中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

第三名

050405

5進位 Kaprekar 變換

學校名稱：國立臺南女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 詹芮芸 高二 洪瑜圻	廖婉雅

關鍵詞：Kaprekar 變換、Kaprekar 常數、Kaprekar 循環

摘要

我們發現任何進位的 Kaprekar 變換，都可以轉換成 Kaprekar 運算矩陣，而此運算矩陣會滿足引理 2的條件。以此為基礎探討 5 進位 Kaprekar 變換，大致可分為三個層面：一是找出 5 進位 Kaprekar 常數的形式；二是經過數次的變換後 Kaprekar 會維持 Type 1 的形式，對此形式的 Kaprekar 數，我們引進比值 x 與 y，並且定義 $\mathcal{G}(x,y)$，以表示經 Kaprekar 變換後的比值。在此基礎下討論 5 進位中 Kaprekar 變換的循環結構; 三、5 進位 Kaprekar 變換非常複雜，我們找到在特定的 x 與 y 條件下，Kaprekar 數的循環長度會是任意大，且存在需要進行任意給定長度後才開始出現循環的 Kaprekar 數列。

本文的主要結果分別對應於引理 2、引理 3 和定理 3、定理 4以及定理 5中。

壹、研究動機

Kaprekar 變換（Kaprekar's routine）是印度數學家 D. R. Kaprekar 於 1949 發現的迭代運算，運算方式為某數中各個數字由大到小排列再減去由小到大排列，而若得出的值與未排列的值相同，此數稱作 Kaprekar 常數，廣泛流傳的 6174 即是十進位 Kaprekar 常數的一個例子（7641-1467=6174）；藉由文獻我們了解到 Kaprekar 變換並不僅有 Kaprekar 常數可討論，Kaprekar 變換產生的循環現象也十分有趣，而 2、3、4 進位已得出完整結果，因此我們決定討論 5 進位 Kaprekar 變換。

貳、研究目的

1. 整合 Kaprekar 矩陣 [1][2] 的性質及使其運算更加簡明。

2. 探討 5 進位 Kaprekar 常數。

3. 探討 5 進位 Kaprekar 變換的循環現象。

參、研究過程或方法

一、定義

定義 1

$z = p_t \times n^t + p_{t-1} \times n^{t-1} + ... + p_1 \times n + p_0 \quad n,t \in \mathbb{N}\,,\, p_i \in \mathbb{Z}\,,\, 0 \le p_i \le n-1\,,\, 0 \le i \le t$

在 n 進位中任意非負整數 z 皆可用上述形式表示，出於表示方便將 z 記做 $z = (p_t p_{t-1} ... p_1 p_0)$。

定義 2

1. $\overline{z} = (q_t q_{t-1} ... q_1 q_0)\,,\ \underline{z} = (q_0 q_1 ... q_{t-1} q_t)$

其中 $q_0, q_1, ..., q_{t-1}, q_t$ 是將 $p_0, p_1, ..., p_{t-1}, p_t$ 重新排列而成，且 $q_0 \le q_1 \le ... \le q_{t-1} \le q_t$。

2. Kaprekar 運算為 $K(z) = \overline{z} - \underline{z}$ 。

3. 在 Kaprekar 運算中，我們設進行退位的原始數值為 B；進行補末的原始數值為 C。

定義 3

定義集合 $M(n) = \{[m_{n-1}, m_{n-2}, ..., m_1, m_0] |\ m_{n-1}, m_{n-2}, ..., m_1, m_0$ 為非負整數 $\}$ 。

n 進位制中，若 $m_{n-1}, m_{n-2}, ..., m_1, m_0$ 分別表示數字 z 中為 $n-1$、$n-2$、...、1、0 之個數，我們定義 z 在集合 $M(n)$ 上的投影為 $[z] = [m_{n-1}, m_{n-2}, ..., m_1, m_0]$。

性質 1

任意兩個 n 進位數 z_1, z_2，若 $[z_1] = [z_2]$，則 $K(z_1) = K(z_2)$。

< 証明 >: 因為 $K(z) = \bar{z} - \underline{z}$, 且 $\bar{z}_1 = \bar{z}_2$, $\underline{z}_1 = \underline{z}_2$，故得証。

定義 4 $M(n)$ 上的 Kaprekar 運算 $K([z])$

定義集合 $M(n)$ 上的 Kaprekar 運算為 $K([z]) = [K(z)] = [\overline{z} - \underline{z}]$。

我們再將 $m_0, m_1, ..., m_{n-2}, m_{n-1}$ 經 Kaprekar 運算後記做 $m'_0, m'_1, ..., m'_{n-2}, m'_{n-1}$。

定義 5 n 進位之數字 z 的 Kaprekar 運算矩陣如下：

$$\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n-2} & a_{0,n-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,0} & a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

其中 $a_{i,j}$ 為 Kaprekar 運算中 ($\overline{z}-\underline{z}$ 直式減法) 上排數字為 i 與下排數字為 j 相遇的個數。

定義 6

(1) 若 n 進位數 $[m_{n-1}, m_{n-2}, ..., m_1, m_0]$ 滿足 m_k 皆為正整數，稱此數為「正規數」。

(3) 若某正規數經過數次次運算直至循環或變為 Kaprekar 常數之所有過程皆為正規數，我們稱之為「嚴格正規數」。

< **範例** > 設此時有一五進位數 $z = 3421001424_{(5)}$

(1) $\overline{z} = 4443221100_{(5)}$, $\underline{z} = 0011223444_{(5)}$

(2) $K(z) = \overline{z} - \underline{z} = 4443221100_{(5)} - 0011223444_{(5)} = 4431442101_{(5)}$

(3) $[z] = [m_4, m_3, m_2, m_1, m_0] = [3, 1, 1, 3, 2]$, $K([z]) = [m'_4, m'_3, m'_2, m'_1, m'_0] = [4, 1, 2, 2, 1]$

(4) 由於第七位數之 2 退位為 1，第一位數之 0 補位為 1，$B = 2$, $C = 0$。

(5) $\overline{z} - \underline{z}$ 直式：$\begin{array}{r} 4443221100 \\ -\ \ 0011223444 \\ \hline 4431442101 \end{array}$, $a_{i,j} = \begin{cases} a_{4,0} = a_{0,4} = 2 \\ a_{4,1} = a_{1,4} = 1 \\ a_{3,1} = a_{1,3} = 1 \\ a_{2,2} = 2 \end{cases}$ z 運算矩陣：$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

二、已知結果

(一)Kaprekar **運算矩陣**

本文中引用了下列的文獻結果：

定理 1 ([1](G.D.Prichett 1981) ([2](S. DOLAN 2011)

(1) n 進位之數字 z 經 Kaprekar 運算後, 各位數字除 $n-1$ 以外必可兩兩配對成 $\{i, n-1-i\}$, 或 $\{i, n-i\}$, $i = 0, 1, ..., n-1$ 或 $\{i, n-2-i\}$, $i = 0, 1, ..., n-2$。

(2) 若 z 為 n 進位 Kaprekar 常數，且 z 包含有數字 $n-1$，則 z 的各位數字除 $n-1$ 以外必可兩兩配對成 $\{i, n-1-i\}$, 其中 $i = 0, 1, ..., n-1$。

在後面的討論中，我們發現部分 5 進位的 Kaprekar 變換的結構，也會出現 3 進位 Kaprekar 變換的結構的現象，所以我們也會用到 [4] (洪芷璿, 洪旖昕, 鍾亞書,2022) 的結果，列出如下：

定義 7 [4] (洪芷璿, 洪旖昕, 鍾亞書,2022) 函數 $g(x)$ 及 $\bar{g}(x)$

(1) 若 x 為正有理數, $g(x) := (1/2) \cdot (\max\{1/x, x\} - 1)$。

(2) 若 x 為正實數, $\bar{g}(x) := (1/2) \cdot (\max\{1/x, x\} - 1)$。

3 進位的規律可以由函數 $g(x)$ 來刻劃，明白說 3 進位的 Kaprekar 常數對應函數 $g(x)$ 的固定點 $(\bar{g}(x))$，3 進位 Kaprekar 的 n- 週期數列對應函數 $g(x)(\bar{g}(x))$ 的 n- 循環點列。為了更精確的說明，我們也定義下列數列及區間列：

定義 8 數列 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 及開區間列 $\{I_n\}$ 和 $\{J_n\}$

(1) $\alpha_n = 2^n - 1$, n 為正整數。

(2) $b_1 = 1$, $b_{2n+1} = 2b_{2n} + 1$ 且 $b_{2n} = 2b_{2n-1} - 1$, n 為正整數。

(2) $\beta_0 = 0$, $\beta_n = \frac{b_n}{b_{n+1}}$, n 為正整數。

(3) $I_n = (\alpha_n, \alpha_{n+1})$, n 為正整數。

(4) $J_{2n-1} = (\beta_{2n-2}, \beta_{2n})$, $J_{2n} = (\beta_{2n+1}, \beta_{2n-1})$，$n$ 為正整數。

例如：

(1) $I_1 = (1, 3)$, $I_2 = (3, 7)$, $I_3 = (7, 15)$, $\cdots$。

(2) $J_1 = (\beta_0, \beta_2) = (0, \frac{1}{3})$, $J_2 = (\beta_3, \beta_1) = (\frac{3}{5}, 1)$, $J_3 = (\beta_2, \beta_4) = (\frac{1}{3}, \frac{5}{11})$, $\cdots$。

(3) $\beta_0 = 0 < \beta_2 < \beta_4 < \cdots < \beta_{2n+2} < \cdots < \beta_{2n+1} < \cdots < \beta_3 < \beta_1$, $n > 1$。

引理 1 函數 $\bar{g}(x)$ 的性質

(1) $\bar{g}(x) : I_{n+1} \to I_n$ 為一對一映成，n 正整數。

(2) $\bar{g}(x) : J_{n+1} \to J_n$ 為一對一映成，n 正整數。

定理 2 ([4] theorem 5-4)

任兩個正有理數 $t_1 < t_2$, 若有一非負整數 m，及 $c \in \{\alpha_n\} \bigcup \{\beta_n\}$ 滿足 $g^m(t_1) < c < g_m(t_2)$ 或 $g^m(t_2) < c < g_m(t_1)$ 則開區間 (t_1, t_2) 包含任何的 n-循環點。

三、引理

(一)Kaprekar 運算矩陣

$$\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n-2} & a_{0,n-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,0} & a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

矩陣元素 $a_{i,j}$ 為 Kaprekar 運算中進行 i 減去 j 的數字個數。為了描述上的便利，我們定義 Kaprekar 矩陣的一下特徵如下:

定義 9 行值、列值

(1) 行的和 $Col(i) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{i,j}$。

(2) 列的和 $Row(j) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,j}$。

定義 10 數列 $< S(i) >_{i=0}^{n-1}$ 為：

$$S(0) = min\{m_0, m_{n-1}\}, \quad S(k) = \sum_{0 \le i\,,\, k+i \le n-1} a_{k+i,i} + \sum_{0 \le i \le k \le n-1} a_{i,i+(n-1)-k}, \quad k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$$

由 Kaprekar 運算數值性質 (附錄 1) 可得知在不考慮退位與補位時 $a_{i+k,i}$ 與 $a_{i,i+(n-1)-k}$ 對應 Kaprekar 運算數值相同。因此我們引進 $a_{i+k,i}$ 與 $a_{i,i+(n-1)-k}$ 之和 $S(k)$ 協助描述 Kaprekar 運算矩陣之數值運算。($S(n-1) = a_{n-1,0} + \Sigma_{i=0}^{n-1} a_{i,i} = min\{m_0, m_{n-1}\}$)

性質 2

退位值為 B 表示在不為零矩陣元素中，$i-j$ 的最小值為 B，因此可知集合 $\{a_{i,j} | \text{其中} |i-j| < B\}$ 內元素皆為零。

$[z]=[m_{n-1},\cdots,m_1,m_0]$，運算後之 $K([z])=[m'_{n-1},\cdots,m'_1,m'_0]$ 及 $[z]$ 的 Kaprekar 運算矩陣 $(a_{i,j})_{n\times n}$, $0\le i,j\le n-1$，我們有下列結果：

引理 2 $[z]=[m_{n-1},\cdots,m_1,m_0]$ 的 Kaprekar 運算矩陣為 $(a_{i,j})_{n\times n}$, $0\le i,j\le n-1$

(1) $m_i=Col(i)=Row(i)$, $0\le i\le n-1$

(2) $a_{i,j}$ 有對稱性 $a_{i,j}=a_{j,i}$

(3) ([2](S. DOLAN 2011) 若 $a_{p,q}>0$；則 $a_{i,j}=0$, 其中 $i<p \leftrightarrow j<q \ \wedge \ i>p \leftrightarrow j>q$

(4) $S(k)=S(n-1-k)$

(5) $K([m_{n-1},m_{n-2},...,m_1m_0])=K([m_0,m_1,...,m_{n-2},m_{n-1}])$

(6) m'_k 必為下列 5, 種情形之一：

$(S(0)=min\{m_0,m_{n-1}\}$, $S(k)=\sum_{0\le i\,,\,k+i\le n-1}a_{k+i,i}+\sum_{0\le i\le k\le n-1}a_{i,i+(n-1)-k})$

(i) 若 k 不為 $B,B-1,C,C+1$，$m_k=S(k)$

(ii) 當 $B=C$ 時，$m'_B=S(B)-2$；$m_{B-1}=S(B-1)+1$

(iii) 當 $B=C+1$ 時，$m'_B=S(B)$；$m'_{B-1}=S(C)$

(iv) 當 $B=C+2$ 時，$m'_B=S(B)-1$；$m'_{B+1}=S(B+1)-1$；$m_{B-1}=S(B-1)+2$

(v) 當 B 不符合以上三種時，$m'_B=S(B)-1$；$m'_B=S(B-1)+1$；$m_C=S(C)-1$；$m_{C+1}=S(C+1)+1$

$<$ **證明** $>$

(1) 已知 $a_{i,j}$ 為 Kaprekar 運算中進行 i 減去 j 的數字個數，則 $Col(i)$ 即為 Karpekar 運算中 i「減去各個數字」的個數和，則 $Row(i)$ 則為 i「被各個數字減去」的個數和，皆表示 i 的個數，可得 $Col(i)=Row(i)=m_i$。

(2) 已知 $\overline{z}=(q_t\,q_{t-1}\,q_{t-2}...q_2\,q_1\,q_0)$, $\underline{z}=(q_0\,q_1\,q_2...q_{t-2}\,q_{t-1}\,q_t)$。此兩數進行減法的關係中 q 有一對一性質：$\overline{z}$ 的 q_v 對應 $\underline{z}$ 的 q_{t-v} 進行減法。

設 $\overline{z}$ 的 $q_u...q_v$ 對應 $\underline{z}$ 的 $q_{t-u},...,q_{t-v}$ 恰好皆為 $i-j$；則由上述之 q 之性質可知，$\overline{z}$ 的 $q_{t-v}...q_{t-u}$ 減去 $\underline{z}$ 的 $q_v,...,q_u$ 也恰皆為 $j-i$，可見 $i-j$ 個數與 $j-i$ 個數相同。因此 $a_{i,j}=a_{j,i}$。

(3) 為 ([2](S. DOLAN 2011) 結果。

(4) 由引理 2(2) 可知 $a_{i+k,i} = a_{i,i+k}$，因此我們可得出以下證明：

$$S(k) = \sum_{0\le i\,,\,k+i\le n-1} a_{k+i\,,\,i} + \sum_{0\le i\le k\le n-1} a_{i\,,\,i+(n-1)-k} = \sum_{0\le i\,,\,k+i\le n-1} a_{i\,,\,i+k} + \sum_{0\le i\le k\le n-1} a_{i+(n-1)-k\,,\,i}$$

$$= \sum_{0\le i\,,\,(n-1)-k\le n-1} a_{i+[(n-1)-k]\,,\,i} + \sum_{0\le i\,,\,k+i\le n-1} a_{i\,,\,i+(n+1)-[(n-1)-k]} = S(n-1-k)$$

(5) 設此時有兩數 z_1、z_2 之 Kaprekar 運算矩陣分別如下：

$$z_1: \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n-2} & a_{0,n-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,0} & a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \quad z_2: \begin{bmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-2,n-1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{0,n-1} \\ a_{n-1,n-2} & a_{n-2,n-2} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{0,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-2,1} & \cdots & a_{1,1} & a_{0,1} \\ a_{n-1,0} & a_{n-2,0} & \cdots & a_{1,0} & a_{0,0} \end{bmatrix}$$

以上兩矩陣的所有 $S(k)$ 均相同，表示存在相同變換結；而 $[z_1]$, $[z_2]$ 關係如下：

$$[z_1] = [Col(n-1), Col(n-2), ..., Col(0)] = [\Sigma_{k=0}^{n-1} a_{k,n-1}, \Sigma_{k=0}^{n-1} a_{k,n-2}, ..., \Sigma_{k=0}^{n-1} a_{k,0}]$$

$$[z_2] = [Row(n-1), Row(n-2), ..., Row(0)] = [\Sigma_{k=0}^{n-1} a_{k,0}, \Sigma_{k=0}^{n-1} a_{k,1}, ..., \Sigma_{k=0}^{k=n-1} a_{k,n-1}]$$

而 $[m_{n-1}, m_{n-2}, ..., m_1, m_0]$ 與 $[m_0, m_1, ..., m_{n-2}, m_{n-1}]$ 關係如同 $[z_1]$, $[z_2]$，因此變換後會產生相同結果。

(6) 已知 $S(k)$ 為不考慮退位與補位下，在 Kaprekar 運算中產生相同數值的矩陣元素和。在此我們利用附錄3 內容，將以下退位與補位導致的運算變換納入考量：

(i) 非零矩陣元素 $a_{i+B,i}$ 對應 Kaprekar 運算中產生之數值 B 因退位少一，並產生一個 $B-1$。

(ii) 非零矩陣元素 $a_{i,i+(n-1)-C}$ 對應 Kaprekar 運算中產生之數值 C 因補位少一，並產生一個 $C+1$。

我們結合以上兩點，並將 $m'_B, m'_{B-1}, m'_C, m'_{C+1}$ 的詳細變換列於引理 2(7) 中。

四、五進位

（一）正規數初步變換

由引理 2(6) 可得知 $K([A,B,C,D,E]) = K([E,D,C,B,A])$，因此我們決定僅討論 $A \geq E$ 時的運算，而若要討論 $E \geq A$ 則將 (B,D)、(A,E) 互換即可
設 A,B,C,D,E 為正整數，$z=[A,B,C,D,E]$，第一次變換結果如下：

$$K([A,B,C,D,E]) = \begin{cases} [A+C,0,2B-1,2,A-1] & A=E, B=D \\ [A+B+C-D,D-B,2B,D-B,A] & A=E, B+C \geq D > B \\ [A-B+C+D,B-D,2D,B-D,A] & A=E, D+C \geq B > D \\ [A+B-C-D,C,2D,C,A] & A=E, B \geq C+D \\ [A-B-C+D,C,2B,C,A] & A=E, D \geq B+C \\ [B-C+E,C+D,0,C+D,E] & A=D+E, B \geq C \\ [-B+C+E,B+D,0,B+D,E] & A=D+E, C \geq B \\ [C+E,A-E,2B-1,A-E+2,E-1] & D \geq B, A=-B+D+E \\ [B+E,D,2C-1,D+2,E-1] & A=C+D+E \\ [A-B-C-D,B+D,2C,B+D,E] & A \geq B+C+D+E \\ [-A+B+C+D+2E,A-C-E,2C,A-C-E,E] & B+C+D+E \geq A > C+D+E \\ [A+B-C-D,-A+C+2D+E,2A-2D-2E,-A+C+2D+E,E] & C+D+E \geq A > -B+C+D+E \\ [-A-B+C+D+2E,2A+B-D-2E,-2A+2D+2E,2A+B-D-2E,E] & -B+C+D+E \geq A > -B+D+E \\ [-A-B+C+D+2E,B+D,2A-2D-2E,B+D,E] & -B+C+D+E \geq A \geq D+E \\ [A+B-C-D,A+C-E,-2A+2D+2E,A+C-E,E] & D+E \geq A \geq -B+C+D+E \\ [A+B+C-D,D-B,2B,D-B,E] & -B+D+E > A \geq -B-C+D+E \\ [-A-B-C+D+2E,A+C-E,2B,A+C-E,E] & -B-C+D+E \geq A > C \end{cases}$$

結論 1 我們發現，嚴格正規數案例可分為兩種型態：

$$Type\,1 : K([z]) = [a,b,2d,b,c] \qquad Type\,2 : K([z]) = [a,b,2d+1,b+2,c]$$

其中 a,b,c 為正整數，且 $a>c$, d 為非負整數。

(二)$Type\,1$、$Type\,2$ 變換

經由我們計算 (附錄 1) 發現，$Type\,1$ 只在 $a=b+c+2d$ 時變換後會是 $Type\,2$ 的形式，而 $a=c$ 或 $a=b+c$ 時變換後為非正規；$Type\,2$ 變換的結果大部分皆轉換為 $Type\,1$，變換後仍為 $Type\,2$ 的情形必為下列 3 種形式之一：

$$(b+c,b,4d-1,b+2,c-1)\,,\ (b+c,b+2,4d+3,b+4,c-1)\,,\ (c+2d-1,2,2b-1,4,c-1)$$

實際上此 3 種形式最多再經 4 次運算 (過程於附錄2) 後必為 $Type\,1$ 的形式，其運算過程於附錄。當其轉換成 $Type\,1$ 的形式 $[A,B,2D,B,C]$ 時，必滿足 $A>C$，且 $A\neq B+C+2D$，此意味著接下來的運算結果皆會是 $Type\,1$ 形式。

(三) 擬正規數變換

若五進位某數 $[m_4,m_3,m_2,m_1,m_0]$ 符合 $m_2=0$ 且 m_4,m_3,m_1,m_0 為正整數，我們稱之為「擬正規數」。

$$K([A,B,0,D,E])=\begin{cases}[A-B-D,B+D,0,B+D,E] & A\geq B+D+E\\ [-A+B+D+2E,A-E,0,A-E,E] & B+D+E\geq A>D+E\\ [B+E,D-1,1,D+1,E-1] & A=D+E\\ [A+B-D,A-E,-2A+2D+2E-1,A-E+2,E-1] & D+E>A\geq D+E-B\\ [-A-B+D+2E,A-E,2B-1,A-E+2,E-1] & D+E-B\geq A>E\\ [A+B-D,D-1,1,D+1,E-1] & A=E,B\geq D\\ [A-B+D,B-1,1,B+1,E-1] & A=E,D\geq B\end{cases}$$

我們發現在擬正規的變換中，出現的不僅有正規的 $Type\,1$ 與 $Type\,2$ 的形式，還出現了擬正規的 $Type\,1$ 形式，我們再將此形式進行再一次變換，如下：

$$K([a,b,0,b,c])=\begin{cases}[a-2b,2b,0,2b,c] & a\geq 2b+c\\ [-a+2b+2c,a-c,0,a-c,c] & 2b+c>a>b+c\\ [a,a-c,-2a+2b+2c-1,a-c+2,c-1] & b+c>a>c\\ [a,b-1,1,b+1,c-1] & a=b+c\end{cases}$$

第二行的 $b'+c'>a'$，因此再經過一次換算後成為 $Type\,2$。

由前面的先前的正規數變換可得下面引理：

引理 3

(1) 正規數間的變換最多經過 4 次 Kaprekar 運算，必為 $Type\,1$ 的形式。

(2) 若 $Type\,1$ 形式的 5 進位數 $[a,b,2d,b,c]$ 為正規數，且 $a\neq c,b+c,b+c+2d$ 則 $K([a,b,2d,b,c])$ 仍為 $Type\,1$ 的形式。

(3) 在 (2) 的條件下，記 $[a',b',2d',b',c']:=K([a,b,2d,b,c])$，則 $c'=c$，且 $a'+2b'+2d'+c'=a+2b+2d+c$。

而正規之 $Type\,1$ 在撇除 $a=b+c+2d$ 的案例之外轉換後皆為 $Type\,1$，因此我們決定先討論轉換先後皆為 $Type\,1$ 的 Kaprekar 運算的循環。

(四)5 進位的 Kaprekar 常數

五進位 Kaprekar 常數，有下列結果：

定理 3

(1) 五進位 Kaprekar 常數形式 (a,b 為正整數)：$[a+b,2b,2b,2b,a]$

(2) 若 z 為五進位 Kaprekar 常數，z 之形式必定如下：

$$z=\underbrace{44...44}_{a}\,\underbrace{3...3}_{b}\,\underbrace{2...2}_{b}\,\underbrace{1...1}_{b-1}\,0\,\underbrace{4...4}_{b}\,\underbrace{3...3}_{b}\,\underbrace{2...2}_{b}\,\underbrace{1...1}_{b}\,\underbrace{0...0}_{a-1}\,1$$

< 証明 >：我們分正規及非正規的情形討論，細節如下面 1. 正規 5 進位 Kaprekar 常數與2. 非正規 5 進位 Kaprekar 常數的討論。

1. 正規 5 進位 Kaprekar 常數形式

由引理3可知，正規數在不停轉換下若皆為正規數，則必在 $Type\,1$ 中循環，因此討論 5 進位的 Kaprekar 常數只需討論 $Type\,1$ 的可能。

由引理 3(2) 可知，在正規 $Type\,1$ 的變換過程中，$c'=c$ 永遠成立，代表 m_0 永為 c，又因 $a+b+c+2d$ 為定值，因此只需討論 $a,b,2d$ 其中之二的運算前後值是否相等便可確認是否為 Kaprekar 常數。

運算矩陣：設 $\alpha=a-c,\ \beta=a-c-2d$，已知 $a\geq c$ 故 $\alpha\geq 0$。

$$(A)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ c & b & 2d & b & \beta-2b \end{bmatrix} \qquad (B)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2d \\ 0 & 0 & 0 & 2b-\beta & \beta-b \\ c & b & 2d & \beta-b & 0 \end{bmatrix}$$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b-\beta & \alpha-b \\ 0 & 0 & b-\beta & \beta & 0 \\ c & b & \alpha-b & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & b-\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2d & 0 \\ 0 & b-\alpha & 2d & \beta & 0 \\ c & \alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -\beta & b & \alpha-b \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ c & b & \alpha-b & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (F) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & b-\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & b-\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ c & \alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(1) 避免換算後成為 $Type\,2$，(B) 與 (C) 之 $\beta \neq b$。

(2) 由引理 2 可知 $m_4' = c + a_{i,i}$；當 $\alpha - a_{i,i} = 0$ 成立時 $m_4 = m_4'$。

$$\begin{array}{ll} (\text{A})\alpha - a_{i,i} = 2b + \alpha - \beta & (\text{B})\alpha - a_{i,i} = \alpha + \beta - 2b \\ (\text{C})\alpha - a_{i,i} = \alpha - \beta & (\text{D})\alpha - a_{i,i} = \alpha - \beta \\ (\text{E})\alpha - a_{i,i} = \alpha + \beta & (\text{F})\alpha - a_{i,i} = \alpha + \beta \end{array}$$

(3) 由引理 2 可知 $m_2' = 2a_{i+2,i}$；當 $2a_{i+2,i} - 2d = 0$ 成立時 $m_2 = m_2'$。

$$\begin{array}{ll} (\text{A})2a_{i+2,i} - 2d = \alpha - \beta & (\text{B})2a_{i+2,i} - 2d = \alpha - \beta \\ (\text{C})2a_{i+2,i} - 2d = \alpha + \beta - 2b & (\text{D})2a_{i+2,i} - 2d = 2b - 3\alpha + \beta \\ (\text{E})2a_{i+2,i} - 2d = \alpha + \beta - 2b & (\text{F})2a_{i+2,i} - 2d = 2b - 3\alpha + \beta \end{array}$$

由 (2)(3) 可能同時為 0 僅有 (B),(C),(D),(F)。

(4) 因 $\alpha = a - c\,,\, \beta = a - c - 2d$，當 $\alpha - \beta = 0$ 成立時 $2d = 0$，為非正規數。

(5) 由以上四點，可能為 kaprekar 常數的種類僅有 (F)，且成立時 $b = 2\alpha = -2\beta$，即為 $2(a-c) = b = 2d$。

2. 非正規五進位 Kaprekar 常數形式 (包含擬正規)

已知 A,B,C,D,E 為非負整數：

(1) A,B,C,D,E 僅其一元素為零，此元素變換後仍為零之可能：

$K([0,B,C,D,E])=[0,C+E,2B-2E+1,C+E-1,1]$ $\quad B+C=D+E\,,\ B\geq E$

$K([0,B,C,D,E])=[0,B+D,2E-2B+1,B+D-2,1]$ $\quad B+C=D+E\,,\ E\geq B$

$K([A,0,C,D,E])=[A+D,0,2C,2,A-1]$ $\quad A+C=E$

$K([A,B,0,D,E])=[E,B+D,0,B+D,E]$ $\quad A=C+D+E$

$K([A,B,0,D,E])=[A,B+D,0,B+D,A]$ $\quad E=A+C+D$

$K([A,B,C,D,0])=[B,A,2C+1,A,0]$ $\quad A=C+D$

(2) A,B,C,D,E 其中兩個以上元素為零則不可能出現為零元素換算後仍為零。

(3) 由以上兩點，五進位非正規數中無 Kaprekar 常數

(七) $Type\,1$ 正規與擬正規的 Kaprekar 變換

由引理 3，我們接下來討論正規及擬正規且為 $Type\,1$ 情形下的 Kaprekar 變換的結果。根據 (六)-1 與 2 節的討論，$Type\,1$ 的正規及擬正規 Kaprekar 變換可以再區分成六大類情況:$(A)-(F)$，而當 $[z]=[a,b,2d,b,c]$ 且 $a=c$ 或 $a-c=b$ 或 $a-c=b+2d$ 時，$K([z])$ 為 $Type\,2$，對應情況 (G)、(H)、(I)。將結果列出如下表：首先，$[z]=[a,b,2d,b,c]$, 且 $a\neq c,b,b+2d$ 時，記 $K([z])=[a',b',2d',b',c']$ 將 $a'-c'$、b'、$2d'$ 分開運算整理為下表（$Type\,2$ 則省略變換）：

	$a'-c'$	b'	$2d'$	範圍
(A)	$(a-c)-2b-2d$	b	$4d$	$a-c\geq 2b+2d$
(B)	$-(a-c)+2b+2d$	$(a-c)-2d$	$4d$	$2b+2d\geq a-c>b+2d$
(C)	$(a-c)-2d$	$-(a-c)+2b+2d$	$2(a-c)-2b$	$b+2d>a-c\geq 2d>0$
(D)	$-(a-c)+2d$	$2b$	$2(a-c)-2b$	$2d\geq a-c>b$
(E)	$a-c-2d$	$(a-c)+2d$	$-2(a-c)+2b$	$b>a-c\geq 2d>0$
(F)	$-(a-c)+2d$	$2(a-c)$	$-2(a-c)+2b$	$b>a-c>0\,,\ 2d\geq a-c>0$
(G)		$Type\,2$		$a-c=b+2d$
(H)		$Type\,2$		$a-c=b,\ 2d\geq 0$
(I)		$Type\,2$		$a-c=0$

1. x, y **變換**

$[z]=[a,b,2d,b,c]$，引入兩個比值 x,y

$$x=\frac{a-c}{b},y=\frac{a-c-2d}{b}$$

由引理 3(4)，可由 c 及比值 x,y，經由適當變換唯一決定。因此，我們打算將 5 進位正規及擬正規且為 $Type\,1$ 的 Kaprekar 變換，轉換成 $x-y$ 平面座標系上的變換，來討論對應的 Kaprekar 的運算循環。並且我們限制在嚴格正規數與嚴格擬正規數的變換的情形，若換算至變換後為 $Type\,2$ 的情形則不再考慮運算。根據前面 $Type\,1$ 的正規及擬正規 Kaprekar 變換表格，可將對應的 x' 與 y' 及集合區範圍分為以下六種

(A) $x'=\frac{y}{2}-1$ $y'=-x+\frac{3y}{2}-1$ $A:=\{(x,y)|x\geq y\geq 2\ \}$

(B) $x'=\frac{2}{y}-1$ $y'=\frac{-2x+2}{y}+1$ $B:=\{(x,y)|x\geq y\,,\,2\geq y>1\}$

(C) $x'=\frac{y}{-y+2}$ $y'=\frac{-2x+y+2}{-y+2}$ $C:=\{(x,y)|x\geq 1\,,\,1>y\geq 0\}$

(D) $x'=\frac{-y}{2}$ $y'=-x-\frac{y}{2}+1$ $D:=\{(x,y)|x\geq 1\,,\,0\geq y\}$

(E) $x'=\frac{y}{2x-y}$ $y'=\frac{2x+y-2}{2x-y}$ $E:=\{(x,y)|1\geq x>y\geq 0\}$

(F) $x'=\frac{-y}{2x}$ $y'=\frac{-y-2}{2x}+1$ $F:=\{(x,y)|1\geq x>0\,,\,0\geq y\}$

根據上面結果，我們定義對應的 Kaprekar 變換為 $\mathcal{G}(x,y)$ 如下：

定義 11 區域 $\mathcal{R}_0$ 與函數 $\mathcal{G}$

1 令區域 $\mathcal{R}_0:=A\cup B\cup C\cup D\cup E\cup F$。

2 在區域 $\mathcal{R}_0$ 上的函數，$\mathcal{G}(x,y)=\begin{cases}(\frac{y}{2}-1,-x+\frac{3y}{2}-1) & (x,y)\in A\\ (\frac{2}{y}-1,\frac{-2x+2}{y}+1) & (x,y)\in B\\ (\frac{y}{2-y},\frac{-2x+y+2}{2-y}) & (x,y)\in C\\ (-\frac{y}{2},-x-\frac{y}{2}+1) & (x,y)\in D\\ (\frac{y}{2x-y},\frac{2x+y-2}{2x-y}) & (x,y)\in E\\ (-\frac{y}{2x},\frac{-y-2}{2x}+1) & (x,y)\in F\end{cases}$

區域 $\mathcal{R}_0$ 的邊界上，對應的 Kaprekar 變換不適用此範圍的計算：
變換後為 $Type\,2$：(G)$1\geq x=y\geq 0$, (H)$0\geq x$, (I)$y=1$；不存在：$y>x$ 。

函數 $\mathcal{G}$ 的性質有如下結果：

引理 4 若 $(x,y)\in\mathcal{R}_0$, 設 $(x',y')=\mathcal{G}(x,y)$，則下列性質成立:

(1) $(x',y')\in\mathcal{R}_0$。

(2) 若 $(x,y)\in A$, 則 $x'-y'=x-y$。

(3) 若 $(x,y)\in B$, 則 $x'-y'=\frac{2}{y}(x-y)$。

(4) 若 $(x,y)\in C$, 則 $x'+y'=\frac{2}{2-y}\big(1-(x-y)\big)$。

(5) 若 $(x,y)\in D$, 則 $y'-x'=1-x$，且 $x'+y'=1-(x+y)$。

(6) 若 $(x,y)\in E$, 則 $x'+y'=\frac{2}{2x-y}\big((x+y)-1\big)$。

(7) 若 $(x,y)\in F$, 則 $x'+y'=\frac{1}{x}\big((x-y)-1\big)$。

$<$ 証明 $>$：由區域 $\mathcal{R}_0$ 與函數 $\mathcal{G}$ 的定義直接計算可得。

由引理 4，我們可以直接得到下列結果。

系理 1 下列結果成立：

(1) 假設 $(x,y)\in C$，若 $x-y=1$，則 $x'+y'=0$。

(2) 假設 $(x,y)\in D$，若 $x+y=0$，則 $x'+y'=1$；若 $x+y=1$, 則 $x'+y'=0$ 。

(3) 假設 $(x,y)\in E$，若 $x+y=1$，則 $x'+y'=0$ 。

(4) 假設 $(x,y)\in F$，若 $x-y=1$，則 $x'+y'=0$。

$<$ 証明 $>$：(1) $(x,y)\in C$ 及引理 4(4) 可得証。(2)$(x,y)\in D$ 及引理 4(5) 可得証。

(3)$(x,y)\in E$ 及引理 4(6) 可得証。(4)$(x,y)\in F$ 及引理 4(7) 可得証。

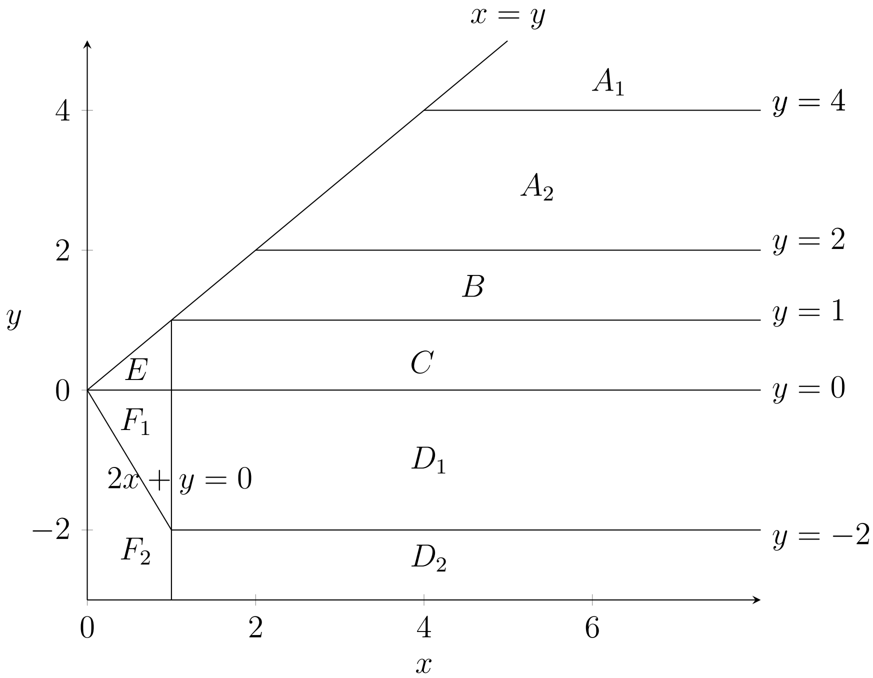
依照以上適用的六個範圍可在二維坐標系中劃分出 6 個區塊，此六區塊各代表一個類型的運算，而我們再依 x' 是否大於等於 1 作區分，將 A, D, F 再細分兩組：

$A_1 := \{(x,y)|x \geq y \geq 4\}$　　$A_2 := \{(x,y)|x \geq y,\ 4 \geq y \geq 2\}$

$D_1 := \{(x,y)|x \geq 1,\ y \geq -2\}$　　$D_2 := \{(x,y)|x \geq 1,\ -2 \geq y\}$

$F_1 := \{(x,y)|1 \geq x > 0,\ 2x \geq -y\}$　　$F_2 := \{(x,y)|1 \geq x > 0,\ -y \geq 2x\}$

除了區塊 A_1, D_2, F_2 會在相同區塊內連續變換，其餘區塊內的點進行一次變換即為不同區塊的點。所有區塊如下：



	變換後區域
(A)	A, B, C, D, E, F
(B)	E, F
(C)	E, F
(D)	A, B, C, D, E, F
(E)	E, F
(F)	A, B, C, D, E, F

2. 各區域變換情形

比值 x,y 的區域 $A_1,A_2,B,C,D_1,D_2,E,F_1,F_2$ 更仔細地變換及充要條件列於下方：

$A_1\to A_1$ $A_1\to B$ $A_1\to D_1$	$x\geq y\geq 4$，$-10\geq 2x-3y$ $x\geq y\geq 4$，$-4>2x-3y\geq -6$ $x\geq y\geq 4$, $2\geq 2x-3y\geq -2$	$A_1\to A_2$ $A_1\to C$ $A_1\to D_2$	$x\geq y\geq 4$，$-6\geq 2x-3y\geq -10$ $x\geq y\geq 4$, $-2\geq 2x-3y>-4$ $x\geq y\geq 4$, $2x-3y\geq 2$
$A_2\to E$ $A_2\to F_2$	$x\geq y$, $4\geq y\geq 2$, $-2\geq 2x-3y$ $x\geq y$, $4\geq y\geq 2$, $2x-3y\geq -2$，$2x-5y\geq -6$	$A_2\to F_1$	$x\geq y$, $4\geq y\geq 2$, $2\geq 2x-3y$, $-6\geq 2x-5y$
$B\to E$ $B\to F_2$	$x\geq y$, $2\geq y>1$, $2\geq 2x-y$ $x\geq y$, $2\geq y>1$, $2x-y\geq 2$, $2x+y\geq 6$	$B\to F_1$	$x\geq y$, $2\geq y>1$, $2x-y\geq 2$, $6\geq 2x+y$
$C\to E$ $C\to F_2$	$x>1$, $1>y\geq 0$, $2\geq 2x-y$ $x>1$, $1>y\geq 0$, $2x-y\geq 2$, $2x-3y\geq 2$	$C\to F_1$	$x>1$, $1>y\geq 0$, $2x-y\geq 2$, $2\geq 2x-3y$
$D_1\to E$ $D_1\to F_2$	$x>1$, $0\geq y\geq -2$, $2\geq 2x+y$ $x>1$, $0\geq y\geq -2$, $2x+y\geq 2$, $2x+3y\geq 2$	$D_1\to F_1$	$x>1$, $0\geq y\geq -2$, $2x+y\geq 2$, $2\geq 2x+3y$
$D_2\to A_1$ $D_2\to B$ $D_2\to D_1$	$x\geq 1$, $-2\geq y$, $-6\geq 2x+y$ $x\geq 1$, $-2\geq y$, $0>2x+y\geq -2$ $x\geq 1$, $-2\geq y$, $6\geq 2x+y\geq 2$	$D_2\to A_2$ $D_2\to C$ $D_2\to D_2$	$x\geq 1$, $-2\geq y$, $-2\geq 2x+y\geq -6$ $x\geq 1$, $-2\geq y$, $2\geq 2x+y>0$ $x\geq 1$, $-2\geq y$, $2x+y\geq 6$
$E\to E$ $E\to F_2$	$1\geq x>y\geq 0$, $2x+y\geq 2$ $1\geq x>y\geq 0$, $2\geq 2x+y>0$, $2\geq 2x+3y$	$E\to F_1$	$1\geq x>y\geq 0$, $2\geq 2x+y>0$, $2x+3y\geq 2$
$F_2\to A_1$ $F_2\to B$ $F_2\to D_1$	$1\geq x>0$, $0\geq y$, $-y\geq 2x$, $-6x\geq y+2$ $1\geq x>0$, $0\geq y$, $-y\geq 2x$, $0>y+2\geq -2x$ $1\geq x>0$, $0\geq y$, $-y\geq 2x$, $6x\geq y+2\geq 2x$	$F_2\to A_2$ $F_2\to C$ $F_2\to D_2$	$1\geq x>0$, $0\geq y$, $2x\geq -y$, $-2x\geq y+2\geq -6x$ $1\geq x>0$, $0\geq y$, $-y\geq 2x$, $2x\geq y+2>0$ $1\geq x>0$, $0\geq y$, $-y\geq 2x$, $y+2\geq 6x$
$F_1\to E$ $F_1\to F_1$	$1\geq x>0$, $0\geq y$, $-y\geq 2x$, $-y\geq 2x\geq 2$ $1\geq x>0$, $0\geq y$, $-y\geq 2x$, $2\geq 2x-3y$	$F_1\to F_2$	$1\geq x>0$, $0\geq y$, $-y\geq 2x$, $2\geq 2x-y$, $2x-3y\geq 2$

3. 嚴格正規數 Kaprekar 變換的一些性質

透過對 Kaprekar 變換 $\mathcal{G}$ 在某些情形下的觀察，例如：

(1) 循環長度 3：$(\frac{1}{3},-\frac{1}{3})F\to(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})F\to(\frac{3}{2},\frac{1}{2})C\to(\frac{1}{3},-\frac{1}{3})F$

(2) 循環長度 4：$(\frac{1}{6},-\frac{1}{6})F\to(\frac{1}{2},-\frac{9}{2})F\to(\frac{9}{2},\frac{7}{2})A\to(\frac{3}{4},-\frac{1}{4})C\to(\frac{1}{6},-\frac{1}{6})F$

(3) 循環長度 4：$(\frac{1}{7},-\frac{1}{7})F\to(\frac{1}{2},-\frac{11}{2})F\to(\frac{11}{2},\frac{9}{2})A\to(\frac{5}{4},\frac{1}{4})\,C\to(\frac{1}{7},-\frac{1}{7})\,F$

(4) 循環長度 5：$(\frac{1}{14},-\frac{1}{14})F\to(\frac{1}{2},-\frac{25}{2})F\to(\frac{25}{2},\frac{23}{2})A\to(\frac{19}{4},\frac{15}{4})A\to(\frac{7}{8},-\frac{1}{8})C\to(\frac{1}{14},-\frac{1}{14})F$

(5) 循環長度 5：$(\frac{1}{15},-\frac{1}{15})F\to(\frac{1}{2},-\frac{27}{2})F\to(\frac{27}{2},\frac{25}{2})A\to(\frac{21}{4},\frac{17}{4})A\to(\frac{9}{8},\frac{1}{8})C\to(\frac{1}{15},-\frac{1}{15})F$

(6) 循環長度 7：$(\frac{1}{62},-\frac{1}{62})F\to(\frac{1}{2},-\frac{121}{2})F\to(\frac{121}{2},\frac{199}{2})A\to(\frac{115}{4},\frac{109}{4})A\to(\frac{103}{8},\frac{95}{8})A\to(\frac{79}{16},\frac{63}{16})A\to(\frac{31}{32},-\frac{1}{32})F\to(\frac{1}{62},-\frac{1}{62})F$

在一些特定情形下，我們考慮嚴格正規數 Kaprekar 變換 $\mathcal{G}$ 的性質如下:

引理 5 ($D \to \{D$ 或 $E\} \to F$)

(1) 若 $x > 1$，$(x, -x) \in D$，則 $\mathcal{G}(x, -x) = (\frac{x}{2}, 1 - \frac{x}{2}) \in D \cup E$。

(2) 若 $x > \frac{1}{2}$，$(x, 1-x) \in D \cup E$ 則有 $x' > 0$ 使 $\mathcal{G}(x, 1-x) = (x', -x')$

< 証明 >：(1) 由系理 1(2) 可得証。(2) 可由系理 1(2)(3) 得証。

系理 2 若 $x > 1$，$(x, -x) \in D$，令 $(x', 1-x') := \mathcal{G}(x, -x)$，及 $(x'', y'') := \mathcal{G}^2(x, -x)$，依 $x > 2$ 或 $x < 2$ 可分成下列兩種情形：

(1) 若 $x \in (1, 2)$, 令 $\mathcal{G}(x, -x) \in E$，及 $\mathcal{G}^2(x, -x) \in F$，則有 $x'' = \frac{2-x}{3x-2}$。

(2) 若 $x > 2$, 令 $\mathcal{G}(x, -x) \in D$，及 $\mathcal{G}^2(x, -x) \in F \cup D$，則有 $x'' = (\frac{x}{2} - 1)/2$，且若 $\mathcal{G}^2(x, -x) \in D$，則必有正整數 n 及 $a \in (0, 1)$ 使 $\mathcal{G}^{2n}(x, -x) = (a, -a) \in F$。

< 証明 >：由系理 1(2)(3)(4), 引理 5及函數 $\mathcal{G}$ 的定義可得証。

根據系理 2, 由 $(x, -x)$, $x > 1$ 開始的 Kaprekar 變換過程必為以下兩種：

- $(x, -x) \in D \to E \to (X, -X) \in F, X < 1$
- $(x, -x) \in D \to D \to (x_1, -x_1) \in D \to \cdots \to$ 直到 $\to D \to (X, -X) \in F$

引理 6 ($F \to \cdots \to F$)

(1) 若 $x \in (0, \frac{2}{3})$，則 $\mathcal{G}(x, -x) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{1}{x}) \in F$，且 $\mathcal{G}^2(x, -x) = (p, p-1)$，$p = \frac{1}{x} - \frac{3}{2}$, 其中 $(p, p-1) \in A \cup B \cup C \cup F$。

(2) 若 $x \in (\frac{2}{3}, 1)$，則 $\mathcal{G}(x, -x) \in E$, $\mathcal{G}^2(x, -x) \in F$ 且 $\mathcal{G}^3(x, -x) := (a, 1-a)$, 其中 $a > 1/2$。

(3) 若 $x \in (0, \frac{1}{3})$, 則 $\mathcal{G}(x, x-1) = (x', -x') \in D$, 且 $x' = (\frac{1}{x} - 1)/2 = g(x)$。

(4) 若 $x \in (\frac{1}{3}, 1)$, 則 $\mathcal{G}(x, x-1) = (x', -x') \in F$, 且 $x' = (\frac{1}{x} - 1)/2 \in (0, 1)$。

< 証明 >：由系理 1及函數 $\mathcal{G}$ 的定義直接計算即可得証。

根據引理 5及引理 6，由 $(x,-x)$ 或 $(x,x-1)$, $x<1$ 開始的 Kaprekar 變換過程有三種：

- $(x,-x)\in F\to F\to (X,X-1)\in A\cup B\cup C\cup F$
- $(x,-x)\in F\to E\to F\to (a,1-a)\in D\cup E\to\cdots\to (X,-X)\in F$
- $(x,x-1)\in F\to (a,-a)\in D\cup F\to\cdots\to (X,-X)\in F$

引理 7 $(\{A,B,C\}\to F)$

若 $x>1$ 時，依 $x\in(1,2)$, $(2,3)$ 或 $(3,\infty)$ 的情形下列成立：

(1) 若 $x\in(1,2)$，此時 $\mathcal{G}(x,x-1)=(x_1,-x_1)\in F$，且 $x_1=\frac{x-1}{(2-(x-1))}$ 。

(2) 若 $x\in(2,3)$，此時 $\begin{cases}\mathcal{G}(x,x-1)=(x_1,-1)\in F,\ x_1=-1+\frac{2}{(x-1)}\\ \mathcal{G}^2(x,x-1)=(x_2,1-x_2)\in D\\ \mathcal{G}^3(x,x-1)=(x_3,x_3-1)\in F\end{cases}$

(3) 若 $x\in(3,\infty)$，此時 $\mathcal{G}(x,x-1)=(x_1,x_1-1)\in A$，且 $x_1=\frac{1}{2}(x-1)-1$。

$<$ 証明 $>$：由系理 1, 5, 引理 6及函數 $\mathcal{G}$ 的定義直接計算即可得証。

根據引理 7，不論 $(x,x-1)$ 是在區域 A 或 B 或 C 或 F，經一後列 Kaprekar 變換後必為 $(a,a-1)\in F$。

定理 4

(1) 若 $(x,-x),x\in(0,1)$，則必有正整數 n，使得 $\mathcal{G}^n(x,-x)\in F$，且若令 $(x',y'):=\mathcal{G}^n(x,-x)$，$y'=-x'$。

(2) n 為正整數且 $n\neq 1$，則 $(\frac{1}{2^{n+1}-2},-\frac{1}{2^{n+1}-2})$ 起始的序對列，其 Kaprekar 變換週期為 $n+3$，即 $\mathcal{G}^{n+3}(\frac{1}{2^{n+1}-2},-\frac{1}{2^{n+1}-2})=(\frac{1}{2^{n+1}-2},-\frac{1}{2^{n+1}-2})$。

(3) n 為正整數 $(\frac{1}{2^{n+1}-1},-\frac{1}{2^{n+1}-1})$ 起始的序對列，其 Kaprekar 變換週期為 $n+3$，即 $\mathcal{G}^{n+3}(\frac{1}{2^{n+1}-1},-\frac{1}{2^{n+1}-1})=(\frac{1}{2^{n+1}-1},-\frac{1}{2^{n+1}-1})$。

(4) 對任意正整數 N, $N\neq 2$，存在循環長度為 N 的 5 進位 Kaprekar 數列。

< 証明 >：

(1) 由引理 5、6及 7可証得。

(2) 由引理 6(1) 知 $\mathcal{G}^2(\frac{1}{2^{n+1}-2}, -\frac{1}{2^{n+1}-2}) = (2^{n+2}-\frac{7}{2}, 2^{n+2}-\frac{9}{2}) \in A$，

再由引理 7(3) 知 $\mathcal{G}^n(2^{n+2}-\frac{7}{2}, 2^{n+2}-\frac{9}{2}) = ((\frac{1}{2})^{n+1}-(\frac{1}{2})^n+1, (\frac{1}{2})^{n+1}-(\frac{1}{2})^n) \in F$。

最後 $\mathcal{G}\Big((\frac{1}{2})^{n+1}-(\frac{1}{2})^n+1, (\frac{1}{2})^{n+1}-(\frac{1}{2})^n\Big) = (\frac{1}{2^{n+1}-2}, -\frac{1}{2^{n+1}-2})$，故得証。

(3) 由引理 6(1) 知 $\mathcal{G}^2(\frac{1}{2^{n+1}-2}, -\frac{1}{2^{n+1}-2}) = (2^{n+2}-\frac{5}{2}, 2^{n+2}-\frac{7}{2}) \in A$，再由引理 7(3) 知 $\mathcal{G}^n(2^{n+2}-\frac{7}{2}, 2^{n+2}-\frac{9}{2}) = ((\frac{1}{2})^n+1, (\frac{1}{2})^n) \in C$。最後 $\mathcal{G}\Big(((\frac{1}{2})^n+1, (\frac{1}{2})^n) = (\frac{1}{2^{n+1}-2}, -\frac{1}{2^{n+1}-2})$，故得証。

(4) 當 $N=1$ 時，$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 為 Kaprekar 常數。當 $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ 循環長度為 3。$N \geq 4$ 時，由 (2) 與 (3) 可得。

4. **擬正規數** Kaprekar **變換情形**

擬正規數 $[a,b,0,b,c]$ 的 Kaprekar 變換情形，即為在 $x-y$ 系統中 $x=y$ 上的點變換，以下我們分成以下兩種情形討論：

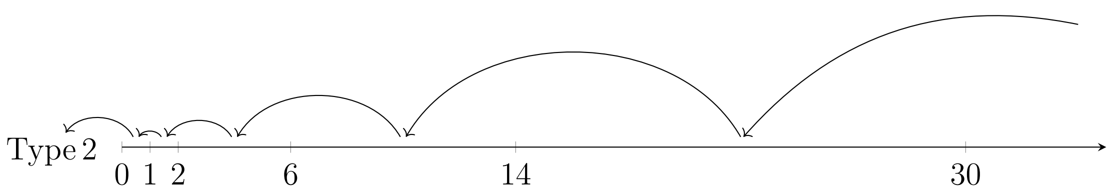
(1) $x=y>1$。直接計算可知 (x,y) 經 Kaprekar 變換後的 (x', y') 也符合 $\mathcal{G}$ 在區域 A, B 中的形式，引理 4(2)(3) 也成立。直接計算可得，$x' = \frac{x}{2}-1$(區域 A) 或 $\frac{2}{x}-1$(區域 B)，因此 $\frac{x'}{2} = g(x/2)$，其中 g 如定義 7。故由引理 1可知：

(i) 若 $2\alpha_{n+1} < x < 2\alpha_{n+2}$，則 $2\alpha_n < x' < 2\alpha_{n+1}$, 其中 $\alpha_n = 2^n-1$ 如定義 8。

(ii) 若 $x = 2\alpha_{n+1}$，則 $x' = 2\alpha_n$。

(iii) 若 $2\alpha_1 < x < 2\alpha_2$，則 $1 < x' < 2\alpha_2$。

(2) $0<x=y<1$ 時。直接計算可知 $Type\,1$ 擬正規數經一次變換成為類似 $Type\,2$ 的形式。



$[\,2(2^{k+1}-1),\ 2(2^k-1)\,) \to [\,2(2^k-1),\ 2(2^{k-1}-1)\,) \to \ ... \to [\,14,\ 6\,) \to [\,6,\ 2\,) \to [\,2,\ 1\,) \to [\,1,\ 0\,) \to Type\,2$

整理 4. 擬正規數 Kaprekar 變換情形的討論可得下面引理：

引理 8 $Type\,1$ 的擬正規數的 Kaprekar 變換

若 $x = y > 0$, 且 $\alpha_n = 2^n - 1$ 如定義 8，則：

(1) 若 $x \in (2\alpha_{n+1}, 2\alpha_{n+2})$，則 $x' \in (2\alpha_n, 2\alpha_{n+1})$。

(2) 若 $x = 2\alpha_{n+1}$，則 $x' = 2\alpha_n$。

(3) 若 $x \in (2\alpha_1, 2\alpha_2)$，則 $x' \in (1, 2)$。

(4) 若 $1 < x < 2$，則 Kaprekar 變換 2 次後為類似 $Type\,2$ 的形式。

定理 5 對於任意正整數 n，必有擬正規 Kaprekar 數 z，使得 $\{K^i(z) | 0 \leq i \leq n\}$ 中不會出現循環數列。

五、3,4,5 進位相似現象以及延伸討論

我們結合 [4](洪芷璿, 洪旖昕, 鍾亞書,2022) 文中對於 3、4 進位結果以及本文的 5 進位，觀察到的一些相似現象做為發想，再用 Kaprekar 運算矩陣與引理 2 具象化我們的觀察。

首先藉由觀察 3、4、5 進位正規數在經一次變換後的型態，我們發現此三進位有兩個相似形態，因此我們推測任意進位正規數變換後會產生特定兩種型態，成因則與退位值有關。

定理 6 正規數 z 經過一次變換後必為下列兩形式之一 (證明於附錄 3)：

$$Type-A \begin{cases} 2n+1 \text{ 進位：} & [z] = [M_{2n}, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, 2M_n, M_{n-1}, ..., M_2, M_1, M_0] \\ 2n \text{ 進位：} & [z] = [M_{2n-1}, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_{n-1}, ..., M_2, M_1, M_0] \end{cases}$$

$$Type-B \begin{cases} 2n+1 \text{ 進位：} & [z] = [M_{2n}, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, 2M_n, M_{n-1}, ..., M_2 - 1, M_1 + 2, M_0] \\ 2n \text{ 進位：} & [z] = [M_{2n-1}, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_{n-1}, ..., M_2 - 1, M_1 + 2, M_0] \end{cases}$$

其中 M_k 為非負整數，$2n+1$ 進位之 $M_{2n} > 0$；$2n$ 進位之 $M_{2n-1} > 0$。

我們觀察到，在 [4](洪芷璿, 洪旖昕, 鍾亞書,2022) 文中 3 與 4 進位以及本文 5 進位正規數變換後，符合 $Type-A$ 形式的比例較 $Type-B$ 高，此現象在引理 9 證明過程 (附錄 4) 可得到解答：

系理 3 已知 z, $[z]=[m_{n-1},m_{n-2},...,m_1,m_0]$ 為一 n 進位正規數。只要有一個 k 符合下列等式，則 z 變換後為 $Type-B$ 之充要條件為存在非負整數 k ; $0\le k\le n-3$ 使得

$$\Sigma_{i=k+2}^{n-2}m_i=\Sigma_{i=0}^{k}m_i,$$

否則 z 變換後為 $Type-A$.

(証明詳細過程於附錄 4)

本文得出 5 進位 Kaprekar 常數形式為 $[a+d,2d,2d,2d,a]$，我們以此為發想，利用 Kaprekar 矩陣的得出特定一種正規數 Kaprekar 常數形式，如下：

定理 7

n 進位數中 $[A+B,2B,2B,...,2B,2B,A]$ 為正規數 Kaprekar 常數一種形式，其中 $n\ge 3$；A,B 為正整數。

< 證明 >：首先，五進位 Kaprekar 常數形式 $[c+d,2d,2d,2d,c]$ 的運算矩陣如下：

$$\begin{bmatrix} & & & & a \\ & & & d & d \\ & & d & d & \\ & d & d & & \\ a & d & & & \end{bmatrix}$$

我們觀察到左方矩陣有以下性質：

(1) $a_{k,5-k}=d$, $k\in\{1,2,3,4\}$

(2) $a_{k,4-k}=d$, $k\in\{1,2,3\}$

(3) $m_k=a_{k,5-k}+a_{k,4-k}=2d$, $k\in\{1,2,3\}$

(4) $m_4=a_{4,0}+a_{4,1}=b+c$；$m_0=a_{4,0}=c$

(5) $S(1)=S(2)=S(3)=2d$, $S(4)=b+c$

以下我們想仿照上述性質將此類性質矩陣推廣致 n 進位，並討論此矩陣形成的數是否為 Kaprekar 常數。矩陣條件如下 (A, B 為整數)：

(1) $a_{k,n-k}=B$, $k\in\{1,2,3,...,n-1\}$

(2) $a_{k,n-1-k}=B$ ， $k\in\{1,2,3,...,n-2\}$

(3) $m_k=a_{k,n-k}+a_{k,n-1-k}=2B$ ， $k\in\{1,2,3,...,n-2\}$

(4) $a_{n-1,0}=A$, $m_{n-1}=a_{n-1,0}+a_{n-1,1}=A+B$

(5) 由 (1)(2)，$\sum_{i=0}^{n-1-k}a_{i+k,i}=\sum_{i=0}^{n-1-k}a_{i,i+k}=B$ ， $k\in\{0,1,2,...,n-2\}$

(6) 由 (5)，$S(k)=2B$ ， $k\in\{1,2,...,n-2\}$；$S(n-1)=a_{n-1,0}+\sum_{i=0}^{n-1-k}a_{i,i}=A+B$

(7) 由於此數為 $Type-A$ 正規數，因此 $m'_0=m_0=A$

(8) 由 (6)：$K([A+B,2B,2B,...,2B,2B,A])=[S(n-1),S(n-2),S(n-3),...,S(2),S(1),m_0]$
$=[A+B,2B,2B,...,2B,2B,A]$，得證。

我們發現 5 進位之擬正規變換與部分 3 進位正規數變換存在類似性質，因此我們想探討不同進位的擬正規數與 $Type-A$ 正規數的關係。

本文初始對於擬正規數的定義僅限於 5 進位之中，而我們利用 Kaperkar 運算矩陣發現一些有關於其他進位類似形式的一些性質，因此我們將擬正規之定義拓寬如下：

定義 12 擬正規數

若 $Type-A$ 之 $2n$(或 $2n+1$) 進位數 $[m_{2n},M_1,M_2,...,M_{n-1},(2M_n),M_{n-1},...,M_2,M_1,m_0]$
滿足 $0=M_k=M_{k+1}=...=M_{n-1}(=M_n)$，其中 $n-1(\text{或}n)\geq k\geq 2$，而其餘 M 元素均為正整數，我們稱此數為「擬正規數」。(由於 $k\geq 2$，因此出現擬正規之進位最小值為 5)

例如：$[3,4,0,0,0,4,7]$、$[8,2,3,0,0,3,2,9]$ 皆為擬正規數；$[3,4,0,1,0,4,7]$、$[8,9,3,0,0,3,2,9]$ 不為擬正規。

肆、研究結果與討論

1 從 Kaprekar 運算矩陣及引理 2，我們可將 5 進位 Kaprekar 變換分成六類情形，此六大類情形對應對區域 A 到 F 及其上的變換。

2 由引理 3知經最多 4 次 Kaprekar 變換，5 進位 Kaprekar 數必為 $Type\,1$ 的形式，其中若為嚴格正規數的情形則接下來的 Kaprekar 數字皆為 $Type\,1$，因此我們可以模仿定義7利用比值 x, y 來構造 Kaprekar 變換，並定義函數 $\mathcal{G}$。

3 函數 $\mathcal{G}$ 的基本性質為引理 4及系理 1。

4 由一個數開始經 Kaprekar 變換所得數列最後必定是一常數或者是循環，因此要了解 kaprekar 變換數列的結構，就需要研究以下三個問題：

問題 1. Kaprekar 常數是什麼？

問題 2. 若不是常數，則 Kaprekar 循環和循環長度為何？

問題 3. 從一數字開始經多少次變換後才會是常數或者開始循環？

本研究定理 3得知 5 進位的 Kaprekar 常數為 $[c+b, 2b, 2b, 2b, c]$ 的形式；定理 4得知 Kaprekar 循環長度可以是任何正整數；最後根據定理 5得知可能要經過任意長的變換過程才開始會出現 Kaprekar 常數或 Kaprekar 循環。

5 引理 2及定理 1我們得到 5 進位 Kaprekar 常數的形式 (定理 3)。其中，正規 5 進位 Kaprekar 常數比值為 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 且落在區域 F 中，經由數值計算結果我們觀察 $(\frac{1}{p}, -\frac{1}{p}), p \in \mathbb{N}$ 開始的 Kaprekar 變換會有一些有趣的性質，例如會重複一些變換的序列，因此觸發我們找到引理 5、6、7及系理 2及定理 4中的 Kaprekar 變換序列的組成。未來我們想從引理 5、6、7出發，參考在文獻 [4] 中定理 2的想法，去構造出一些任意循環長度的 Kaprekar 變換數列，並會密佈在區域 A 到 F 中。

6 函數 $\mathcal{G}$，我們可以研究正規及擬正規 Kaprekar 數的變換，一般來說是相當複雜的，例如由擬正規 Kaprekar 數的變換我們得到引理 8。更一般的情形 Kaprekar 數列在區域 A 到 F 中的變換，我們有一些的初步討論如下：

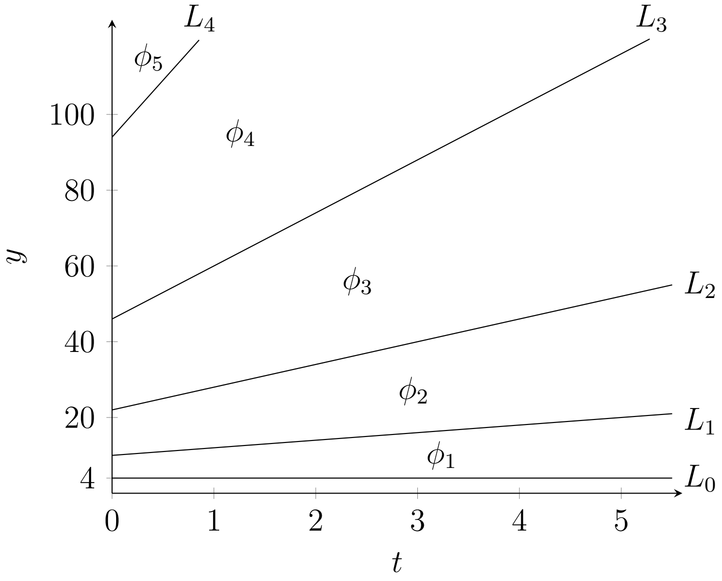
(1) 區塊 $A_1\,(x \geq y \geq 4)$,$x' = \frac{y}{2} - 1$, $y' = -x + \frac{3y}{2} - 1$：

(i) 設 $t = x - y \geq 0$，而 $t' = x' - y' = x - y = t$ 為定值，若 (x_0, y_0) 在 A_1 內且經 k 次運算過程皆在 A_1 則：

$$x_k = \frac{x_{k-1}}{2} - \frac{t_0}{2} - 1, \qquad y_k = \frac{y_{k-1}}{2} - t_0 - 1 = x_k - t_0$$

(ii) 由 (i) 可知 $x_k - y_k = t_0$（k 為非負整數），因此換算後的 x_k, y_k 仍在線 $x - y = t_0$ 上。

$t - y$ 系統：y 會於線 $t = t_0$ 上跳躍



若 $L_k \geq y > L_{k-1}$，則 $y \in \phi_k$，跳躍：$\phi_k \to \phi_{k-1} \to \phi_{k-2} \to ... \to \phi_1$

(2) 區塊 D_2: $x' = \frac{-y}{2}$, $y' = -x - \frac{y}{2} + 1$

設 $t = x + y \geq 0$, $t' = x' + y' = -x - y + 1 = -t + 1$, $t'' = -t' + 1 = t$，可得 $t_0 = t_{2k}$, $t_1 = t_{2k-1} = -t_0 + 1$, $k \in \mathbb{N}$

因此 x', y' 可表示為：

$$x_{2k-1} = \tfrac{x_{2k-2}}{2} - \tfrac{t_0}{2} \qquad y_{2k-1} = \tfrac{y_{2k-2}}{2} - t_0 + 1$$
$$x_{2k} = \tfrac{x_{2k-1}}{2} + \tfrac{t_0 - 1}{2} \qquad y_{2k} = \tfrac{y_{2k-1}}{2} + t_0$$

References

[1] G.D.Prichett, A.L.Ludington, J.F.Lapenta, The Determination of All Decadic. Kaprekar Constants, Fibonacci Quarterly 19.1 (1981):45-52. 11. Lucio Saffara.

[2] STAN DOLAN, A classification of Kaprekar constants, The Mathematical Gazette. Vol.95, No.534(November 2011),pp. 437-443.

[3] Christian H¨ane, Lionel Heng, Gim Hee Lee, Friedrich Fraundorfer, Paul Furgale, Torsten Sattler, Marc Pollefeys, 3D Visual Perception for Self-Driving Cars using a Multi-Camera System: Calibration, Mapping, Localization, and Obstacle Detection, Image and Vision Computing (2017), doi:10.1016/j.imavis.2017.07.00

[4] 洪芷璿, 洪旖昕, 鍾亞書, 2,3,4 進位 Kaprekar 變換之結構, 2022 全國科展數學組第 2 名.

【評語】050405

作者觀察到任何進位的 Kaprekar 變換，都可轉換成滿足一些條件的運算矩陣，藉此探討 5 進位 Kaprekar 變換，找出其常數形式。經過數次變換後，Kaprekar 會維持某形式；對此形式的 Kaprekar 數，作者引進比值 x 與 y，且定義 G(x, y) 來表示經 Kaprekar 變換後的比值，進而討論 5 進位中 Kaprekar 變換的循環結構。作者對既有方法做出突破，獲得饒富趣味的結果。然而很多定義不清楚，包括一開始的進位、退位，且有大量內容埋藏於附錄之中。

作品海報

壹、研究動機

Kaprekar 變換（Kaprekar's routine）是印度數學家 D. R. Kaprekar 於 1949 發現的迭代運算，運算方式為某數中各個數字由大到小排列再減去由小到大排列，而變換前後若數值相同則為 Kaprekar 常數（7641-1467=6174）Kaprekar 變換並不僅有 Kaprekar 常數可討論，變換中的循環現象也十分有趣，而 2、3、4 進位已得出完整結果，因此我們決定討論 5 進位 Kaprekar 變換。

貳、研究目的

1. 整合 Kaprekar 矩陣 [1][2] 的性質及使其運算更加簡明。
2. 探討 5 進位 Kaprekar 常數。
3. 探討 5 進位 Kaprekar 變換的循環現象。

参、研究過程或方法

一、定義

定義 1
$z = p_t \times n^t + p_{t-1} \times n^{t-1} + ... + p_0$
其中 $n, t \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{Z}$, $0 \le p_i \le n-1$, $0 \le i \le t$
任意 n 進位自然數 z 皆可記為以上形式；出於表示方便，我們記 z 做 $z = (p_t p_{t-1} ... p_1 p_0)$。

定義 2

1. 定義集合 $M(n) = \{[m_{n-1}, m_{n-2}, ..., m_1, m_0] \mid m_{n-1}, ..., m_0$ 為非負整數 $\}$， $m_{n-1}, m_{n-2}, ..., m_0$ 分別表示數字 z 中為 $n-1$、$n-2$、...、0 之個數。
2. 我們定義 z 在 $M(n)$ 上的投影為 $[z] = [m_{n-1}, ..., m_1, m_0]$。

定義 3
定義集合 $M(n)$ 上的 Kaprekar 運算為 $K([z]) = [K(z)] = [\overline{z} - \underline{z}]$；我們再將 $m_0, ..., m_{n-2}, m_{n-1}$ 經 Kaprekar 運算後記做 $m'_0, ..., m'_{n-2}, m'_{n-1}$。

定義 4

(1) 「正規數」：若 n 進位數 $[m_{n-1}, m_{n-2}, ..., m_1, m_0]$ 滿足 m_k 皆為正整數，此數即為正規數。

(2) 「嚴格正規數」：即為滿足所有變換過程皆為正規數的正規數。

二、已知結果

定理 1 ([1](G.D.Prichett 1981) ([2](S. DOLAN 2011)

(1) n 進位數經 Kaprekar 運算後, 各數必可兩兩配對成 $\{i, n-1-i\}$, $i \ne n-1$ 或 $\{i, n-i\}$, $i = 0, 1, ..., n-1$ 或 $\{i, n-2-i\}$, $i = 0, 1, ..., n-2$。

(2) 若 z 為 n 進位 Kaprekar 常數，且 z 包含有數字 $n-1$，則 z 的各位數字除 $n-1$ 以外必可兩兩配對成 $\{i, n-1-i\}$, 其中 $i = 0, 1, ..., n-1$。

三、引理

定義 5 n 進位之數字 $[z] = [m_{n-1}, m_{n-2}, ..., m_1, m_0]$ 的 Kaprekar 運算矩陣 $(a_{i,j})_{n \times n}$, $0 \le i, j \le n-1$ 如下：

$$\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n-2} & a_{0,n-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,0} & a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

其中 $a_{i,j}$ 為 Kaprekar 運算中數字 i 減去 j 運算的個數。

定義 6
(1) 行的和 $Col(i) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{i,j}$ (2) 列的和 $Row(j) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,j}$

定義 7 數列 $< S(i) >_{i=0}^{n-1}$ 為：

$$S(k) = \sum_{0 \le i,\, k+i \le n-1} a_{k+i,i} + \sum_{0 \le i \le k \le n-1} a_{i,i+(n-1)-k}$$

$$S(0) = min\{m_0, m_{n-1}\}\ ,\ k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$$

性質 2
退位值為 B 表示在不為零矩陣元素中，$i-j$ 的最小值為 B，因此可知集合 $\{a_{i,j} | 其中 |i-j| < B\}$ 內元素皆為零。

引理 1

(1) $m_i = Col(i) = Row(i)$, $0 \le i \le n-1$

(2) $a_{i,j}$ 有對稱性 $a_{i,j} = a_{j,i}$

(3) ([2](S. DOLAN 2011) 若 $a_{p,q} > 0$；則 $a_{i,j} = 0$ $(i < p, j < q$ 或 $i > p, j > q)$

(4) $S(k) = S(n-1-k)$

(5) $K([m_{n-1}, m_{n-2}, ..., m_1 m_0]) = K([m_0, m_1, ..., m_{n-2}, m_{n-1}])$

(6) m'_k 必為下列 5, 種情形之一：

(i) 若 k 不為 $B, B-1, C, C+1$，$m_k = S(k)$
(ii) 當 $B = C$ 時，$m'_B = S(B) - 2$；$m_{B-1} = S(B-1) + 1$
(iii) 當 $B = C+1$ 時，$m'_B = S(B)$；$m'_{B-1} = S(C)$
(iv) 當 $B = C+2$ 時，$m'_B = S(B) - 1$；$m'_{B+1} = S(B+1) - 1$；$m_{B-1} = S(B-1) + 2$
(v) 當 B 不符合以上三種時，$m'_B = S(B) - 1$；$m'_B = S(B-1) + 1$；$m_C = S(C) - 1$；$m_{C+1} = S(C+1) + 1$

< 範例 > 設此時一五進位數 $z = 3421001424_{(5)}$

(1) $\overline{z} = 4443221100_{(5)}$, $\underline{z} = 0011223444_{(5)}$, $[z] = [3, 1, 1, 3, 2]$ (2) $K(z) = 4431442101_{(5)}$, $K([z]) = [4, 1, 2, 2, 1]$

(3) 由於第七位數之 2 退位為 1，第一位數之 0 補位為 1，$B = 2$, $C = 0$

直式：
$$\begin{array}{rl} & a_{4,0}\quad a_{2,2}\quad a_{0,4} \\ & 4443221100 \\ - & 0011223444 \\ \hline & 4431442101 \end{array}$$

$$a_{i,j} = \begin{cases} a_{4,0} = a_{0,4} = 2 \\ a_{4,1} = a_{1,4} = 1 \\ a_{3,2} = a_{2,3} = 1 \\ a_{2,2} = 2 \end{cases}$$

運算矩陣：
$$\begin{array}{cc} S(2) & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ m_3 \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ m_3 & \end{array}$$

四、五進位

（一）正規數初步變換

由引理 2 得知 $K([A,B,C,D,E]) = K([E,D,C,B,A])$；因此我們僅討論 $A \geq E$ 的變換。

在正規數一次變換後我們發現，正規數變換後可分為兩種型態（a, b, c 為正整數，且 $a > c$, d 為非負整數）:

$$\boxed{\begin{array}{c} Type\,1 : K([z]) = [a, b, 2d, b, c] \\ Type\,2 : K([z]) = [a, b, 2d+1, b+2, c] \end{array}}$$

(二)$Type\,1$、$Type\,2$ 變換

引理 2

(1) 嚴格正規數最多經過 4 次變換，必為 $Type\,1$ 的形式。

(2) 若 $Type\,1$ 形式的 5 進位數 $[a, b, 2d, b, c]$ 為正規數，且 $a \neq c, b+c, b+c+2d$，再次變換仍為 $Type\,1$ 的形式。

(3) 在 (2) 的條件下，記 $[a', b', 2d', b', c'] := K([a, b, 2d, b, c])$，則 $c' = c$， 且 $a' + 2b' + 2d' + c' = a + 2b + 2d + c$。

(三) 擬正規數變換

若五進位某數 $[m_4, m_3, 0, m_1, m_0]$ 符合 m_4, m_3, m_1, m_0 為正整數，我們稱之為「擬正規數」。進行首次擬正規變換後發現了擬正規 $Type\,1$ 的形式並再次變換如下：

$$K([a,b,0,b,c]) = \begin{cases} [a-2b, 2b, 0, 2b, c] & a \geq 2b+c \\ [-a+2b+2c, a-c, 0, a-c, c] & 2b+c > a > b+c \\ [a, a-c, -2a+2b+2c-1, a-c+2, c-1] & b+c > a > c \\ [a, b-1, 1, b+1, c-1] & a = b+c \end{cases}$$

第二行的 $b' + c' > a'$，再經過一次換算後成為 $Type\,2$。

(四)5 進位的 Kaprekar 常數

定理 2

(1) 五進位 Kaprekar 常數形式（a , b 為正整數）:

$$\boxed{[z] = [a+b, 2b, 2b, 2b, a]}$$

(2) 數值形式：$z = \underbrace{4...4}_{a}\underbrace{3...3}_{b}\underbrace{2...2}_{b}\underbrace{1...1}_{b-1}0\underbrace{4...4}_{b}\underbrace{3...3}_{b}\underbrace{2...2}_{b}\underbrace{1...1}_{b}\underbrace{0...0}_{a-1}1$

(五) $Type\,1$ 正規與擬正規的 Kaprekar 變換

1. x, y 變換

$[z] = [a, b, 2d, b, c]$，引入兩個比值 x, y

$$\boxed{x = \frac{a-c}{b}, y = \frac{a-c-2d}{b}}$$

$[z]$ 可由 c 及比值 x, y 經適當變換唯一決定。我們將利用 $x - y$ 平面座標系上討論對應的 5 進位 $Type\,1$ 正規及擬正規的 Kaprekar 變換。變換後對應的 x' 與 y' 及集合區範圍分為以下六種：

(A) $x' = \frac{y}{2} - 1$ $y' = -x + \frac{3y}{2} - 1$ $A := \{(x,y) | x \geq y \geq 2\}$
(B) $x' = \frac{2}{y} - 1$ $y' = \frac{-2x+2}{y} + 1$ $B := \{(x,y) | x \geq y\, , 2 \geq y > 1\}$
(C) $x' = \frac{y}{-y+2}$ $y' = \frac{-2x+y+2}{-y+2}$ $C := \{(x,y) | x \geq 1\, , 1 > y \geq 0\}$
(D) $x' = \frac{-y}{2}$ $y' = -x - \frac{y}{2} + 1$ $D := \{(x,y) | x \geq 1\, , 0 \geq y\}$
(E) $x' = \frac{y}{2x-y}$ $y' = \frac{2x+y-2}{2x-y}$ $E := \{(x,y) | 1 \geq x > y \geq 0\}$
(F) $x' = \frac{-y}{2x}$ $y' = \frac{-y-2}{2x} + 1$ $F := \{(x,y) | 1 \geq x > 0\, , 0 \geq y\}$

定義 8 區域 $\mathcal{R}_0$ 與函數 $\mathcal{G}$

(1) 令區域 $\mathcal{R}_0 := A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F$。

(2) 在區域 $\mathcal{R}_0$ 上的函數：

$$\mathcal{G}(x,y) = \begin{cases} (\frac{y}{2} - 1, -x + \frac{3y}{2} - 1) & (x,y) \in A \\ (\frac{2}{y} - 1, \frac{-2x+2}{y} + 1) & (x,y) \in B \\ (\frac{y}{2-y}, \frac{-2x+y+2}{2-y}) & (x,y) \in C \\ (-\frac{y}{2}, -x - \frac{y}{2} + 1) & (x,y) \in D \\ (\frac{y}{2x-y}, \frac{2x+y-2}{2x-y}) & (x,y) \in E \\ (-\frac{y}{2x}, \frac{-y-2}{2x} + 1) & (x,y) \in F \end{cases}$$

區域 $\mathcal{R}_0$ 的邊界上對應的 Kaprekar 變換，不適用此 x, y 變換

引理 3 若 $(x,y) \in \mathcal{R}_0$, 設 $(x', y') = \mathcal{G}(x,y)$：

(1) $(x', y') \in \mathcal{R}_0$

(2) 若 $(x,y) \in A$, 則 $x' - y' = x - y$

(3) 若 $(x,y) \in B$, 則 $x' - y' = \frac{2}{y}(x - y)$

(4) 若 $(x,y) \in C$, 則 $x' + y' = \frac{2}{2-y}\big(1 - (x-y)\big)$

(5) 若 $(x,y) \in D$, 則 $y' - x' = 1 - x$，且 $x' + y' = 1 - (x+y)$

(6) 若 $(x,y) \in E$, 則 $x' + y' = \frac{2}{2x-y}\big((x+y) - 1\big)$

(7) 若 $(x,y) \in F$, 則 $x' + y' = \frac{1}{x}\big((x-y) - 1\big)$

系理 1 下列結果成立：

(1) 假設 $(x,y) \in C$，若 $x - y = 1$，則 $x' + y' = 0$。

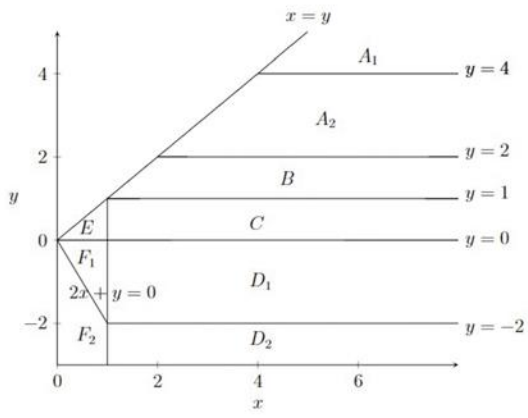
(2) 假設 $(x,y) \in D$，若 $x + y = 0$，則 $x' + y' = 1$；若 $x + y = 1$, 則 $x' + y' = 0$

(3) 假設 $(x,y) \in E$，若 $x + y = 1$，則 $x' + y' = 0$。

(4) 假設 $(x,y) \in F$，若 $x - y = 1$，則 $x' + y' = 0$。

2. 各區域變換情形

依照以上六個範圍可在二維坐標系中劃分出 6 區塊且各代表一類的運算，而我們再依 x' 是否大於等於 1 作區分，將 A, D, F 再細分兩組，所有區塊如下：



	變換後區域
(A)	A, B, C, D, E, F
(B)	E, F
(C)	E, F
(D)	A, B, C, D, E, F
(E)	E, F
(F)	A, B, C, D, E, F

3. 嚴格正規數 Kaprekar 變換的一些性質

引理 4 $(D \to \{D \text{ 或 } E\} \to F)$

(1) 若 $x > 1$，$(x, -x) \in D$，則 $\mathcal{G}(x, -x) = (\frac{x}{2}, 1 - \frac{x}{2}) \in D \cup E$。

(2) 若 $x > \frac{1}{2}$，$(x, 1-x) \in D \cup E$ 則有 $x' > 0$ 使 $\mathcal{G}(x, 1-x) = (x', -x')$

系理 2 若 $x > 1$，$(x, -x) \in D$，令 $(x', 1-x') := \mathcal{G}(x, -x)$，及 $(x'', y'') := \mathcal{G}^2(x, -x)$，依 $x > 2$ 或 $x < 2$ 可分成下列兩種情形：

(1) 若 $x \in (1, 2)$, 令 $\mathcal{G}(x, -x) \in E$，及 $\mathcal{G}^2(x, -x) \in F$，則有 $x'' = \frac{2-x}{3x-2}$。

(2) 若 $x > 2$, 令 $\mathcal{G}(x, -x) \in D$、$\mathcal{G}^2(x, -x) \in F \cup D$，則有 $x'' = (\frac{x}{2} - 1)/2$，且若 $\mathcal{G}^2(x, -x) \in D$，則必有 $n \in \mathbb{N}$ 及 $a \in (0,1)1$ 使 $\mathcal{G}^{2n}(x, -x) = (a, -a) \in F$。

引理 5 $(F \to \cdots \to F)$

(1) 若 $x \in (0, \frac{2}{3})$，則 $\mathcal{G}(x,-x) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\frac{1}{x}) \in F$，且 $\mathcal{G}^2(x,-x) = (p, p-1)$，$p = \frac{1}{x} - \frac{3}{2}$, 其中 $(p, p-1) \in A \cup B \cup C \cup F$。

(2) 若 $x \in (\frac{2}{3}, 1)$，則 $\mathcal{G}(x,-x) \in E$, $\mathcal{G}^2(x,-x) \in F$ 且 $\mathcal{G}^3(x,-x) := (a, 1-a)$, 其中 $a > \frac{1}{2}$。

(3) 若 $x \in (0, \frac{1}{3})$, 則 $\mathcal{G}(x, x-1) = (x', -x') \in D$, 且 $x' = (\frac{1}{x}-1)/2 = g(x)$。

(4) 若 $x \in (\frac{1}{3}, 1)$, 則 $\mathcal{G}(x, x-1) = (x', -x') \in F$, 且 $x' = (\frac{1}{x}-1)/2 \in (0,1)$。

引理 6 $(\{A, B, C\} \to F)$
若 $x > 1$ 時，依 $x \in (1,2)$, $(2,3)$ 或 $(3, \infty)$ 情形下列成立：

(1) 若 $x \in (1,2)$，此時 $\mathcal{G}(x, x-1) = (x_1, -x_1) \in F$，且 $x_1 = \frac{x-1}{(2-(x-1))}$。

(2) 若 $x \in (2,3)$，此時 $\begin{cases} \mathcal{G}(x, x-1) = (x_1, -1) \in F, \ x_1 = -1 + \frac{2}{(x-1)} \\ \mathcal{G}^2(x, x-1) = (x_2, 1-x_2) \in D \\ \mathcal{G}^3(x, x-1) = (x_3, x_3-1) \in F \end{cases}$

(3) 若 $x \in (3, \infty)$，此時 $\mathcal{G}(x, x-1) = (x_1, x_1-1) \in A$，且 $x_1 = \frac{1}{2}(x-1) - 1$。

根據引理 6，不論 $(x, x-1)$ 是在區域 A 或 B 或 C 或 F，經一後列 Kaprekar 變換後必為 $(a, a-1) \in F$。

定理 3

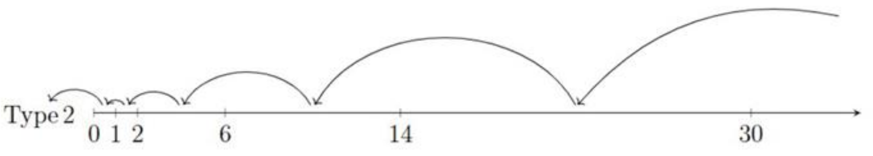
(1) 若 $(x,-x), x \in (0,1)$，則必有正整數 n，使得 $\mathcal{G}^n(x,-x) \in F$，且若令 $(x', y') := \mathcal{G}^n(x,-x)$，$y' = -x'$。

(2) n 為正整數且 $n \neq 1$，則 $(\frac{1}{2^{n+1}-2}, -\frac{1}{2^{n+1}-2})$ 起始的序對列，其 Kaprekar 變換週期為 $n+3$，即 $\mathcal{G}^{n+3}(\frac{1}{2^{n+1}-2}, -\frac{1}{2^{n+1}-2}) = (\frac{1}{2^{n+1}-2}, -\frac{1}{2^{n+1}-2})$。

(3) n 為正整數 $(\frac{1}{2^{n+1}-1}, -\frac{1}{2^{n+1}-1})$ 起始的序對列，其 Kaprekar 變換週期為 $n+3$，即 $\mathcal{G}^{n+3}(\frac{1}{2^{n+1}-1}, -\frac{1}{2^{n+1}-1}) = (\frac{1}{2^{n+1}-1}, -\frac{1}{2^{n+1}-1})$。

(4) 對任意非 2 正整數 N，存在循環長度為 N 的 5 進位 Kaprekar 數列。

4. 擬正規數 Kaprekar 變換情形



$[2(2^{k+1}-1), 2(2^k-1)) \to [2(2^k-1), 2(2^{k-1}-1)) \to \ldots \to [14, 6) \to [6, 2) \to [2, 1) \to [1, 0) \to Type\,2$

引理 7 $Type\,1$ 的擬正規數變換若 $x = y > 0$, 且 $\alpha_n = 2^n - 1$，則：

(1) 若 $x \in (2\alpha_{n+1}, 2\alpha_{n+2})$，則 $x' \in (2\alpha_n, 2\alpha_{n+1})$。

(2) 若 $x = 2\alpha_{n+1}$，則 $x' = 2\alpha_n$。

(3) 若 $x \in (2\alpha_1, 2\alpha_2)$，則 $x' \in (1, 2)$。

(4) 若 $1 < x < 2$，則 Kaprekar 變換 2 次後為 $Type\,2$。

定理 4 對於任意正整數 n，必有擬正規 Kaprekar 數 z，使得 $\{K^i(z) | 0 \leq i \leq n\}$ 中不會出現循環數列。

五、3,4,5 進位相似現象以及延伸討論

首先我們發現 3、4、5 進位有兩個相似形態，因此我們推測任意進位正規數變換後會產生特定兩種型態，成因則與退位值有關。

定理 5 正規數 z 經過一次變換後必為下列兩形式之一：

$$Type-A \begin{cases} 2n+1\text{進位}: & [z] = [M_{2n}, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, 2M_n, M_{n-1}, ..., M_2, M_1, M_0] \\ 2n\text{進位}: & [z] = [M_{2n-1}, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_{n-1}, ..., M_2, M_1, M_0] \end{cases}$$

$$Type-B \begin{cases} 2n+1\text{進位}: & [z] = [M_{2n}, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, 2M_n, M_{n-1}, ..., M_2-1, M_1+2, M_0] \\ 2n\text{進位}: & [z] = [M_{2n-1}, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_{n-1}, ..., M_2-1, M_1+2, M_0] \end{cases}$$

(M_k 為非負整數，$2n+1$ 進位之 $M_{2n} > 0$；$2n$ 進位之 $M_{2n-1} > 0$)

5 進位 Kaprekar 常數形式為 $[a+d, 2d, 2d, 2d, a]$，n 進位 Kaprekar 常數的矩陣至如下：

$$\begin{bmatrix} & & & & a \\ & & & d & d \\ & & d & d & \\ & d & d & & \\ a & d & & & \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} & & & & & a \\ & & & & d & d \\ & & & d & d & \\ & & \vdots & \vdots & & \\ & d & d & & & \\ a & d & & & & \end{bmatrix}$$

定理 6
n 進位數中 $[A+B, 2B, 2B, ..., 2B, 2B, A]$ 為正規數 Kaprekar 常數一種形式，其中 $n \geq 3$；A, B 為正整數。

肆、研究結果與討論

1. 從 Kaprekar 運算矩陣及引理 2，我們可將 5 進位 Kaprekar 變換分成六類情形，此六大類情形對應對區域 A 到 F 及其上的變換。

2. 由引理 2 知經最多 4 次 Kaprekar 變換，5 進位嚴格正規數必為 $Type\,1$ 的形式，且接下來此數皆為 $Type\,1$ 的形式，因此我們可以利用比值 x, y 來構造 Kaprekar 變換，並定義函數 $\mathcal{G}$。

3. 函數 $\mathcal{G}$ 的基本性質為引理 3 及系理 1。

4. 由一個數開始經 Kaprekar 變換所得數列最後必定是一常數或者是循環，因此要了解 kaprekar 變換數列的結構，就需要研究以下三個問題：

(1) Kaprekar 常數是什麼？
(2) 若不是常數，則 Kaprekar 循環和循環長度為何？
(3) 數字開始經多少次變換後才會是常數或者開始循環？

本研究定理 2 得知 5 進位的 Kaprekar 常數為 $[a+b, 2b, 2b, 2b, a]$ 的形式，其中 a , b 為正整數；定理 4 得知 Kaprekar 循環長度可以是任何正整數；最後根據定理 5 得知可能要經過任意長的變換過程才開始會出現 Kaprekar 常數或 Kaprekar 循環。

5. 引理 1 及定理 1 我們得到 5 進位 Kaprekar 常數的形式 (定理 2)。其中，正規 5 進位 Kaprekar 常數比值為 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 且落在區域 F 中，經由計算我們發現 $(\frac{1}{p}, -\frac{1}{p})$, $p \in \mathbb{N}$ 開始的 Kaprekar 變換會有一些有趣的性質，藉此我們找到後續 Kaprekar 變換循環序列的組成與性質。未來我們想利用第四節的發現，構造出一些任意循環長度的 Kaprekar 變換數列。

參考文獻

[1] G.D.Prichett, A.L.Ludington, J.F.Lapenta, The Determination of All Decadic Kaprekar Constants, Fibonacci Quarterly 19.1 (1981):45-52. 11. Lucio Saffara.

[2] STAN DOLAN, A classification of Kaprekar constants, The Mathematical Gazette. Vol.95, No.534(November 2011),pp. 437-443.

[3] Christian H¨ane, Lionel Heng, Gim Hee Lee, Friedrich Fraundorfer, Paul Furgale, Torsten Sattler, Marc Pollefeys, 3D Visual Perception for Self-Driving Cars using a Multi-Camera System: Calibration, Mapping, Localization, and Obstacle Detection, Image and Vision Computing (2017), doi:10.1016/j.imavis.2017.07.00

[4] 洪芷瑢, 洪旖昕, 鍾亞書, 2,3,4 進位 Kaprekar 變換之結構, 2022 全國科展數學組第 2 名.