中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第三名

050406

從圖形內在結構探討凡·奧貝爾定理的推廣

學校名稱：國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高二　李孟儒	楊玉星
高一　辛佳佑	
高一　陳柏澄	

關鍵詞：凡・奧貝爾定理、四邊形、對點連線

摘要

將**凡·奧貝爾定理**的四邊形依對角線**等長、垂直、平分**分類，外接正方形推廣為**正多邊形**，則**原四邊形對角線**與**相對中心連線**有**等長和垂直對偶、平分不變**的現象。考慮**相鄰頂點之中點**時，則**對點連線**與**相對中心連線**也有相同結論；當原四邊形**等垂對**時，作出相鄰頂點之**等比例內分點**或外接**相似三角形**，則對點連線會**等垂對**。

當原四邊形外接**平行四邊形**時，則**相對中心連線**與**相鄰頂點的中點之對點連線**也會**等長和垂直對偶**。若原四邊形**改成八邊形**且外接正方形時，則**相對中心連線的中點(或相鄰頂點之中點的相對中點)之對點連線**會**垂直且等長**；外接**對邊相似的平行四邊形**時，則**相對中心連線的中點之對點連線**與**相鄰頂點之中點的相對中點之對點連線**也會**等長和垂直對偶**。

壹、前言

一、研究動機

關於**凡·奧貝爾定理**（Van Aubel's theorem），如圖 1-1-1，是以任意四邊形各邊向外作正方形。若將相對的兩正方形之中心連起，則所連的兩線段既垂直且等長。又依序連接四個正方形的中心，可得一個**對角線垂直且等長的正軸四邊形**。

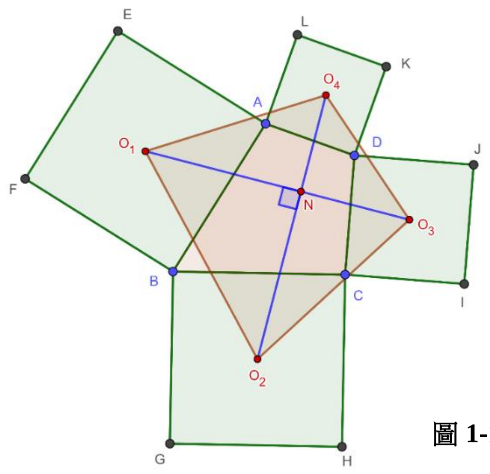


圖 1-1-1

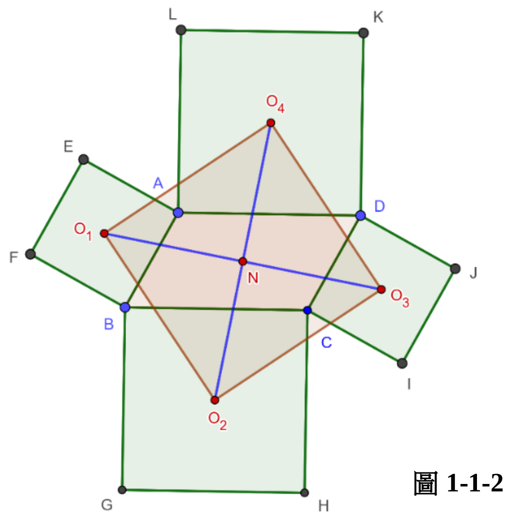


圖 1-1-2

如圖 1-1-2，若**將原四邊形改成平行四邊形**，則依序連接四個正方形的中心，可得一個正方形。我們對此現象感到好奇，莫非原四邊形「**對角線互相平分**」的性質**可以延續到下一層的四邊形**，從而**正軸四邊形可以變成正方形**。

若將原四邊形改成**「對角線等長、對角線垂直」**的四邊形，且將四邊**外接的正方形**推廣為**其它正多邊形**，那**外層的四邊形**會有哪些性質？於是我們決定繼續推廣**凡·奧貝爾定理**，看能否有更多不一樣的發現。

二、研究目的

(一)考慮**對角線平分、等長、垂直的四邊形**，外接不同的正多邊形，連接**相對的兩正多邊形之中心**，觀察所連的兩線段之關係並加以證明。

(二)考慮**對角線平分、等長、垂直的四邊形**，外接不同的正多邊形，並找出**相鄰兩頂點之中點**(**或等比例內分點**)，連接相對的兩中點(**或等比例內分點**)，觀察所連的兩線段之關係並加以證明。

(三)考慮**任意四邊形**，逆向外接**相似的矩形、菱形**或**外接平行四邊形**，連接**相對的兩圖形之中心**及**相鄰兩頂點之中點**，觀察所連的兩線段之關係並加以證明。

(四)將**任意四邊形**改成**任意八邊形**，外接**正方形**或逆向外接**相似的矩形、菱形**或外接**對邊相似的平行四邊形**，**連接相對的兩圖形之中心**，作出其中點，並連接相對的兩中點；**連接相對的相鄰兩頂點之中點**，作出其中點，並連接相對的兩中點，觀察所連的兩線段之關係並加以證明。

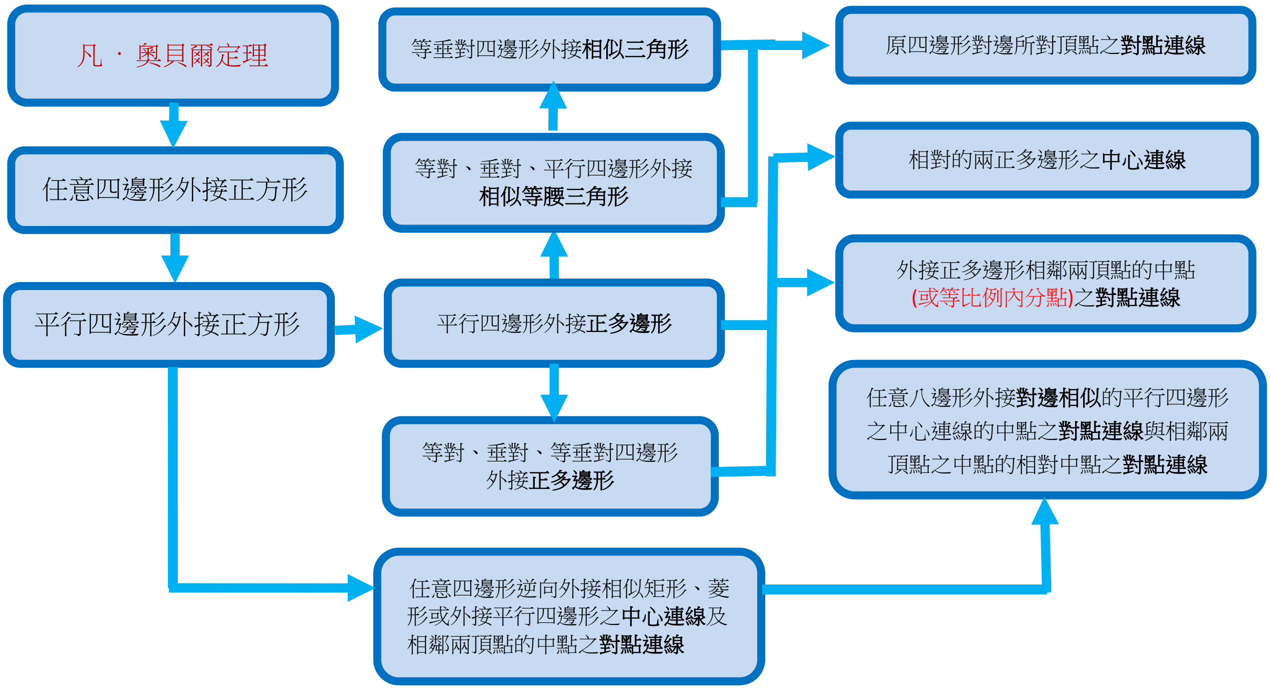
三、研究工具

本研究主要利用 **Geogebra** 電腦動態幾何軟體進行研究問題的幾何實驗，透過實驗觀察、猜測與驗證，然後提出研究結果並加以證明。

四、研究特色

有別以往的研究大部分將原四邊形以**形狀**做分類，本研究是將原四邊形依**對角線的關係**作分類，外接正方形則推廣為**正多邊形、相似三角形、平行四邊形**。利用**向量與複數的結合、位似變換**的方法，成功地解釋**原始命題發生的原因**，並找到原四邊形**對角線**與外層四邊形**對點連線**之關係。接著將原四邊形**改成八邊形**，並外接**對邊相似的平行四邊形**，而得出一系列**凡·奧貝爾定理**推廣後的**一般化結論**。

五、研究流程圖



貳、文獻探討與前置研究

一、芬斯勒－哈德維格爾定理 參[1]

芬斯勒－哈德維格爾定理（**Finsler-Hadwiger Theorem**）：如圖 **2-1-1**，若兩個正方形 ***ABCD*** 和 ***AB'C'D'***擁有同一個頂點 ***A***。則 ***B*** 和 ***B'***的中點 ***F***、***D*** 和 ***D'***的中點 ***H***、***ABCD*** 的中心 ***E*** 和 ***AB'C'D'***的中心 ***G*** 將組成一個正方形 ***EFGH***。

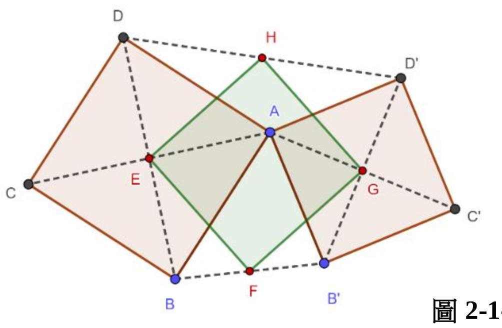


圖 **2-1-1**

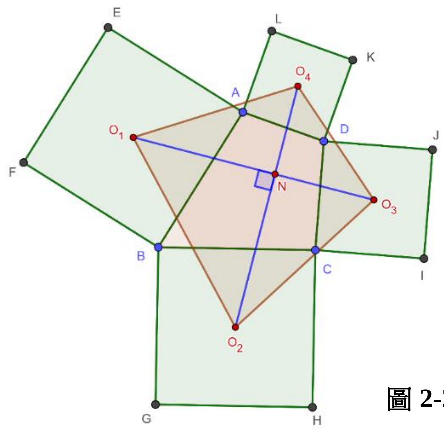


圖 **2-2-1**

二、凡·奧貝爾定理 參[1]

凡·奧貝爾定理（**Van Aubel's theorem**）：如圖 **2-2-1**，以四邊形 ***ABCD*** 各邊為邊向外作正方形。若將相對的兩正方形之中心$\boldsymbol{O_1}$和$\boldsymbol{O_3}$、$\boldsymbol{O_2}$和$\boldsymbol{O_4}$連起，則所連的兩條線段 $\overline{\boldsymbol{O_1O_3}}$、$\overline{\boldsymbol{O_2O_4}}$會滿足 $\overline{\boldsymbol{O_1O_3}} = \overline{\boldsymbol{O_2O_4}}$ 且 $\overline{\boldsymbol{O_1O_3}} \perp \overline{\boldsymbol{O_2O_4}}$。

三、許翰翔。拿破崙的四角戀—將「拿破崙定理」推廣至四邊形的探討 參[2]

此作品的研究對象為**特定四邊形**(平行四邊形、菱形、矩形、等腰梯形、鳶形)。構造法為原四邊形的邊**全部向外或全部向內作相似三角形及特殊四邊形**。研究結果**有四邊形的對偶規律、外接圓交點、對角線共點性質**。研究限制為**內外結果四邊形面積差與原面積的比值沒有一般性的結果**。

四、方柏瑞、林辰禎。接三連四—探討三角形各邊外接平行四邊形其性質與推廣 參[3]

此作品的研究對象為三角形和特定四邊形(平行四邊形、菱形、矩形、正方形、等腰梯形、箏形)。構造法為原三角形或四邊形的邊**外接指定條件的平行四邊形**。研究結果**有三角形、特定四邊形和外接平行四邊形之間線段大小、線段垂直及與平行四邊形一內角的關係**。研究限制為原三角形或四邊形的邊**只考慮外接指定條件的平行四邊形**。

五、向量與複數的結合：$\overrightarrow{OP}*(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\overrightarrow{OP}*e^{\alpha i}$ 參[1]

是指以點 O 為旋轉中心，將$\overrightarrow{OP}$逆時針旋轉α所得的向量。特別地，$\overrightarrow{OP}*i$為以點 O 為旋轉中心，將$\overrightarrow{OP}$逆時針旋轉$90°$所得的向量。

六、位似變換定義： 參[4]

O是平面π上一個定點，H是平面上的變換。若對於任一對應點 P、P'，都有 $\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}$($k$為非零實數)，則稱$H$為位似變換，記為$H(O,k)$，$O$叫做位似中心，$k$叫做位似比。定義中的條件 $\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}$ 等價於如下三個條件：

1. O，P，P'共線； 2. $\overline{OP'}=|k|\overline{OP}$；
3. 當$k>0$時，P，P'在O點同側，此時O點叫做外位似中心；
   當$k<0$時，P，P'在O點異側，此時O點叫做內位似中心。

七、愛可爾斯定理 1（Echols theorem）的推廣：參[5]

如圖 2-7-1，若$A_1B_1C_1D_1$和$A_2B_2C_2D_2$是相似四邊形，則 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{B_1B_2}$、$\overline{C_1C_2}$、$\overline{D_1D_2}$ 的等比例內分點也會形成相似四邊形。

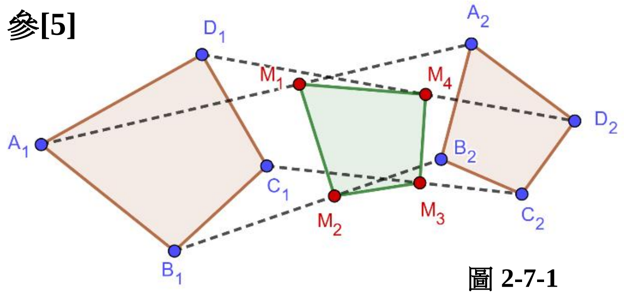


圖 2-7-1

參、研究方法與過程

一、名詞定義

定義 1 等對四邊形：對角線等長的四邊形稱之。

定義 2 垂對四邊形：對角線互相垂直的四邊形稱之。

定義 3 等垂對四邊形：對角線垂直且等長的四邊形稱之。

定義 4 對點連線：平面上不共線的四點，兩兩相對點的連線稱之。

定義 5 中心四邊形：

如圖 3-1-1，以四邊形各邊向外作正多邊形。依序連接四個正多邊形的中心，所得的四邊形稱之。

定義 6 頂點中點(內分點)四邊形：

如圖 3-1-2，以四邊形各邊向外作正多邊形。依序連接正多邊形相鄰兩頂點的中點(或等比例內分點)，所得的四邊形稱之。

定義 7 原多邊形逆向外接四邊形：

先外接一四邊形，並以原多邊形的角頂為中心，將外接四邊形旋轉至原多邊形之鄰邊處，再把旋轉後的四邊形等比例伸縮至與原多邊形之鄰邊貼齊，以此類推。

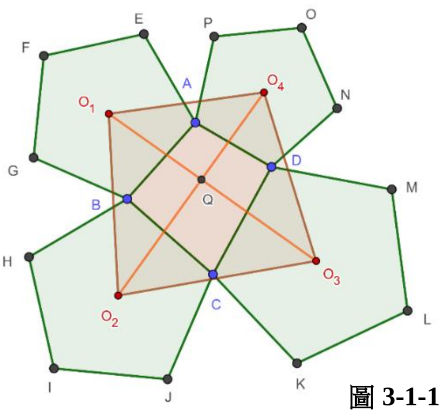


圖 3-1-1

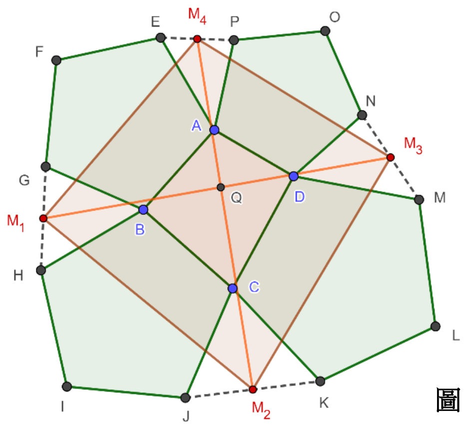


圖 3-1-2

二、研究過程

(一) 四邊形外接正多邊形相對的兩中心之連線

1. 任意四邊形

只有在外接正方形時，相對的兩正方形之中心連線會垂直且等長，而有以下的定理：

定理 3-2-1 (凡·奧貝爾定理)

設原四邊形 $ABCD$ 為任意四邊形，若各邊向外作正方形，則相對的兩正方形之中心連線 $\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$ 會滿足 $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$ 且 $\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$。

[證明]

(綜合幾何證法)

如圖 3-2-1，以ΔABC的兩邊$\overline{AB}$、$\overline{AC}$向外作正方形 $ABDE$、$ACFG$，其中心分別為O_1和O_2，$\overline{BC}$的中點為M_1，由**芬斯勒－哈德維格爾定理**可知：$\overline{M_1O_1}=\overline{M_1O_2}$ 且 $\overline{M_1O_1}\perp\overline{M_1O_2}$。

如圖 3-2-2，由上可知：在ΔO_1MO_3和ΔO_4MO_2中，$\overline{MO_1}=\overline{MO_4}$ 且 $\overline{MO_1}\perp\overline{MO_4}$；$\overline{MO_3}=\overline{MO_2}$ 且 $\overline{MO_3}\perp\overline{MO_2}$，又 $\angle O_1MO_3=\frac{\pi}{2}+\angle O_4MO_3=\angle O_4MO_2$，

推得 $\Delta O_1MO_3\cong\Delta O_4MO_2$，故 $\overline{O_1O_3}=\overline{O_2O_4}$ 且 $\overline{O_1O_3}\perp\overline{O_2O_4}$。

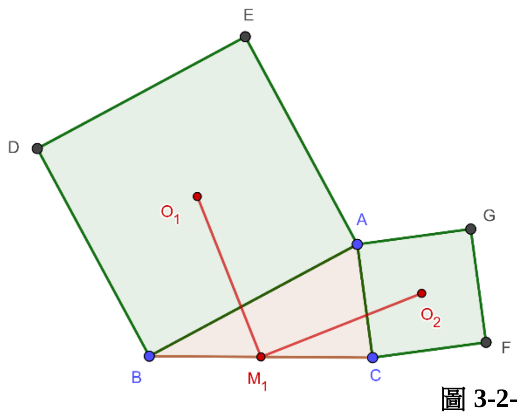


圖 3-2-1

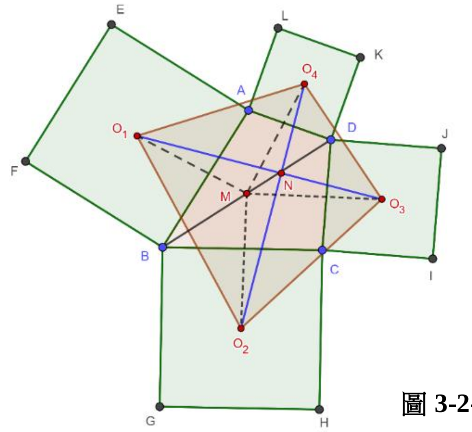


圖 3-2-2

(向量複數證法)

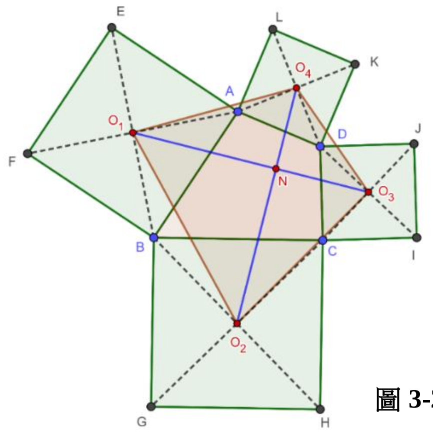


圖 3-2-3

如圖 3-2-3，$\overrightarrow{O_1O_3}=\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO_3}$，

且 $\overrightarrow{O_1O_3}=\overrightarrow{O_1F}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IO_3}$，

兩式相加可得 $2\overrightarrow{O_1O_3}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}$，

同理 $2\overrightarrow{O_2O_4}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AL}$，

又 $2\overrightarrow{O_1O_3}*i=\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{CD}$，

從而 $2\overrightarrow{O_1O_3}*i=2\overrightarrow{O_2O_4}$，即 $\overrightarrow{O_1O_3}*i=\overrightarrow{O_2O_4}$，故 $\overline{O_1O_3}\perp\overline{O_2O_4}$ 且 $\overline{O_1O_3}=\overline{O_2O_4}$。

2. 對角線互相平分的四邊形

不論外接正多邊形為何，相對的兩中心之連線都會互相平分，而有以下兩個定理：

(1)外接正方形

定理 3-2-2 (拿破崙定理的推廣 1)

設原四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，若各邊向外作正方形，則相對的兩正方形之中心連線 $\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$會垂直、平分且等長，即四邊形$O_1O_2O_3O_4$為正方形。

[證明]

如圖 3-2-4，$\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{O_1F}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GO_2}$，且 $\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CO_2}$，

兩式相加可得 $2\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$，

同理 $2\overrightarrow{O_1O_4}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$，

又 $2\overrightarrow{O_1O_2}*i=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{DJ}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{EA}$，

從而 $2\overrightarrow{O_1O_2}*i=2\overrightarrow{O_1O_4}$，即 $\overrightarrow{O_1O_2}*i=\overrightarrow{O_1O_4}$，

故 $\overline{O_1O_2}\perp\overline{O_1O_4}$ 且 $\overline{O_1O_2}=\overline{O_1O_4}$。

同理可證：

$\overrightarrow{O_2O_3}*i=\overrightarrow{O_2O_1}$，故 $\overline{O_2O_3}\perp\overline{O_2O_1}$ 且 $\overline{O_2O_3}=\overline{O_2O_1}$。

$\overrightarrow{O_3O_4}*i=\overrightarrow{O_3O_2}$，故 $\overline{O_3O_4}\perp\overline{O_3O_2}$ 且 $\overline{O_3O_4}=\overline{O_3O_2}$，

推知 $\overline{O_4O_1}\perp\overline{O_4O_3}$，故四邊形$O_1O_2O_3O_4$為正方形，

從而兩對角線$\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$也會互相平分。

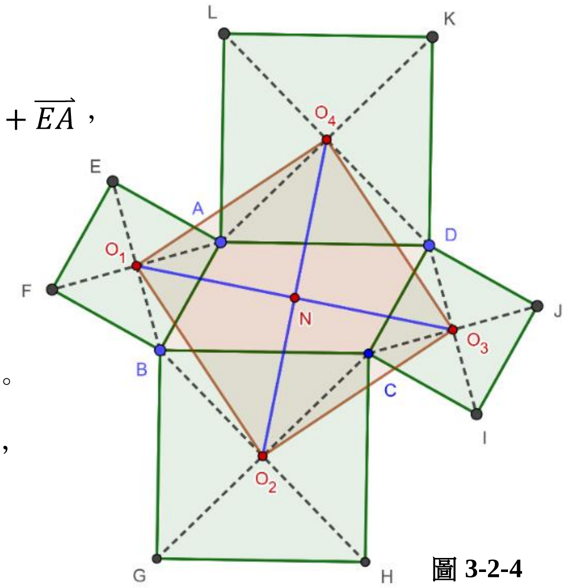


圖 3-2-4

(2)外接任意正多邊形

> **定理 3-2-3 (凡・奧貝爾之平行四邊形定理 1)**
> **設原四邊形 *ABCD* 為對角線平分的四邊形(平行四邊形)，若各邊向外作正多邊形，則相對的兩正多邊形之中心連線$\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$也會互相平分。**

[證明]

如圖 3-2-5，當外接正 n 邊形時，設$\theta=\frac{2\pi}{n}$，

則原問題等價於**各邊向外作頂角為θ的相似等腰三角形**，

因為 $\angle O_1AB=\angle O_1BA=\frac{\pi-\theta}{2}$，所以 $\overline{O_1A}=\frac{1}{2}\overline{AB}\sec\frac{\pi-\theta}{2}$，

從而 $\overline{O_1A}=\frac{1}{2}\overline{CD}\sec\frac{\pi-\theta}{2}=\overline{O_3C}$且$\overline{O_1A}//\overline{O_3C}$，

推知四邊形AO_1CO_3為平行四邊形。

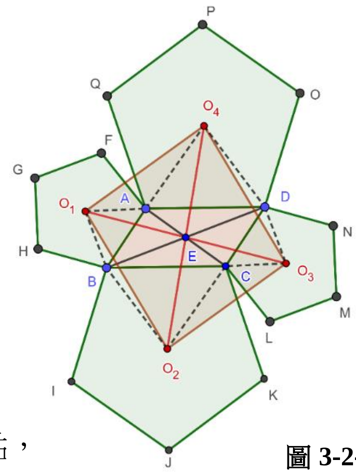


圖 3-2-5

又四邊形 *ABCD* 為平行四邊形，因此對角線$\overline{AC}$和$\overline{BD}$平分於 E 點，

從而對角線$\overline{AC}$和$\overline{O_1O_3}$也平分於 E 點。同理可證：對角線$\overline{AC}$和$\overline{O_2O_4}$也平分於 E 點。

故兩對角線$\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$也會互相平分。若各邊**向外順向作相似三角形**，仿照上述的證明方式，也可以證明**兩組對點連線會互相平分**。

3. 對角線等長的四邊形

不論外接正多邊形為何，相對的兩正多邊形之中心連線都會互相垂直，而有以下定理：

定理 3-2-4 (凡・奧貝爾之等對四邊形定理 1)

設原四邊形 *ABCD* 為等對四邊形，若各邊向外作正多邊形，則相對的兩正多邊形之中心連線$\overleftrightarrow{\boldsymbol{O_1O_3}}$、$\overleftrightarrow{\boldsymbol{O_2O_4}}$會互相垂直。

[證明]

(1)如圖 3-2-6，當外接正 n 邊形時，設$\theta=\frac{2\pi}{n}$，則原問題等價於**各邊向外作頂角為$\boldsymbol{\theta}$的相似等腰三角形**，因為 $\angle O_1AB=\angle O_1BA=\frac{\pi-\theta}{2}$，所以 $2\overrightarrow{BO_1}=\overrightarrow{BA}+\tan\frac{\pi-\theta}{2}\overrightarrow{BA}*i$，$2\overrightarrow{DO_3}=\overrightarrow{DC}+\tan\frac{\pi-\theta}{2}\overrightarrow{DC}*i$，且 $\overrightarrow{O_1O_3}=\overrightarrow{O_1B}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DO_3}$，

推得

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{O_1O_3}&=2\overrightarrow{O_1B}+2\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{DO_3}=-2\overrightarrow{BO_1}+2\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{DO_3}\\&=-(\overrightarrow{BA}+\tan\tfrac{\pi-\theta}{2}\overrightarrow{BA}*i)+2\overrightarrow{BD}+\left(\overrightarrow{DC}+\tan\tfrac{\pi-\theta}{2}\overrightarrow{DC}*i\right)\\&=\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}\right)+\overrightarrow{BD}+\tan\tfrac{\pi-\theta}{2}(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BA})*i\\&=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)+\tan\tfrac{\pi-\theta}{2}\left[\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)-\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\right]*i\\&=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)+\tan\tfrac{\pi-\theta}{2}\left[\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)-\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right)\right]*i\\&=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)+\tan\tfrac{\pi-\theta}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)*i\text{。}\end{aligned}$$

同理 $2\overrightarrow{O_4O_2}=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)-\tan\frac{\pi-\theta}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)*i$。

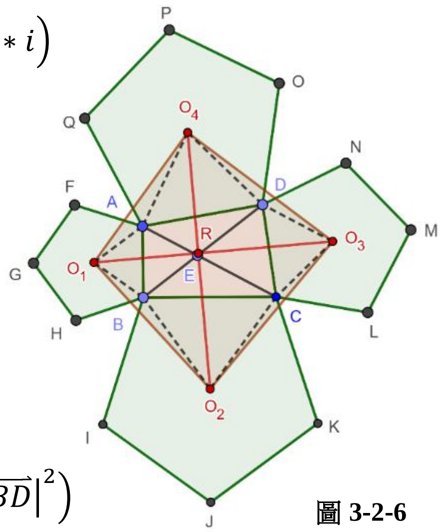


圖 3-2-6

推知 $4\overrightarrow{O_1O_3}\cdot\overrightarrow{O_4O_2}=\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)-\tan^2\frac{\pi-\theta}{2}\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)$

$=\left(1-\tan^2\frac{\pi-\theta}{2}\right)\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)=0$ (因為$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$)，故 $\overleftrightarrow{O_1O_3}\perp\overleftrightarrow{O_2O_4}$。

(2)特別在外接正方形時，因為 $4\overrightarrow{O_1O_3}\cdot\overrightarrow{O_4O_2}=\left(1-\tan^2\frac{\pi}{4}\right)\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)$，且 $\tan\frac{\pi}{4}=1$，所以不需要對角線等長($\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$)的條件，恆有 $\overrightarrow{O_1O_3}\cdot\overrightarrow{O_4O_2}=0$，故 $\overleftrightarrow{O_1O_3}\perp\overleftrightarrow{O_2O_4}$。即相對的兩正方形之中心連線都會垂直。

4. 對角線垂直的四邊形

不論外接正多邊形為何，相對的兩正多邊形之中心連線都會等長，而有以下定理：

定理 3-2-5 (凡・奧貝爾之垂對四邊形定理 1)
設原四邊形 *ABCD* 為垂對四邊形，若各邊向外作正多邊形，則相對的兩正多邊形之中心連線$\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$會等長。

[證明]

(1)如圖 3-2-7，當外接正 n 邊形時，設$\theta=\frac{2\pi}{n}$，則原問題等價於**各邊向外作頂角為$\boldsymbol{\theta}$的相似等腰三角形**，因為 $\angle O_1AB=\angle O_1BA=\frac{\pi-\theta}{2}$，由**定理 3-2-4(2)**的證明可知：

$2\overrightarrow{O_1O_3}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)+\tan\frac{\pi-\theta}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)*i$；

$2\overrightarrow{O_4O_2}=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)-\tan\frac{\pi-\theta}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)*i$。

設 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ 和 $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$的夾角為$\varphi$，

若 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ 和$\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)*i$ 的夾角為$\varphi-\frac{\pi}{2}$

(或$\frac{\pi}{2}-\varphi$)，則$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$ 和$\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)*i$ 的夾角為$\varphi+\frac{\pi}{2}$。

因為 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}\Longrightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，

所以

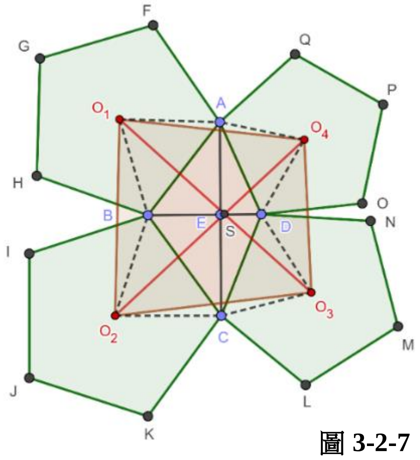


圖 3-2-7

$$4\left|\overrightarrow{O_1O_3}\right|^2=(1+\tan^2\frac{\pi-\theta}{2})\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)+2\tan\frac{\pi-\theta}{2}\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right|\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=(1+\tan^2\frac{\pi-\theta}{2})\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)+2\tan\frac{\pi-\theta}{2}\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right|\sin\varphi；$$

且 $$4\left|\overrightarrow{O_4O_2}\right|^2=\left(1+\tan^2\frac{\pi-\theta}{2}\right)\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)-2\tan\frac{\pi-\theta}{2}\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=(1+\tan^2\frac{\pi-\theta}{2})\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)+2\tan\frac{\pi-\theta}{2}\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right|\sin\varphi。$$

推知 $\left|\overrightarrow{O_1O_3}\right|=\left|\overrightarrow{O_4O_2}\right|$，故相對的兩正多邊形之中心連線$\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$會等長。

(2)特別在外接正方形時，因為 $2\overrightarrow{O_1O_3}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)+\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)*i$；

$$2\overrightarrow{O_4O_2}=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)-\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)*i。$$

所以 $4\left|\overrightarrow{O_1O_3}\right|^2=2\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)+2\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right|\sin\varphi$；

$4\left|\overrightarrow{O_4O_2}\right|^2=2\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)+2\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right|\sin\varphi$。

推知 $\left|\overrightarrow{O_1O_3}\right|=\left|\overrightarrow{O_4O_2}\right|$。因此不需要對角線垂直($\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}$)的條件，恆有$\left|\overrightarrow{O_1O_3}\right|=\left|\overrightarrow{O_4O_2}\right|$。故相對的兩正方形之中心連線$\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$會等長。

5. 對角線垂直且等長的四邊形

不論外接正多邊形為何，相對的兩正多邊形之中心連線都會垂直且等長，而有以下定理：

定理 3-2-6 (凡・奧貝爾之等垂對四邊形定理 1)
設原四邊形 *ABCD* 為等垂對四邊形，若各邊向外作正多邊形，則相對的兩正多邊形之中心連線$\overline{\boldsymbol{O_1O_3}}$、$\overline{\boldsymbol{O_2O_4}}$會垂直且等長。

[證明]

由**定理 3-2-4** 可知：若原四邊形 *ABCD* 為等對四邊形，則相對的兩正多邊形之中心連線$\overleftrightarrow{O_1O_3}$、$\overleftrightarrow{O_2O_4}$會垂直。由**定理 3-2-5** 可知：若原四邊形 *ABCD* 為垂對四邊形，則相對的兩正多邊形之中心連線$\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$會等長。因此，若原四邊形 *ABCD* 為等垂對四邊形，則相對的兩正多邊形之中心連線$\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$會垂直且等長。

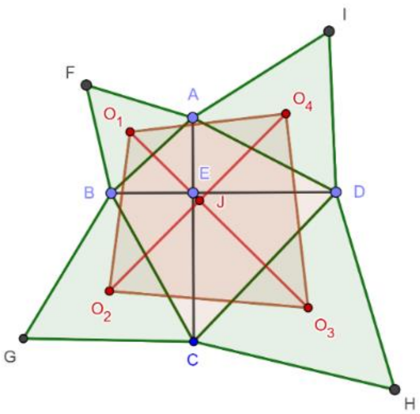


圖 3-2-8

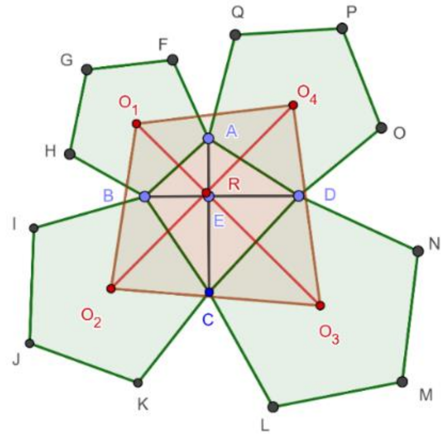


圖 3-2-9

接著，我們考慮由原四邊形各邊**向外順向作相似三角形**，再連接**各邊所對頂點之對點連線**，而有以下定理：

定理 3-2-7 (凡・奧貝爾之相似三角形定理)
設原四邊形 *ABCD* 為等垂對四邊形，若各邊向外順向作相似三角形，則各邊所對頂點之對點連線$\overline{\boldsymbol{O_1O_3}}$、$\overline{\boldsymbol{O_2O_4}}$也會垂直且等長。

[證明]

(1)如圖 3-2-10，設 $2\overrightarrow{BO_1}=\alpha\overrightarrow{BA}+\beta\overrightarrow{BA}*i$，

$2\overrightarrow{DO_3}=\alpha\overrightarrow{DC}+\beta\overrightarrow{DC}*i$，且 $\overrightarrow{O_1O_3}=\overrightarrow{O_1B}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DO_3}$，

所以 $2\overrightarrow{O_1O_3}=2\overrightarrow{O_1B}+2\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{DO_3}=-2\overrightarrow{BO_1}+2\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{DO_3}$

$=-(\alpha\overrightarrow{BA}+\beta\overrightarrow{BA}*i)+2\overrightarrow{BD}+\left(\alpha\overrightarrow{DC}+\beta\overrightarrow{DC}*i\right)$

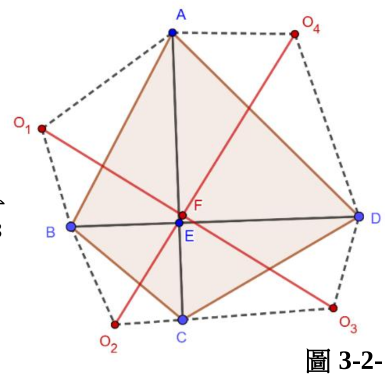


圖 3-2-10

$$= \alpha\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BA}\right)+2\overrightarrow{BD}+\beta\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BA}\right)*i$$

$$= \alpha\left[\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)-\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\right]+2\overrightarrow{BD}+\beta\left[\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)-\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\right]*i$$

$$= \alpha\left[\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)-\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right)\right]+2\overrightarrow{BD}+\beta\left[\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)-\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right)\right]*i$$

$$= \alpha\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)+2\overrightarrow{BD}+\beta\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)*i\text{。}$$

同理 $2\overrightarrow{O_4O_2}=-\alpha\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)+2\overrightarrow{AC}-\beta\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)*i$。

(2)因為原四邊形 $ABCD$ 為等垂對四邊形，所以$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$且$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$，

推得 $\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BD}\right|^2=0$，即$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$和$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$的夾角為$\frac{\pi}{2}$，

從而 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ 和$\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)*i$ 的夾角為0，且$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$和$\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)*i$的夾角為$\pi$，

$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{BD}*i$的夾角為π，$\overrightarrow{BD}$和$\overrightarrow{AC}*i$的夾角為0。因為$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}\Rightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，

所以 $4\overrightarrow{O_1O_3}\cdot\overrightarrow{O_4O_2}$

$$=-\alpha^2\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)+2\alpha\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)-\alpha\beta\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right|\cos\pi$$

$$-2\alpha\overrightarrow{BD}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)+4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}-2\beta\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos 0$$

$$-\alpha\beta\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right|\cos 0-2\beta\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos\pi-\beta^2\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)$$

$$=2\alpha\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\alpha\beta\left|\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}\right|-2\alpha\left|\overrightarrow{BD}\right|^2-\alpha\beta\left|\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}\right|$$

$=2\alpha\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)=0$，推得 $\overleftrightarrow{O_1O_3}\perp\overleftrightarrow{O_2O_4}$。

又 $4\left|\overrightarrow{O_1O_3}\right|^2=\alpha^2\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)+4\left|\overrightarrow{BD}\right|^2+\beta^2\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)$

$$+2\left[2\alpha\overrightarrow{BD}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)+2\beta\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos 0\right]$$

$$=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)+4(1-\alpha)\left|\overrightarrow{BD}\right|^2+4\beta\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|$$

且 $4\left|\overrightarrow{O_4O_2}\right|^2=\alpha^2\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)+4\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\beta^2\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)$

$$+2\left[-2\alpha\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)-2\beta\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos\pi\right]$$

$$=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)+4(1-\alpha)\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+4\beta\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|$$

推知 $\left|\overrightarrow{O_1O_3}\right|=\left|\overrightarrow{O_4O_2}\right|$，故各邊所對頂點之對點連線$\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$也會垂直且等長。

(二) 四邊形外接正多邊形相鄰兩頂點之中點的對點連線

1. 任意四邊形

只有在外接正方形時，相鄰兩頂點之中點的對點連線會垂直且等長，而有以下的定理：

定理 3-2-8(凡・奧貝爾之頂點中點定理)

設原四邊形 $ABCD$ 為任意四邊形，若各邊向外作正方形，則相鄰兩頂點之中點的對點連線$\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$ 會滿足 $\overline{M_1M_3} \perp \overline{M_2M_4}$ 且 $\overline{M_1M_3} = \overline{M_2M_4}$。

[證明]

如圖 3-2-11，$\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{M_1F} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KM_3}$，

且 $\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{M_1G} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{JM_3}$，

兩式相加可得

$2\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ}$，

同理 $2\overrightarrow{M_2M_4} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AL}$，

又 $2\overrightarrow{M_1M_3} * i = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD}$，

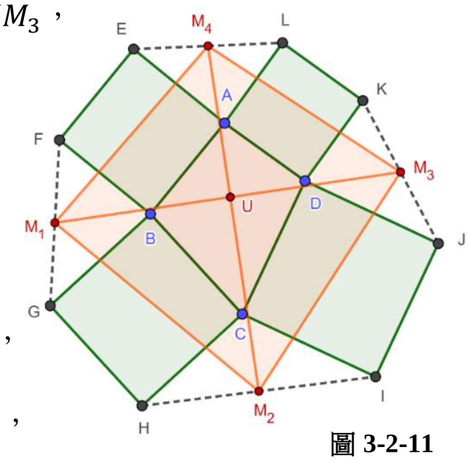


圖 3-2-11

推知 $2\overrightarrow{M_1M_3} * i = 2\overrightarrow{M_2M_4}$，即 $\overrightarrow{M_1M_3} * i = \overrightarrow{M_2M_4}$，故 $\overline{M_1M_3} \perp \overline{M_2M_4}$ 且 $\overline{M_1M_3} = \overline{M_2M_4}$。

2. 對角線互相平分的四邊形

不論外接正多邊形為何，相鄰兩頂點之中點的對點連線都會互相平分，而有以下兩個定理：

(1)外接正方形

定理 3-2-9 (拿破崙定理的推廣 2)

設原四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，若各邊向外作正方形，則相鄰兩頂點之中點的對點連線$\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$會垂直、平分且等長，即四邊形$M_1M_2M_3M_4$為正方形。

[證明]

如圖 3-2-12，利用**向量迴路法**可得，

$2\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{HI}$，$2\overrightarrow{M_1M_4} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GF}$，

又 $2\overrightarrow{M_1M_2} * i = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$，

推知 $2\overrightarrow{M_1M_2} * i = 2\overrightarrow{M_1M_4}$，即 $\overrightarrow{M_1M_2} * i = \overrightarrow{M_1M_4}$，

故 $\overline{M_1M_2} \perp \overline{M_1M_4}$ 且 $\overline{M_1M_2} = \overline{M_1M_4}$。

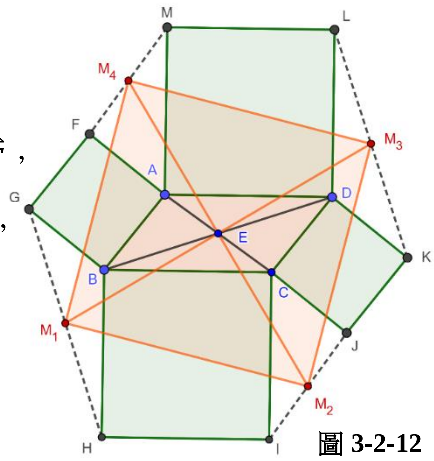


圖 3-2-12

同理可證：

$\overrightarrow{M_2M_3} * i = \overrightarrow{M_2M_1}$，故 $\overline{M_2M_3} \perp \overline{M_2M_1}$ 且 $\overline{M_2M_3} = \overline{M_2M_1}$。

$\overrightarrow{M_3M_4} * i = \overrightarrow{M_3M_2}$，故 $\overline{M_3M_4} \perp \overline{M_3M_2}$ 且 $\overline{M_3M_4} = \overline{M_3M_2}$，推知 $\overline{M_4M_3} \perp \overline{M_4M_1}$，故四邊形 $M_1M_2M_3M_4$為正方形。從而兩對角線$\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$也會互相平分。

(2)外接任意正多邊形

定理 3-2-10(凡・奧貝爾之平行四邊形定理 2)

設原四邊形 *ABCD* 為對角線平分的四邊形(平行四邊形)，若各邊向外作正多邊形，則相鄰兩頂點之中點(或等比例內分點)的對點連線$\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$也會互相平分。

[證明]

如圖 3-2-13，當外接正 n 邊形時，

因為 $\overline{AQ} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{CK}$且 $\overline{AQ} // \overline{CK}$，

所以四邊形 *AQCK* 為平行四邊形。又四邊形 *ABCD* 為平行四邊形，所以對角線$\overline{AC}$和$\overline{BD}$平分於 E 點，

從而對角線$\overline{AC}$和$\overline{QK}$也平分於 E 點。

同理可證：對角線$\overline{AC}$和$\overline{FL}$也平分於 E 點。因此，

ΔAFQ和ΔCLK的位似中心為 E，位似比為-1，

故$\Delta AFQ \cong \Delta CLK$。

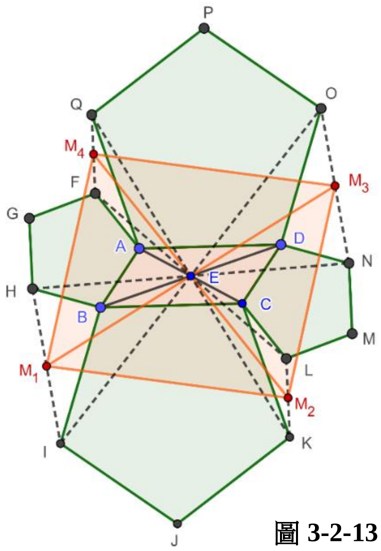


圖 3-2-13

從而$\overline{FQ}$的中點(或等比例內分點)M_4和$\overline{LK}$的中點(或等比例內分點)M_2也對稱於 E 點。同理可得：$\overline{NO}$的中點(或等比例內分點)M_3和$\overline{HI}$的中點(或等比例內分點)M_1也對稱於 E 點，故對點連線$\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$也會互相平分。

3. 對角線等長的四邊形

不論外接正多邊形為何，相鄰兩頂點之中點的對點連線都會等長，而有以下定理：

定理 3-2-11 (凡・奧貝爾之等對四邊形定理 2)

設原四邊形 *ABCD* 為等對四邊形，若各邊向外作正多邊形，則相鄰兩頂點之中點的對點連線$\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$也會等長。

[證明]

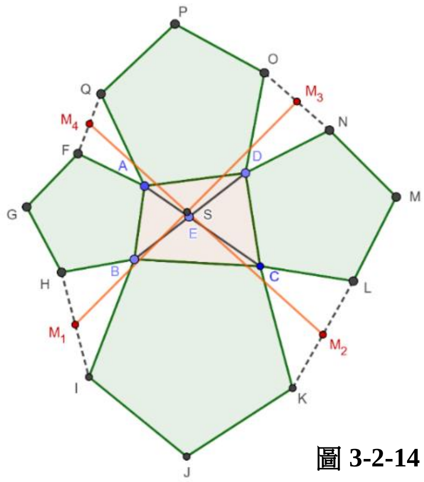


圖 3-2-14

(1)如圖 3-2-14，當外接正 n 邊形時，設$\theta=\frac{2\pi}{n}$，則利用**向量迴路法**可得 $2\overrightarrow{M_1M_3}=\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{DO}$。

又 $\overrightarrow{BH}=\cos\theta\overrightarrow{AB}+\sin\theta\overrightarrow{AB}*(-i)$，

$\overrightarrow{DN}=\cos\theta\overrightarrow{CD}+\sin\theta\overrightarrow{CD}*(-i)$，

$\overrightarrow{BI}=\cos\theta\overrightarrow{CB}+\sin\theta\overrightarrow{CB}*i$，

$\overrightarrow{DO}=\cos\theta\overrightarrow{AD}+\sin\theta\overrightarrow{AD}*i$，

所以

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{M_1M_3}&=-\overrightarrow{BH}+2\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{DO}\\&=-\left(\cos\theta\overrightarrow{AB}+\sin\theta\overrightarrow{AB}*(-i)\right)+2\overrightarrow{BD}+\left(\cos\theta\overrightarrow{CD}+\sin\theta\overrightarrow{CD}*(-i)\right)\\&\quad-\left(\cos\theta\overrightarrow{CB}+\sin\theta\overrightarrow{CB}*i\right)+\left(\cos\theta\overrightarrow{AD}+\sin\theta\overrightarrow{AD}*i\right)\\&=\cos\theta\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}\right)+\cos\theta\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CB}\right)+2\overrightarrow{BD}-\sin\theta\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}\right)*i\\&\quad+\sin\theta\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CB}\right)*i\end{aligned}$$

而 $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}\right)-\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right)-\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}$；

$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CB}=\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)-\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$，

故

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{M_1M_3}&=2(\cos\theta+1)\overrightarrow{BD}-\sin\theta\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}\right)*i+\sin\theta\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\right)*i\\&=2(\cos\theta+1)\overrightarrow{BD}+2\sin\theta\overrightarrow{AC}*i\end{aligned}$$

即 $\overrightarrow{M_1M_3}=(\cos\theta+1)\overrightarrow{BD}+\sin\theta\overrightarrow{AC}*i$ 。同理 $\overrightarrow{M_4M_2}=(\cos\theta+1)\overrightarrow{AC}-\sin\theta\overrightarrow{BD}*i$。

(2)設$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{BD}$的夾角為φ，則$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{BD}*i$的夾角為$\varphi+\frac{\pi}{2}$，且$\overrightarrow{BD}$和$\overrightarrow{AC}*i$的夾角為$\varphi-\frac{\pi}{2}$(或$\frac{\pi}{2}-\varphi$)，

所以

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{M_1M_3}\right|^2&=(\cos\theta+1)^2\left|\overrightarrow{BD}\right|^2+2\sin\theta(\cos\theta+1)\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2\theta\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\\&=(\cos\theta+1)^2\left|\overrightarrow{BD}\right|^2+2\sin\theta(\cos\theta+1)\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|\sin\varphi+\sin^2\theta\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{M_4M_2}\right|^2&=(\cos\theta+1)^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2\sin\theta(\cos\theta+1)\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2\theta\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\\&=(\cos\theta+1)^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+2\sin\theta(\cos\theta+1)\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|\sin\varphi+\sin^2\theta\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\end{aligned}$$

已知$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$，推得$\left|\overrightarrow{M_1M_3}\right|=\left|\overrightarrow{M_4M_2}\right|$，故相鄰兩頂點之中點的對點連線$\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$也會等長。

4. 對角線垂直的四邊形

不論外接正多邊形為何，相鄰兩頂點之中點的對點連線都會垂直，而有以下定理：

定理 3-2-12 (凡・奧貝爾之垂對四邊形定理 2)

設原四邊形 *ABCD* 為垂對四邊形，若各邊向外作正多邊形，則相鄰兩頂點之中點的對點連線$\overleftrightarrow{M_1M_3}$、$\overleftrightarrow{M_2M_4}$也會垂直。

[證明]

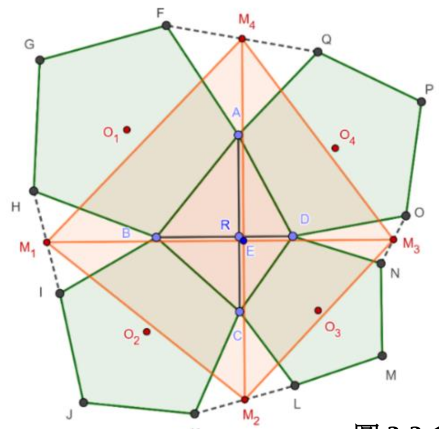


圖 3-2-15

如圖 3-2-15，當外接正 n 邊形時，設$\theta = \frac{2\pi}{n}$，

則由**定理 3-2-11(1)**的證明可知：

$\overrightarrow{M_1M_3} = (\cos\theta + 1)\overrightarrow{BD} + \sin\theta\overrightarrow{AC} * i$

且 $\overrightarrow{M_4M_2} = (\cos\theta + 1)\overrightarrow{AC} - \sin\theta\overrightarrow{BD} * i$，

因為原四邊形 $ABCD$ 為垂對四邊形，

所以 $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$。

推得 $\overrightarrow{M_1M_3} \cdot \overrightarrow{M_4M_2} = (\cos\theta + 1)^2\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} - \sin\theta(\cos\theta + 1)\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD} * i$

$+\sin\theta(\cos\theta + 1)\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} * i - \sin^2\theta\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

從而 $\overleftrightarrow{M_1M_3} \perp \overleftrightarrow{M_2M_4}$，故相鄰兩頂點之中點的對點連線$\overleftrightarrow{M_1M_3}$、$\overleftrightarrow{M_2M_4}$也會垂直。

5. 對角線垂直且等長的四邊形

不論外接正多邊形為何，相鄰兩頂點之中點的對點連線都會垂直且等長，而有以下定理：

定理 3-2-13 (凡・奧貝爾之等垂對四邊形定理 2)

設原四邊形 *ABCD* 為等垂對四邊形，若各邊向外作正多邊形，則相鄰兩頂點之中點的對點連線$\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$也會垂直且等長。

[證明]

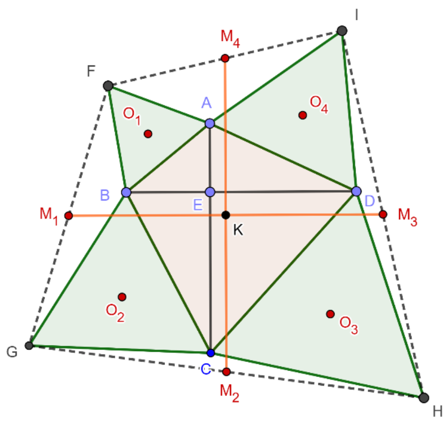


圖 3-2-16

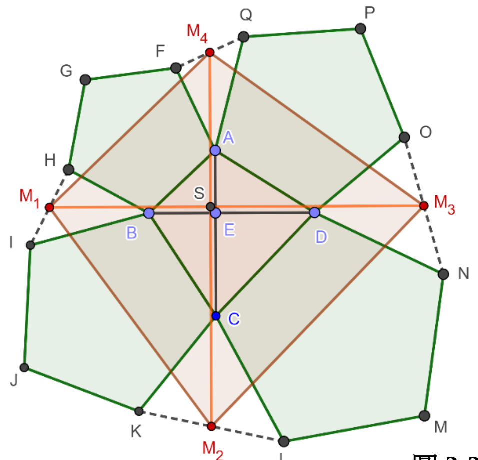


圖 3-2-17

由**定理 3-2-11** 可知：若原四邊形 *ABCD* 為等對四邊形，則相鄰兩頂點之中點的對點連線$\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$會等長。由**定理 3-2-12** 可知：若原四邊形 *ABCD* 為垂對四邊形，則相鄰兩頂點之中點的對點連線$\overleftrightarrow{M_1M_3}$、$\overleftrightarrow{M_2M_4}$會垂直。 因此，若原四邊形 *ABCD* 為等垂對四邊形，則相鄰兩頂點之中點的對點連線 $\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$ 也會垂直且等長。

接著，我們考慮由原四邊形各邊向外**作正多邊形**，再順向連接相鄰兩頂點之**等比例內分點**的**對點連線**，而有以下定理：

定理 3-2-14 (凡・奧貝爾之頂點內分點定理)

設原四邊形 *ABCD* 為等垂對四邊形，若各邊向外作正多邊形，則順向連接相鄰兩頂點之等比例內分點的對點連線$\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$也會垂直且等長。

[證明]

(1)如圖 3-2-18，

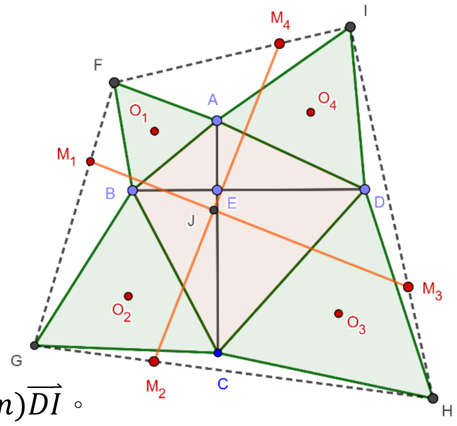


圖 3-2-18

設$\overline{FM_1}:\overline{M_1G}=\overline{GM_2}:\overline{M_2H}=\overline{HM_3}:\overline{M_3I}=\overline{IM_4}:\overline{M_4F}$

$=(1-m):m$，

因為 $\overrightarrow{M_1M_3}=\overrightarrow{M_1F}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HM_3}$，

且 $\overrightarrow{M_1M_3}=\overrightarrow{M_1G}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IM_3}$，

可得 $\overrightarrow{M_1M_3}=m\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BD}+m\overrightarrow{DH}+(1-m)\overrightarrow{GB}+(1-m)\overrightarrow{DI}$。

又 $2\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\tan\frac{\pi}{3}\overrightarrow{BA}*i$，$2\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{DC}+\tan\frac{\pi}{3}\overrightarrow{DC}*i$，

$2\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BC}+\tan\frac{\pi}{3}\overrightarrow{BC}*(-i)$，$2\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\tan\frac{\pi}{3}\overrightarrow{DA}*(-i)$，

所以

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{M_1M_3}&=-2m\overrightarrow{BF}+2\overrightarrow{BD}+2m\overrightarrow{DH}-2(1-m)\overrightarrow{BG}+2(1-m)\overrightarrow{DI}\\&=-m\left(\overrightarrow{BA}+\tan\frac{\pi}{3}\overrightarrow{BA}*i\right)+2\overrightarrow{BD}+m\left(\overrightarrow{DC}+\tan\frac{\pi}{3}\overrightarrow{DC}*i\right)\\&\quad-(1-m)\left(\overrightarrow{BC}+\tan\frac{\pi}{3}\overrightarrow{BC}*(-i)\right)+(1-m)\left(\overrightarrow{DA}+\tan\frac{\pi}{3}\overrightarrow{DA}*(-i)\right)\\&=m\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BA}\right)+(1-m)\left(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{BC}\right)+2\overrightarrow{BD}+m\tan\frac{\pi}{3}\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BA}\right)*i\\&\qquad-(1-m)\tan\frac{\pi}{3}\left(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{BC}\right)*i\end{aligned}$$

而 $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BA}=\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)-\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)-\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$；

$\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}\right)-\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\right)-\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right)=-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$，

故 $2\overrightarrow{M_1M_3}=m\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)-(1-m)(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})+2\overrightarrow{BD}+m\tan\frac{\pi}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)*i$

$$+(1-m)\tan\frac{\pi}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})*i$$

$$=(2m-1)\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\tan\frac{\pi}{3}\overrightarrow{AC}*i-(2m-1)\tan\frac{\pi}{3}\overrightarrow{BD}*i$$

$$=\left(\overrightarrow{BD}+\tan\frac{\pi}{3}\overrightarrow{AC}*i\right)+(2m-1)(\overrightarrow{AC}-\tan\frac{\pi}{3}\overrightarrow{BD}*i)。$$

同理 $2\overrightarrow{M_4M_2}=\left(\overrightarrow{AC}-\tan\frac{\pi}{3}\overrightarrow{BD}*i\right)-(2m-1)\left(\overrightarrow{BD}+\tan\frac{\pi}{3}\overrightarrow{AC}*i\right)$。

(2)因為$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{BD}$的夾角為$\frac{\pi}{2}$，所以$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{BD}*i$的夾角為π，且$\overrightarrow{BD}$和$\overrightarrow{AC}*i$的夾角為0，

又 $\overleftrightarrow{AC}\perp\overleftrightarrow{BD}\Rightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，且 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$，

所以 $4\overrightarrow{M_1M_3}\cdot\overrightarrow{M_4M_2}=-(2m-1)\left(\left|\overrightarrow{BD}\right|^2+\tan\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos0\right)$

$$-(2m-1)\left(\tan\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos0+\tan^2\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\right)$$

$$+(2m-1)\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\tan\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\pi\right)$$

$$+(2m-1)\left(-\tan\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\pi+\tan^2\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)=0，$$

推得 $\overleftrightarrow{M_1M_3}\perp\overleftrightarrow{M_2M_4}$。

又 $4\left|\overrightarrow{M_1M_3}\right|^2=\left|\overrightarrow{BD}\right|^2+2\tan\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos0+\tan^2\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$

$$+(2m-1)^2\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2\tan\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos\pi+\tan^2\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)$$

$$=\left|\overrightarrow{BD}\right|^2+2\tan\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|+\tan^2\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$$

$$+(2m-1)^2\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+2\tan\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|+\tan^2\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)$$

且 $4\left|\overrightarrow{M_4M_2}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2\tan\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos\pi+\tan^2\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{BD}\right|^2$

$$+(2m-1)^2\left(\left|\overrightarrow{BD}\right|^2+2\tan\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos0+\tan^2\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\right)$$

$$=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+2\tan\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|+\tan^2\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{BD}\right|^2$$

$$+(2m-1)^2\left(\left|\overrightarrow{BD}\right|^2+2\tan\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|+\tan^2\frac{\pi}{3}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\right)$$

推知 $\left|\overrightarrow{M_1M_3}\right|=\left|\overrightarrow{M_4M_2}\right|$。故相鄰兩頂點之等比例內分點的對點連線$\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$也會垂直且等長。

(3)仿照上面的證明可推知：如圖 3-2-19，當外接正 n 邊形時，設$\theta=\frac{2\pi}{n}$，

則 $\overrightarrow{M_1M_3}=(\cos\theta+1)\overrightarrow{BD}+\sin\theta\overrightarrow{AC}*i-(2m-1)(\cos\theta\overrightarrow{AC}+\sin\theta\overrightarrow{BD}*i)$

同理 $\overrightarrow{M_4M_2}=(\cos\theta+1)\overrightarrow{AC}-\sin\theta\overrightarrow{BD}*i+(2m-1)(\cos\theta\overrightarrow{BD}-\sin\theta\overrightarrow{AC}*i)$。

所以 $\overrightarrow{M_1M_3}\cdot\overrightarrow{M_4M_2}=(2m-1)(\cos\theta+1)\left(\cos\theta\left|\overrightarrow{BD}\right|^2-\sin\theta\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos0\right)$

$$+(2m-1)\sin\theta\left(\cos\theta\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos0-\sin\theta\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\right)$$

$$-(2m-1)(\cos\theta+1)\left(\cos\theta\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\sin\theta\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\pi\right)$$

$$+(2m-1)\sin\theta\left(\cos\theta\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\pi+\sin\theta\left|\overrightarrow{BD}\right|^2\right)=0,$$

推得 $\overleftrightarrow{M_1M_3}\perp\overleftrightarrow{M_2M_4}$。

又 $\left|\overrightarrow{M_1M_3}\right|^2=(\cos\theta+1)^2\left|\overrightarrow{BD}\right|^2+\sin^2\theta\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+(2m-1)^2\left|\cos\theta\overrightarrow{AC}+\sin\theta\overrightarrow{BD}*i\right|^2$

$$+2\sin\theta(\cos\theta+1)\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos0$$

$$\left|\overrightarrow{M_4M_2}\right|^2=(\cos\theta+1)^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\sin^2\theta\left|\overrightarrow{BD}\right|^2+(2m-1)^2\left|\cos\theta\overrightarrow{BD}-\sin\theta\overrightarrow{AC}*i\right|^2$$

$$-2\sin\theta(\cos\theta+1)\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\pi$$

且 $\left|\cos\theta\overrightarrow{AC}+\sin\theta\overrightarrow{BD}*i\right|^2=\cos^2\theta\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\sin^2\theta\left|\overrightarrow{BD}\right|^2+2\sin\theta\cos\theta\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\pi$

$$\left|\cos\theta\overrightarrow{BD}-\sin\theta\overrightarrow{AC}*i\right|^2=\cos^2\theta\left|\overrightarrow{BD}\right|^2+\sin^2\theta\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2\sin\theta\cos\theta\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos0$$

推知 $\left|\overrightarrow{M_1M_3}\right|=\left|\overrightarrow{M_4M_2}\right|$。

故相鄰兩頂點之等比例內分點的對點連線 $\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$ 也會垂直且等長。

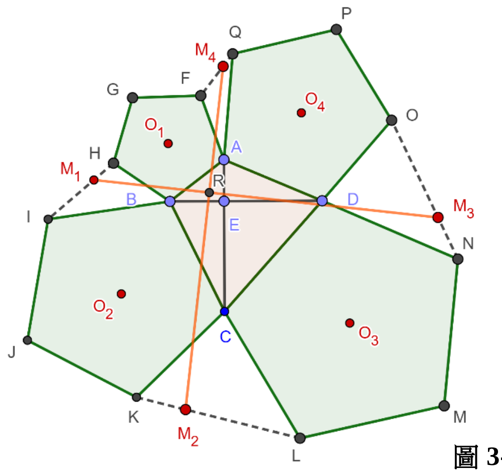


圖 3-2-19

(三) 任意四邊形逆向外接相似矩形、菱形或外接平行四邊形之相對的兩中心連線或相鄰兩頂點之中點的對點連線

1. 逆向外接相似矩形之相對的兩中心連線或相鄰兩頂點之中點的對點連線。

不論四邊形為何，相對的兩矩形之中心連線都會互相垂直，且相鄰兩頂點之中點的對點連線都會等長，而有以下定理：

定理 3-2-15(凡·奧貝爾之外接相似矩形定理) 參[5]

設原四邊形 $ABCD$ 為任意四邊形，若各邊向外逆向作相似矩形，則相對的兩中心連線 $\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$會滿足$\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$；相鄰兩頂點之中點的對點連線$\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$會滿足 $\overline{M_1M_3} = \overline{M_2M_4}$。

[證明]

(1)如圖 3-2-20，設逆向外接相似矩形的邊長比為r，利用**向量迴路法**可得

$$2\overrightarrow{O_1O_3} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AD} + r\overrightarrow{AB} * i + \overrightarrow{BC} + r\overrightarrow{CD} * (-i)，$$

$$2\overrightarrow{O_2O_4} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{r}\overrightarrow{BC} * i + (-\overrightarrow{AB}) + \frac{1}{r}\overrightarrow{AD} * i，$$

推得

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{O_1O_3} \cdot \overrightarrow{O_2O_4} &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} + \frac{1}{r}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} * i - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + r\overrightarrow{AB} * i \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &\quad + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{r}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} * i - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} + r\overrightarrow{CD} * i \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{r}\left(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} * i + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} * i\right) + r\left(\overrightarrow{AB} * i \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} * i \cdot \overrightarrow{AB}\right)\end{aligned}$$

設$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{BC}$的夾角為φ，則$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{BC} * i$的夾角為$\varphi + \frac{\pi}{2}$，且$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{AD} * i$的夾角為 $\varphi - \frac{\pi}{2}$(或$\frac{\pi}{2} - \varphi$)，所以 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} * i = |\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}| \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|\sin\varphi$，

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} * i = |\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AD}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = |\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|\sin\varphi。$$

推得 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} * i + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} * i = 0$，同理 $\overrightarrow{AB} * i \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} * i \cdot \overrightarrow{AB} = 0$。

從而 $4\overrightarrow{O_1O_3} \cdot \overrightarrow{O_2O_4} = 0$，故 $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$。

(2)利用**向量迴路法**可得

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{M_1M_3} &= \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{DK} \\ &= r\overrightarrow{BA} * (-i) + \frac{1}{r}\overrightarrow{BC} * i + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ &\quad + r\overrightarrow{CD} * (-i) + \frac{1}{r}\overrightarrow{AD} * i \\ &= \left(\overrightarrow{BA} - r\overrightarrow{BA} * i\right) + \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{r}\overrightarrow{AD} * i\right)\end{aligned}$$

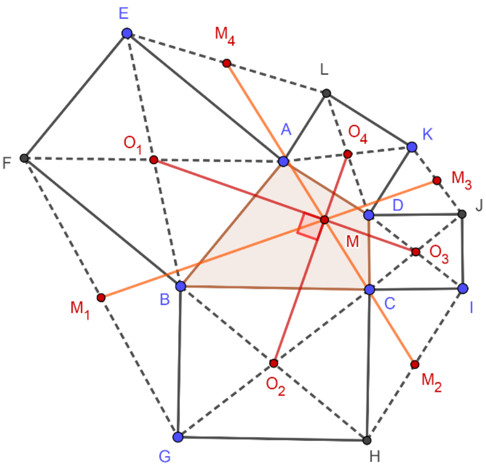


圖 3-2-20

$$+\left(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{r}\overrightarrow{BC}*i\right)+\left(\overrightarrow{CD}-r\overrightarrow{CD}*i\right)$$

同理 $2\overrightarrow{M_2M_4}=\left(\overrightarrow{BA}+r\overrightarrow{BA}*i\right)+\left(\overrightarrow{DA}-\frac{1}{r}\overrightarrow{DA}*i\right)+\left(\overrightarrow{CB}-\frac{1}{r}\overrightarrow{CB}*i\right)+\left(\overrightarrow{CD}+r\overrightarrow{CD}*i\right)$

$$=\left(\overrightarrow{BA}+r\overrightarrow{BA}*i\right)+\left(-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{r}\overrightarrow{AD}*i\right)+\left(-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{r}\overrightarrow{BC}*i\right)+\left(\overrightarrow{CD}+r\overrightarrow{CD}*i\right)$$

仿**定理 3-2-11** 可證出 $4\left|\overrightarrow{M_1M_3}\right|^2=2\overrightarrow{M_1M_3}\cdot2\overrightarrow{M_1M_3}=2\overrightarrow{M_2M_4}\cdot2\overrightarrow{M_2M_4}=4\left|\overrightarrow{M_2M_4}\right|^2$，

即$\left|\overrightarrow{M_1M_3}\right|=\left|\overrightarrow{M_2M_4}\right|$，故 $\overline{M_1M_3}=\overline{M_2M_4}$。

2. 逆向外接相似菱形之相對的兩中心連線或相鄰兩頂點之中點的對點連線。

不論四邊形為何，相對的兩菱形之中心連線都會等長，且相鄰兩頂點之中點的對點連線都會互相垂直，而有以下定理：

定理 3-2-16(凡·奧貝爾之外接相似菱形定理) 參[5]

設原四邊形 *ABCD* 為任意四邊形，若各邊向外逆向作相似菱形，則相對的兩中心連線 $\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$會滿足$\overline{O_1O_3}=\overline{O_2O_4}$；相鄰兩頂點之中點的對點連線$\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$會滿足 $\overline{M_1M_3}\perp\overline{M_2M_4}$。

[證明]

(1)如圖 3-2-21，設逆向外接相似菱形的一內角為α，利用**向量迴路法**可得

$2\overrightarrow{O_1O_3}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}*e^{(-\alpha)i}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}*e^{(-\alpha)i}$，

$2\overrightarrow{O_2O_4}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}*e^{\alpha i}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}*e^{\alpha i}$，

仿**定理 3-2-11 和定理 3-2-15(2)**可證出

$4\left|\overrightarrow{O_1O_3}\right|^2=2\overrightarrow{O_1O_3}\cdot2\overrightarrow{O_1O_3}=2\overrightarrow{O_2O_4}\cdot2\overrightarrow{O_2O_4}=4\left|\overrightarrow{O_2O_4}\right|^2$，

即$\left|\overrightarrow{O_1O_3}\right|=\left|\overrightarrow{O_2O_4}\right|$，故 $\overline{O_1O_3}=\overline{O_2O_4}$。

(2)利用**向量迴路法**可得

$$2\overrightarrow{M_1M_3}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{DK}$$

$$=\overrightarrow{BA}*e^{(-\alpha)i}+\overrightarrow{BC}*e^{\alpha i}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$$

$$+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}*e^{(-\alpha)i}+\overrightarrow{AD}*e^{\alpha i}$$

$$=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}*e^{(-\alpha)i}\right)+\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}*e^{\alpha i}\right)$$

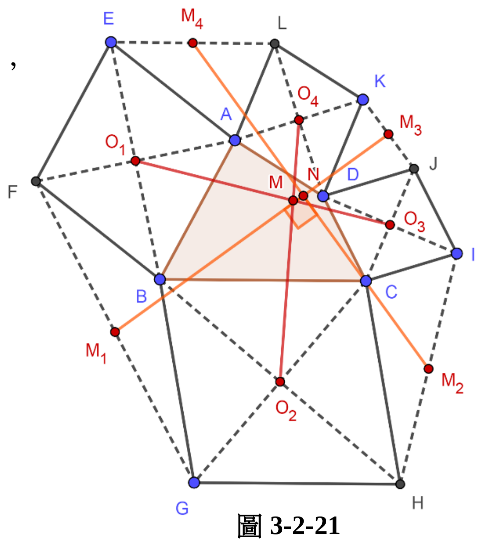


圖 3-2-21

$$+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}*e^{\alpha i}\right)+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}*e^{(-\alpha)i}\right)$$

同理

$$2\overrightarrow{M_2M_4}=\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BA}*e^{(-\alpha)i}\right)+\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}*e^{\alpha i}\right)+\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}*e^{\alpha i}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}*e^{(-\alpha)i}\right)$$

$$=\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BA}*e^{(-\alpha)i}\right)+\left(-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}*e^{\alpha i}\right)+\left(-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}*e^{\alpha i}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}*e^{(-\alpha)i}\right)$$

仿**定理 3-2-15(1)**可證出 $4\overrightarrow{M_1M_3}\cdot\overrightarrow{M_2M_4}=0$，故 $\overline{M_1M_3}\perp\overline{M_2M_4}$。

3. 外接平行四邊形之相對的兩中心連線或相鄰兩頂點之中點的對點連線。

不論四邊形為何，相對的兩平行四邊形之**中心連線等長**的**充要條件**為相鄰兩頂點之中點的**對點連線垂直**；相對的兩平行四邊形之**中心連線垂直**的**充要條件**為相鄰兩頂點之中點的**對點連線等長**，**等長和垂直有對偶現象**，而有以下定理：

定理 3-2-17(凡·奧貝爾之外接平行四邊形定理) 參[6]

設原四邊形 *ABCD* 為任意四邊形，若各邊向外作平行四邊形，則相對的兩中心連線 $\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$和相鄰兩頂點之中點的對點連線$\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$會滿足

(1) $\overline{O_1O_3}=\overline{O_2O_4}\Leftrightarrow\overline{M_1M_3}\perp\overline{M_2M_4}$ ； (2) $\overline{O_1O_3}\perp\overline{O_2O_4}\Leftrightarrow\overline{M_1M_3}=\overline{M_2M_4}$。

[證明]

(1)如圖 3-2-22，$\overrightarrow{OO_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}\right)\Rightarrow\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OO_1}-\overrightarrow{OB}$；

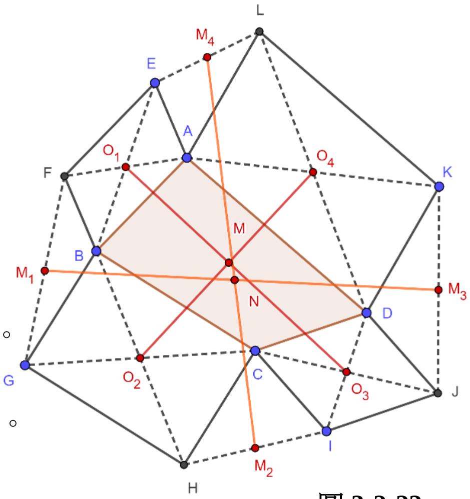


圖 3-2-22

同理 $\overrightarrow{OL}=2\overrightarrow{OO_4}-\overrightarrow{OD}$，

推得 $\overrightarrow{OM_4}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OL}\right)=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{OO_4}-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)$。

同理可得 $\overrightarrow{OM_3}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OJ}\right)=\overrightarrow{OO_4}+\overrightarrow{OO_3}-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$。

$\overrightarrow{OM_2}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OH}\right)=\overrightarrow{OO_3}+\overrightarrow{OO_2}-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)$。

$\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OF}\right)=\overrightarrow{OO_2}+\overrightarrow{OO_1}-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$。

所以 $\overrightarrow{M_1M_3}=\overrightarrow{OM_3}-\overrightarrow{OM_1}=\left(\overrightarrow{OO_4}-\overrightarrow{OO_2}\right)+\left(\overrightarrow{OO_3}-\overrightarrow{OO_1}\right)=\overrightarrow{O_2O_4}+\overrightarrow{O_1O_3}$；

$\overrightarrow{M_2M_4}=\overrightarrow{OM_4}-\overrightarrow{OM_2}=\left(\overrightarrow{OO_4}-\overrightarrow{OO_2}\right)-\left(\overrightarrow{OO_3}-\overrightarrow{OO_1}\right)=\overrightarrow{O_2O_4}-\overrightarrow{O_1O_3}$。

從而 $\overrightarrow{M_1M_3}\cdot\overrightarrow{M_2M_4}=\left(\overrightarrow{O_2O_4}+\overrightarrow{O_1O_3}\right)\cdot\left(\overrightarrow{O_2O_4}-\overrightarrow{O_1O_3}\right)=\left|\overrightarrow{O_2O_4}\right|^2-\left|\overrightarrow{O_1O_3}\right|^2$，

故 $\overline{O_1O_3}=\overline{O_2O_4}\Leftrightarrow\overline{M_1M_3}\perp\overline{M_2M_4}$。

(2)由(1)可知：$2\overrightarrow{O_2O_4}=\overrightarrow{M_1M_3}+\overrightarrow{M_2M_4}$；$2\overrightarrow{O_1O_3}=\overrightarrow{M_1M_3}-\overrightarrow{M_2M_4}$

從而 $4\overrightarrow{O_1O_3}\cdot\overrightarrow{O_2O_4}=\left(\overrightarrow{M_1M_3}+\overrightarrow{M_2M_4}\right)\cdot\left(\overrightarrow{M_1M_3}-\overrightarrow{M_2M_4}\right)=\left|\overrightarrow{M_1M_3}\right|^2-\left|\overrightarrow{M_2M_4}\right|^2$，

故 $\overline{O_1O_3}\perp\overline{O_2O_4}\Leftrightarrow\overline{M_1M_3}=\overline{M_2M_4}$。

(四) 任意八邊形外接平行四邊形

1. 外接正方形相對兩中心的中點之對點連線

只有在外接正方形時，相對的兩正方形中心連線的中點之對點連線會垂直且等長，而有以下的定理：

定理 3-2-18 (凡·奧貝爾之八邊形定理 1)

設原八邊形 *ABCDEFGH* 為任意八邊形，若各邊向外作正方形，則相對的兩正方形中心連線的中點之對點連線 $\overline{A_1C_1}$、$\overline{B_1D_1}$ 會滿足 $\overline{A_1C_1}\perp\overline{B_1D_1}$ 且 $\overline{A_1C_1}=\overline{B_1D_1}$。

[證明]

如圖 3-2-23，由**愛可爾斯定理 1 的推廣**可知：一組正方形之相對頂點的中點也會形成正方形，從而發現**定理 3-2-18** 也就是**八邊形內的凡・奧貝爾定理**，故 $\overline{A_1C_1}\perp\overline{B_1D_1}$ 且 $\overline{A_1C_1}=\overline{B_1D_1}$。

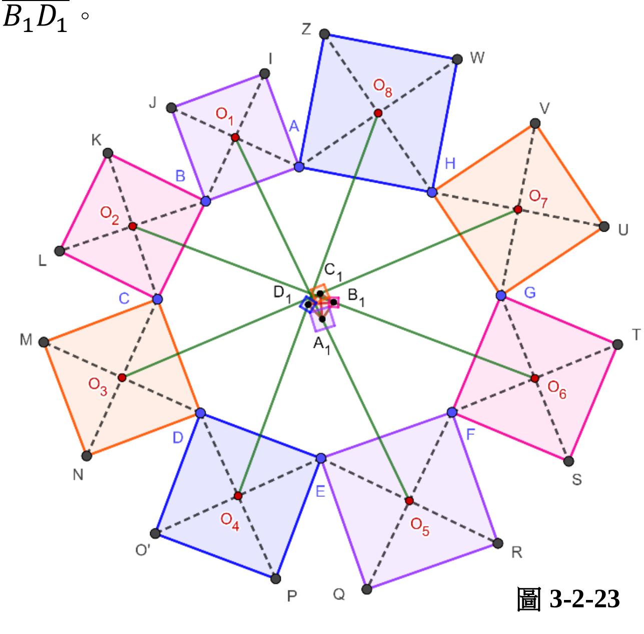


圖 3-2-23

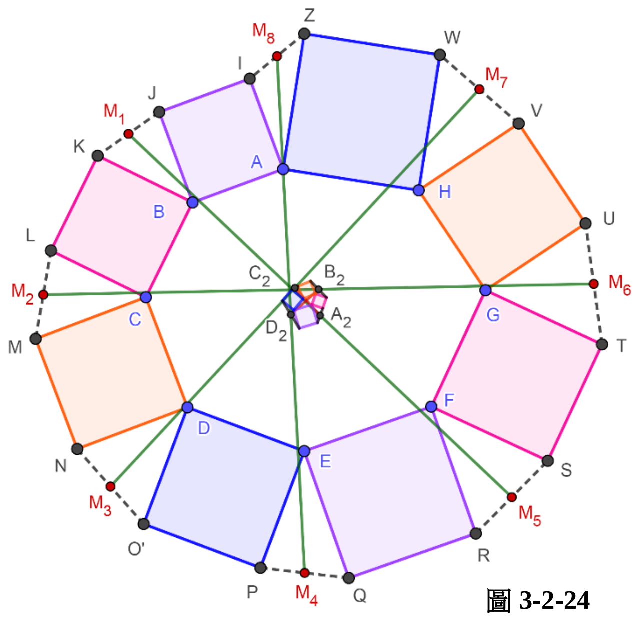


圖 3-2-24

2. 外接正方形相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線

只有在外接正方形時，相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線會垂直且等長，而有以下的定理：

> **定理 3-2-19 (凡·奧貝爾之八邊形定理 2)**
>
> **設原八邊形 *ABCDEFGH* 為任意八邊形，若各邊向外作正方形，則相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線 $\overline{A_2C_2}$、$\overline{B_2D_2}$ 會滿足 $\overline{A_2C_2} \perp \overline{B_2D_2}$ 且 $\overline{A_2C_2} = \overline{B_2D_2}$。**

[證明]

如圖 3-2-24，由**愛可爾斯定理 1 的推廣**可知：一組正方形之相對頂點的中點也會形成正方形，從而發現**定理 3-2-19** 也就是**八邊形內的凡・奧貝爾之頂點中點定理**，故 $\overline{A_2C_2} \perp \overline{B_2D_2}$ 且 $\overline{A_2C_2} = \overline{B_2D_2}$。

3. 逆向外接矩形相對兩中心的中點之對點連線

逆向外接矩形時，相對的兩矩形中心連線的中點之對點連線會垂直，而有以下的定理：

> **定理 3-2-20 (凡·奧貝爾之八邊形定理 3)**
>
> **設原八邊形 *ABCDEFGH* 為任意八邊形，若各邊向外逆向作相似矩形，則相對的兩矩形中心連線的中點之對點連線 $\overline{A_1C_1}$、$\overline{B_1D_1}$ 會滿足 $\overline{A_1C_1} \perp \overline{B_1D_1}$。**

[證明]

如圖 3-2-25，由**愛可爾斯定理 1 的推廣**可知：一組相似矩形之相對頂點的中點也會形成相似矩形。從而發現**定理 3-2-20** 也就是**八邊形內的凡·奧貝爾之外接相似矩形定理 1**，故 $\overline{A_1C_1} \perp \overline{B_1D_1}$。

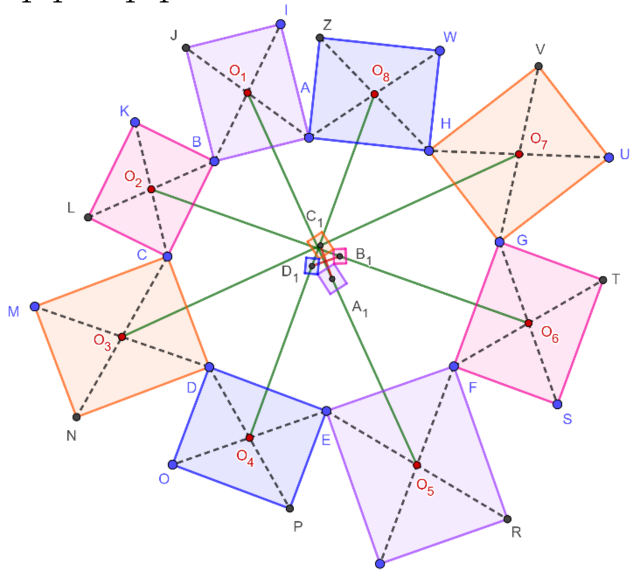


圖 3-2-25

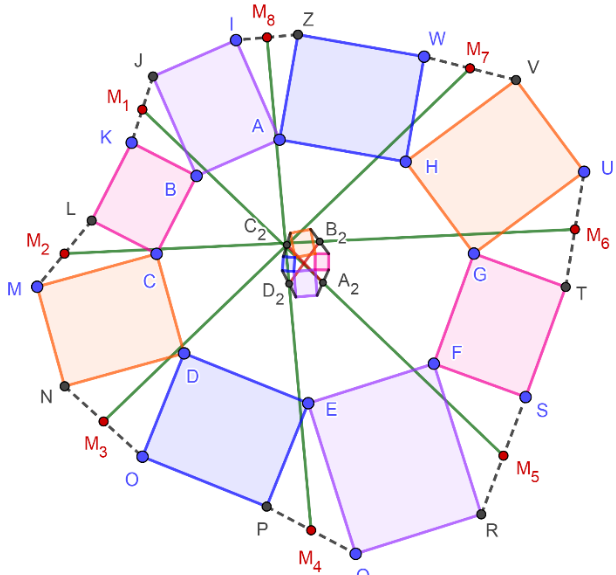


圖 3-2-26

4. 逆向外接矩形相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線

逆向外接矩形時，相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線會等長，而有以下的定理：

定理 3-2-21 (凡·奧貝爾之八邊形定理 4)

設原八邊形 *ABCDEFGH* 為任意八邊形，若各邊向外逆向作相似矩形，則相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線 $\overline{A_2C_2}$、$\overline{B_2D_2}$ 會滿足 $\overline{A_2C_2}=\overline{B_2D_2}$。

[證明]

如圖 3-2-26，由**愛可爾斯定理 1 的推廣**可知：一組相似矩形之相對頂點的中點也會形成相似矩形，從而發現**定理 3-2-21** 也就是**八邊形內的凡·奧貝爾之外接相似矩形定理 2**，故 $\overline{A_2C_2}=\overline{B_2D_2}$。

5. 逆向外接菱形相對兩中心的中點之對點連線

逆向外接菱形時，相對的兩菱形中心連線的中點之對點連線會等長，而有以下的定理：

定理 3-2-22 (凡·奧貝爾之八邊形定理 5)

設原八邊形 *ABCDEFGH* 為任意八邊形，若各邊向外逆向作相似菱形，則相對的兩菱形中心連線的中點之對點連線 $\overline{A_1C_1}$、$\overline{B_1D_1}$ 會滿足 $\overline{A_1C_1}=\overline{B_1D_1}$。

[證明]

如圖 3-2-27，由**愛可爾斯定理 1 的推廣**可知：一組相似菱形之相對頂點的中點也會形成相似菱形。從而發現**定理 3-2-22** 也就是**八邊形內的凡·奧貝爾之外接相似菱形定理 1**，故 $\overline{A_1C_1}=\overline{B_1D_1}$。

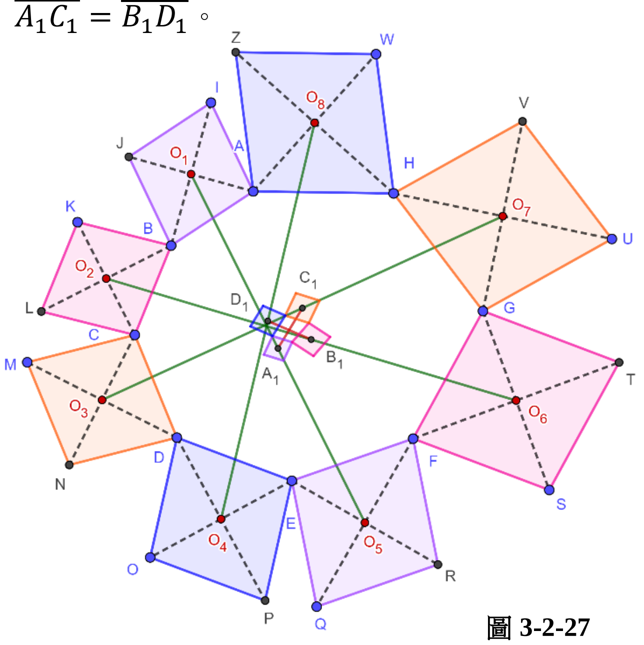


圖 3-2-27

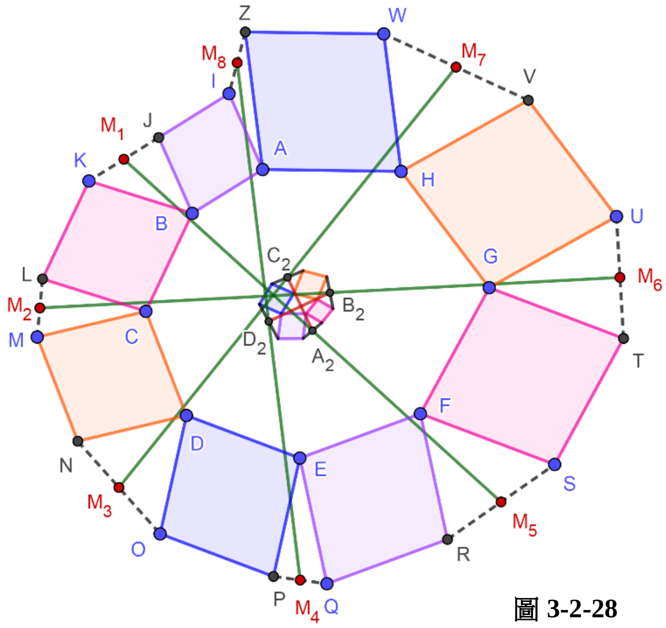


圖 3-2-28

6. 逆向外接菱形相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線

逆向外接菱形時，相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線會垂直，而有以下的定理：

定理 3-2-23 (凡·奧貝爾之八邊形定理 6)

設原八邊形 *ABCDEFGH* 為任意八邊形，若各邊向外逆向作相似菱形，則相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線 $\overline{A_2C_2}$、$\overline{B_2D_2}$ 會滿足 $\overline{A_2C_2} \perp \overline{B_2D_2}$。

[證明]

如圖 3-2-28，由**愛可爾斯定理 1 的推廣**可知：一組相似菱形之相對頂點的中點也會形成相似菱形，從而發現**定理 3-2-23** 也就是**八邊形內的凡·奧貝爾之外接相似菱形定理 2**，故 $\overline{A_2C_2} \perp \overline{B_2D_2}$。

7. 外接對邊相似的平行四邊形之相對的兩中心連線或相鄰兩頂點之中點的對點連線。

外接平行四邊形時，相對的兩相似圖形中心連線的中點之**對點連線等長**的**充要條件**為相鄰兩頂點之中點的相對中點之**對點連線垂直**；相對的兩相似圖形中心連線的中點之**對點連線垂直**的**充要條件**為相鄰兩頂點之中點的相對中點之**對點連線等長**，而有以下定理：

定理 3-2-24 (凡·奧貝爾之八邊形定理 7)

設原八邊形 *ABCD* 為任意四邊形，若各邊向外作對邊相似的平行四邊形，則相對的兩中心連線的中點之對點連線 $\overline{A_1C_1}$、$\overline{B_1D_1}$和相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線$\overline{A_2C_2}$、$\overline{B_2D_2}$會滿足(1)$\overline{A_1C_1} = \overline{B_1D_1} \Leftrightarrow \overline{A_2C_2} \perp \overline{B_2D_2}$；(2)$\overline{A_1C_1} \perp \overline{B_1D_1} \Leftrightarrow \overline{A_2C_2} = \overline{B_2D_2}$。

[證明]

如圖 3-2-29，由**愛可爾斯定理 1 的推廣**可知：一組相似平行四邊形之相對頂點的中點也會形成相似平行四邊形，從而發現**定理 3-2-24** 也就是**八邊形內的凡·奧貝爾之外接平行四邊形定理**，

故(1)$\overline{A_1C_1} = \overline{B_1D_1} \Leftrightarrow \overline{A_2C_2} \perp \overline{B_2D_2}$；

(2)$\overline{A_1C_1} \perp \overline{B_1D_1} \Leftrightarrow \overline{A_2C_2} = \overline{B_2D_2}$。

若將**中點**改為**內分點**，因為八邊形內由內分點所形成的四個平行四邊形**無法首尾相接**，所以其內部**不能圍成一個四邊形**，從而上述**凡·奧貝爾之八邊形定理**的推廣**並不成立**。

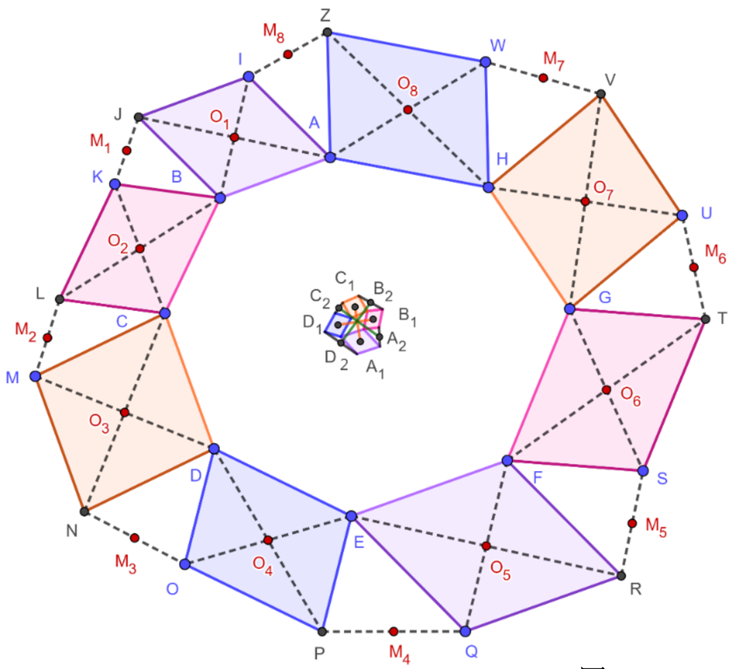


圖 3-2-29

肆、研究討論

一、**凡‧奧貝爾定理**的**退化情形**，即使**四邊形退化為三角形**(一條邊長度為 0 的四邊形)，**凡‧奧貝爾定理依然成立**。如圖 4-1-1，三角形的三邊各外接一個正方形，分別連接其中兩邊外接的正方形之中心以及第三邊外接的正方形之中心、第三邊所對角的頂點，則兩線段**既垂直且等長**。

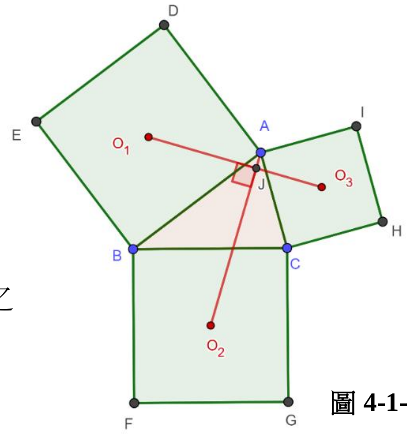


圖 4-1-1

二、考慮**對角線等長、垂直、垂直且等長**的四邊形分別**退化成等腰、直角及等腰直角三角形**的情形。三角形的三邊各外接一個正多邊形，分別連接兩腰(或兩股)外接的正多邊形之中心以及底邊(或斜邊)外接的正多邊形中心、頂角(或直角)點，觀察所連的兩線段之關係。如圖 4-2-1~3，發現**兩連線的關係和退化前完全一致**，即**等腰三角形時，兩連線會垂直；直角三角形時，兩連線會等長；等腰直角三角形時，兩連線會垂直且等長**。

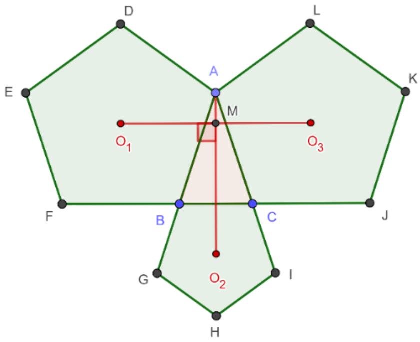


圖 4-2-1

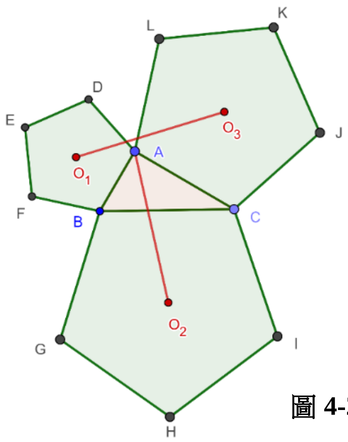


圖 4-2-2

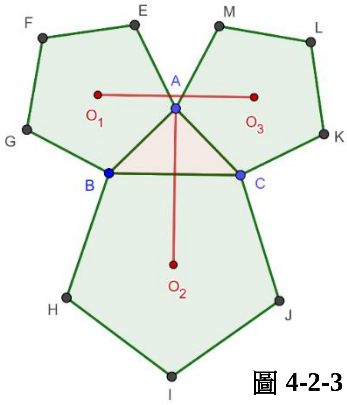


圖 4-2-3

三、**凡‧奧貝爾之頂點中點定理**的**退化情形**，即使四邊形**退化為三角形，凡‧奧貝爾頂點中點四邊形定理**依然成立。如圖 4-3-1，三角形的三邊各外接一個正方形，分別考慮其中一角兩邊外接的正方形各與此角對邊**外接的正方形相鄰之兩組頂點的中點**，以及與角兩邊外接的正方形在**此角外側之兩邊中點**，再**連接相對之中點**，則**兩線段既垂直且等長**。

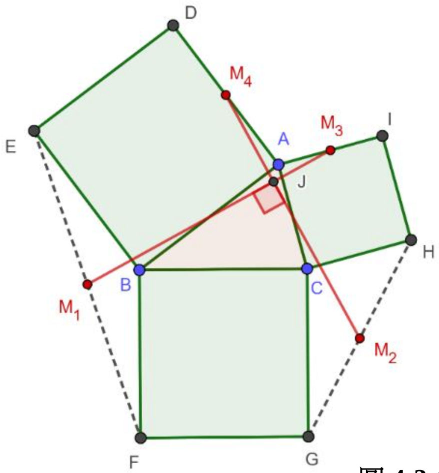


圖 4-3-1

四、考慮**對角線等長、垂直、垂直且等長**的四邊形分別**退化成等腰、直角及等腰直角三角形**的情形。三角形的三邊各外接一個正多邊形，分別考慮兩腰(或兩股)外接的正多邊形各與底邊(或斜邊)**外接的正多邊形相鄰之兩組頂點的中點**，以及兩腰(或兩股)外接的正多邊形在三角形頂角(或直角)**外側的兩邊中點**，再連接相對之中點，觀察所連的兩線段之關係。如圖 4-4-1~3，發現**兩連線的關係和退化前完全一致**，即**等腰三角形時，兩連線會等長；直角三角形時，兩連線會垂直；等腰直角三角形時，兩連線會垂直且等長**。

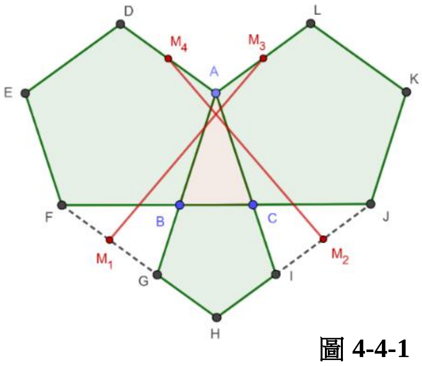


圖 4-4-1

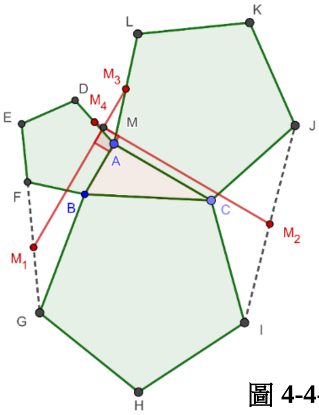


圖 4-4-2

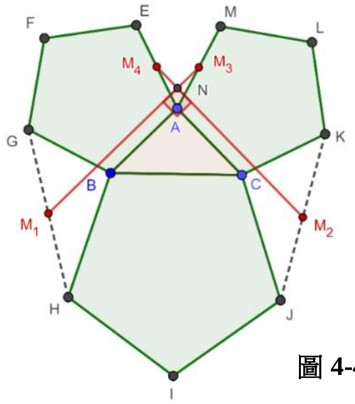


圖 4-4-3

五、**凡•奧貝爾之頂點內分點定理**的**退化情形**，即使四邊形**退化為等腰直角三角形，凡•奧貝爾頂點內分點四邊形定理**依然成立。如圖 4-5-1，等腰直角三角形的三邊各外接一個正多邊形，分別考慮兩股外接的正多邊形各與斜邊外接的正多邊形相鄰之**兩組頂點的等比例內分點**，以及與兩股外接的正多邊形在**直角外側之兩邊的等比例內分點**，再連接**相對之內分點**，則**兩線段既垂直且等長**。

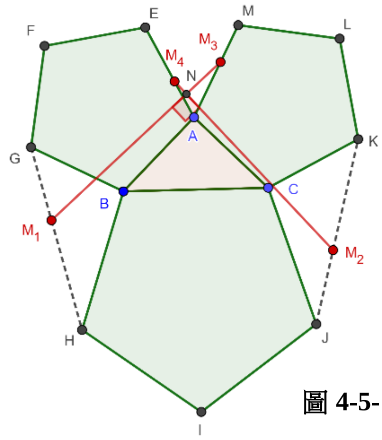


圖 4-5-1

六、考慮八邊形外接正方形**退化成七邊形、六邊形、五邊形**時，**相對兩中心的中點**之對點連線和**相鄰兩頂點之中點的相對中點**之對點連線的情形。如圖 4-6-1~3，也會**垂直且等長**。

即 $\overline{A_1C_1} \perp \overline{B_1D_1}$、$\overline{A_1C_1} = \overline{B_1D_1}$

且 $\overline{A_2C_2} \perp \overline{B_2D_2}$、$\overline{A_2C_2} = \overline{B_2D_2}$。除此之外，兩組**對點連線也會共點**且**各自為彼此的分角線**。而當逆向外接**矩形或菱形**時，也有**退化前的結論**。

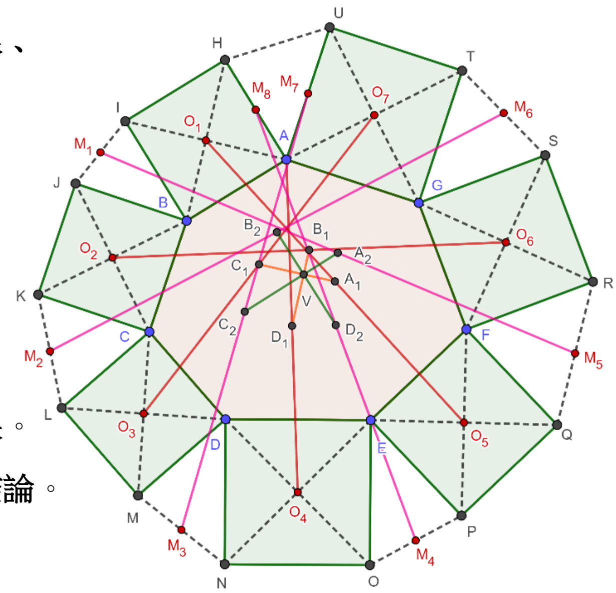


圖 4-6-1

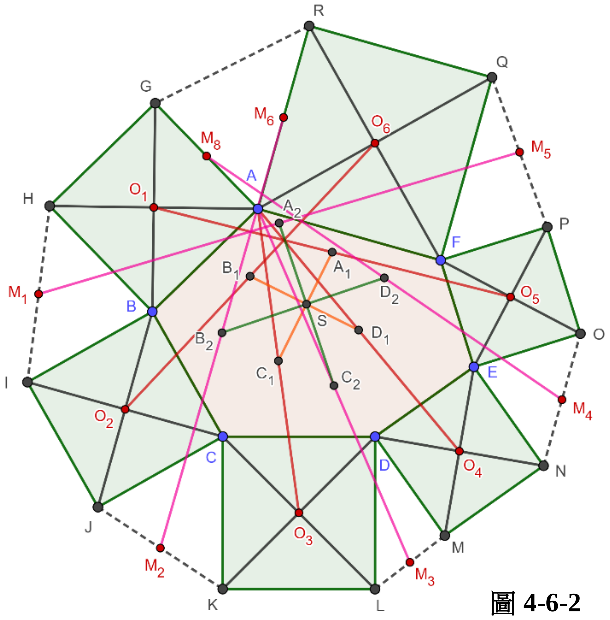


圖 4-6-2

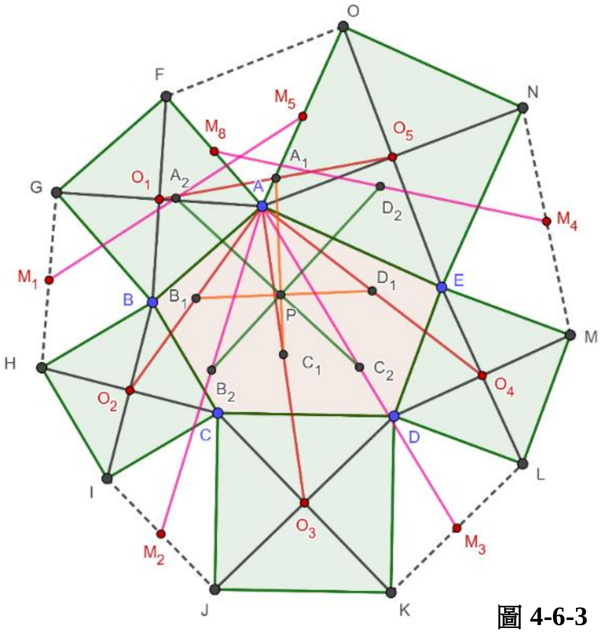


圖 4-6-3

七、如圖 4-7-1，設原四邊形 *ABCD* 為**任意四邊形**，由各邊向外作**正方形**，並分別作出相對的兩正方形之**中心連線**和相鄰兩頂點之中點的**對點連線**，則兩組對點連線**除了各自垂直且等長外，也會共點**且**各自為彼此的分角線**。若考慮中心四邊形，再由各邊向外作正方形，則由**芬斯勒－哈德維格爾定理**可知：**新的外接正方形之中心**恰為**原外接正方形相鄰兩頂點之中點**。即**凡•奧貝爾之頂點中點定理**可經由兩次**凡•奧貝爾定理**推知。同理，如圖 4-7-2，**凡·奧貝爾之八邊形定理 2** 可經由兩次**凡·奧貝爾之八邊形定理 1** 推知。除此之外，設原四邊形 *ABCD* 為**任意四邊形**，由各邊逆向外接**矩形(或菱形)**，考慮中心四邊形，再由各邊適當地逆向外接**菱形(或矩形)**，則由**芬斯勒－哈德維格爾定理的推廣**可知：**新逆向外接菱形(或矩形)之中心**恰為**原逆向外接的矩形(或菱形)相鄰兩頂點之中點**。

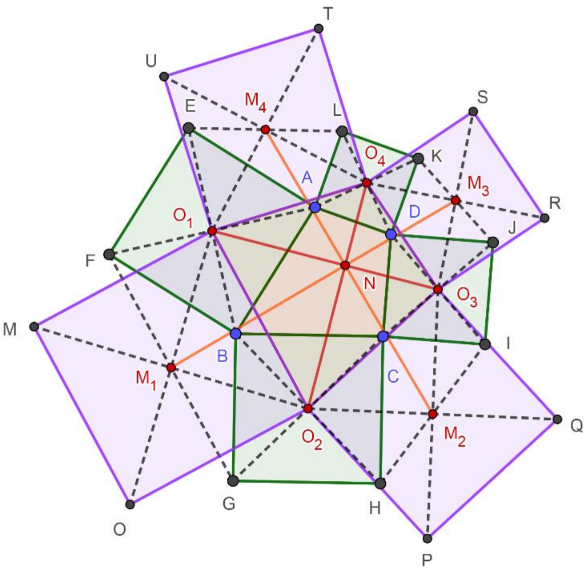


圖 4-7-1

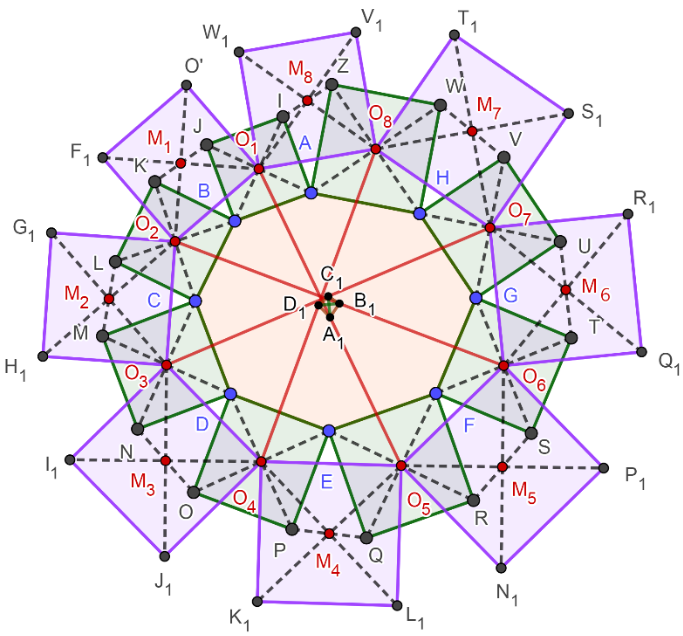


圖 4-7-2

伍、研究結果與結論

一、

外接**正多邊形** 原四邊形	相對中心的連線	相鄰兩頂點之中點的對點連線
等對四邊形	**垂直**	**等長**
垂對四邊形	**等長**	**垂直**
平行四邊形	**互相平分**	**互相平分**

此時**中心四邊形**與**原四邊形**、**中心四邊形**與**頂點中點四邊形**的對角線都有**等長和垂直對偶**，而**平分不變**的現象。即使**原四邊形**退化為**等腰**、**直角三角形**，也會有同樣的結論。然而，將**中點**改為**內分點**時，則只有**平分不變**，卻沒有**等長和垂直對偶**的現象。

二、

外接**正方形** 原四邊形	相對中心的連線	相鄰兩頂點之中點的對點連線
任意四邊形	**垂直且等長**	**垂直且等長**
平行四邊形	**垂直平分且等長**	**垂直平分且等長**
其他外接情形 原四邊形	外接**相似三角形**的對點連線	外接正多邊形相鄰兩頂點之**等比例內分點**的對點連線
平行四邊形	**互相平分**	**互相平分**
等垂對四邊形	**垂直且等長**	**垂直且等長**

三、

外接**矩形或菱形** 原四邊形	逆向外接**相似矩形**		逆向外接**相似菱形**	
	相對中心的連線	相鄰兩頂點之中點的對點連線	相對中心的連線	相鄰兩頂點之中點的對點連線
任意四邊形	**垂直**	**等長**	**等長**	**垂直**
外接**平行四邊形** 原四邊形	相對中心的連線	相鄰兩頂點之中點的對點連線	相對中心的連線	相鄰兩頂點之中點的對點連線
任意四邊形	**若(則)垂直**	**則(若)等長**	**若(則)等長**	**則(若)垂直**

此時**相對中心的連線**與**相鄰兩頂點之中點的對點連線**，也有**等長和垂直對偶**的現象。

四、

<table>
<tr><td>外接正方形
原八邊形</td><td colspan="2">相對中心的中點之對點連線</td><td colspan="2">相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線</td></tr>
<tr><td>任意八邊形</td><td colspan="2">垂直且等長</td><td colspan="2">垂直且等長</td></tr>
<tr><td rowspan="2">外接矩形或菱形
原
八邊形</td><td colspan="2">逆向外接相似矩形</td><td colspan="2">逆向外接相似菱形</td></tr>
<tr><td>相對中心的中點之對點連線</td><td>相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線</td><td>相對中心的中點之對點連線</td><td>相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線</td></tr>
<tr><td>任意八邊形</td><td>垂直</td><td>等長</td><td>等長</td><td>垂直</td></tr>
<tr><td>外接平行四邊形
原
八邊形</td><td>相對中心的中點之對點連線</td><td>相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線</td><td>相對中心的中點之對點連線</td><td>相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線</td></tr>
<tr><td>任意八邊形</td><td>若(則)垂直</td><td>則(若)等長</td><td>若(則)等長</td><td>則(若)垂直</td></tr>
</table>

此時相對中心的中點之**對點連線**與相鄰兩頂點之中點的相對中點之**對點連線**，也有**等長和垂直對偶**的現象。即使**原八邊形**退化為**七邊形、六邊形、五邊形**，也會有同樣的結論。然而，將**中點**改為**內分點**時，卻沒有上述的結論。

陸、參考資料

[1] 張景中、彭翕成(2021)。繞來繞去的向量法。科學出版社，P29~31、P148~160。

[2] 許翰翔(2013)。拿破崙的四角戀—將「拿破崙定理」推廣至四邊形的探討。第 53 屆全國中小學科展國中數學科作品。

[3] 方柏瑞、林辰禎(2020)。接三連四—探討三角形各邊外接平行四邊形其性質與推廣。第 60 屆金門地區中小學科展國中數學科作品。

[4] 左銓如・季素月著。初等幾何研究。九章出版社，P149~156。

[5] Michael deVilliers(1998).Dual Generalizations of Van Aubel’s theorem.The Mathematical Association. profmd@mweb.co.za

[6] John R.Silvester(2006).Extensions of Theorem of Van Aubel.The Mathematical Association. https://www.jstor.org/stable/3621406.

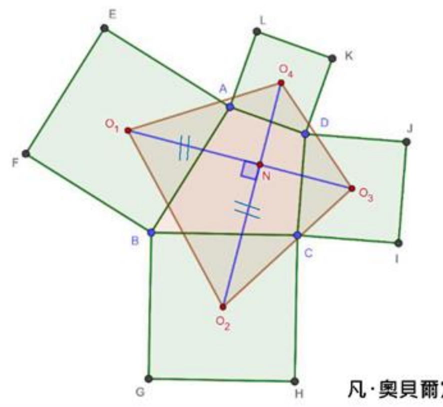
【評語】050406

本作探討將一任意四邊形的四邊分別向外做正方形，並研究兩對相對的正方形中心點連線與原四邊形兩條對角線之關係。作者證明，若原四邊形之對角線有等長、垂直、互相平分等關係，則相對應的正方形中點連線也會有類似的關係。本作品不僅將已有的結果用心做出系統性的推廣與整理，作者也將四邊形的結論推廣至八邊形，整體而言文獻探討詳實，整理架構清晰完整，部分論證頗具巧思，是一個好作品。值得嘉許。

作品海報

從圖形內在結構探討
凡·奧貝爾定理的推廣

壹、研究動機


凡·奧貝爾定理

關於**凡·奧貝爾定理**（Van Aubel's theorem），若**將原四邊形改成平行四邊形**，則依序連接四個正方形的中心，可得一個正方形。我們對此現象感到好奇，莫非原四邊形**「對角線互相平分」**的性質**可以延續到下一層的四邊形**，從而**正軸四邊形可以變成正方形**。若將原四邊形改成**「對角線等長、對角線垂直」**的四邊形，且將四邊**外接的正方形**推廣為**其它正多邊形**，那**外層的四邊形**會有哪些性質？於是我們決定繼續推廣**凡·奧貝爾定理**，看能否有更多不一樣的發現。

貳、研究目的

(一)考慮**對角線平分、等長、垂直的四邊形**，外接不同的正多邊形，連接**相對的兩正多邊形之中心**，觀察所連的兩線段之關係並加以證明。

(二)承(一)，找出**相鄰兩頂點之中點(或等比例內分點)**，連接相對的兩中點(**或等比例內分點**)，觀察所連的兩線段之關係並加以證明。

(三)考慮**任意四邊形**，將**外接正方形**推廣為逆向外接**相似的矩形**、**菱形**或**外接平行四邊形**，連接**相對的兩圖形之中心**及**相鄰兩頂點之中點**，觀察所連的兩線段之關係並加以證明。

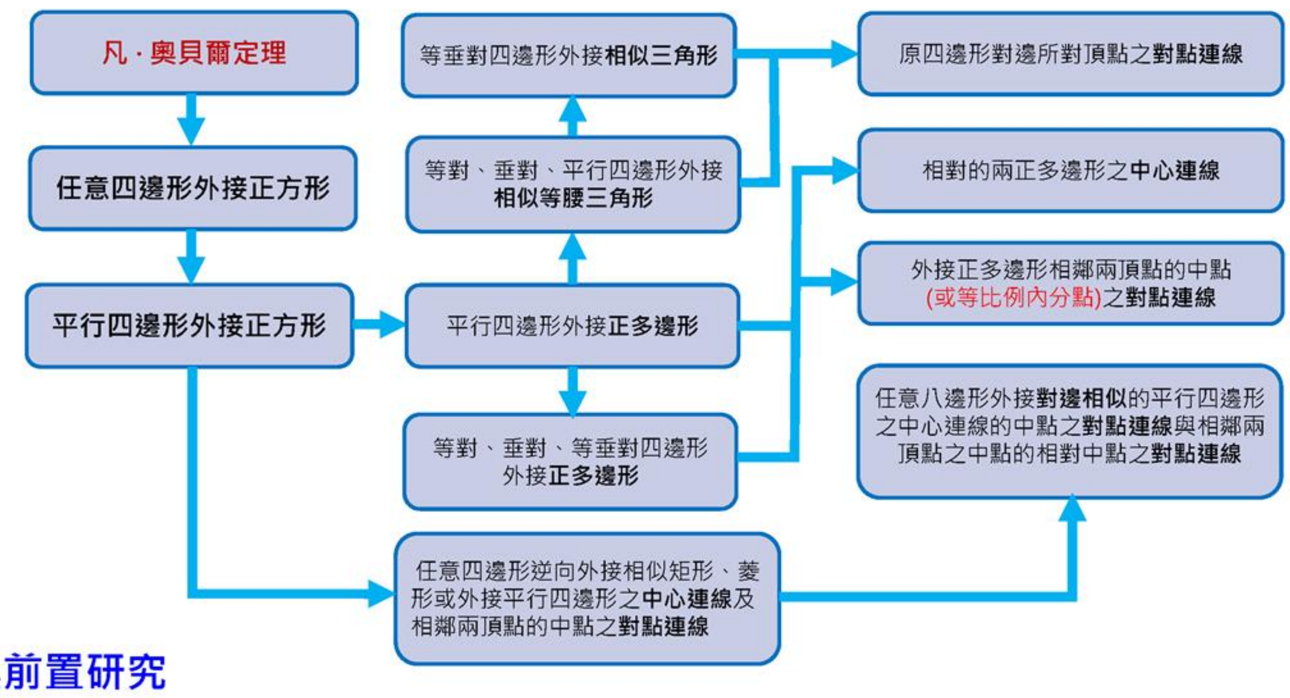
(四)承(三)，將**任意四邊形**改成**任意八邊形**，考慮外接**正方形**或逆向外接**相似的矩形**、**菱形**或外接**對邊相似的平行四邊形**，連接**相對的兩圖形之中心**，作出其中點，並連接相對的兩中點；連接**相對的相鄰兩頂點之中點**，作出其中點，並連接相對的兩中點，觀察所連的兩線段之關係並加以證明。

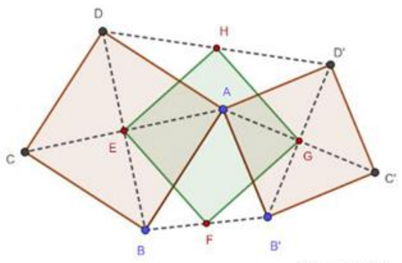
參、研究設備及器材

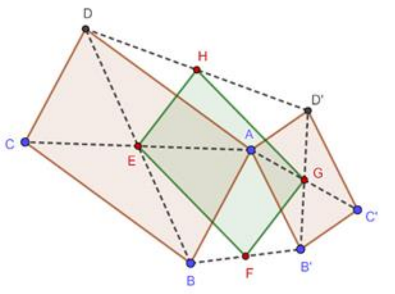
本研究主要利用**Geogebra**電腦動態幾何軟體進行研究問題的幾何實驗，透過實驗觀察、猜測與驗證，然後提出研究結果並加以證明。

肆、研究過程或方法

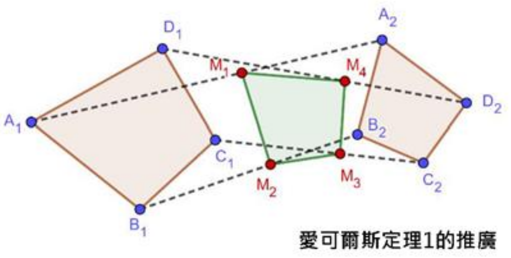
一、研究架構




芬-哈定理


芬-哈定理的推廣

二、文獻探討與前置研究


愛可爾斯定理1的推廣

(一)芬斯勒–哈德維格爾定理及其推廣：芬斯勒–哈德維格爾定理，若兩個正方形ABCD和AB'C'D'擁有同一個頂點A。則B和B'的中點F、D和D' 的中點H、ABCD的中心E和AB'C'D 的中心G將組成一個正方形EFGH。此定理可以推廣至平行四邊形，當兩個平行四邊形相似且逆向外接於同一個頂點，也會有相對應的結論。

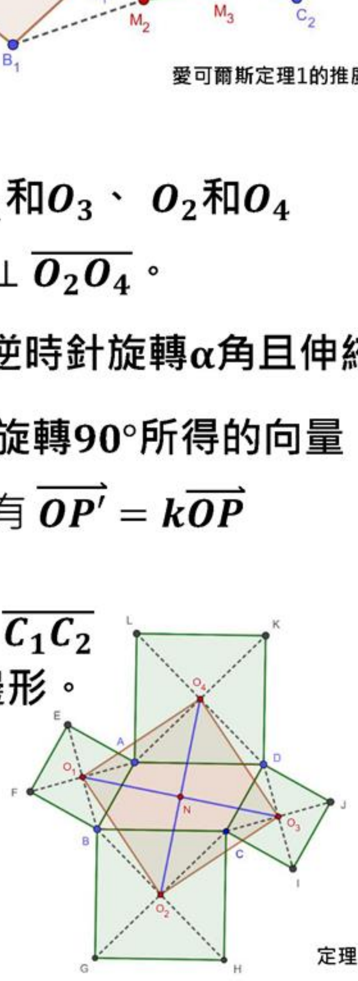
(二)凡·奧貝爾定理：以四邊形ABCD各邊為邊向外作正方形。若將相對的兩正方形之中心O_1和O_3、O_2和O_4連起，則所連的兩條線段$\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$會滿足$\overline{O_1O_3}=\overline{O_2O_4}$且$\overline{O_1O_3}\perp\overline{O_2O_4}$。

(三)向量與複數的結合：$\overrightarrow{OP}*r(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\overrightarrow{OP}*re^{\alpha i}$ 是指以點O為旋轉中心，將$\overrightarrow{OP}$逆時針旋轉α角且伸縮r倍所得的向量。 特別地，$\overrightarrow{OP}*i$為以點O為旋轉中心，將$\overrightarrow{OP}$逆時針旋轉90°所得的向量。

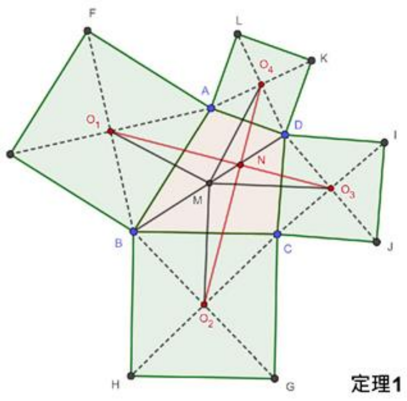
(四)位似變換：設O是平面π上一個定點，H是平面上的變換。若對於任一對應點P、P'，都有$\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}$（$k$為非零實數），則稱$H$為位似變換，$O$叫做**位似中心**，$k$叫做**位似比**。

(五)愛可爾斯定理1的推廣：若$A_1B_1C_1D_1$和$A_2B_2C_2D_2$是同向相似四邊形，則$\overline{A_1A_2}$、$\overline{B_1B_2}$、$\overline{C_1C_2}$、$\overline{D_1D_2}$的等比例內分點M_1、M_2、M_3、M_4也會形成同向相似四邊形。

三、研究過程

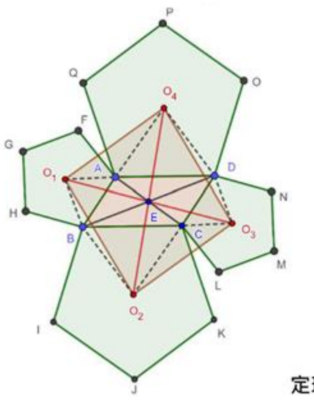

定理2

(一) 任意四邊形外接正多邊形相對的兩中心之連線


定理1

定理1 (凡·奧貝爾定理) 設原四邊形ABCD為任意四邊形，若各邊向外作正方形，則相對的兩正方形之中心連線$\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$會滿足$\overline{O_1O_3}\perp\overline{O_2O_4}$且$\overline{O_1O_3}=\overline{O_2O_4}$。

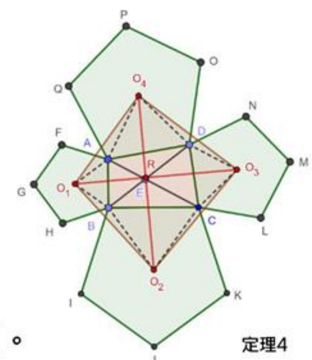
定理2 (拿破崙定理的推廣1) 設原四邊形ABCD為平行四邊形，若各邊向外作正方形，則相對的兩正方形之中心連線$\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$會垂直、平分且等長，即四邊形$O_1O_2O_3O_4$為正方形。

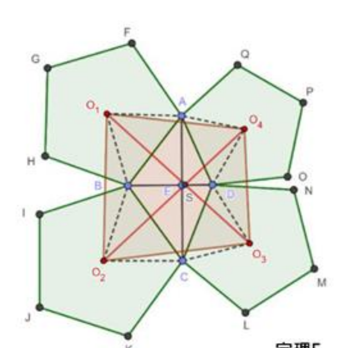

定理3

定理3 (凡·奧貝爾之平行四邊形定理1) 設原四邊形ABCD為對角線平分的四邊形(平行四邊形)，若各邊向外作正多邊形，則相對的兩正多邊形之中心連線$\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$也會互相平分。

定理4 (凡·奧貝爾之等對四邊形定理1) 設原四邊ABCD為等對四邊形，若各邊向外作正多邊形，則相對的兩正多邊形之中心連線 $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$。

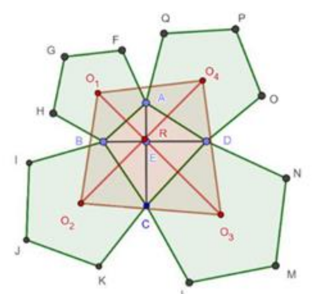
定理5 (凡·奧貝爾之垂對四邊形定理1) 設原四邊形ABCD為垂對四邊形，若各邊向外作正多邊形，則相對的兩正多邊形之中心連線 $\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$。

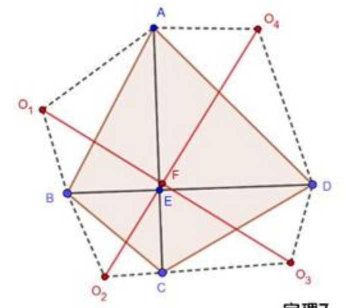

定理4


定理5

定理6 (凡·奧貝爾之等垂對四邊形定理1) 設原四邊形ABCD為等垂對四邊形，若各邊向外作正多邊形，則相對的兩正多邊形之中心連線 $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$且$\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$。

定理7 (凡·奧貝爾之相似三角形定理) 設原四邊形ABCD為等垂對四邊形，若各邊向外順向作相似三角形，則各邊所對頂點之對點連線 $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$且$\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$。


定理6


定理7

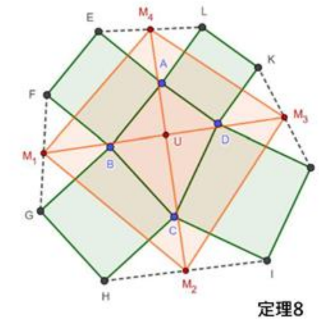
(二) 任意四邊形外接正多邊形相鄰兩頂點之中點的對點連線

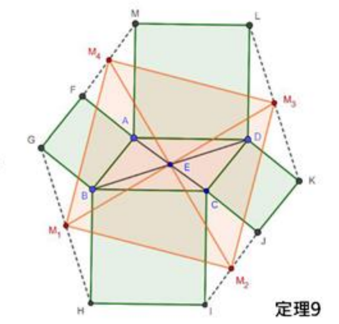
定理8 (凡·奧貝爾之頂點中點定理)

設原四邊形ABCD為任意四邊形，若各邊向外作正方形，則相鄰兩頂點之中點的對點連線 $\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$ 會滿足 $\overline{M_1M_3} \perp \overline{M_2M_4}$ 且 $\overline{M_1M_3} = \overline{M_2M_4}$。

定理9 (拿破崙定理的推廣2)

設原四邊形ABCD為平行四邊形，若各邊向外作正方形，則相鄰兩頂點之中點的對點連線 $\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$會垂直、平分且等長，即四邊形$M_1M_2M_3M_4$為正方形。


定理8

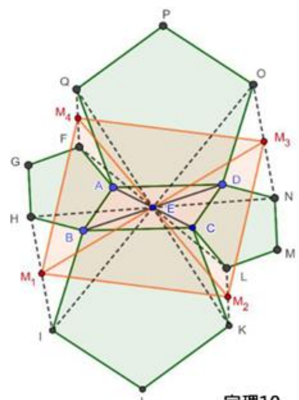

定理9

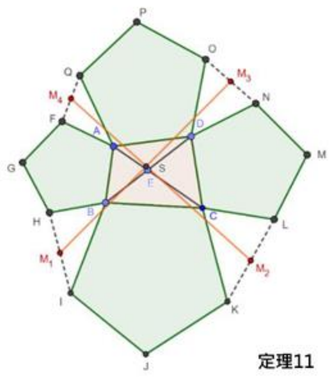
定理10 (凡·奧貝爾之平行四邊形定理2)

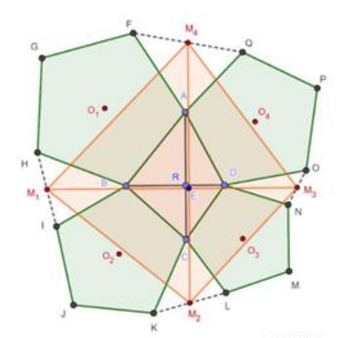
設原四邊形ABCD為對角線平分的四邊形 (平行四邊形)，若各邊向外作正多邊形，則相鄰兩頂點之中點 (或等比例內分點)的對點連線 $\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$也會互相平分。

定理11 (凡·奧貝爾之等對四邊形定理2)

設原四邊形ABCD為等對四邊形，若各邊向外作正多邊形，則相鄰兩頂點之中點的對點連線 $\overline{M_1M_3} = \overline{M_2M_4}$。


定理10


定理11

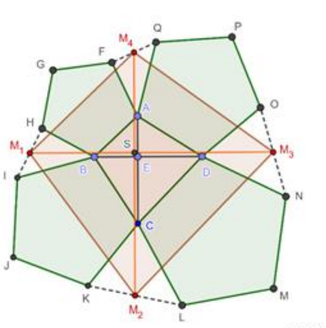

定理12

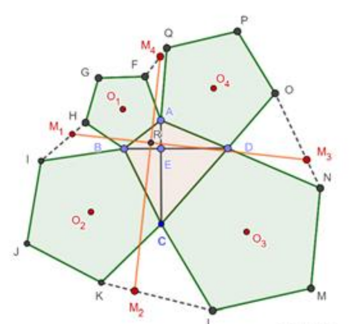
定理12 (凡·奧貝爾之垂對四邊形定理2)

設原四邊形ABCD為垂對四邊形，若各邊向外作正多邊形，則相鄰兩頂點之中點的對點連線 $\overline{M_1M_3} \perp \overline{M_2M_4}$。

定理13 (凡·奧貝爾之等垂對四邊形定理2)

設原四邊形ABCD為等垂對四邊形，若各邊向外作正多邊形，則相鄰兩頂點之中點的對點連線 $\overline{M_1M_3} \perp \overline{M_2M_4}$ 且 $\overline{M_1M_3} = \overline{M_2M_4}$。

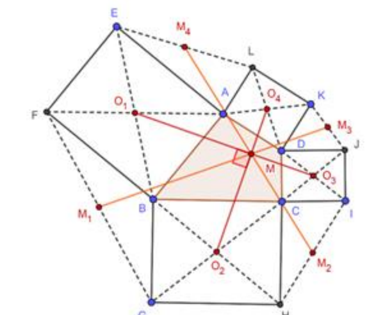

定理13


定理14

定理14 (凡·奧貝爾之頂點內分點定理)

設原四邊形ABCD為等垂對四邊形，若各邊向外作正多邊形，則順向連接相鄰兩頂點之等比例內分點的對點連線 $\overline{M_1M_3} \perp \overline{M_2M_4}$ 且 $\overline{M_1M_3} = \overline{M_2M_4}$。

(三) 任意四邊形逆向外接相似矩形、菱形或外接平行四邊形之相對的兩中心連線或相鄰兩頂點之中點的對點連線

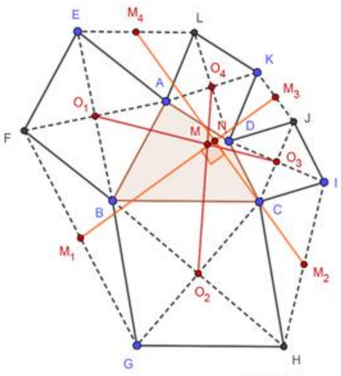

定理15

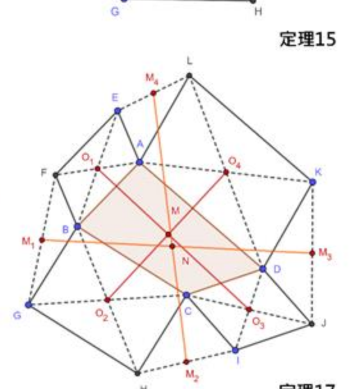
定理15 (凡·奧貝爾之外接相似矩形定理)

設原四邊形ABCD為任意四邊形，若各邊向外逆向作相似矩形，則相對的兩中心連線 $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$；相鄰兩頂點之中點的對點連線 $\overline{M_1M_3} = \overline{M_2M_4}$。

定理16 (凡·奧貝爾之外接相似菱形定理)

設原四邊形ABCD為任意四邊形，若各邊向外逆向作相似菱形，則相對的兩中心連線 $\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$；相鄰兩頂點之中點的對點連線 $\overline{M_1M_3} \perp \overline{M_2M_4}$。


定理16

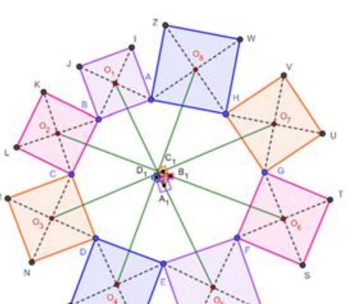

定理17

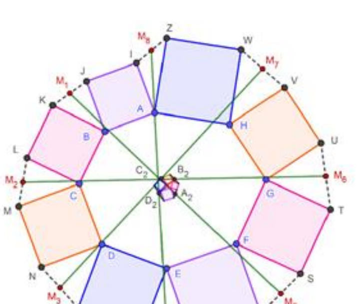
定理17 (凡·奧貝爾之外接平行四邊形定理)

設原四邊形ABCD為任意四邊形，若各邊向外作平行四邊形，則相對的兩中心連線$\overline{O_1O_3}$、$\overline{O_2O_4}$ 和相鄰兩頂點之中點的對點連線 $\overline{M_1M_3}$、$\overline{M_2M_4}$ 會滿足 (1) $\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4} \Leftrightarrow \overline{M_1M_3} \perp \overline{M_2M_4}$；

(2) $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4} \Leftrightarrow \overline{M_1M_3} = \overline{M_2M_4}$。

(四) 任意八邊形外接平行四邊形

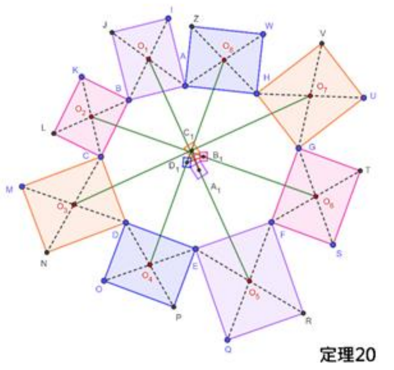

定理18


定理19

定理18 (凡·奧貝爾之八邊形定理1) 設原八邊形ABCDEFGH為任意八邊形，若各邊向外作正方形，則相對的兩正方形中心連線的中點之對點連線 $\overline{A_1C_1} \perp \overline{B_1D_1}$ 且 $\overline{A_1C_1} = \overline{B_1D_1}$。

定理19 (凡·奧貝爾之八邊形定理2) 設原八邊形ABCDEFGH為任意八邊形，若各邊向外作正方形，則相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線 $\overline{A_2C_2} \perp \overline{B_2D_2}$ 且 $\overline{A_2C_2} = \overline{B_2D_2}$。

定理20 (凡·奧貝爾之八邊形定理3) 設原八邊形ABCDEFGH為任意八邊形，若各邊向外逆向作相似矩形，則相對的兩矩形中心連線的中點之對點連線 $\overline{A_1C_1} \perp \overline{B_1D_1}$。


定理20

定理21 (凡·奧貝爾之八邊形定理4) 設原八邊形ABCDEFGH為任意八邊形，若各邊向外逆向作相似矩形，則相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線 $\overline{A_2C_2}=\overline{B_2D_2}$。

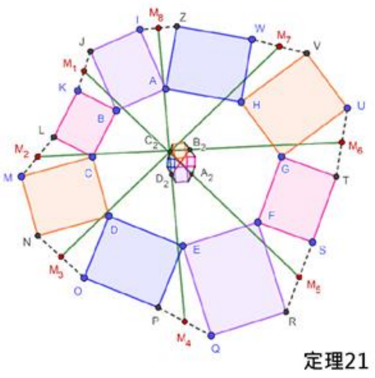
定理22 (凡·奧貝爾之八邊形定理5) 設原八邊形ABCDEFGH為任意八邊形，若各邊向外逆向作相似菱形，則相對的兩菱形中心連線的中點之對點連線 $\overline{A_1C_1}=\overline{B_1D_1}$。

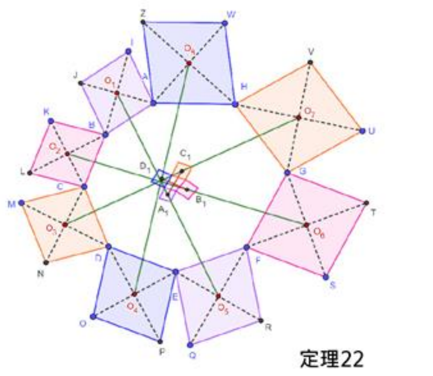
定理23 (凡·奧貝爾之八邊形定理6) 設原八邊形ABCDEFGH為任意八邊形，若各邊向外逆向作相似菱形，則相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線 $\overline{A_2C_2}\perp\overline{B_2D_2}$。

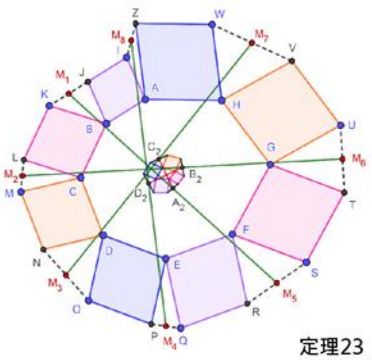
定理24 (凡·奧貝爾之八邊形定理7)

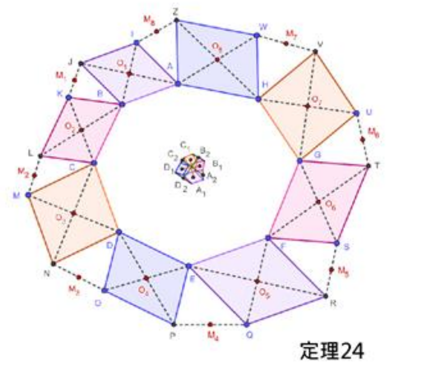
設原八邊形ABCDEFGH為任意八邊形，若各邊向外作對邊相似的平行四邊形，則相對的兩中心連線的中點之對點連線 $\overline{A_1C_1}$、$\overline{B_1D_1}$ 和相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線 $\overline{A_2C_2}$、$\overline{B_2D_2}$ 會滿足

(1)$\overline{A_1C_1}=\overline{B_1D_1}\Leftrightarrow\overline{A_2C_2}\perp\overline{B_2D_2}$；(2)$\overline{A_1C_1}\perp\overline{B_1D_1}\Leftrightarrow\overline{A_2C_2}=\overline{B_2D_2}$。


定理21


定理22


定理23


定理24

伍、研究討論

一、**凡·奧貝爾定理**的**退化情形**，即使**四邊形退化為三角形**，**原定理依然成立**。

二、承上，考慮**對角線等長、垂直**的四邊形**退化成等腰、直角三角形**的情形，**原定理依然成立**。

三、**凡·奧貝爾之頂點中點定理**的**退化情形**，即使**四邊形退化為三角形**，**原定理依然成立**。

四、承上，考慮**對角線等長、垂直**的四邊形**退化成等腰、直角三角形**的情形，**原定理依然成立**。

五、**凡·奧貝爾之頂點內分點定理**的**退化情形**，即使四邊形**退化為等腰直角三角形**，**原定理依然成立**。

六、考慮八邊形外接正方形**退化成七邊形、六邊形、五邊形**時，**相對兩中心的中點**之對點連線和**相鄰兩頂點之中點的相對中點**之對點連線的情形，**原定理依然成立**。

七、若考慮中心四邊形，再由各邊向外作正方形，則由**芬斯勒–哈德維格爾定理**可知：**新的外接正方形之中心**恰為**原外接正方形相鄰兩頂點之中點**。即**凡·奧貝爾之頂點中點定理**可經由兩次**凡·奧貝爾定理**推知。同理，**凡·奧貝爾之八邊形定理2**可經由兩次**凡·奧貝爾之八邊形定理1**推知。除此之外，逆向**外接矩形(或菱形)時**，**外接矩形與外接菱形**兩者間竟也有**對偶的現象**。

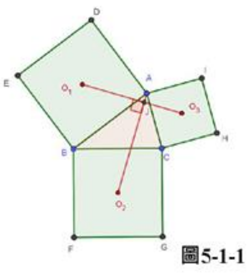


圖5-1-1

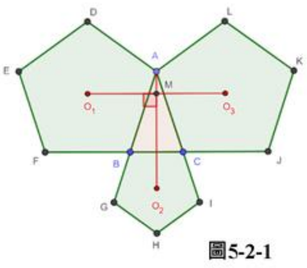


圖5-2-1

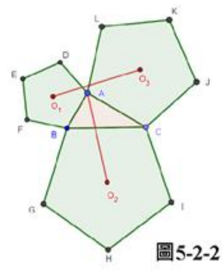


圖5-2-2

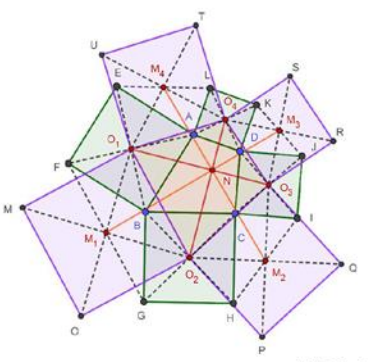


圖5-7-1

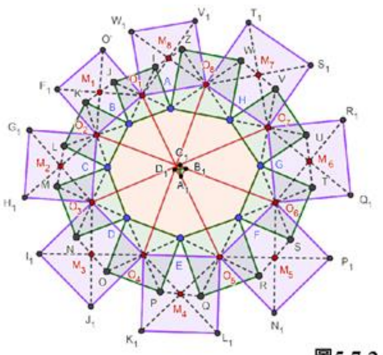


圖5-7-2

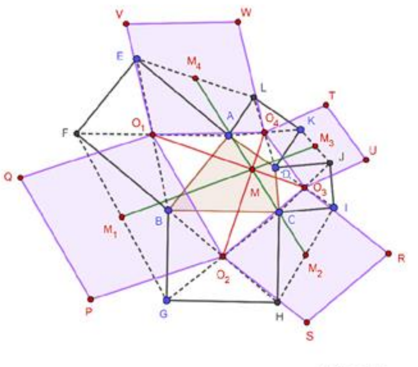


圖5-7-3

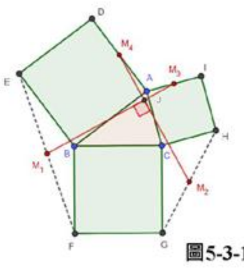


圖5-3-1

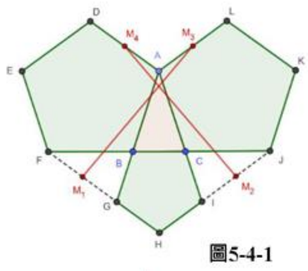


圖5-4-1

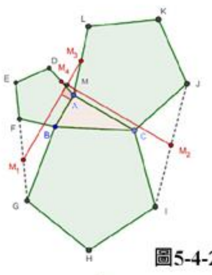


圖5-4-2

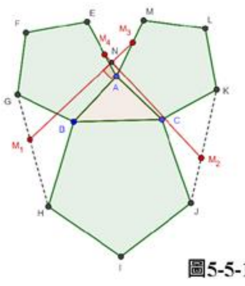


圖5-5-1

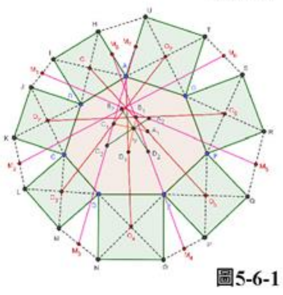


圖5-6-1

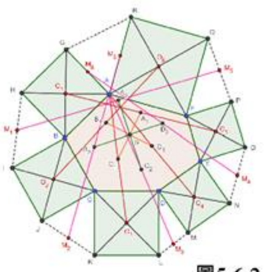


圖5-6-2

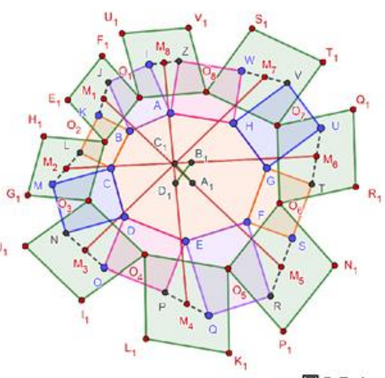


圖5-7-4

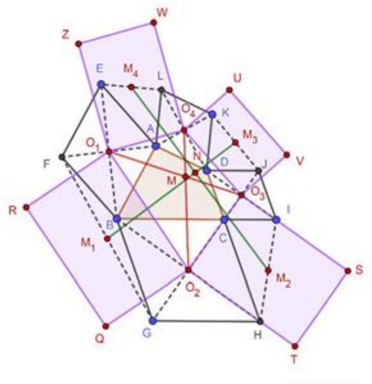


圖5-7-5

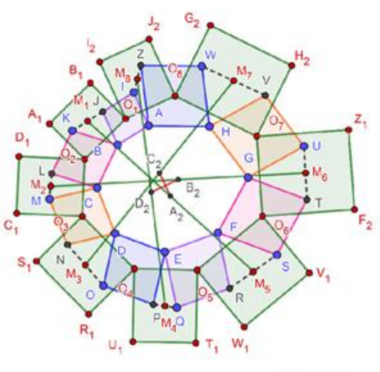


圖5-7-6

陸、研究結果與結論

一、

外接正多邊形 / 原四邊形	相對中心的連線	相鄰兩頂點之中點的對點連線
等對四邊形	垂直	等長
垂對四邊形	等長	垂直
平行四邊形	互相平分	互相平分

二、

外接正方形 / 原四邊形	相對中心的連線	相鄰兩頂點之中點的對點連線
任意四邊形	垂直且等長	垂直且等長
平行四邊形	垂直平分且等長	垂直平分且等長
其他外接情形 / 原四邊形	外接相似三角形的對點連線	外接正多邊形相鄰兩頂點之等比例內分點的對點連線
平行四邊形	互相平分	互相平分
等垂對四邊形	垂直且等長	垂直且等長

三、

外接矩形或菱形 / 原四邊形	逆向外接相似矩形		逆向外接相似菱形	
	相對中心的連線	相鄰兩頂點之中點的對點連線	相對中心的連線	相鄰兩頂點之中點的對點連線
任意四邊形	垂直	等長	等長	垂直
外接平行四邊形 / 原四邊形	相對中心的連線	相鄰兩頂點之中點的對點連線	相對中心的連線	相鄰兩頂點之中點的對點連線
任意四邊形	若(則)垂直	則(若)等長	若(則)等長	則(若)垂直

四、

外接正方形 / 原八邊形	相對中心的中點之對點連線		相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線	
任意八邊形	垂直且等長		垂直且等長	
外接矩形或菱形 / 原八邊形	逆向外接相似矩形		逆向外接相似菱形	
	相對中心的中點之對點連線	相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線	相對中心的中點之對點連線	相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線
任意八邊形	垂直	等長	等長	垂直
外接平行四邊形 / 原八邊形	相對中心的中點之對點連線	相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線	相對中心的中點之對點連線	相鄰兩頂點之中點的相對中點之對點連線
任意八邊形	若(則)垂直	則(若)等長	若(則)等長	則(若)垂直

柒、參考資料及其他

1. 張景中、彭翕成(2021)。繞來繞去的向量法。科學出版社，P29~31、P148~160。
2. 許翰翔(2013)。拿破崙的四角戀─將「拿破崙定理」推廣至四邊形的探討。第53屆全國中小學科展國中數學科作品。
3. 方柏瑞、林辰禎(2020)。接三連四—探討三角形各邊外接平行四邊形其性質與推廣。第60屆金門地區中小學科展國中數學科作品。
4. 左銓如，季素月著。初等幾何研究。九章出版社，P149~156。
5. Michael deVilliers(1998).Dual Generalizations of Van Aubel's theorem.The Mathematical Association. profmd@mweb.co.za
6. John R.Silvester(2006).Extensions of Theorem of Van Aubel.The Mathematical Association. https://www.jstor.org/stable/3621406.