2B_3\ldots B_n$，則$A_1A_2A_3\ldots A_n$與$B_1B_2B_3\ldots B_n$兩正n邊形重疊的面積為：

$$\frac{n}{2}\sin 2\beta\left[1-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\tan\alpha\tan\beta\tan\left(\beta-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

此時旋轉內角$\alpha=\frac{(n-2)\pi}{2n}$，旋心角$\beta=\frac{\pi}{n}$

左方圖(十五)為示意圖。

陸、討論與應用

從旋轉後的度數關係，到旋轉後兩個四邊形所圍成的三角形周長相同，且等於四邊形的周長。我們可以利用本研究的結果在工業上應用兩個相互旋轉交疊的引擎或碟盤，以更精準的角度計算，減少引擎或碟盤運轉時的消耗磨損，增加器材的使用年限，也可以利用精準的旋轉關係來提升高科技機器人在工作上的精準度，像是機器手臂在修葺與研究上的使用。更有甚者，也可以精準計算長度後，利用最精準的設計，減少廠房的空間浪費。

柒、參考資料

1. 陳界山 (2019)。高中數學第四冊。南一書局，111 年 6 月再版二刷。
2. 陳界山 (2021)。高中數學第六冊。南一書局，110 年 12 月初版。
3. 黃文聖、陳韋程、江宗翰 (2021)。幾何配數歸，碰出新滋味。第 61 屆全國中小學科展。
4. 許凱宣、徐紹敦 (2019)。翻轉正n邊形邊上點的猜想。第 59 屆全國中小學科學展覽會高中職組數學科。
5. 董展宏、施啟文、吳培毅、陳冠宏 (1993)。定周長包含定點所圍三角形最大面積之理論研究。第33屆全國中小學科學展覽會高中職組數學科。