

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

高中組 數學科

050408

探討互等邊三角形之性質

學校名稱：國立花蓮高級中學

作者：  高一 吳睿哲  高一 張育浩  高一 劉文正	指導老師：  林哲宇
-----------------------------------------------	------------------

關鍵詞：互等邊三角形、軌跡、頂心三角形

## 摘要

本研究著重探討互等邊三角形的形成條件以及其外、重、垂及內心軌跡的圖形及相關性質。平面上給定 $\Delta ABC$ 及一點 $P_1$ ，所形成之兩個互等邊三角形 $\Delta P_1P_2P_3$ 及 $\Delta P_1P_2P_4$ ，形成條件必須滿足 $\overline{AC} - \overline{CP_1} \leq \overline{AP_2} \leq \overline{AC} + \overline{CP_1}$ 且 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 其中兩點皆無共線。

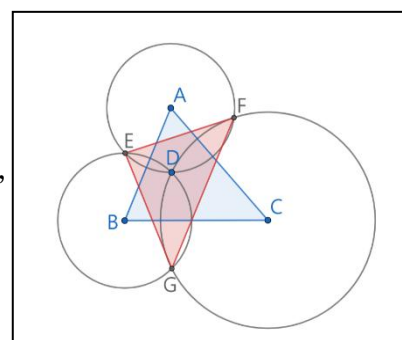
以下是研究中觀察 $\Delta ABC$ 為一等腰三角形及 $P_1$ 在 $\Delta ABC$ 的中垂線上且不在 $A'$ 上時，互等邊三角形各心軌跡的結果：

- 一、外心軌跡會形成一扣除兩點的圓及扣除兩點的直線。
- 二、重心軌跡會形成一扣除兩點的圓及扣除一點的線段。
- 三、垂心軌跡會形成一扣除兩點的圓及至少扣除一點的直線（ $P_1$ 不在 $\Delta ABC$ 的垂心上）。
- 四、內心軌跡會形成扣除一點的心臟線軌跡及扣除一點的線段，並且扣除點皆為 $P_1$ 點。

# 壹、前言

## 一、研究動機

我們在看完第六十一屆科展的作品後，其中的一份作品引起了我們的興趣。作品中研究若以原三角形的三點為圓心，任一點到三角形三點為半徑，三圓之交點所形成的頂心三角形（紅色）、原三角形（藍色）與內、外、重、垂心的交互關係。



圖（一）：頂心三角形

我們參考了這份作品，並放寬條件，平面上給定一 $\triangle ABC$ 及一任意點 $P_1$ ，分別以B、C點為圓心，再以 $\overline{BP_1}$ 、 $\overline{CP_1}$ 為半徑作圓B以及圓C，並再圓B上取一點 $P_2$ 。以 $\overline{AP_2}$ 為半徑作一圓A交圓C於 $P_3$ 、 $P_4$ 兩點且滿足 $\overline{BP_3} \geq \overline{BP_4}$ ，形成 $\triangle P_1P_2P_3$ 以及 $\triangle P_1P_2P_4$ ，並觀察兩個三角形其外、重、垂、內心（以下報告稱為四心）在隨著 $P_2$ 點在圓B上移動時所形成的軌跡圖形。

## 二、研究目的

- (一) 探討 $\triangle ABC$ 中給定 $P_1$ 形成互等邊 $\triangle P_1P_2P_3$ 之條件及性質。
- (二) 探討給定一定條件下，互等邊三角形所形成之四心所形成的軌跡圖形及性質。

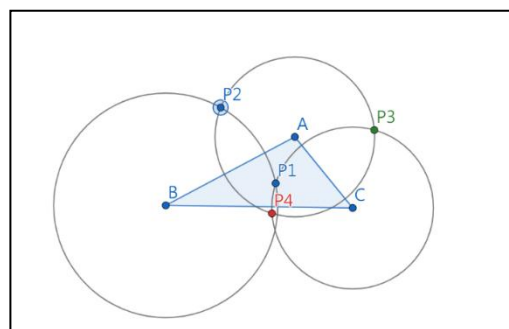
# 貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Geogebra。

# 參、研究過程及方法

## 一、名詞定義

**互等邊三角形**：平面上給定一 $\triangle ABC$ 及一點 $P_1$ ，分別以B、C點為圓心，再以 $\overline{BP_1}$ 、 $\overline{CP_1}$ 為半徑作圓B以及圓C，接著在圓B上取一點 $P_2$ ，以 $\overline{AP_2}$ 為半徑作一圓A，交圓C於 $P_3$ 、 $P_4$ 兩點且滿足 $\overline{BP_3} \geq \overline{BP_4}$ ，所形成之 $\triangle P_1P_2P_3$ 以及 $\triangle P_1P_2P_4$ 即是互等邊三角形。



圖（二）：作圖

## 二、 預備定理

**歐拉線：**任意三角形中的外、重、垂心三點共線，令外心為O點、重心為G點、垂心為H點，則有 $\overline{HG} = 2\overline{OG}$ ，且G點位於O點及H點之間。

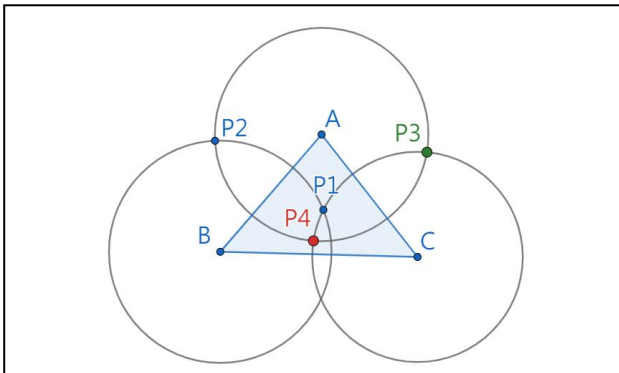
**研究1-1** 平面上給定一 $\triangle ABC$ 及一點 $P_1$ ，若 $\overline{AC} - \overline{CP_1} \leq \overline{AP_2} \leq \overline{AC} + \overline{CP_1}$ ，則存在 $P_3$ 、 $P_4$ 點形成互等邊 $\triangle P_1P_2P_3$ 、 $\triangle P_1P_2P_4$ ，且等號成立時，圓A及圓C相切， $P_3$ 、 $P_4$ 共點， $\triangle P_1P_2P_3 = \triangle P_1P_2P_4$ ， $P_3$ 在 $\overline{AC}$ 延長線上。

**證明：**

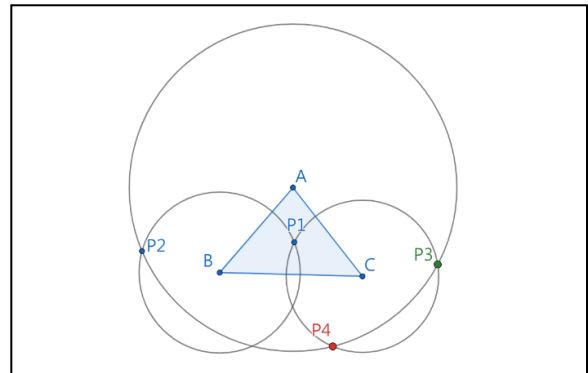
由圖（三）可知， $\overline{AP_3} + \overline{CP_3} \geq \overline{AC}$ ，等號成立時圓A及圓C相切，且 $\overline{AP_3} = \overline{AP_2}$ ， $\overline{CP_3} = \overline{CP_1}$   
 $\therefore \overline{AP_2} + \overline{CP_1} \geq \overline{AC} \Rightarrow \overline{AC} - \overline{CP_1} \leq \overline{AP_2}$ ，等號成立時為最小值（圖五）。

由圖（四）可知， $\overline{AC} + \overline{CP_3} \geq \overline{AP_3}$ ，等號成立時圓A及圓C相切，且 $\overline{AP_3} = \overline{AP_2}$ ， $\overline{CP_3} = \overline{CP_1}$   
 $\therefore \overline{AC} + \overline{CP_1} \geq \overline{AP_2} \Rightarrow \overline{AP_2} \leq \overline{AC} + \overline{CP_1}$ ，等號成立時為最大值（圖六）。

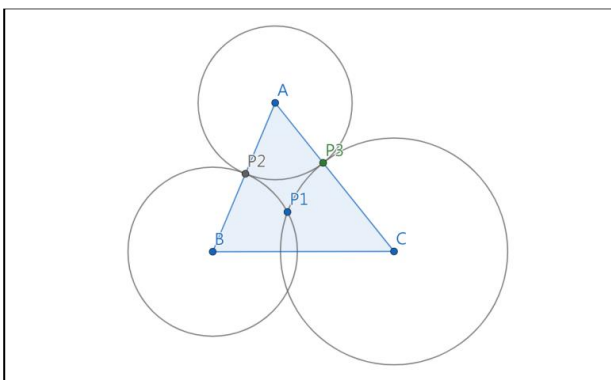
結合二式得 $\overline{AC} - \overline{CP_1} \leq \overline{AP_2} \leq \overline{AC} + \overline{CP_1}$ ，此時必定存在 $P_3$ 與 $P_4$ 點。



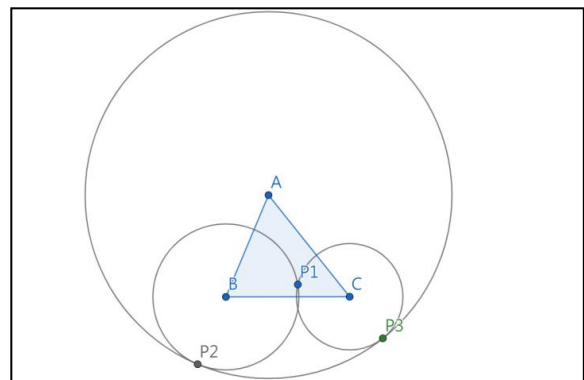
圖（三）



圖（四）



圖（五）



圖（六）

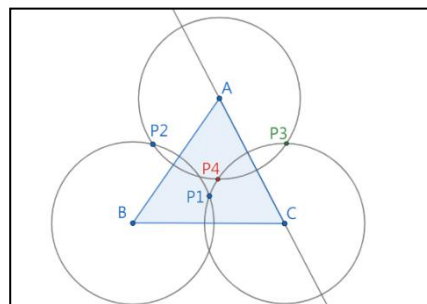
**研究 1-2** 在必定產生 $P_3$ 與 $P_4$ 點時，其中兩點的對稱中心為 $\overleftrightarrow{AC}$ 。

證明：

∵ 圓A與圓C的連接線是 $\overline{AC}$

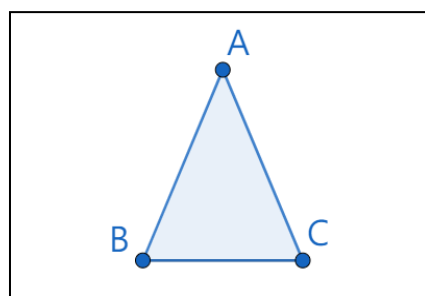
∴ 兩圓的交點便是以 $\overleftrightarrow{AC}$ 作為對稱中心

造成 $P_3$ 與 $P_4$ 兩點對稱於 $\overline{AC}$ 。



圖(七)：兩點的對稱中心為

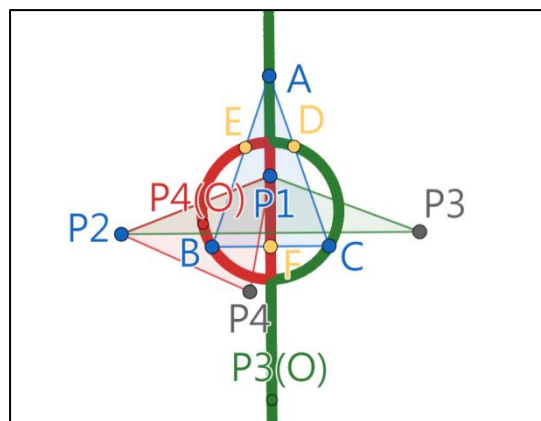
我們將研究重心著重在 $\Delta ABC$ 為等腰三角形且 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $P_1$ 點取在 $\overline{BC}$ 的中垂線上且不在A點以 $\overline{BC}$ 對稱軸的對稱點上（以下研究稱 $A'$ 點）（圖八），我們以下研究之 $\Delta ABC$ 及 $P_1$ 點皆為此定義。



圖(八)

**研究 2-1** 給定 $\Delta ABC$ 及 $P_1$ 點，所形成之互等邊三角形外心軌跡為扣除兩點的圓及扣除兩點的直線。

我們觀察到若 $P_1$ 點取在 $A'$ 點上方時， $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的外心軌跡會形成兩條射線及一不完整的弧（綠色軌跡），而 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 則會形成一不完整的半圓（紅色軌跡），且兩個互等邊三角形所形成的軌跡圖形疊合後會形成扣除兩點的圓及扣除兩點的直線（圖九），被扣除的點為圖中D、E、F及 $P_1$ 點。而 $P_1$ 點取在 $A'$ 下方時，則 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 與 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 所形成的圖形會相反，若 $P_1$ 點取在 $A'$ 上時，則圖形會只剩下射線及線段的部份。



圖(九)

在排除 $P_3$ 與 $P_4$ 共點的情況後，我們觀察到當 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的外心位置位於軌跡圓上時，則 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 的外心位置會位於軌跡直線上，相反地，當 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的外心位置位於軌跡直線上時，則 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 的外心位置會位於軌跡圓上，於是我們想證明兩互等邊三角形的位置不會在相同部分的軌跡上(此處的部分指軌跡圓與軌跡直線)，並且我們也觀察到，主要影響的因素是 $\overline{BP_2}$ 及 $\overline{CP_3}$ 之夾角與 $\angle BAC$ 的關係，因此我們想透過 $\overline{BP_2}$ 及 $\overline{CP_3}$ 之夾角與 $\angle BAC$ 的關係做分類，並且研究 $P_1$ 點與 $A'$ 點位置關係，過程中發現上述的兩個證明皆會使用到 $\angle ABP_2 = \angle ACP_3$ ，於是我們先證明兩角相等。

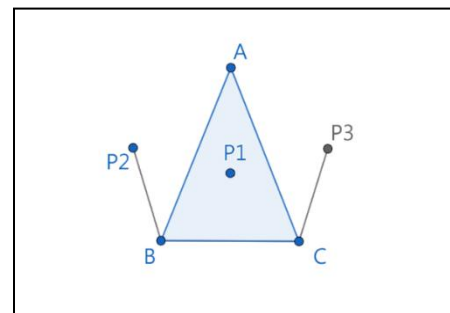
Lemma 2-1.1 :  $\angle ABP_2 = \angle ACP_3$

證明：

$$\because \begin{cases} \overline{BP_2} = \overline{CP_3} \\ \overline{AP_2} = \overline{AP_3} \\ \overline{AB} = \overline{AC} \end{cases} \therefore \Delta ABP_2 \cong \Delta ACP_3 \text{ (SSS全等)}$$

$$\therefore \angle ABP_2 = \angle ACP_3 \text{ (圖十)}$$

$$\text{同理可知} \Delta ABP_2 \cong \Delta ACP_4 \text{ (SSS全等)} \Rightarrow \angle ABP_2 = \angle ACP_4$$

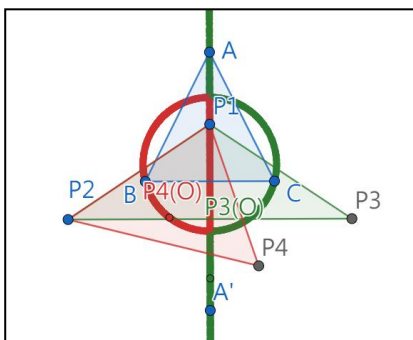


圖(十)

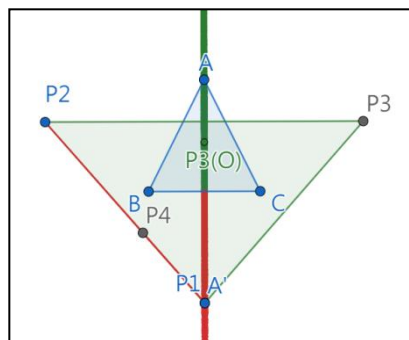
Lemma 2-1.2 :  $P_1$ 點與 $A'$ 點位置關係會影響互等邊三角形外心的軌跡圖形

證明：

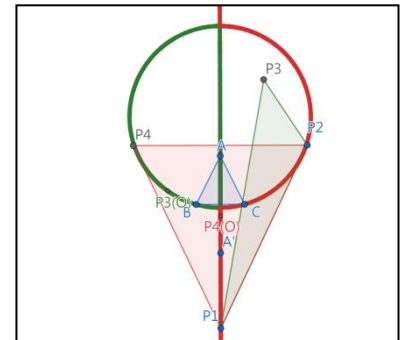
我們將 $P_1$ 點的位置分為三種情況，其中 $A'$ 是A點以 $\overline{BC}$ 為對稱軸產生的對稱點，三種情況分別是 $P_1$ 點位於 $A'$ 上方(圖十一)、位於 $A'$ 上(圖十二)及位於 $A'$ 下方時(圖十三)。



圖(十一)



圖(十二)



圖(十三)

Case1： $P_1$ 點位於 $A'$ 上方（圖十一），此時 $\Delta P_1P_2P_3$ 的外心軌跡會形成兩條射線及一個弧，會形成射線的主要原因是因為 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 點會形成三點共線但不共點的情況，使得外心形成無限延長的射線，而 $\Delta P_1P_2P_4$ 外心軌跡則會形成一個半圓。

Case2： $P_1$ 點位於 $A'$ 上（圖十二）

此時因為 $\angle ABP_2 = 2\angle AP_1P_2 = \angle ACP_3 = 2\angle AP_1P_3$ （圓心角=2倍圓周角）

$\therefore \angle AP_1P_2 = \angle AP_1P_3 \quad \therefore P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 在 $\theta = \angle BAC$ 時三點共線（軌跡圓）

同理 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_4$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 時三點共線（軌跡圓）

並且 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 及 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_4$ 皆會於直線軌跡時產生三點共線但不共點的狀況，使得兩個互等邊三角形之外心的軌跡為一條直線，且沒有產生軌跡圓。

Case3： $P_1$ 點位於 $A'$ 下方（圖十三），此時兩個互等邊三角形形成的軌跡與Case1相反， $\Delta P_1P_2P_4$ 的外心軌跡會形成兩條射線及一個弧， $\Delta P_1P_2P_3$ 外心軌跡則會形成一個半圓，我們觀察到兩者軌跡與Case1相反的原因是從 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 會形成三點共線但不共點的情況變為 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_4$ 形成三點共線但不共點。

依照結果我們決定使用Case1的條件進行後續的研究，而Case3的情況根據我們的研究後將 $P_3$ 與 $P_4$ 兩者互換之後皆可證明，為了省略篇幅以下只討論Case1。

Lemma2-1.3：互等邊三角形的外（重或垂）心不會落在另一個互等邊三角形的外（重或垂）心軌跡上

證明：

令 $\overrightarrow{BP_2}$ 及 $\overrightarrow{CP_3}$ 之夾角為 $\theta$ （報告以下均稱 $\overrightarrow{BP_2}$ 及 $\overrightarrow{CP_3}$ 之夾角為 $\theta$ ）

$$\theta = (180^\circ - \angle P_2BC) - \angle P_3CB = 180^\circ - (\angle P_2BC + \angle P_3CB)$$

$$\Rightarrow \theta = 180^\circ - [(\angle ABC \pm \angle ABP_2) + (\angle ACB + \angle ACP_3)]$$

並且若為圖十四時， $\angle P_2BC = \angle ABC + \angle ABP_2$ ，若為圖十五時， $\angle P_2BC = \angle ABC - \angle ABP_2$ 。

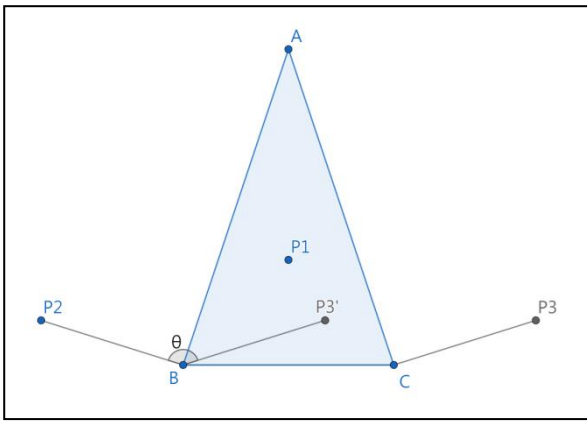


圖 (十四)

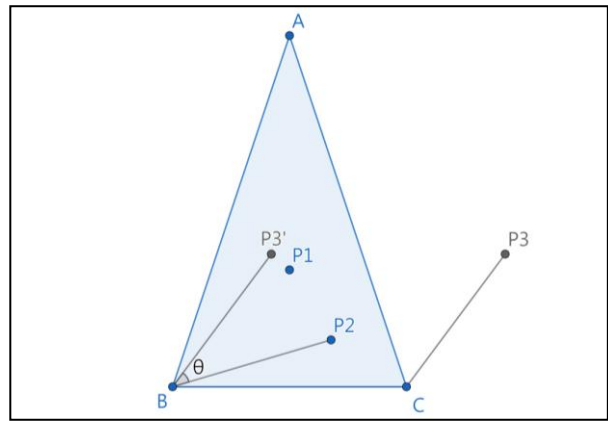


圖 (十五)

由Lemma 2-1.1中可知 $\angle ABP_2 = \angle ACP_3$

$$\Rightarrow \theta = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB) = \angle BAC$$

$$\text{or } 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB + 2\angle ABP_2) = \angle BAC - 2\angle ABP_2$$

從上述證明中可知，若 $\theta = \angle BAC$ 時，則 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的四心會位於軌跡圓上，而 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 的四心之軌跡則位於軌跡直線上。相反地，若 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 時，則 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的四心會位於軌跡直線上，而 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 的四心則位於軌跡圓上。

圓： $\Delta P_1 P_2 P_3$ 在 $\theta = \angle BAC$ 時，其外心軌跡會產生扣除一點的弧，而 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 時，其外心軌跡會產生與 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 對稱扣除一點的弧，整合後會產生一個扣除兩點的圓，其中被扣除的兩點是當 $P_1$ 、 $P_2$ 及 $P_4$ 共點與 $P_1$ 及 $P_4$ 共點時，扣除點為圖中D、E點（圖十六、圖十七）

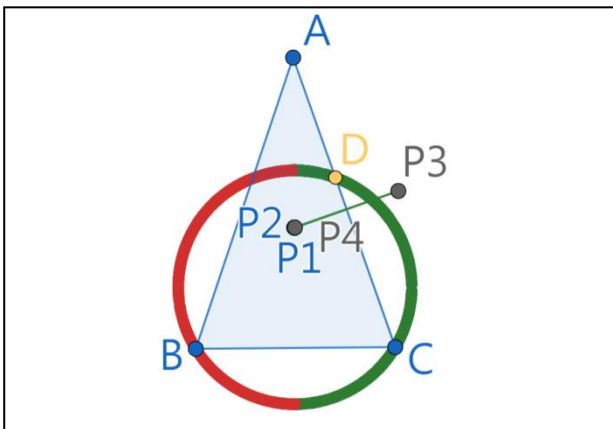


圖 (十六)

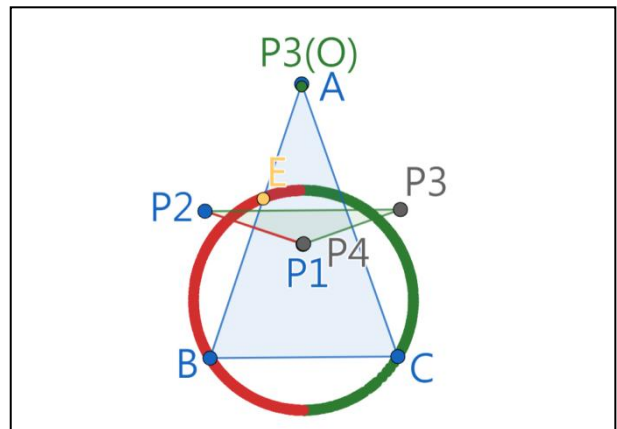


圖 (十七)



我們透過觀察的方式發現軌跡圖形必定會過B、C兩點，並且當 $\Delta P_1P_2P_3$ 及 $\Delta P_1P_2P_4$ 的外心位於軌跡弧上時， $\angle BOC$ 的值為互補或不改變（O為互等邊三角形之外心），所以我們以此為出發點，想證明 $\angle BOC$ 為圓周角及軌跡圖形必通過B、C兩點，以此證明軌跡圖形會構成一圓的部分圖形。

Lemma 2-1.4：在圓B上移動 $P_2$ 點，當 $\Delta P_1P_2P_3$ 在 $\theta = \angle BAC$ 與 $\Delta P_1P_2P_4$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 時，在相同 $\theta$ 條件下取一點 $P'_2 \neq P_2$ ，且 $P'_2$ 所產生互等邊三角形之頂點為 $P'_3$ 及 $P'_4$ ，則有 $\angle P'_2P_1P'_3$ 與 $\angle P_2P_1P_3$ 相等或互補； $\angle P'_2P_1P'_4$ 與 $\angle P_2P_1P_4$ 相等或互補

證明：

$\Delta P_1P_2P_3$ ：

$$\because \angle P_2AB = \angle P_4AC = \angle P_3AC \quad \text{且} \quad \angle P'_2AB = \angle P'_4AC = \angle P'_3AC$$

$$\because |\angle P_2AB - \angle P'_2AB| = |\angle P_3AC - \angle P'_3AC|, \text{ 推得 } \angle P_2AP'_2 = \angle P_3AP'_3$$

$$\because \begin{cases} \angle P_2AP'_2 = \angle P_3AP'_3 \\ \overline{AP_2} = \overline{AP_3} \\ \overline{AP'_2} = \overline{AP'_3} \end{cases} \quad \therefore \Delta P_2AP'_2 \cong \Delta P_3AP'_3 \quad (\text{SAS全等}) \quad (\text{圖十八})$$

$$\because \begin{cases} \overline{P_2P_2} = \overline{P_3P_3} \\ \overline{BP_2} = \overline{CP_3} \\ \overline{BP'_2} = \overline{CP'_3} \end{cases} \quad \therefore \Delta BP_2P'_2 \cong \Delta CP_3P'_3 \quad (\text{SSS全等}) \quad (\text{圖十九})$$

$$\because \Delta BP_2P'_2 \cong \Delta CP_3P'_3 \quad \therefore \angle P_2BP'_2 = \angle P_3CP'_3$$

$$\because \angle P_2BP'_2 = \angle P_3CP'_3 \quad (\text{圓心角})$$

$$\therefore \angle P_2P_1P'_2 = \angle P_3P_1P'_3 \quad \text{or} \quad 180^\circ - \angle P_3P_1P'_3 \quad (\text{圓周角}) \quad (\text{圖二十})$$

$$\text{推得 } \angle P_2P_1P'_2 + \angle P'_2P_1P'_3 = \angle P_3P_1P'_3 + \angle P'_2P_1P'_3 \Rightarrow \angle P'_2P_1P'_3 = \angle P_2P_1P_3$$

$$\text{or } \angle P_2P_1P'_2 + \angle P'_2P_1P'_3 = 180^\circ - \angle P_3P_1P'_3 + \angle P'_2P_1P'_3 \Rightarrow \angle P'_2P_1P'_3 = 180^\circ - \angle P_2P_1P_3$$

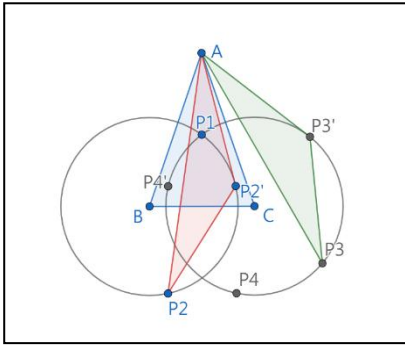


圖 (十八)

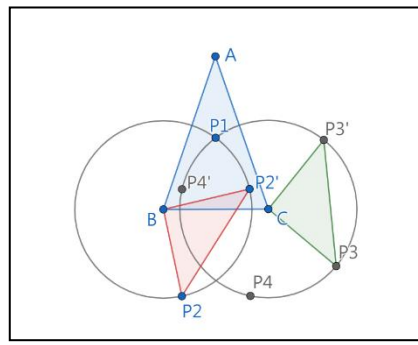


圖 (十九)

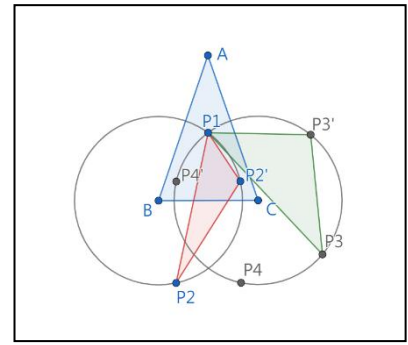


圖 (二十)

$\Delta P_1 P_2 P_4$  :

$\therefore \angle P_2 A B = \angle P_3 A C = \angle P_4 A C$  且  $\angle P_2' A B = \angle P_3' A C = \angle P_4' A C$

$\therefore |\angle P_2 A B - \angle P_2' A B| = |\angle P_4 A C - \angle P_4' A C|$  , 推得  $\angle P_2 A P_2' = \angle P_4 A P_4'$

$\therefore \begin{cases} \angle P_2 A P_2' = \angle P_4 A P_4' \\ \overline{AP_2} = \overline{AP_4} \\ \overline{AP_2'} = \overline{AP_4'} \end{cases} \therefore \Delta P_2 A P_2' \cong \Delta P_4 A P_4' \text{ (SAS全等)} \text{ (圖二十一)}$

$\therefore \begin{cases} \overline{P_2 P_2'} = \overline{P_4 P_4'} \\ \overline{BP_2} = \overline{CP_4} \\ \overline{BP_2'} = \overline{CP_4'} \end{cases} \therefore \Delta B P_2 P_2' \cong \Delta C P_4 P_4' \text{ (SSS全等)} \text{ (圖二十二)}$

$\therefore \Delta B P_2 P_2' \cong \Delta C P_4 P_4' \therefore \angle P_2 B P_2' = \angle P_4 C P_4'$

$\therefore \angle P_2 B P_2' = \angle P_4 C P_4'$  (圓心角)

$\therefore \angle P_2 P_1 P_2' = \angle P_4 P_1 P_4'$  or  $180^\circ - \angle P_3 P_1 P_3'$  (圓周角) (圖二十三)

推得  $\angle P_2 P_1 P_2' + \angle P_2' P_1 P_4' = \angle P_4 P_1 P_4' + \angle P_2' P_1 P_4' \Rightarrow \angle P_2' P_1 P_4' = \angle P_2 P_1 P_4$

or  $\angle P_2 P_1 P_2' + \angle P_2' P_1 P_3' = 180^\circ - \angle P_3 P_1 P_3' + \angle P_2' P_1 P_3' \Rightarrow \angle P_2' P_1 P_3' = 180^\circ - \angle P_2 P_1 P_3$

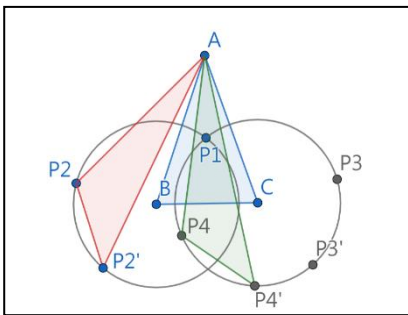


圖 (二十一)

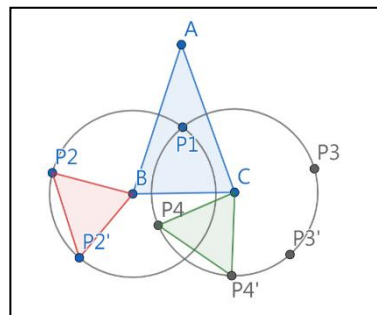


圖 (二十二)

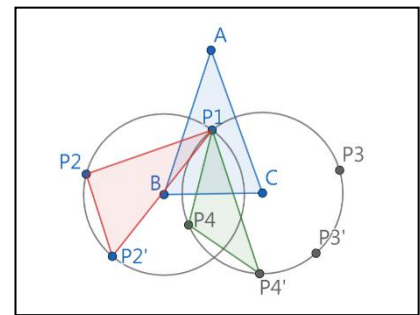


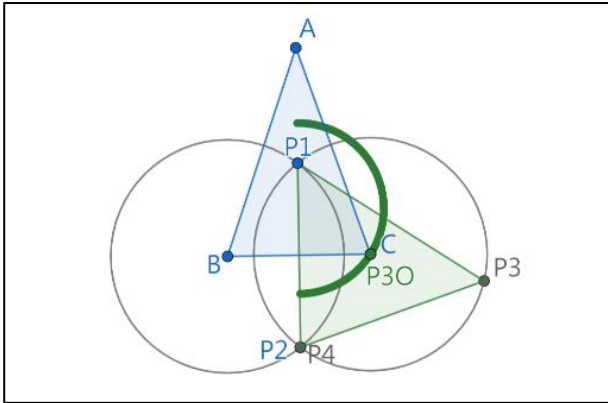
圖 (二十三)

Lemma 2-1.5：B點和C點必在互等邊三角形外心軌跡上

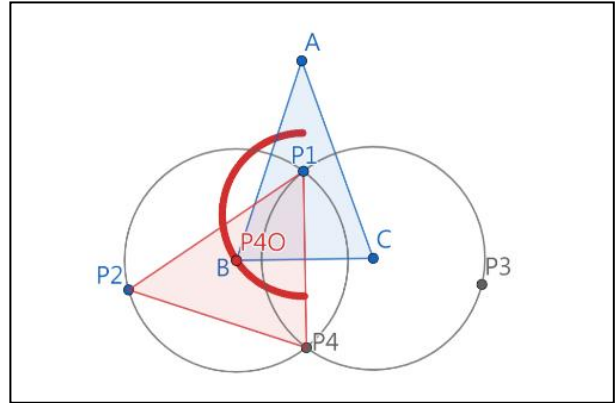
證明：

$\Delta P_1 P_2 P_3$ ：當 $P_1$ 不在 $\overline{BC}$ 上時，圓B與圓C交二點，令 $P_2$ 為圓B與圓C的交點且 $P_2$ 與 $P_1$ 不共點，此時 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的外心位於C點（圖二十四）。

$\Delta P_1 P_2 P_4$ ：當 $P_1$ 不在 $\overline{BC}$ 上時，圓B與圓C交二點，令 $P_4$ 為圓B與圓C的交點且 $P_4$ 、 $P_1$ 和 $P_2$ 不共點，此時 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 的外心位於B點（圖二十五）。



圖（二十四）



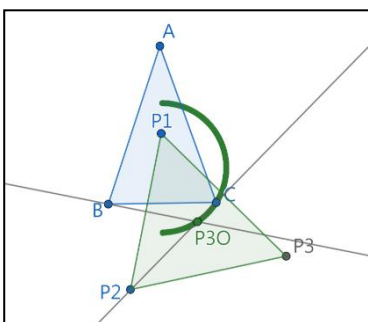
圖（二十五）

故當 $P_1$ 不在 $\overline{BC}$ 上時，B、C點必在互等邊三角形外心軌跡上。

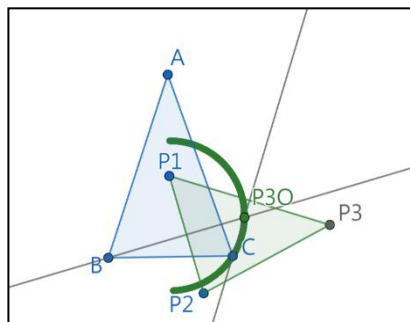
Lemma 2-1.6： $\angle BOC$ 為以 $\overline{BC}$ 為弦的圓之圓周角，其中O點為在適當角度時互等邊三角形外心

證明：

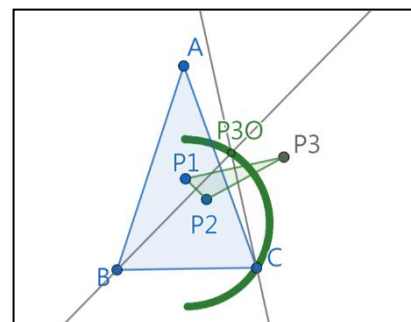
我們將互等邊三角形外心（ $\Delta P_1 P_2 P_3$ ）位置分為三種情況，分別是互等邊三角形的外心位於 $\overline{BC}$ 下方（圖二十六）、位於 $\overline{BC}$ 上方且在 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 內部（圖二十七）及位於 $\overline{BC}$ 上方且在 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 外部時（圖二十八）。



圖（二十六）



圖（二十七）



圖（二十八）

Case 1：令 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的外心為O，則 $\angle P_2 P_1 P_3 = 180^\circ - \angle BOC$

Case 2：令 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的外心為O，則 $\angle P_2 P_1 P_3 = \angle BOC$

Case 3：令 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的外心為O，則 $\angle P_2 P_1 P_3 = \angle BOC$

B點和C點必在互等邊三角形外心軌跡上，且外心軌跡在軌跡圓上時 $\angle P_2 P_1 P_3 = \angle P_2' P_1 P_3'$ ，又 $\angle BOC$ 可形成以 $\overline{BC}$ 為弦的圓周角，同理可知可以得到結果 $\angle P_2 P_1 P_4 = \angle P_2' P_1 P_4'$ ，所以互等邊三角形之外心軌跡會形成一個扣除兩點的圓。

Lemma 2-1.7：當 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 在 $\theta = \angle BAC$ 與 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 時外心軌跡形成扣除D、E兩點的圓

證明：

設一點Q在軌跡圓上且不在軌跡圓與 $\overline{BC}$ 的交點上，Q點非任意互等邊三角形的外心，分別以 $\overline{BQ}$ 和 $\overline{CQ}$ 作 $P_1$ 的對稱點，因為對稱點分別在圓B和圓C上，所以必有 $P_2$ 和 $P_4$ 分別對應兩個對稱點，此時產生互等邊三角形 $\Delta P_1 P_2 P_4$ ，其外心位於Q點，矛盾。

Lemma 2-1.8：D、E兩點不在軌跡圓上

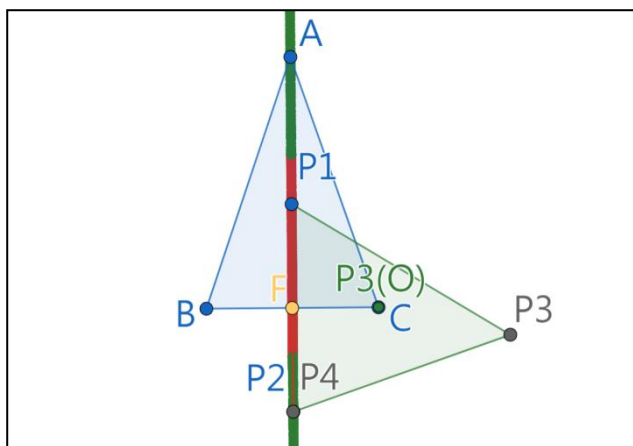
證明：

設軌跡圓與 $\overline{AC}$ 的交點上一點Q點為一互等邊三角形之外心，以 $\overline{BQ}$ 為對稱軸作 $P_1$ 對稱點 $P_1'$ ，此時 $\overline{AP_1'} = \overline{AP_1} = \overline{AP_4}$ ， $\angle BAP_1' = \angle BAP_1 = \angle CAP_4$

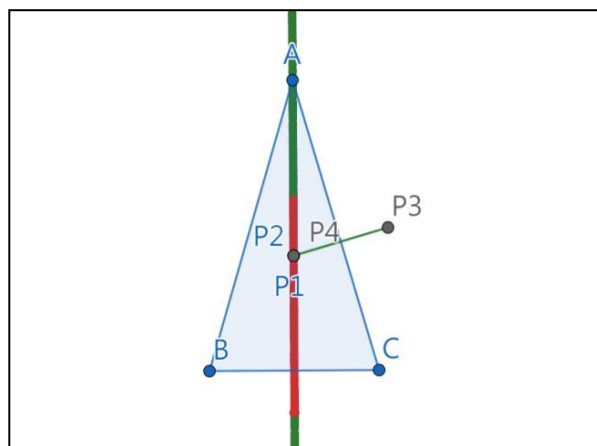
$$\therefore \begin{cases} \overline{AP_1'} = \overline{AP_4} \\ \angle CAP_1' = \angle CAP_4 \\ \overline{CA} = \overline{CA} \end{cases} \therefore \Delta CAP_1' \cong \Delta CAP_4 \text{ (SAS全等)} \therefore \Delta CAP_1' \cong \Delta CAP_4 \therefore P_1' \text{ 與 } P_4 \text{ 共點}$$

故互等邊三角形之外心所形成的軌跡會形成一個扣除兩點的圓。

直線：我們將觀察到的直線軌跡拆分成三個部分，分別為兩條由 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 形成的射線及一條 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 形成的不完整線段，且整合之後會形成一條扣除兩點的直線，其中扣除的兩點是當 $P_1$ 、 $P_2$ 及 $P_4$ 共點與 $P_2$ 、 $P_4$ 共點時，分別F點和 $P_1$ 點的位置被扣除（圖二十九、圖三十）。



圖（二十九）



圖（三十）

Lemma 2-1.9: 在圓B上移動 $P_2$ 點，當 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 與 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 在 $\theta = \angle BAC$ 時，其外心軌跡整合後為直線的部分圖形。

證明：

$\Delta P_1 P_2 P_3$ ：

$\because \overline{AP_2} = \overline{AP_3} \quad \therefore \Delta AP_2 P_3$  為等腰三角形

$\because P_1$  在 $\Delta AP_2 P_3$  的底邊中垂線上  $\therefore \Delta P_1 P_2 P_3$  也是等腰三角形

$\because$  等腰三角形的外心一定在底邊的中垂線上  $\therefore$  外心軌跡會保持在 $\overline{BC}$  的中垂線上。

過 $P_1$ 作 $\overline{BC}$  平行線，因為此平行線必過圓B與圓C於兩點，所以會發生 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  共線的情況。

在 $P_2$  運動時， $\angle P_2 P_1 P_3$  的角度會不斷改變，當 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  接近三點共線時，外心會逐漸遠離 $\Delta P_1 P_2 P_3$ ，在共線之後，外心會從另一側靠近 $\Delta P_1 P_2 P_3$ ，形成二段無限延長的射線。

$\Delta P_1 P_2 P_4$ ：

$\because \overline{AP_2} = \overline{AP_4}$  時  $\therefore \Delta AP_2 P_4$  為等腰三角形

$\because P_1$  在 $\Delta AP_2 P_4$  的底邊中垂線上  $\therefore \Delta P_1 P_2 P_4$  也為等腰三角形，使得軌跡保持一條線段

$\because$  當 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_4$  接近共線時，頂角會逐漸變小  $\therefore$  外心會在 $\Delta P_1 P_2 P_4$  的內部形成線段。

但是當 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_4$  共線以及 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_4$  共點時，不會形成外心，所以軌跡不會經過兩點。

Lemma 2-1.10：當 $\Delta P_1P_2P_3$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 與 $\Delta P_1P_2P_4$ 在 $\theta = \angle BAC$ 時外心軌跡形成扣除F、 $P_1$ 兩點的直線

證明：

設存在一Q點在 $\overline{BC}$ 的中垂線上，使得軌跡未經過Q點。

Case 1：Q點在由 $\Delta P_1P_2P_3$ 所形成的射線上

以 $\overline{BQ}$ 為對稱軸作 $P_1$ 的對稱點 $P'_1$ ，且 $P'_1$ 恰在B圓上

$\therefore P_2$ 必在B圓上任一點  $\therefore$ 必有一 $P_2$ 點對應 $P'_1$

接著以 $\overline{BC}$ 的中垂線為對稱軸作 $P_2$ 的對稱點 $P'_2$ ，且 $P'_2$ 恰在C圓上

$\therefore P_3$ 必在C圓上任一點  $\therefore$ 必有一 $P_3$ 點對應 $P'_2$

Q點會去對應 $\Delta P_1P_2P_3$ 形成的外心，矛盾。

Case 2：Q點在由 $\Delta P_1P_2P_4$ 所形成的線段上。

以 $\overline{BQ}$ 為對稱軸作 $P_1$ 的對稱點 $P'_1$ 且 $P'_1$ 恰在B圓上

$\therefore P_2$ 必在B圓上任一點  $\therefore$ 必有一 $P_2$ 點對應 $P'_1$

接著以 $\overline{BC}$ 的中垂線為對稱軸作 $P_2$ 的對稱點 $P'_2$ ，且 $P'_2$ 恰在C圓上

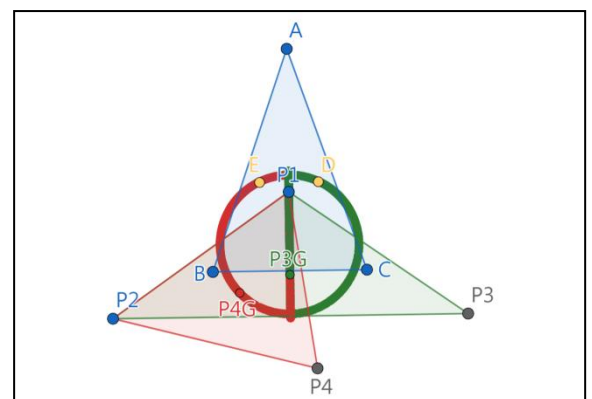
$\therefore P_4$ 必在C圓上任一點  $\therefore$ 必有一 $P_4$ 點對應 $P'_2$

Q會去對應 $\Delta P_1P_2P_4$ 形成的外心，矛盾。

故由等腰三角形所產生的兩個互等邊三角形外心軌跡必定形成一條扣除兩點的直線。

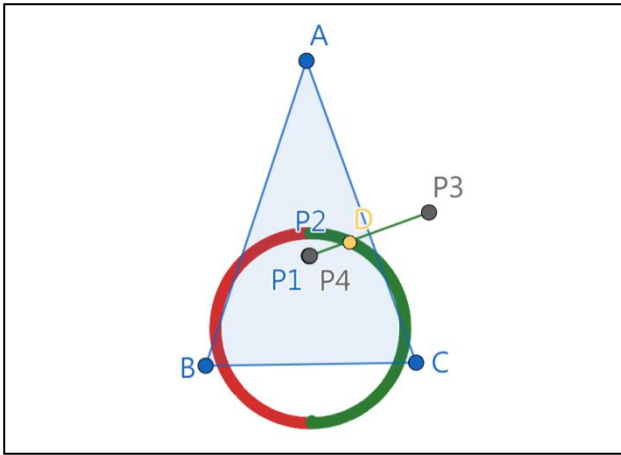
**研究 2-2** 給定 $\Delta ABC$ 及 $P_1$ 點，所形成之互等邊三角形重心軌跡為扣除兩點的圓及扣除兩點的線段。

我們觀察到 $\Delta P_1P_2P_3$ （綠色軌跡）及 $\Delta P_1P_2P_4$ （紅色軌跡）的重心軌跡皆會形成一條線段及一弧，且兩個互等邊三角形所形成的軌跡圖形疊合後會形成一扣除兩點的圓及扣除一點線段，被扣除的點為D、E、及 $P_1$ 點（圖三十一）。

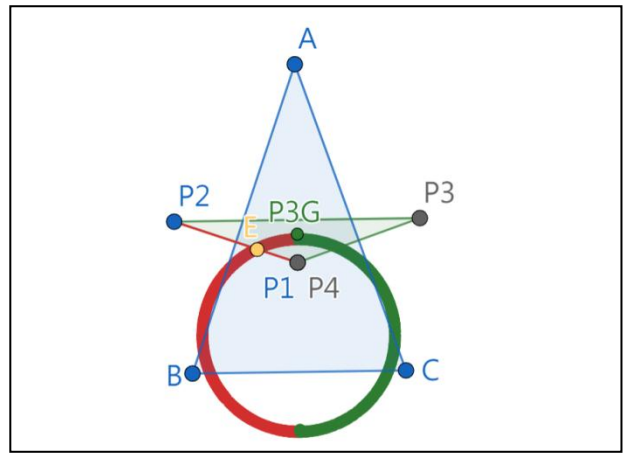


圖（三十一）

圖：兩個互等邊三角形重心軌跡所形成的弧為兩個扣除一點的半圓，且方向相反，整合後會產生一個扣除兩點的圓，其中被扣除的兩點是當 $P_1$ 、 $P_2$ 及 $P_4$ 共點以及 $P_1$ 及 $P_4$ 共點時，被扣除的點為圖D、E點（圖三十二、三十三）



圖（三十二）



圖（三十三）

我們透過觀察的方式發現其軌跡圓的圓心位於 $\Delta P_1BC$ 的重心上，因此我們利用重心所產生的向量性質證明其產生的軌跡為圓的部分圖形。

Lemma2-2.1: 在圓B上移動 $P_2$ 點，當 $\Delta P_1P_2P_3$ 在 $\theta = \angle BAC$ 與 $\Delta P_1P_2P_4$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 時，其重心軌跡整合後為圓的部分圖形。

證明：

令 $\Delta P_1P_2P_3$ 之重心為 $G'$ ， $\Delta P_1BC$ 之重心為 $G$ 。

$$\because \overrightarrow{GP_1} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{P_1G} \Rightarrow (\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B}) + (\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C}) = \overrightarrow{P_1G}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} = \overrightarrow{P_1G} \Rightarrow 2\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{P_1G} + \overrightarrow{BG'} + \overrightarrow{CG'}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{P_1G} + (\overrightarrow{BP_2} + \overrightarrow{P_2G'}) + (\overrightarrow{CP_3} + \overrightarrow{P_3G'})$$

$$\text{又}\because \overrightarrow{P_1G'} + \overrightarrow{P_2G'} + \overrightarrow{P_3G'} = \vec{0} \quad \therefore \overrightarrow{G'P_1} = \overrightarrow{P_2G'} + \overrightarrow{P_3G'} \Rightarrow 2\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{P_1G} + \overrightarrow{G'P_1} + \overrightarrow{BP_2} + \overrightarrow{CP_3}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{BP_2} + \overrightarrow{CP_3} \Rightarrow 3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{BP_2} + \overrightarrow{CP_3} \Rightarrow |3\overrightarrow{GG'}| = |\overrightarrow{BP_2} + \overrightarrow{CP_3}|$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{GG'} = \sqrt{|\overrightarrow{BP_2}|^2 + |\overrightarrow{CP_3}|^2 + 2|\overrightarrow{BP_2}||\overrightarrow{CP_3}|\cos\theta} \quad \text{其中}\theta\text{為}\overrightarrow{BP_2}\text{及}\overrightarrow{CP_3}\text{之夾角。}$$

由 Lemma2-1.1 中可知， $\angle ABP_2 = \angle ACP_3$ ，重心在軌跡圓上時

$\because \angle ABP_2 = \angle ACP_3 \quad \therefore \overrightarrow{BP_2}$ 及 $\overrightarrow{CP_3}$ 之夾角相等。

$\therefore |\overline{BP_2}|, |\overline{CP_3}|$  及  $\cos \theta$  皆為定值  $\therefore |3\overline{GG'}|$  為定值，故  $\overline{GG'}$  為定值。

又  $\therefore G'$  為動點  $\therefore$  軌跡圓的圓心為  $G$  點。同理可知  $\Delta P_1 P_2 P_4$  的重心在軌跡圓上時也會得到相同的結果且  $\overline{BP_2}$  及  $\overline{CP_4}$  之夾角相等。

**Lemma 2-2.2:** 當  $\Delta P_1 P_2 P_3$  在  $\theta = \angle BAC$  與  $\Delta P_1 P_2 P_4$  在  $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$  時重心軌跡形成扣除  $D$ 、 $E$  兩點的圓

證明：

當  $P_2$  與  $P_1$  不共點時，令  $\Delta P_1 P_2 P_3$  之重心為  $Q$  且不通過軌跡圓

$$\overline{P_1 Q} + \overline{P_2 Q} + \overline{P_3 Q} = \vec{0} \Rightarrow \overline{P_2 Q} + \overline{P_3 Q} = \overline{QP_1} \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GP_1} = \vec{0} \Rightarrow \overline{GB} + \overline{GC} = \overline{P_1 G} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得 } \overline{P_2 Q} + \overline{P_3 Q} + \overline{GB} + \overline{GC} = \overline{QG} \Rightarrow \overline{P_2 Q} + \overline{P_3 Q} + \overline{GB} + \overline{GC} + 2\overline{QG} = 3\overline{QG}$$

$$\Rightarrow \overline{P_2 G} + \overline{P_3 G} + \overline{GB} + \overline{GC} = 3\overline{QG} \Rightarrow \overline{P_2 B} + \overline{P_3 C} = 3\overline{QG} \Rightarrow 3\overline{GQ} = \overline{BP_2} + \overline{CP_3}$$

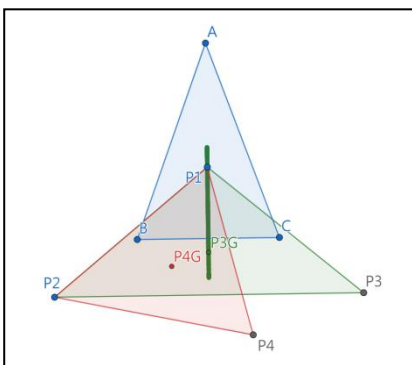
$$\text{由 Lemma 2-3.1 可知 } \overline{BP_2} + \overline{CP_3} = 3\overline{GG'} \Rightarrow 3\overline{GQ} = 3\overline{GG'} \therefore \overline{GQ} = \overline{GG'}$$

因此得出任意  $Q$  點會在軌跡圓上，矛盾。

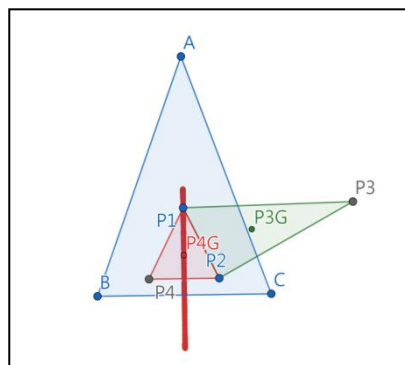
依上述向量證明過程可得，如圖  $D$  點及  $E$  點亦有  $\overline{P_1 D} : \overline{DP_3} = \overline{P_1 E} : \overline{EP_2} = 1 : 2$ ，但  $D$  點形成時  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_4$  共點， $E$  點形成時  $P_1$ 、 $P_4$  共點，此時因不會形成  $D$ 、 $E$  兩點相對應的互等邊三角形，故  $D$ 、 $E$  兩點要被扣除。

故互等邊三角形之重心所形成的軌跡會形成一個扣除兩點的圓。

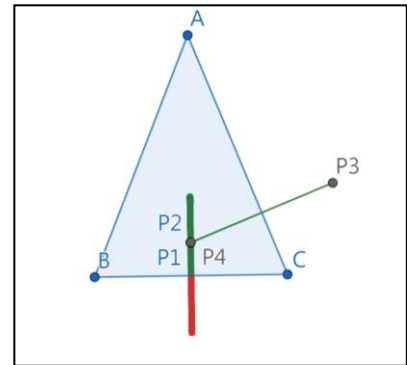
**線段：**我們將觀察到的線段軌跡拆分成兩個部分，兩條分別為由  $\Delta P_1 P_2 P_3$  及  $\Delta P_1 P_2 P_4$  形成的不完整線段（圖三十四、圖三十五），且疊合後會形成一條線段，其中被扣除的點是當  $P_1$ 、 $P_2$  及  $P_4$  共點時， $P_1$  點的位置被扣除（圖三十六）。



圖（三十四）



圖（三十五）



圖（三十六）



Lemma 2-2.3: 在圓B上移動 $P_2$ 點, 當 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 與 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 在 $\theta = \angle BAC$ 時, 其重心軌跡整合後為線段的部分圖形。

證明:

$\Delta P_1 P_2 P_3$ :

$\because \overline{AP_2} = \overline{AP_3} \quad \therefore \Delta AP_2 P_3$  為等腰三角形

$\because P_1$  在  $\Delta AP_2 P_3$  的底邊中垂線上  $\therefore \Delta P_1 P_2 P_3$  也是等腰三角形

$\because$  等腰三角形的重心一定在底邊的中線上  $\therefore$  重心軌跡會保持在  $\overline{BC}$  的中垂線上。

在做線段軌跡時, 在 $P_2$ 運動時,  $\overline{BP_2}$ 及 $\overline{CP_3}$ 夾角會不斷改變, 由Lemma2-2.1可知 $\overline{BP_2}$ 及 $\overline{CP_3}$ 夾角改變時會影響 $\overline{GG'}$ 的長度, 所以當 $\cos \theta = 1$ 時, 也就是 $\overline{BP_2}$ 及 $\overline{CP_3}$ 兩向量平行且方向相同時, 便會產生極值, 會使 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 之重心到達線段軌跡的上方端點 (圖三十七)。

$\Delta P_1 P_2 P_4$ :

$\because \overline{AP_2} = \overline{AP_4} \quad \therefore \Delta AP_2 P_4$  為等腰三角形

$\because P_1$  在  $\Delta AP_2 P_4$  的底邊中垂線上  $\therefore \Delta P_1 P_2 P_4$  也是等腰三角形

$\because$  等腰三角形的重心一定在底邊的中線上  $\therefore$  重心軌跡會保持在  $\overline{BC}$  的中垂線上。

在作線段軌跡時, 在 $P_2$ 運動時,  $\overline{BP_2}$ 及 $\overline{CP_4}$ 夾角會不斷改變, 由Lemma2-2.1可知 $\overline{BP_2}$ 及 $\overline{CP_4}$ 夾角改變時會影響 $\overline{GG'}$ 的長度, 所以當 $\cos \theta = 1$ 時, 也就是 $\overline{BP_2}$ 及 $\overline{CP_4}$ 兩向量平行且方向相同時, 便會產生極值, 會使 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 之重心到達線段軌跡的端點, 並且端點位置位於線段軌跡的下方端點 (圖三十八)。

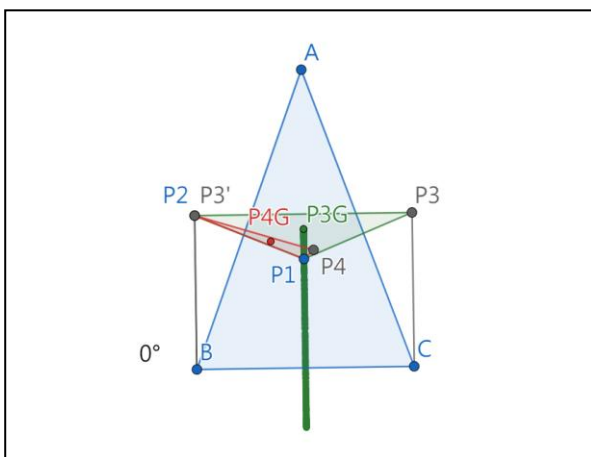


圖 (三十七)

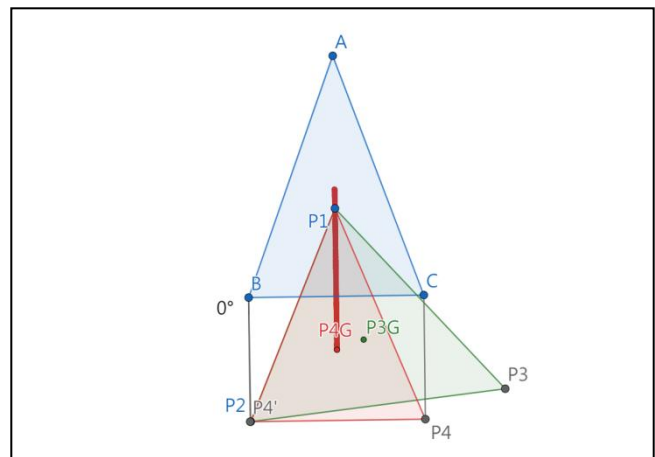


圖 (三十八)

Lemma 2-2.4：當 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 與 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 在 $\theta = \angle BAC$ 時重心軌跡形成扣除 $P_1$ 點的線段

證明：

當 $P_2$ 與 $P_1$ 不共點時，令 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 之重心為 $Q$ 且不通過線段軌跡

$$\overrightarrow{P_1 Q} + \overrightarrow{P_2 Q} + \overrightarrow{P_3 Q} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{P_2 Q} + \overrightarrow{P_3 Q} = \overrightarrow{QP_1} \dots \textcircled{1}$$

$$\because \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GP_1} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{P_1 G} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{得} \overrightarrow{P_2 Q} + \overrightarrow{P_3 Q} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{QG} \Rightarrow \overrightarrow{P_2 Q} + \overrightarrow{P_3 Q} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{QG} = 3\overrightarrow{QG}$$

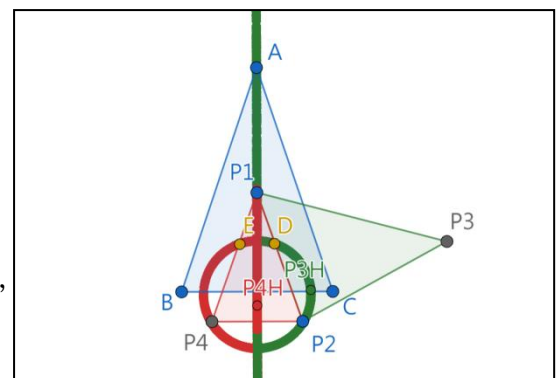
$$\Rightarrow \overrightarrow{P_2 G} + \overrightarrow{P_3 G} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{QG} \Rightarrow \overrightarrow{P_2 B} + \overrightarrow{P_3 C} = 3\overrightarrow{QG} \Rightarrow 3\overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{BP_2} + \overrightarrow{CP_3}$$

$$\text{由Lemma 2-2.2可知} \overrightarrow{BP_2} + \overrightarrow{CP_3} = 3\overrightarrow{GG'} \Rightarrow 3\overrightarrow{GQ} = 3\overrightarrow{GG'} \therefore \overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{GG'}$$

因此得出任意 $Q$ 點會在線段軌跡上，矛盾。

**研究 2-3** 給定 $\Delta ABC$ 及 $P_1$ 點且 $P_1$ 不在 $\Delta ABC$ 的垂心上，所形成之互等邊三角形垂心軌跡為扣除兩點的圓及至少扣除一點的直線。

我們觀察到 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的垂心軌跡會形成一條直線及一弧（綠色軌跡）， $\Delta P_1 P_2 P_4$ 的垂心軌跡會形成一條線段及一弧（紅色軌跡），且兩個互等邊三角形所形成的軌跡圖形疊合後會形成一扣除兩點的圓及扣除一點的直線，扣除點為 $D$ 、 $E$ 、及 $P_1$ 點（圖三十九）。



圖（三十九）

**圓：** 兩個互等邊三角形垂心軌跡所形成的弧為兩個扣除一點的半圓，且方向相反，整合後會產生一個扣除兩點的圓，其中被扣除的兩點是當 $P_1$ 、 $P_2$ 及 $P_4$ 共點與 $P_2$ 及 $P_4$ 共點時，被扣除的兩點分別為 $D$ 、 $E$ 點（圖四十、圖四十一）。

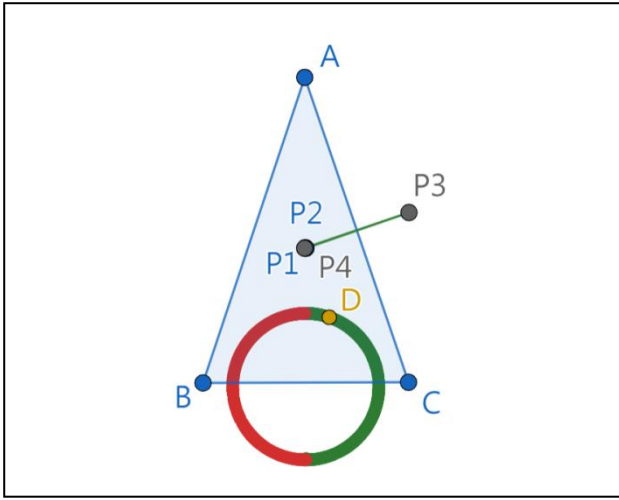


圖 (四十)

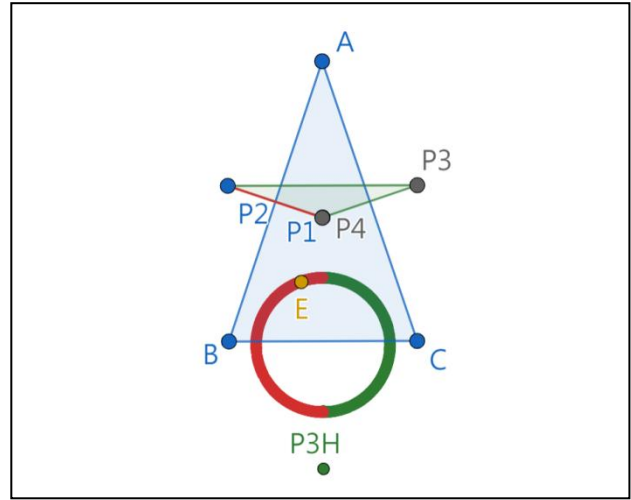


圖 (四十一)

在先前的兩個研究中，我們證明了互等邊三角形外心及重心的軌跡圖形會形成部分圓，而外心、重心、垂心有歐拉線的性質，所以可以透過歐拉線的性質證明垂心的軌跡圖形為部分圓。

令 $\Delta ABC$ 的垂心為H點（以下研究皆使用此定義），透過觀察的方式我們發現 $P_1$ 點與H的相對位置會影響 $\angle P_2 P_1 P_4$ 的大小（ $\angle P_2 P_1 P_3$ 亦同）， $P_1$ 點在H上方時會使 $\angle P_2 P_1 P_4$ 為銳角，在H下方時則會使 $\angle P_2 P_1 P_4$ 為鈍角。根據Lemma 2-1.4我們有 $\angle P_2' P_1' P_4'$ 與 $\angle P_2 P_1 P_4$ 相等或互補（ $\angle P_2 P_1 P_3$ 亦同），而我們也發現若令 $\overline{BP_1}$ 的延長線與 $\overline{AC}$ 的交點為D點，則有 $\angle P_2 P_1 P_4 = \angle BDC$ 或兩角互補，因此我們將 $P_2$ 點定在當 $\overline{P_1 P_2}$ 為圓B的直徑時所在位置，觀察到此時若能證明 $\overline{P_1 P_4} \parallel \overline{AC}$ ，則可得 $\angle P_2 P_1 P_4 = \angle BDC = 180^\circ - \angle P_1 BC - \angle ACB$ 。

Lemma 2-3.1：若 $\overline{P_1 P_2}$ 為圓B的直徑，此時 $\overline{P_1 P_4} \parallel \overline{AC}$

證明：

$\because$  此時圖四十二中 $\overline{XY}$ 為圓C的直徑且 $\angle ACP_1 = \angle P_3 CY$

$\because P_3, P_4$ 沿 $\overline{AC}$ 對稱  $\therefore \angle P_4 CY = \angle P_3 CY$

$\because \angle P_4 CY = \angle P_3 CY$ 且 $2\angle P_4 P_1 P_3 = \angle P_4 CP_3$ （圓周角）

$\therefore \angle P_4 P_1 P_3 = \angle P_3 CY = \angle ACP_1 \Rightarrow \overline{P_1 P_4} \parallel \overline{AC}$ （內錯角相等）

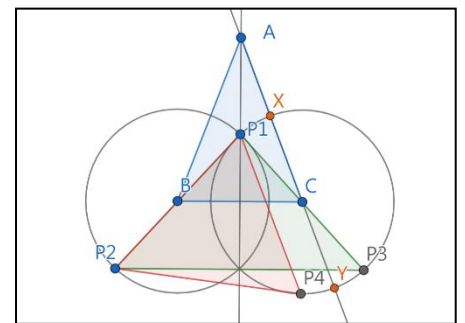


圖 (四十二)

Lemma 2-3.2：若 $P_1$ 點在H上方時， $\angle P_2P_1P_4$ 為銳角（ $\angle P_2P_1P_3$ 亦同）；若 $P_1$ 點在H下方時， $\angle P_2P_1P_4$ 為鈍角（ $\angle P_2P_1P_3$ 亦同）

證明：

設 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 交 $\overrightarrow{AC}$ 於D點

**Case1： $P_1$ 點在H上方**

若將 $\overline{P_1P_2}$ 定為圓B的直徑，則可以得出 $\overline{P_1P_4} // \overline{AC}$

$\because \overline{P_1P_4} // \overline{AC} \quad \therefore \angle P_2P_1P_4 = \angle BDC$

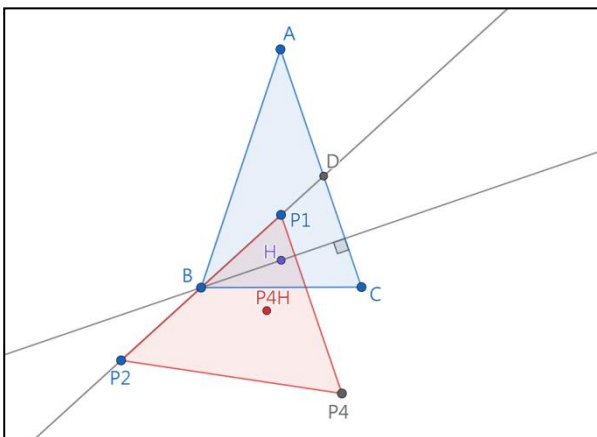
$\because P_1$ 點在H上方  $\therefore \angle BDC < 90^\circ \Rightarrow \angle P_2P_1P_4 < 90^\circ$ （圖四十三）

**Case2： $P_1$ 點在H下方**

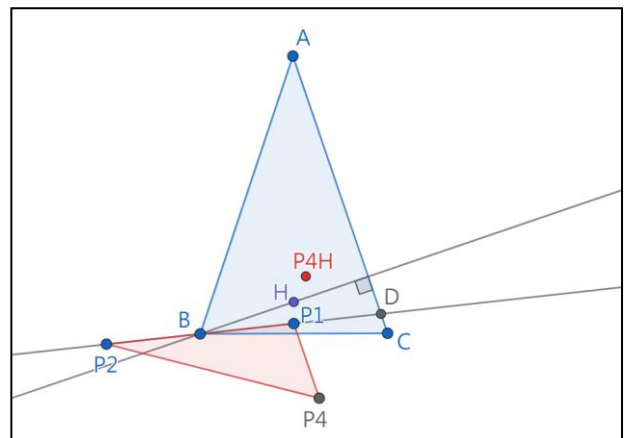
若將 $\overline{P_1P_2}$ 定為圓B的直徑，則可以得出 $\overline{P_1P_4} // \overline{AC}$

$\because \overline{P_1P_4} // \overline{AC} \quad \therefore \angle P_2P_1P_4 = \angle BDC \text{ or } 180^\circ - \angle BDC$ （分別為D點在 $\overline{BC}$ 上方或下方）

$\because P_1$ 點在H下方  $\therefore \angle BDC > 90^\circ \Rightarrow \angle P_2P_1P_4 > 90^\circ$ （圖四十四）



圖（四十三）



圖（四十四）

Lemma 2-3.3：互等邊三角形的外心與外心軌跡圓圓心連線平行互等邊三角形的重心與重心軌跡圓圓心連線

證明：

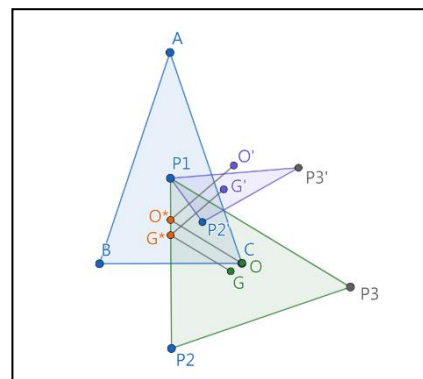
取一 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 且 $P_2$ 位於 $\overline{BC}$ 中垂線上，令其外心為 $O$ ，重心為 $G$

接著取一 $\Delta P_1 P_2' P_3'$ ，令其外心為 $O'$ ，重心為 $G'$

令互等邊三角形之外心軌跡圓圓心為 $O^*$ ，重心軌跡圓圓心為 $G^*$

此時 $\angle GG^*G' = \angle P_2 B P_2' = 2\angle P_2 P_1 P_2' = 2\angle O B O' = \angle O O^* O'$

$\therefore \angle GG^*G' = \angle O O^* O'$ （圖四十五）



圖（四十五）

Lemma 2-3.4：在圓B上移動 $P_2$ 點，當 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 在 $\theta = \angle BAC$ 與 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle A B P_2$ 時，其垂心軌跡整合後為圓的部分圖形。

證明：

令 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的外心為 $O$ 點、重心為 $G$ 點，並且兩個互等邊三角形所產生的外心軌跡圓圓心為 $O^*$ 點、重心軌跡圓圓心為 $G^*$ 點。

作 $\overline{OG}$ ，並在 $\overline{OG}$ 取一點 $H$ 使得 $\overline{HG} = 2\overline{OG}$ ，透過歐拉線可以得出 $H$ 為

$\Delta P_1 P_2 P_3$ 之垂心。作 $\overline{O^*G^*}$ ，此時 $\overline{O O^*} // \overline{G G^*}$ ，作一點 $H^*$ 使得

$\overline{H H^*} // \overline{O O^*} // \overline{G G^*}$ 。

$\therefore \overline{H H^*} // \overline{O O^*} // \overline{G G^*} \Rightarrow \overline{H H^*}$ 與 $\overline{O O^*}$ 、 $\overline{G G^*}$ 之間存在內分點公式...①

$\therefore \frac{\overline{OG}}{\overline{HG}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\overline{O^*G^*} = \overline{G^*H^*} \dots$  ②

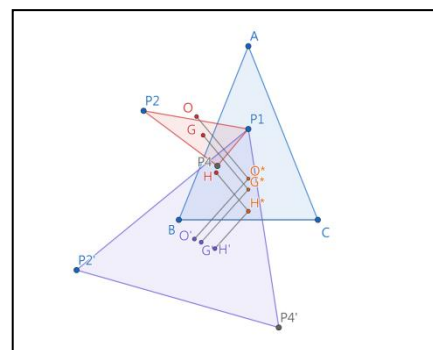
接著作 $\Delta P_1 P_2' P_3'$ ，且 $P_2 \neq P_2'$ ，依上述相同的做法從 $\Delta P_1 P_2' P_3'$ 作出 $O'$ 、 $G'$ 、 $H'$ 、 $H'^*$ 點

此時因為 $\frac{\overline{O'G'}}{\overline{H'G'}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\overline{O^*G^*} = \overline{G^*H'^*} = \overline{G^*H^*} \Rightarrow H'^* = H^*$ （圓心相同）

並且因為 $\overline{O'O^*} = \overline{O O^*}$ 、 $\overline{G'G^*} = \overline{G G^*}$ ，又因為①，所以 $\overline{H'H'^*} = \overline{H H^*}$ （半徑相同）

由以上證明可知互等邊三角形所產生的垂心軌跡為一半徑為 $\overline{H H^*}$ ，圓心為 $H^*$ 的圓。

並且 $\overline{H H^*}$ 與 $\overline{O O^*}$ 、 $\overline{G G^*}$ 之間存在內分點公式， $2\overline{O^*G^*} = \overline{G^*H^*}$ （圖四十六）。



圖（四十六）

Lemma 2-3.5：當 $\Delta P_1P_2P_3$ 在 $\theta = \angle BAC$ 與 $\Delta P_1P_2P_4$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 時，垂心軌跡形成扣除D、E兩點的圓

證明：

設存在一點 $H'$ 在垂心軌跡圓上不在扣除點上，且 $H'$ 不存在對應的互等邊三角形之垂心。

由 $O^*$ 作平行 $\overline{H'H^*}$ 的平行線，接著由A點作 $\overline{HP_1}$ 的平行線，因為外心必位於其兩條平行線上，故平行線交點為一互等邊三角形之外心。

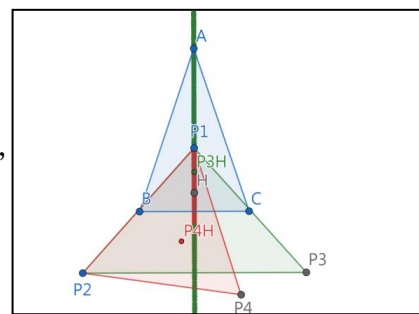
令其兩條平行線交點為 $O'$ ，由Lemma 2-3.3可知 $\overline{O'O^*}$ 與 $\overline{H'H^*}$ 平行，又 $O'$ 存在對應之互等邊三角形，所以 $H'$ 為其對應互等邊三角形之垂心，矛盾。

故由等腰三角形所產生的兩個互等邊三角形垂心軌跡必定形成一個扣除兩點的圓。

直線：我們觀察到 $P_1$ 的位置會影響 $\Delta P_1P_2P_3$ 所形成的直線軌跡，若 $P_1$ 點在H上方時， $\Delta P_1P_2P_3$ 所形成的軌跡為扣除一點的直線，而 $P_1$ 點在H下方時， $\Delta P_1P_2P_3$ 所形成的軌跡為兩條方向相反的射線，因此我們將情況分為兩種，分別是 $P_1$ 點在H上方及 $P_1$ 點在H下方。

### 一、 $P_1$ 點在H上方

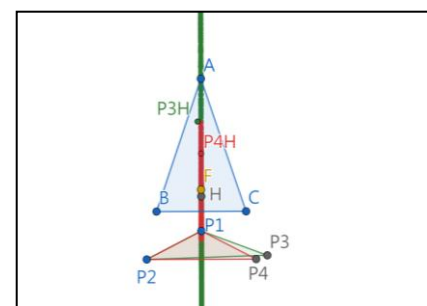
我們將觀察到的直線軌跡拆分成兩個部分，分別為一條由 $\Delta P_1P_2P_3$ 形成扣除一點的直線及一條 $\Delta P_1P_2P_4$ 形成扣除兩點的線段，且整合之後會形成一條扣除一點的直線，其中被扣除的點是當 $P_1$ 、 $P_2$ 及 $P_4$ 共點時， $P_1$ 點的位置被扣除（圖四十七）。



圖（四十七）

### 二、 $P_1$ 點在H下方

我們將觀察到的直線軌跡拆分成三個部分，分別為兩條由 $\Delta P_1P_2P_3$ 形成的兩條射線及一條 $\Delta P_1P_2P_4$ 形成扣除兩點的線段，且整合之後會形成一條扣除一點的直線或扣除兩點的直線，其中被扣除的兩點是當 $P_2$ 及 $P_4$ 共點與 $P_1$ 、 $P_2$ 及 $P_4$ 共點時，分別為F點與 $P_1$



圖（四十八）

點的位置被扣除(圖四十八)。其中F點有可能在合併後被 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 覆蓋,所以有可能只有 $P_1$ 點被扣除。

Lemma 2-3.6: 在圓B上移動 $P_2$ 點,當 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 與 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 在 $\theta = \angle BAC$ 時,其垂心軌跡整合後為直線的部分圖形。

證明:

$\Delta P_1 P_2 P_3$ :

$\because \overline{AP_2} = \overline{AP_3} \quad \therefore \Delta AP_2 P_3$  為等腰三角形

$\because P_1$  在 $\Delta AP_2 P_3$ 的底邊中垂線上  $\therefore \Delta P_1 P_2 P_3$  也是等腰三角形

$\because$  等腰三角形的垂心一定在底邊的中垂線上  $\therefore$  垂心軌跡會保持在 $\overline{BC}$ 的中垂線上。

Case1:  $P_1$  點在H上方

在 $P_2$ 運動時, $\angle P_2 P_1 P_3$ 的角度會不斷改變,當 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 接近三點共線時,垂心會逐漸遠離 $\Delta P_1 P_2 P_3$ ,在共線之後,垂心會從另一側靠近 $\Delta P_1 P_2 P_3$ ,形成一條直線,因此在 $P_3$ 與 $P_4$ 共點後且 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 轉變為軌跡直線時,垂心軌跡會往軌跡圓內移動,使垂心軌跡形成一條直線。

Case2:  $P_1$  點在H下方

在 $P_2$ 運動時, $\angle P_2 P_1 P_3$ 的角度會不斷改變,當 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 接近三點共線時,垂心會逐漸遠離 $\Delta P_1 P_2 P_3$ ,在共線之後,垂心會從另一側靠近 $\Delta P_1 P_2 P_3$ ,形成二段無限延長的射線,會形成射線的原因是因為 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的頂角方向與情況一相反,因此在 $P_3$ 與 $P_4$ 共點後且 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 轉變為軌跡直線時,垂心軌跡會往軌跡圓外移動。

$\Delta P_1 P_2 P_4$ :

$\because \overline{AP_2} = \overline{AP_4}$ 時  $\therefore \Delta AP_2 P_4$  為等腰三角形

$\because P_1$  在 $\Delta AP_2 P_4$ 的底邊中垂線上  $\therefore \Delta P_1 P_2 P_4$  也為等腰三角形,使得軌跡保持一條線段

$\because$  當 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_4$ 接近共線時,頂角會逐漸變小  $\therefore$  垂心會在 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 的內部形成線段。

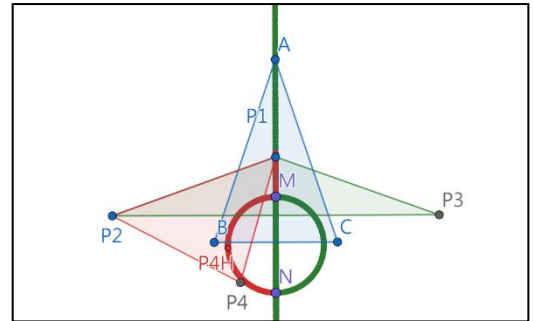
但是當 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_4$ 共線以及 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_4$ 共點時,不會形成垂心,所以軌跡不會經過兩點。

Lemma 2-3.7: 當 $\Delta P_1P_2P_3$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 與 $\Delta P_1P_2P_4$ 在 $\theta = \angle BAC$ 時垂心軌跡形成至少扣除 $P_1$ 點的直線

證明：

由於 $P_1$ 點與H點的位置關係會影響直線形成的圖形，因此我們將情況分成兩種，分別是 $P_1$ 點位於H點的上方及 $P_1$ 點位於H點的下方

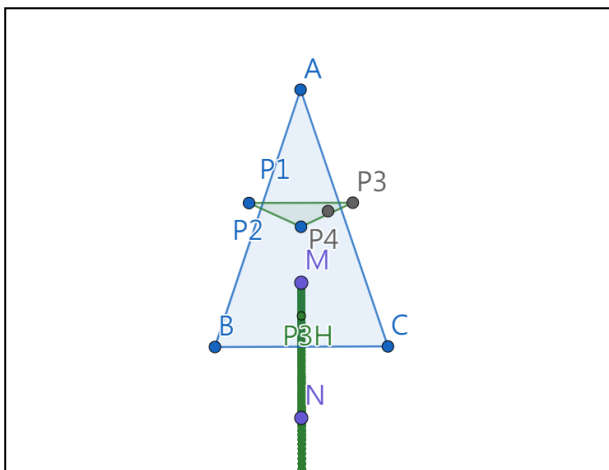
為了接下來的證明，我們將軌跡圓與軌跡直線的交界處分別令為M點與N點，也就是當 $P_2$ 位於 $\overline{AB}$ 上時與 $P_2$ 位於 $\overline{AB}$ 的延長線上時所產生的兩個點，並且在此情況下 $P_3$ 與 $P_4$ 共點並分別位於 $\overline{AC}$ 上及 $\overline{AC}$ 的延長線上，其中M點在N點的上方（圖四十九）。



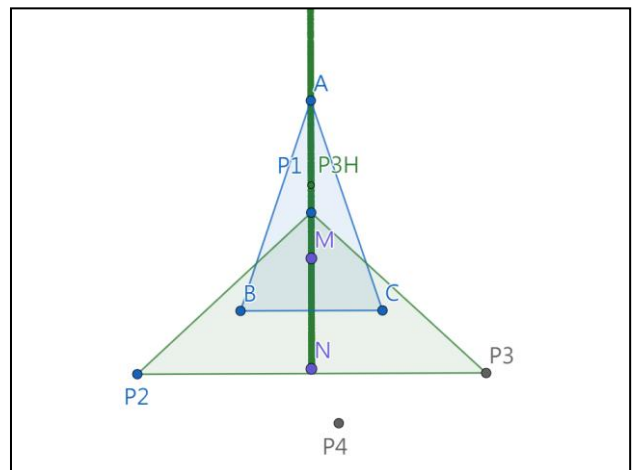
圖（四十九）

### Case1: $P_1$ 點位於H點的上方

由Lemma 2-3.1可知 $\Delta P_1P_2P_3$ 此時會形成一條直線，所以不需考慮 $\Delta P_1P_2P_4$ 形成的線段，且一定會有 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 三點共線的狀況，當 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 三點共線時，若 $P_2$ 往 $P_1$ 上方移動會使 $\Delta P_1P_2P_3$ 的垂心從負無窮往上方移動至M點，此時會形成一條射線（圖五十）。反之若 $P_2$ 往 $P_1$ 下方移動會使 $\Delta P_1P_2P_3$ 的垂心從正無窮往下方移動至N點，此時會形成一條與前者方向相反的射線（圖五十一）。將兩者疊合後可得一條扣除 $P_1$ 點的直線，其中重疊的部分為軌跡圓的直徑。



圖（五十）

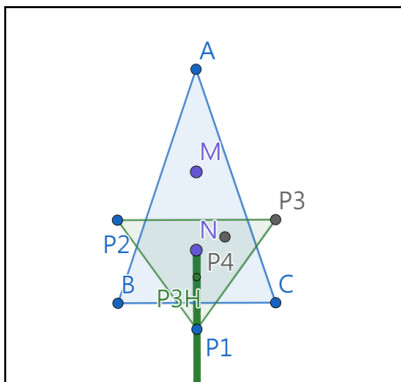


圖（五十一）

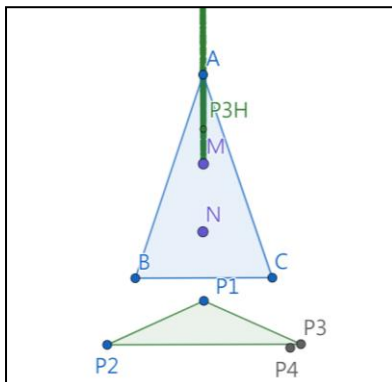


Case2：P<sub>1</sub>點位於H點的下方

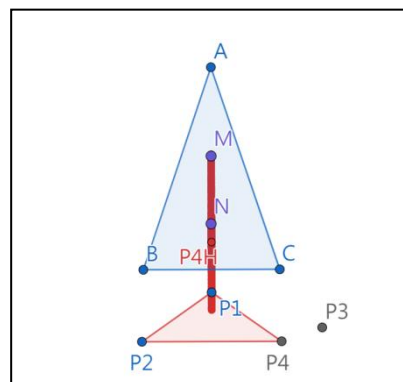
由Lemma 2-3.1可知 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 此時會形成兩條射線，且一定會有P<sub>1</sub>、P<sub>2</sub>、P<sub>3</sub>三點共線的狀況，但與Case1不同的地方是，若P<sub>2</sub>往P<sub>1</sub>上方移動會使 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的垂心從負無窮往上方移動至N點，此時會形成一條射線（圖五十二）。而P<sub>2</sub>往P<sub>1</sub>下方移動會使 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的垂心從正無窮往下方移動至M點，此時會形成一條與前者相反的射線（圖五十三）。而 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 則會形成過M、N點的線段（圖五十四），將三者疊合後則會形成至少扣除一點的直線。



圖（五十二）



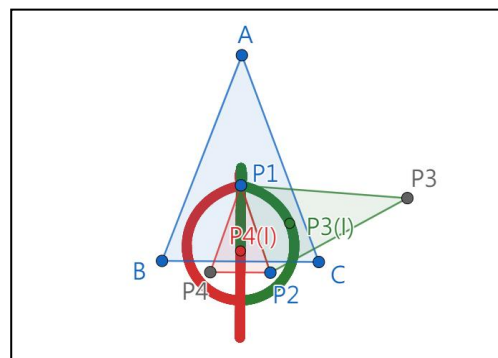
圖（五十三）



圖（五十四）

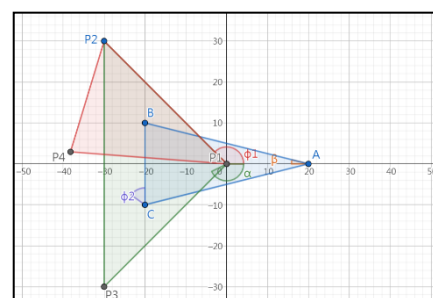
**研究 2-4** 給定 $\Delta ABC$ 及P<sub>1</sub>點，所形成之互等邊三角形內心軌跡為扣除兩點的分段結合極座標方程式。

我們觀察到 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 的內心軌跡會形成扣除一點的線段及扣除一點的軌跡圖形（非圓，綠色軌跡）， $\Delta P_1 P_2 P_4$ 的內心軌跡會形成扣除一點的線段及扣除一點與 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 對稱的軌跡圖形（非圓，紅色軌跡），且兩個互等邊三角形所形成的軌跡圖形疊合後會形成一看起來很像心臟線且扣除一點的軌跡圖形及扣除一點的線段，其中扣除點皆為P<sub>1</sub>點（圖五十五）



圖（五十五）

**非線段的軌跡圖形：** $\Delta P_1 P_2 P_3$ 與 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 的內心軌跡皆會形成非圓圖形，且兩者方向相反，軌跡圖形看起來像心臟線，因此我們想要透過極座標的方程式表示出互等邊三角形內心。為了表示內心在極座標上的位置，就需要定義原點及內心到原點的距離與角度，所以我們將P<sub>1</sub>點定為原點， $\overline{BC}$ 的中垂線為X軸，並將 $\angle AP_1 P_2$ 定義為 $\phi_1$ （圖五十六）。



圖（五十六）

令  $\alpha = \angle AP_1B$ 、 $\beta = \angle BAP_1 = \angle CAP_1$ 、 $\psi = \angle P_2P_1P_4$ 、互等邊三角形的內心為I點（以下研究皆為此定義），可得  $\angle AP_1I = \phi_1 + \frac{\psi}{2}$ ，所以內心的極座標就是  $[\overline{P_1I}, \phi_1 + \frac{\psi}{2}]$ 。

我們之前在Lemma 2-1.4中已經證明過當 $\Delta P_1P_2P_3$ 在 $\theta = \angle BAC$ 與 $\Delta P_1P_2P_4$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 時，根據 $P_2$ 點可以判斷 $\angle P_2P_1P_3$ 與 $\angle P_2P_1P_4$ 的值不會改變或變為互補，而之後的證明會用到兩角的值，於是我們透過觀察的方式發現 $\angle P_2P_1P_3 = 180^\circ - \angle AP_1B + \angle BAP_1$ 或 $\angle P_2P_1P_3 = \angle AP_1B - \angle BAP_1$ （ $\Delta P_1P_2P_4$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 時也是），並且因為其值在任何時候都是相等或互補的關係，因此我們將 $P_2$ 點定在當 $\overline{P_1P_2}$ 為圓B的直徑時所在位置，由Lemma 2-3.1可以知到此時 $\overline{P_1P_4} // \overline{AC}$ ，並且 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ ，因此我們想要透過此特殊情況證明 $\angle P_2P_1P_4 = 180^\circ - \angle AP_1B + \angle BAP_1$ 或 $\angle P_2P_1P_4 = \angle AP_1B - \angle BAP_1$ 。

Lemma 2-4.1：若 $\overline{P_1P_2}$ 為圓B的直徑，此時 $\angle P_2P_1P_4 = 180^\circ - \angle AP_1B + \angle BAP_1$

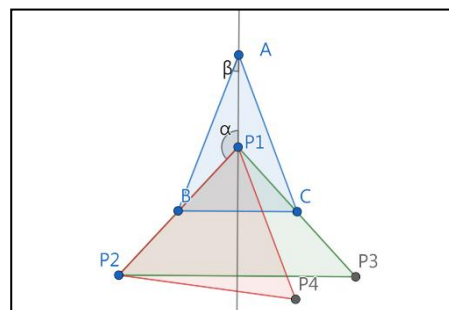
證明：

令D點為 $\overline{BC}$ 中點

$\because \angle BP_1C = 360^\circ - 2\alpha$ 、 $\angle DP_1P_4 = \angle CAP_1 = \beta$ （同位角相等）

$\Rightarrow \angle CP_1P_4 = 180^\circ - \alpha - \beta$

$\because \angle P_2P_1P_4 = \angle BP_1C - \angle CP_1P_4 = (360^\circ - 2\alpha) - (180^\circ - \alpha - \beta)$   
 $= 180^\circ - \alpha + \beta$ （圖五十七）



圖（五十七）

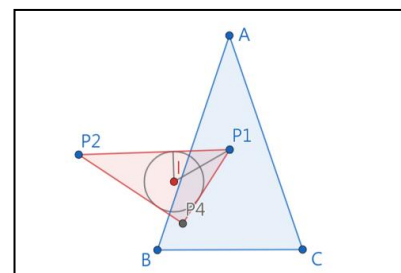
Lemma 2-4.2： $\overline{P_1I} = \frac{l_1 \cdot l_2}{s} \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)$ ，其中 $l_1 = \overline{P_1P_2}$ 、 $l_2 = \overline{P_1P_4}$ 、 $s$ 為 $\Delta P_1P_2P_4$ 的半周長

證明：

透過面積公式可知 $|\Delta P_1P_2P_4| = rs = s \cdot \overline{P_1I} \cdot \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin \psi$

$\Rightarrow \overline{P_1I} = \frac{\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin \psi}{s \cdot \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} = \frac{l_1 \cdot l_2}{s} \cdot \frac{\sin \psi}{2 \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} = \frac{l_1 \cdot l_2}{s} \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)$ （圖五十八）

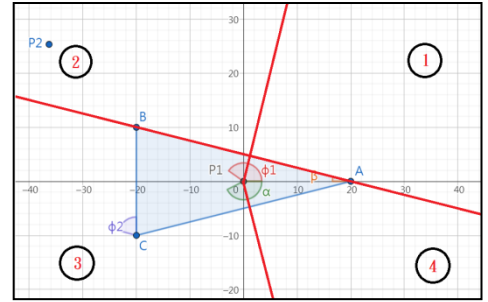
（其中 $r$ 為 $\Delta P_1P_2P_4$ 的內切圓半徑）



圖（五十八）

透過Lemma 2-4.1可知 $\angle P_2P_1P_4 = 180^\circ - \alpha + \beta$  or  $\alpha - \beta$ ，接著可以透過算出 $\overline{P_1P_2}$ 、 $\overline{P_1P_4}$ 的值求出 $\overline{P_1I}$ ，令 $l_1 = \overline{P_1P_2}$ 、 $l_2 = \overline{P_1P_4}$ （以下研究皆為此定義），因此我們只要得出 $\overline{P_1P_2}$ 、 $\overline{P_1P_4}$ 與 $\overline{P_2P_4}$ 的值之後就可以表示 $\overline{P_1I}$ 的長度。

透過觀察我們將軌跡圖形分割成四個部分，而1、4部分與2、3部分之間的交界位於 $\overline{AB}$ ，1、2部分之間的交界位於 $\overline{P_1P_2} \perp \overline{AB}$ 時的 $\overline{P_1P_2}$ ，3、4部分之間的交界位於 $\overline{P_1P_3} \perp \overline{AC}$ 時的 $\overline{P_1P_3}$ （交界為圖五十九中的紅線部份），由



圖（五十九）

$P_2$ 點位於哪個部分而改變 $\overline{P_1I}$ 的長度。令 $P_1$ 在 $\Delta ABC$ 內部，1、4及2、3部分交界改變方程式的原因是因為此時在圓軌跡上的互等邊三角形產生改變，而1、2及3、4部分交界改變方程式的原因是因為此時會使 $\psi$ 的大小產生改變（1到2部分是由互補變為相等；3到4部分是由相等變為互補），接著算出 $P_2$ 點在交界點時 $\psi$ 的大小後，可以得出第一部分的範圍為 $\frac{\alpha - \beta}{2} < \phi_1 < 90^\circ - \beta$ ，第二部分的範圍為 $90^\circ - \beta < \phi_1 < \frac{180^\circ + \alpha - \beta}{2}$ ，第三部分的範圍為 $\frac{180^\circ + \alpha - \beta}{2} < \phi_1 < 360^\circ$ ，第四部分的範圍為 $0^\circ < \phi_1 < \frac{\alpha - \beta}{2}$ 。若 $P_1$ 在 $\overline{BC}$ 下方及A點上方時則會使範圍產生改變，並且三種情況的範圍互不相同，為省略篇幅以下只討論 $P_1$ 在 $\Delta ABC$ 內部。

Lemma 2-4.2：求出 $\overline{P_1I}$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 時之值，且 $P_1$ 位於 $\Delta ABC$ 內部

證明：

從前述的推導可知 $\overline{P_1I} = \frac{l_1 \cdot l_2}{s} \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)$ ，令 $\overline{BC}$ 中點為D點、圓B的半徑為 $r$ 、 $\gamma = \angle DP_1P_4$ 、

$$\phi_2 = \angle P_4CB。$$

$$l_2 = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos \angle P_1CP_4} \Rightarrow \angle P_1CP_4 = \angle P_1CB + \phi_2$$

$$\because \angle P_1CB = 180^\circ - (90^\circ + \gamma) - (180^\circ - \alpha - \gamma) = \alpha - 90^\circ \Rightarrow \angle P_1CP_4 = \phi_2 + \alpha - 90^\circ$$

$$\therefore l_2 = \sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos(\phi_2 + \alpha - 90^\circ)} = r\sqrt{2[1 - \cos(\phi_2 + \alpha - 90^\circ)]}$$

$$\Rightarrow \overline{P_2P_4} = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \psi} =$$

$$\sqrt{l_1^2 + r\sqrt{2[1 - \cos(\phi_2 + \alpha - 90^\circ)]}^2 + 2rl_1 \cdot \cos(180^\circ - \alpha + \beta) \cdot r\sqrt{2[1 - \cos(\phi_2 + \alpha - 90^\circ)]}}$$

$$\text{or } \sqrt{l_1^2 + r\sqrt{2[1 - \cos(\phi_2 + \alpha - 90^\circ)]^2} + 2rl_1 \cdot \cos(\alpha - \beta) \cdot r\sqrt{2[1 - \cos(\phi_2 + \alpha - 90^\circ)]}}$$

$$\therefore \overline{P_1I} = \frac{2rl_1\sqrt{2[1 - \cos(\phi_2 + \alpha - 90^\circ)]} \cdot \cos\left(\frac{180^\circ - \alpha + \beta}{2}\right)}{l_1 + r\sqrt{2[1 - \cos(\phi_2 + \alpha - 90^\circ)]} + \sqrt{l_1^2 + r\sqrt{2[1 - \cos(\phi_2 + \alpha - 90^\circ)]^2} + 2rl_1 \cdot \cos(180^\circ - \alpha + \beta) \cdot r\sqrt{2[1 - \cos(\phi_2 + \alpha - 90^\circ)]}} \text{ or}$$

$$\frac{2rl_1\sqrt{2[1 - \cos(\phi_2 + \alpha - 90^\circ)]} \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{l_1 + r\sqrt{2[1 - \cos(\phi_2 + \alpha - 90^\circ)]} + \sqrt{l_1^2 + r\sqrt{2[1 - \cos(\phi_2 + \alpha - 90^\circ)]^2} + 2rl_1 \cdot \cos(\alpha - \beta) \cdot r\sqrt{2[1 - \cos(\phi_2 + \alpha - 90^\circ)]}}$$

Lemma 2-4.3：求出 $\overline{P_1I}$ 在 $\theta = \angle BAC$ 時之值，且 $P_1$ 位於 $\triangle ABC$ 內部

證明：

在有了 $\overline{P_1I}$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 時的值之後，接下來要找出 $\theta = \angle BAC$ 時 $\overline{P_1I}$ 的值，因為此時

$\triangle P_1P_2P_3$ 的內心在軌跡上， $\overline{P_1P_3}$ ，因此將 $\overline{P_1I}$ 代換為 $\frac{2 \cdot l_1 \cdot \overline{P_1P_3}}{l_1 + \overline{P_1P_3} + \overline{P_2P_3}} \cdot \cos\left(\frac{\angle P_2P_1P_3}{2}\right)$

$$\overline{P_1P_3} = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos(\angle P_1CP_3)} \Rightarrow \angle P_1CP_3 = 360^\circ - (\angle P_1CB + \phi_2 + \angle P_4CP_3)$$

$$\therefore \angle P_1CB = 90^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha - 90^\circ \cdot \angle P_4CP_3 = 360^\circ - 2\angle ACP_3$$

$$\text{又} \therefore \angle ACP_3 = 360^\circ - (90^\circ - \beta) - \phi_2 - (360^\circ - 2\angle ACP_3) \Rightarrow \angle ACP_3 = 90^\circ + \phi_2 - \beta$$

$$\therefore \angle P_1CP_3 = 270^\circ + \phi_2 - \alpha - 2\beta = 90^\circ - \phi_2 + \alpha + 2\beta$$

$$\therefore \overline{P_1P_3} = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos(90^\circ - \phi_2 + \alpha + 2\beta)}$$

$$\therefore \angle P_2P_1P_3 = \angle P_2P_1P_4 \text{ or } 180^\circ - \angle P_2P_1P_4$$

$$\therefore \overline{P_2P_3} = \sqrt{l_1^2 + \overline{P_1P_3}^2 + 2 \cdot l_1 \cdot \overline{P_1P_3} \cdot \cos \angle P_2P_1P_3 =}$$

$$\sqrt{l_1^2 + r\sqrt{2[1 - \cos(90^\circ - \phi_2 + \alpha + 2\beta)]^2} + 2rl_1 \cdot \cos(180^\circ - \alpha + \beta) \cdot r\sqrt{2[1 - \cos(90^\circ - \phi_2 + \alpha + 2\beta)]}}$$

$$\text{or } \sqrt{l_1^2 + r\sqrt{2[1 - \cos(90^\circ - \phi_2 + \alpha + 2\beta)]^2} + 2rl_1 \cdot \cos(\alpha - \beta) \cdot r\sqrt{2[1 - \cos(90^\circ - \phi_2 + \alpha + 2\beta)]}}$$

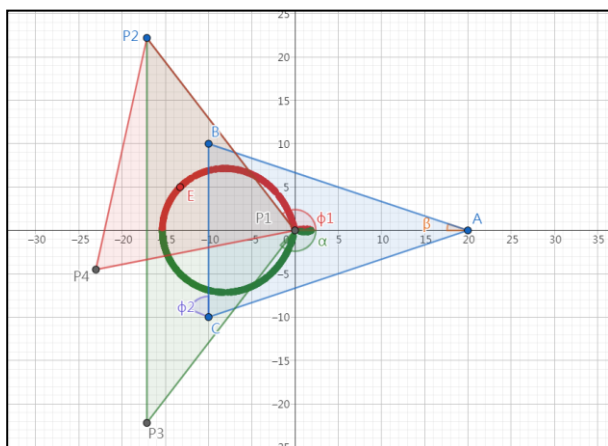
$$\therefore \overline{P_1I} =$$

$$\frac{2rl_1\sqrt{2[1 - \cos(90^\circ - \phi_2 + \alpha + 2\beta)]} \cdot \cos\left(\frac{180^\circ - \alpha + \beta}{2}\right)}{l_1 + r\sqrt{2[1 - \cos(90^\circ - \phi_2 + \alpha + 2\beta)]} + \sqrt{l_1^2 + r\sqrt{2[1 - \cos(90^\circ - \phi_2 + \alpha + 2\beta)]^2} + 2rl_1 \cdot \cos(180^\circ - \alpha + \beta) \cdot r\sqrt{2[1 - \cos(90^\circ - \phi_2 + \alpha + 2\beta)]}} \text{ or}$$

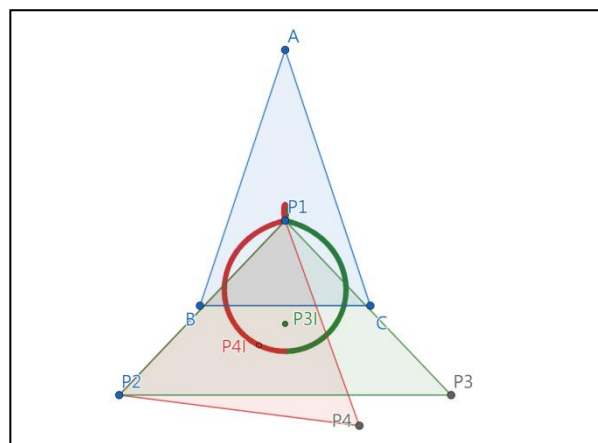
$$\frac{2rl_1\sqrt{2[1 - \cos(90^\circ - \phi_2 + \alpha + 2\beta)]} \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{l_1 + r\sqrt{2[1 - \cos(90^\circ - \phi_2 + \alpha + 2\beta)]} + \sqrt{l_1^2 + r\sqrt{2[1 - \cos(90^\circ - \phi_2 + \alpha + 2\beta)]^2} + 2rl_1 \cdot \cos(\alpha - \beta) \cdot r\sqrt{2[1 - \cos(90^\circ - \phi_2 + \alpha + 2\beta)]}}$$

綜合以上研究，我們成功透過分段極座標方程式的方式表示出了互等邊三角形的軌跡。

下方兩張圖分別為透過極座標方程式所繪製的軌跡（圖六十）以及互等邊三角形的內心軌跡（圖六十一）。



圖（六十）



圖（六十一）

## 肆、 研究結果

### 研究 1：

平面上給定一 $\triangle ABC$ 及一點 $P_1$ ，分別以 $B$ 、 $C$ 點為圓心，再以 $\overline{BP_1}$ 、 $\overline{CP_1}$ 為半徑作圓 $B$ 以及圓 $C$ ，接著再圓 $B$ 上取一點 $P_2$ ，以 $\overline{AP_2}$ 為半徑作一圓 $A$ ，交圓 $C$ 於 $P_3$ 、 $P_4$ 兩點且 $\overline{BP_3} \geq \overline{BP_4}$ 。

一、若 $\overline{AC} - \overline{CP_1} \leq \overline{AP_2} \leq \overline{AC} + \overline{CP_1}$ ，則必定存在 $P_3$ 、 $P_4$ 點，等號成立時，圓 $A$ 及圓 $C$ 相切，且 $P_3$ 、 $P_4$ 共點且 $P_3$ 在 $\overline{AC}$ 延長線上。

二、 $P_3$ 、 $P_4$ 點的對稱中心為 $\overrightarrow{AC}$ 。

三、若 $\overline{AC} - \overline{CP_1} = \overline{AP_2}$ ，此時 $\overline{AP_2}$ 為最小值， $\overline{AC} + \overline{CP_1} = \overline{AP_2}$ ，此時 $\overline{AP_2}$ 為最大值。

### 研究 2：

若 $\triangle ABC$ 為一等腰三角形， $A$ 為頂角且 $P_1$ 在 $\triangle ABC$ 的中垂線上且 $P_1$ 不在 $A'$ 上，則有下列結論：

一、 $\triangle P_1P_2P_3$ 及 $\triangle P_1P_2P_4$ 所形成之外心軌跡形成扣除兩點的圓及扣除兩點的直線。

二、 $\triangle P_1P_2P_3$ 及 $\triangle P_1P_2P_4$ 所形成之重心軌跡形成扣除兩點的圓及扣除一點的線段。

三、若 $P_1$ 不在 $H$ 點上，則 $\triangle P_1P_2P_3$ 及 $\triangle P_1P_2P_4$ 所形成之垂心軌跡形成扣除兩點的圓及至少扣除一點的線段。

四、 $\Delta P_1P_2P_3$ 及 $\Delta P_1P_2P_4$ 所形成之內心部分軌跡為扣除一點的分段極座標方程式結合（分段的心臟線，線段軌跡部分來不及完成）。

## 伍、 未來展望

我們在研究時有部分證明未完成，希望未來可以將這些未完成的研究加以證明。

一、研究 2-3 中尋找 $\Delta P_1P_2P_4$ 線段軌跡的兩個端點位置並加以證明（來不及完成）。

二、歸納出互等邊三角形的內心線段軌跡（來不及完成）。

三、三角形共有八個心，本研究只做了內、外、重、垂心之研究，還剩下旁、切、界、類重心，希望以後剩餘的心都完成。

四、將等腰三角形的條件限制推廣到任意三角形。

## 陸、 參考文獻

一、中華民國第 61 屆中小學科學展覽會作品說明書：頂心三角形誕生的奇蹟

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/61/pdf/NPHSF2021-050404.pdf?0.6386348350743392>

二、中華民國第 59 屆中小學科學展覽會作品說明書：換心手術—從三角形出發探討 N 邊形多心性質之研究

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/59/pdf/NPHSF2019-030402.pdf>

## 【評語】 050408

給定三角形  $ABC$ ，考慮一個互等邊三角形的四心的軌跡問題。作者證明了若  $ABC$  是等腰三角形且點  $P$  滿足一些條件，則互等邊三角形四心軌跡的形狀都非常明確，推導是複雜不容易的。然而，此互等邊三角形的定義不太自然，這一點比較可惜。

## 作品海報



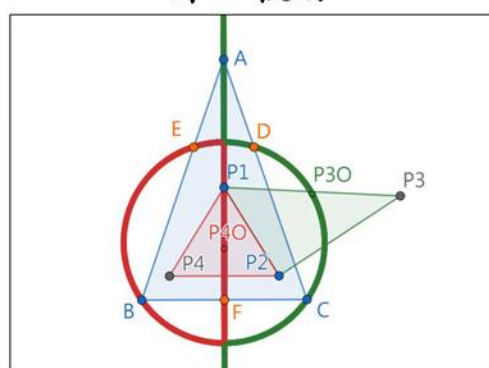
# 壹、研究動機

我們在看完第六十一屆科展的作品後，其中的一份作品引起了我們的興趣，作品中研究了頂心三角形與原三角形的交互關係。我們參考了這份作品，並放寬條件，想要研究一個無人研究過的三角形。

# 貳、研究目的

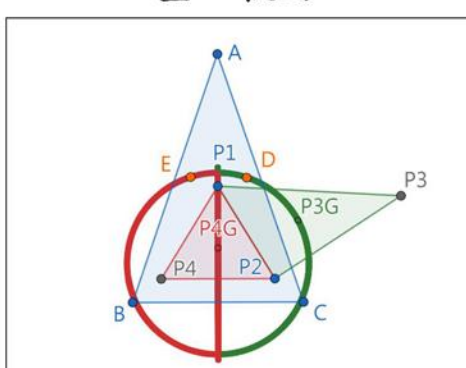
- 一、探討 $\Delta ABC$ 中給定 $P_1$ 形成互等邊 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 之條件及性質。
- 二、探討等腰 $\Delta ABC$ 中給定 $P_1$ 於 $\overline{BC}$ 中垂線上時互等邊三角形之外、重、垂、內心所形成的軌跡圖形及性質。

外心軌跡



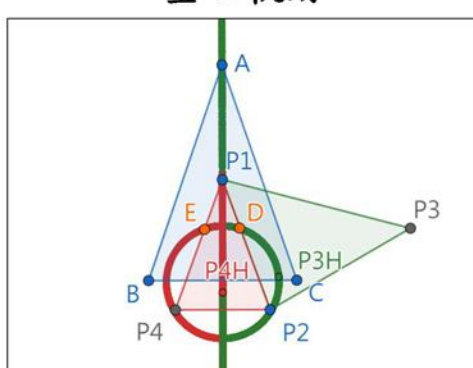
圖(一)

重心軌跡



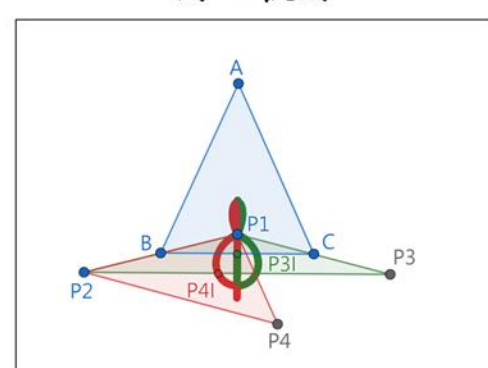
圖(二)

垂心軌跡



圖(三)

內心軌跡

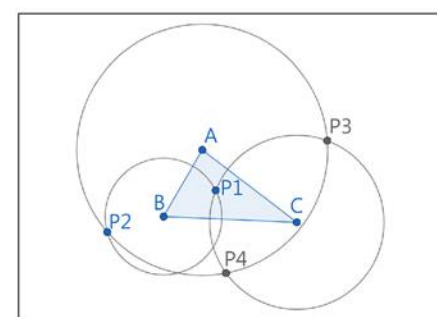


圖(四)

# 參、研究過程及方法

## 名詞定義：

互等邊三角形：平面上給定 $\Delta ABC$ 及一點 $P_1$ ，且 $P_1$ 不在A、B、C三點上，分別以B、C點為圓心，以 $\overline{BP_1}$ 、 $\overline{CP_1}$ 為半徑作圓B及圓C，接著在圓B上取一點 $P_2$ ，以 $\overline{AP_2}$ 為半徑作一圓A，交圓C於 $P_3$ 、 $P_4$ 兩點且 $\overline{BP_3} \geq \overline{BP_4}$ ，所形成之 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 及 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 即是互等邊三角形（圖五）。

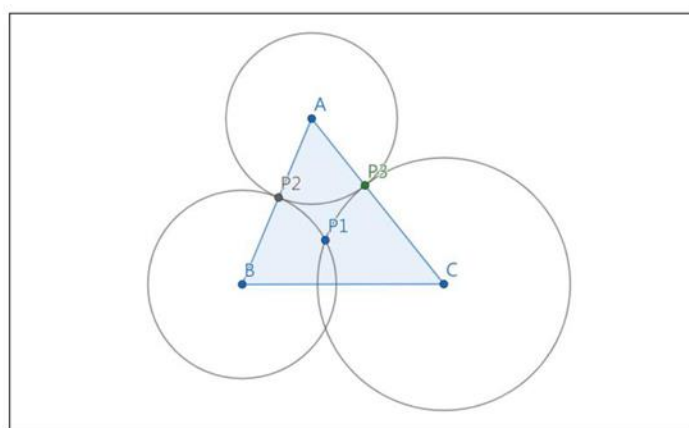


圖(五)

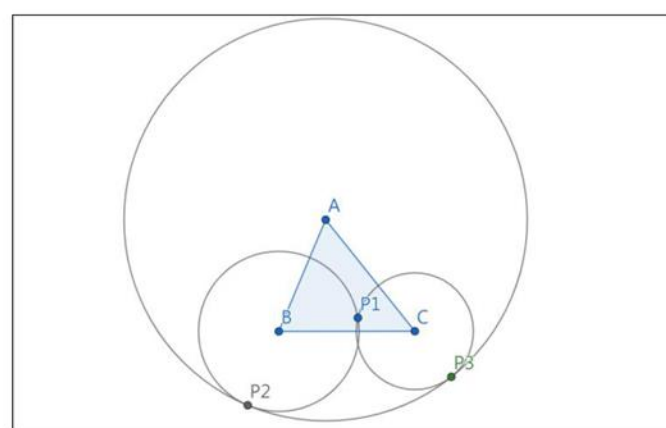
## 預備定理：

歐拉線：任意三角形中的外、重、垂心三點共線，令外心為O點、重心為G點、垂心為H點，則有 $\overline{HG} = 2\overline{OG}$ ，且G點位於O點及H點之間。

**研究 1** 平面上給定 $\Delta ABC$ 及一點 $P_1$ ，若 $\overline{AC} - \overline{CP_1} \leq \overline{AP_2} \leq \overline{AC} + \overline{CP_1}$ ，則存在 $P_3$ 、 $P_4$ 點形成互等邊 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 、 $\Delta P_1 P_2 P_4$ ，且等號成立時， $\overline{AP_2}$ 分別為最小值及最大值，圓A及圓C相切， $P_3$ 及 $P_4$ 共點， $\Delta P_1 P_2 P_3 = \Delta P_1 P_2 P_4$ 。



圖(六)



圖(七)

**研究 2-1** 給定 $\Delta ABC$ 及 $P_1$ 點， $P_1$ 點取在 $\overline{BC}$ 的中垂線上且 $P_1 \neq A'$ （ $A'$ 點為A點對 $\overline{BC}$ 的對稱點），所形成之互等邊三角形外心軌跡為扣除兩點的圓及扣除兩點的直線。

**Lemma 2-1.1**：互等邊三角形的外（重或垂）心不會落在另一個互等邊三角形的外（重、垂、內）心軌跡上

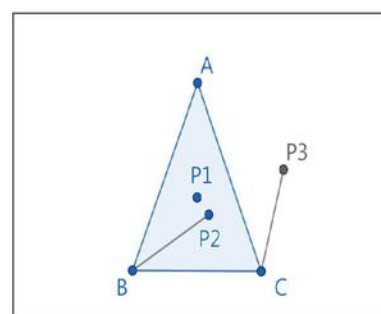
令 $\overline{BP_2}$ 及 $\overline{CP_3}$ 之夾角為 $\theta$ （報告以下均稱 $\overline{BP_2}$ 及 $\overline{CP_3}$ 之夾角為 $\theta$ ）

$$\theta = (180^\circ - \angle P_2 BC) - \angle P_3 CB = 180^\circ - (\angle P_2 BC + \angle P_3 CB)$$

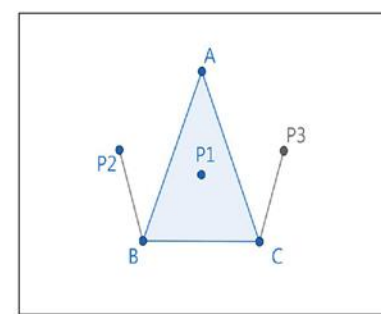
$$\Rightarrow \theta = 180^\circ - [(\angle ABC + \angle ABP_2) + (\angle ACB + \angle ACP_3)]$$

若為圖八時， $\angle P_2 BC = \angle ABC + \angle ABP_2 \Rightarrow \theta = \angle BAC$

若為圖九時， $\angle P_2 BC = \angle ABC - \angle ABP_2 \Rightarrow \theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$

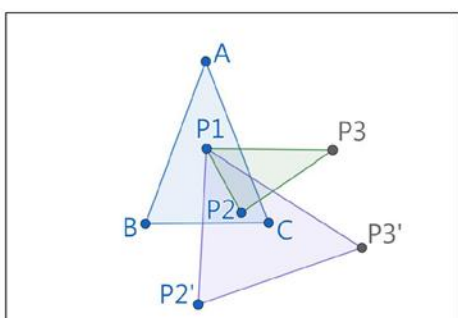


圖(八)

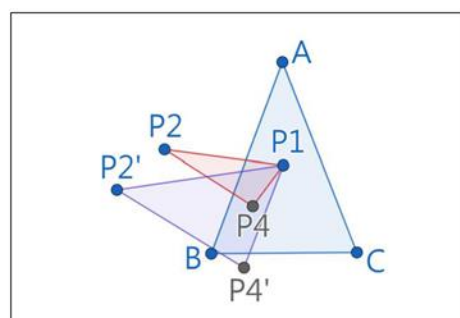


圖(九)

**Lemma 2-1.2**：當 $\Delta P_1 P_2 P_3$ 在 $\theta = \angle BAC$ 與 $\Delta P_1 P_2 P_4$ 在 $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$ 時，在相同 $\theta$ 條件下取一點 $P'_2 \neq P_2$ ，且 $P'_2$ 所產生之頂點為 $P'_3$ 及 $P'_4$ ，則有 $\angle P'_2 P_1 P'_3 = \angle P_2 P_1 P_3$ ； $\angle P'_2 P_1 P'_4 = \angle P_2 P_1 P_4$



圖(十)

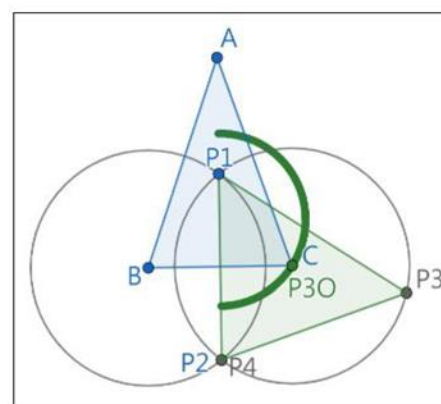


圖(十一)

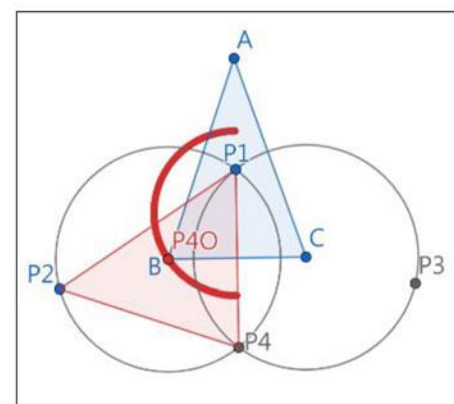
**Lemma 2-1.3**：B、C點必在互等邊三角形外心軌跡上

$\Delta P_1 P_2 P_3$ 的外心位於C點

$\Delta P_1 P_2 P_4$ 的外心位於B點



圖(十二)



圖(十三)

Lemma 2-1.4:  $\angle BOC$  為以  $\overline{BC}$  為弦的圓之圓周角，其中 O 點為在適當角度時互等邊三角形之外心

Case1:  $\angle P_2P_1P_3 = 180^\circ - \angle BOC$

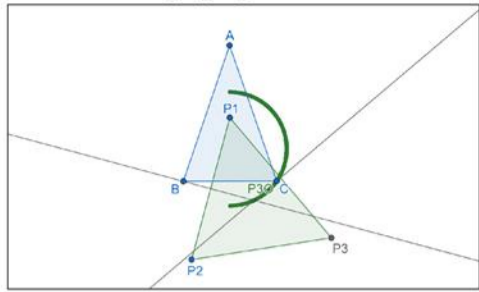


圖 (十四)

Case2:  $\angle P_2P_1P_3 = \angle BOC$

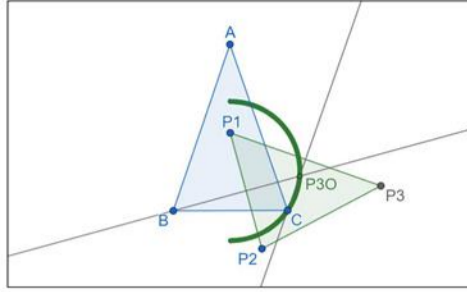


圖 (十五)

Case3:  $\angle P_2P_1P_3 = \angle BOC$

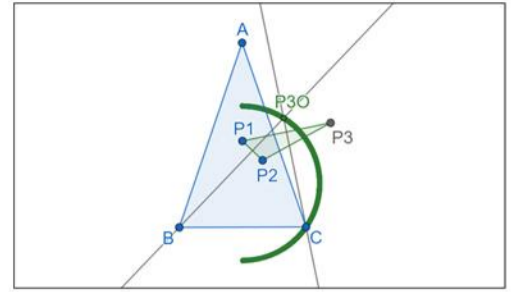


圖 (十六)

Lemma 2-1.5: 當  $\Delta P_1P_2P_3$  在  $\theta = \angle BAC$  與  $\Delta P_1P_2P_4$  在  $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$  時外心軌跡形成扣除 D、E 兩點的圓

設一點 Q 在軌跡圓上且不在軌跡圓與  $\overline{BC}$  的交點上，Q 點非任意互等邊三角形的外心，分別以  $\overline{BQ}$  和  $\overline{CQ}$  作  $P_1$  的對稱點，對稱點分別在圓 B 和圓 C 上，所以必有  $P_2$  和  $P_4$  去對應兩個對稱點，此時  $\Delta P_1P_2P_4$ ，其外心位於 Q 點，矛盾。

Lemma 2-1.7:  $\Delta P_1P_2P_3$  在  $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$  與  $\Delta P_1P_2P_4$  在  $\theta = \angle BAC$  時，其外心軌跡整合後為直線的部分圖形

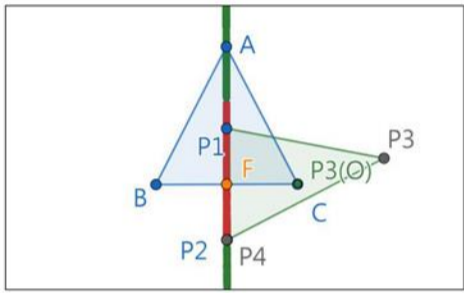


圖 (十九)

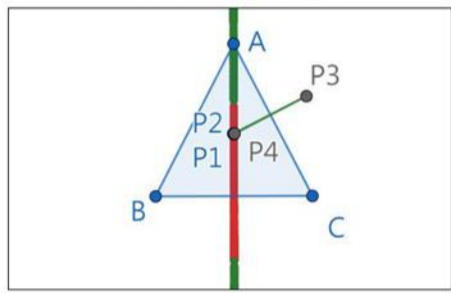


圖 (二十)

Lemma 2-1.6: D、E 兩點不在軌跡圓上 (無法形成三角形)

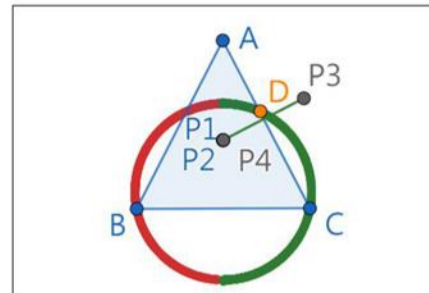


圖 (十七)

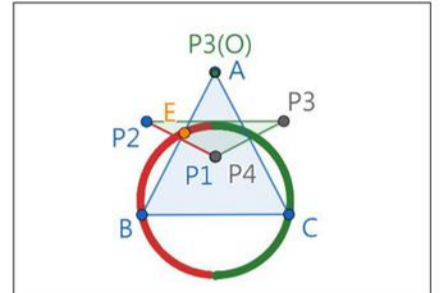


圖 (十八)

Lemma 2-1.8: 當  $\Delta P_1P_2P_3$  在  $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$  與  $\Delta P_1P_2P_4$  在  $\theta = \angle BAC$  時外心軌跡形成扣除 F、 $P_1$  兩點的直線

設存在一 Q 點在  $\overline{BC}$  的中垂線上，使得軌跡未經過 Q 點，Q 點在  $\Delta P_1P_2P_3$  所形成的射線上，以  $\overline{BQ}$  為對稱軸作  $P_1$  的對稱點  $P'_1$ ，且  $P'_1$  恰在 B 圓上，所以有一  $P_2$  點對應  $P'_1$ ，接著以  $\overline{BC}$  的中垂線為對稱軸作  $P_2$  的對稱點  $P'_2$ ，且  $P'_2$  恰在 C 圓上，所以有一  $P_3$  點對應  $P'_2$ ，推得 Q 點會對應  $\Delta P_1P_2P_3$  形成的外心，矛盾。

研究 2-2 給定  $\Delta ABC$  及  $P_1$  點，且  $P_1$  點取在  $\overline{BC}$  的中垂線上且  $P_1 \neq A'$ ，則  $\Delta P_1P_2P_3$  及  $\Delta P_1P_2P_4$  互等邊三角形所形成之重心軌跡合併後會形成一扣除兩點的圓及扣除一點的線段。

Lemma 2-2.1:  $\Delta P_1P_2P_3$  在  $\theta = \angle BAC$  與  $\Delta P_1P_2P_4$  在  $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$  時，重心軌跡整合後為圓部分圖形， $3\overline{GG'} = \overline{BP_2} + \overline{CP_3}$

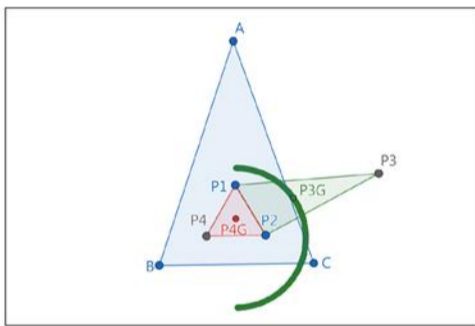


圖 (二十一)

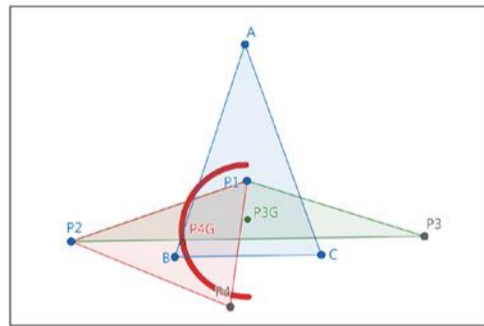


圖 (二十二)

Lemma 2-2.2: 當  $\Delta P_1P_2P_3$  在  $\theta = \angle BAC$  與  $\Delta P_1P_2P_4$  在  $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$  時重心軌跡形成扣除 D、E 兩點的圓

令  $\Delta P_1P_2P_3$  重心為 Q 且不過軌跡圓  
 $\overline{P_2Q} + \overline{P_3Q} = \overline{QP_1} \dots \textcircled{1}$      $\overline{GB} + \overline{GC} = \overline{P_1G} \dots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$  得  $\overline{P_2Q} + \overline{P_3Q} + \overline{GB} + \overline{GC} + 2\overline{QG} = 3\overline{QG}$   
 $\Rightarrow \overline{P_2B} + \overline{P_3C} = 3\overline{QG} \Rightarrow 3\overline{GQ} = \overline{BP_2} + \overline{CP_3}$   
 由 Lemma 2-2.1 可知  $\overline{BP_2} + \overline{CP_3} = 3\overline{GG'} \Rightarrow \overline{GQ} = \overline{GG'}$

Lemma 2-2.3:  $\Delta P_1P_2P_3$  在  $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$  與  $\Delta P_1P_2P_4$  在  $\theta = \angle BAC$  時，重心軌跡整合為線段部分圖形

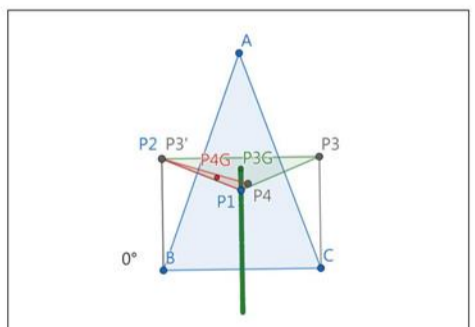


圖 (二十三)

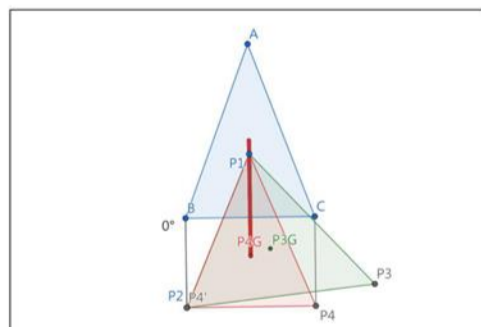


圖 (二十四)

Lemma 2-2.4: 當  $\Delta P_1P_2P_3$  在  $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$  與  $\Delta P_1P_2P_4$  在  $\theta = \angle BAC$  時重心軌跡形成扣除  $P_1$  點的線段

令  $\Delta P_1P_2P_3$  之重心為 Q 且不通過線段軌跡  
 $\overline{P_2Q} + \overline{P_3Q} = \overline{QP_1} \dots \textcircled{1}$      $\overline{GB} + \overline{GC} = \overline{P_1G} \dots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$  得  $\overline{P_2B} + \overline{P_3C} = 3\overline{QG} \Rightarrow 3\overline{GQ} = \overline{BP_2} + \overline{CP_3}$   
 由 Lemma 2-2.1 可知  $\overline{BP_2} + \overline{CP_3} = 3\overline{GG'} \Rightarrow \overline{GQ} = \overline{GG'}$

研究 2-3 給定  $\Delta ABC$  及  $P_1$  點，且  $P_1$  點取在  $\overline{BC}$  的中垂線上且  $P_1 \neq A'$ 、 $P_1 \neq H$ ，則  $\Delta P_1P_2P_3$  及  $\Delta P_1P_2P_4$  互等邊三角形所形成之垂心軌跡合併後會形成一扣除兩點的圓及至少扣除一點的直線。

Lemma 2-3.1: 若  $P_1$  點在 H 上方時， $\angle P_2P_1P_4$  為銳角 ( $\angle P_2P_1P_3$  亦同)；若  $P_1$  點在 H 下方時， $\angle P_2P_1P_4$  為鈍角 ( $\angle P_2P_1P_3$  亦同)

Case1:  $P_1$  點在 H 上方

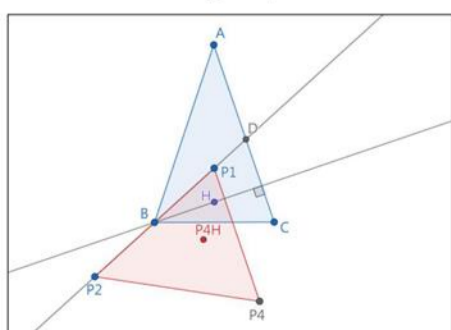


圖 (二十五)

Case2:  $P_1$  點在 H 下方

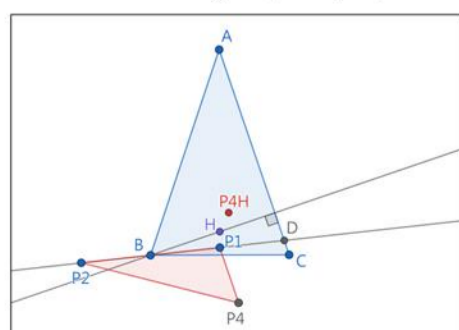


圖 (二十六)

Lemma 2-3.2: 互等邊三角形的外心與外心軌跡圓圓心連線平行互等邊三角形的重心與重心軌跡圓圓心連線

$$\begin{aligned} \angle GG^*G' &= \angle P_2BP'_2 \\ \angle P_2BP'_2 &= 2\angle P_2P_1P'_2 \\ 2\angle P_2P_1P'_2 &= 2\angle OBO' \\ 2\angle OBO' &= \angle OO^*O' \\ \therefore \angle GG^*G' &= \angle OO^*O' \end{aligned}$$

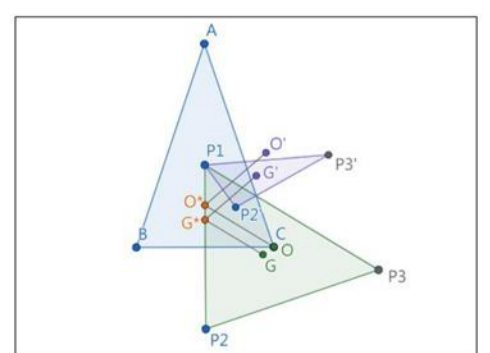


圖 (二十七)

Lemma 2-3.3:  $\Delta P_1P_2P_3$  在  $\theta = \angle BAC$  與  $\Delta P_1P_2P_4$  在  $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$  時，垂心軌跡整合後為圓的部分圖形

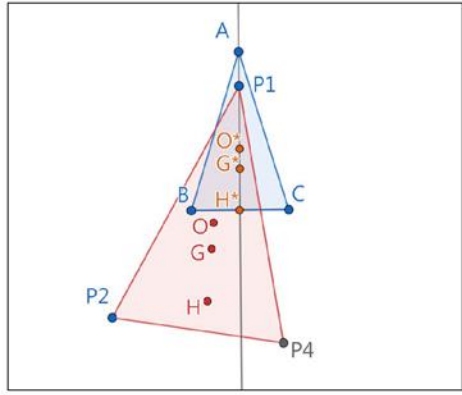


圖 (二十八)

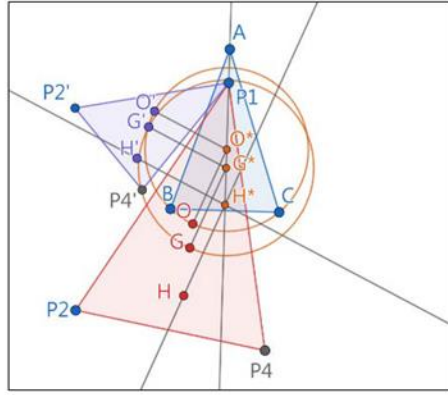


圖 (二十九)

Lemma 2-3.4:  $\Delta P_1P_2P_3$  在  $\theta = \angle BAC$  與  $\Delta P_1P_2P_4$  在  $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$  時，垂心軌跡形成扣除 D、E 兩點的圓

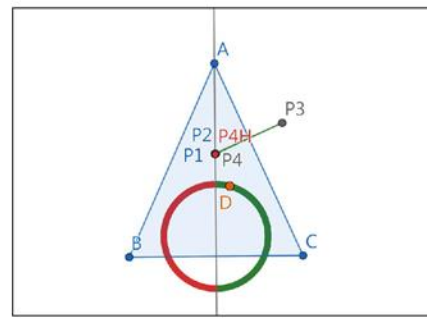


圖 (三十)

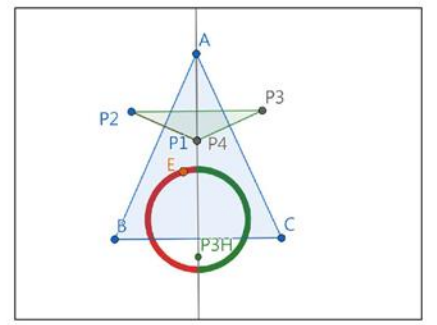


圖 (三十一)

Lemma 2-3.5:  $\Delta P_1P_2P_3$  在  $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$  與  $\Delta P_1P_2P_4$  在  $\theta = \angle BAC$  時，垂心軌跡形成直線部分圖形

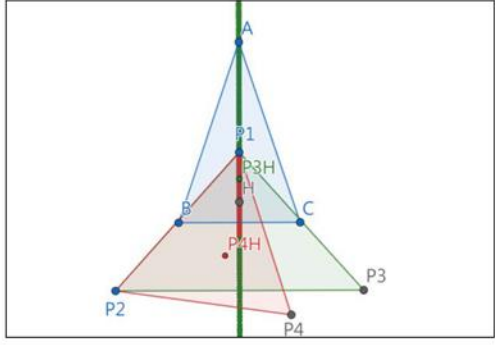


圖 (三十二)

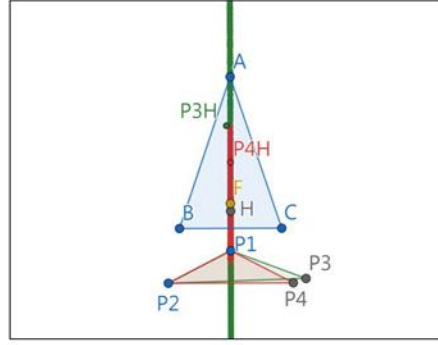


圖 (三十三)

Lemma 2-3.6:  $\Delta P_1P_2P_3$  在  $\theta = \angle BAC - 2\angle ABP_2$  與  $\Delta P_1P_2P_4$  在  $\theta = \angle BAC$  時垂心軌跡形成扣除  $P_1$  點的直線

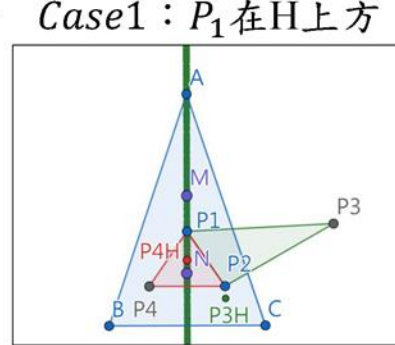


圖 (三十四)

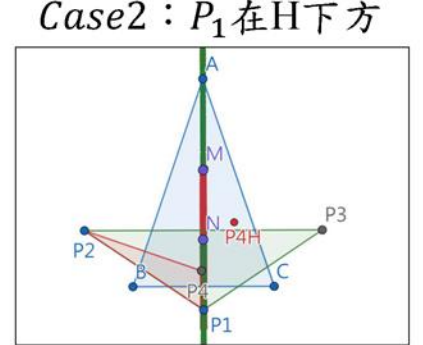


圖 (三十五)

研究 2-4 給定  $\Delta ABC$  及  $P_1$  點，且  $P_1$  點取在  $\overline{BC}$  的中垂線上且  $P_1 \neq A'$ ，則  $\Delta P_1P_2P_3$  及  $\Delta P_1P_2P_4$  互等邊三角形內心所形成的軌跡為分段結合的極座標方程式。

觀察與定義圖形，令  $P_1$  為原點，且  $\phi_1 = \angle AP_1P_2$ 、 $\psi = \angle P_2P_1P_4$ ，則 I 點的極座標為  $[\overline{P_1I}, \phi_1 + \frac{\psi}{2}]$

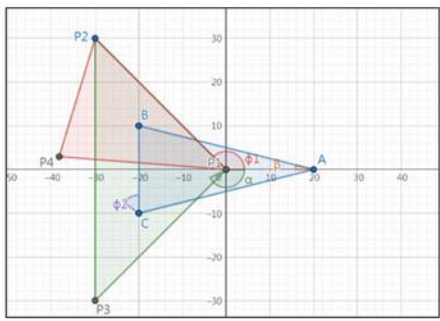


圖 (三十六)

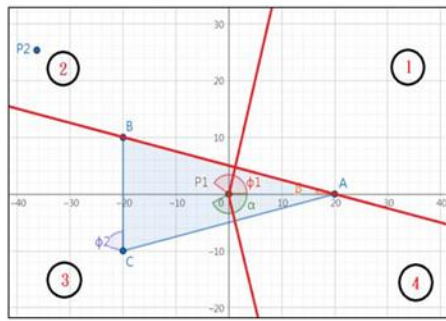


圖 (三十七)

Lemma 2-4.2:  $\overline{P_1I} = \frac{l_1 \cdot l_2}{s} \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)$ ，其中  $l_1 = \overline{P_1P_2}$ 、 $l_2 = \overline{P_1P_4}$

$$|\Delta P_1P_2P_4| = rs = s \cdot \overline{P_1I} \cdot \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin \psi \Rightarrow \overline{P_1I} = \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot \sin \psi}{2 \cdot s \cdot \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}$$

$$= \frac{l_1 \cdot l_2}{s} \cdot \frac{\sin \psi}{2 \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} = \frac{l_1 \cdot l_2}{s} \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

Lemma 2-4.1: 若  $\overline{P_1P_2}$  為圓 B 的直徑，此時  $\angle P_2P_1P_4 = 180^\circ - \angle AP_1B + \angle BAP_1$   
 $\therefore \angle BP_1C = 360^\circ - 2\alpha$   
 $\therefore \angle DP_1P_4 = \angle CAP_1 = \beta$   
 $\Rightarrow \angle CP_1P_4 = 180^\circ - \alpha - \beta$   
 $\therefore \angle P_2P_1P_4 = \angle BP_1C - \angle CP_1P_4 = 180^\circ - \alpha + \beta$

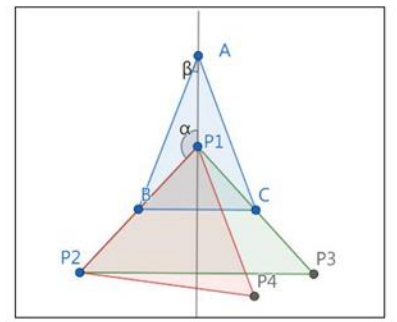


圖 (三十八)

Lemma 2-4.3: 求出  $\overline{P_1I}$  之值，並執行程式

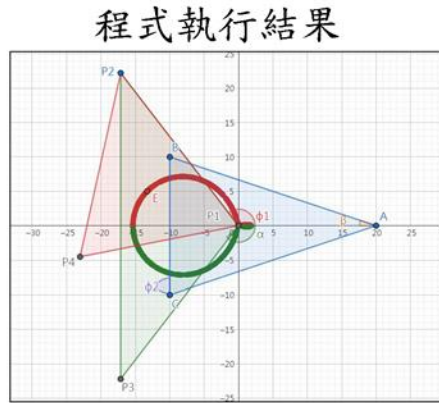


圖 (三十九)

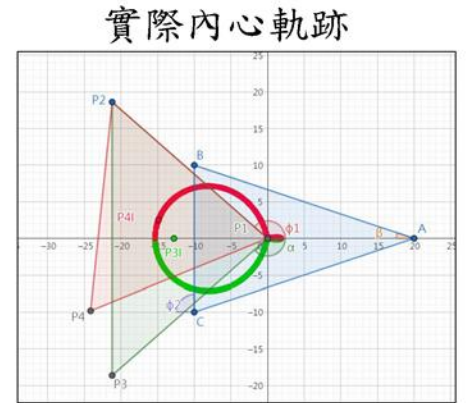


圖 (四十)

### 肆、研究結果

若  $\overline{AC} - \overline{CP_1} \leq \overline{AP_2} \leq \overline{AC} + \overline{CP_1}$ ，等號成立時， $\overline{AP_2}$  分別為最小值及最大值，且圓 A 及圓 C 相切。

若  $\Delta ABC$  為一等腰三角形， $P_1$  在  $\overline{BC}$  的中垂線上且  $P_1 \neq A'$ ，則有下列結論：

- 一、 $\Delta P_1P_2P_3$  及  $\Delta P_1P_2P_4$  所形成之外心軌跡會形成扣除兩點的直線及扣除兩點的圓。
- 二、 $\Delta P_1P_2P_3$  及  $\Delta P_1P_2P_4$  所形成之重心軌跡會形成扣除一點的線段及扣除兩點的圓。
- 三、 $\Delta P_1P_2P_3$  及  $\Delta P_1P_2P_4$  所形成之垂心軌跡會形成至少扣除一點的直線及扣除兩點的圓 ( $P_1 \neq H$ )。
- 四、 $\Delta P_1P_2P_3$  及  $\Delta P_1P_2P_4$  所形成之內心軌跡為分段的極座標方程式結合 (分段的心臟線)。

### 伍、未來展望

- 一、研究 2-3 中尋找  $\Delta P_1P_2P_4$  線段軌跡的兩個端點位置。
- 二、歸納出互等邊三角形的內心線段軌跡。
- 三、歸納出互等邊三角形的旁、切、界、類重心的軌跡圖形。
- 四、將等腰三角形的條件限制推廣到任意三角形。

### 陸、參考資料

中華民國第 61 屆中小學科學展覽會作品說明書：頂心三角形誕生的奇蹟

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/61/pdf/NPHSF2021-050404.pdf?0.6386348350743392>

中華民國第 59 屆中小學科學展覽會作品說明書：換心手術—從三角形出發探討 N 邊形多心性質之研究

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/59/pdf/NPHSF2019-030402.pdf>