中華民國第 63 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

佳作

050404

回首向來蕭瑟處—一筆畫迴圈圖形

學校名稱：臺北市立第一女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 蔡怡真 高二 王之妤 高二 林乙岑	蘇麗敏

關鍵詞：圖論、迴圈

摘要

本研究主要探討「一筆畫迴圈圖形」的種類數。圓上 n 個點平均分布，任選一點為起始點，經過圓上每一點恰一次，最後回到起始點，所構成的一筆畫圖形稱作迴圈圖形。我們的研究目的是**若給定任意正整數 $n \geq 3$，算出這些點共能作出多少種不同構的一筆畫迴圈圖形數** $g(n)$ 。

我們將迴圈圖形分成了**對稱和不對稱**兩種，對稱圖形又根據 **n 為奇數或偶數**分別進行研究。首先，我們計算了圓上點的**排列組合數**和**不同構的對稱迴圈圖形數**，依此可以得到**不同構的不對稱迴圈圖形數**。將兩者相加後即可得到 $g(n)$ 。詳細探究過程將呈現在本研究中。

壹、研究動機

圓上 n 個點等距分布，為了方便使用幾何中的概念進行證明，我們使其等距分布，依順時鐘標號 0, 1, 2, ..., n，如圖 1 所示。

考慮由某一點開始，通過所有點恰一次，最終回到出發點的迴圈所畫出的圖形，如圖 2 所示，之後稱之為迴圈圖形。**若兩個圖形無法以同樣的順序通過所有點恰一次後回到出發點，則稱兩個圖形為相異圖形**，如圖 2、圖 3 和圖 4 即為相異圖形。

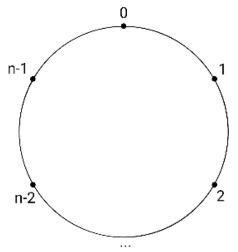


圖 1.

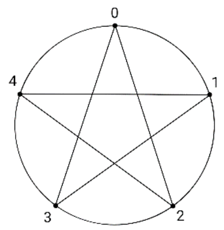


圖 2.

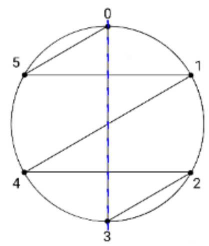


圖 3.

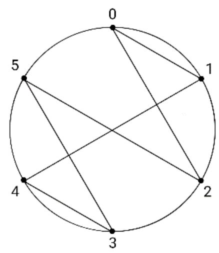


圖 4.

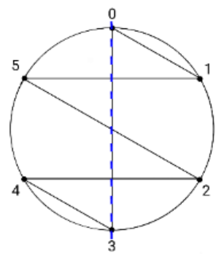


圖 5.

一個迴圈圖形旋轉或翻轉後可以造出其他同構的迴圈圖形，如圖 3 旋轉之後可以造出圖 4；圖 3 以通過點 0, 3 的直線為軸翻轉之後，可以造出圖 5。**旋轉或翻轉所造出來的同構迴圈圖形算同一種迴圈圖形。**我們用窮舉法發現，當 $n = 5$ 時，竟然只有 4 種不同構的迴圈圖形，如圖 6 ~ 圖 9。和我們一開始根據數學課所學之排列組合，計算出 5 點的排列數有 120 種方法有很大的出入，引發了我們對這類圖形的興趣，進而有了下面一系列的研究。

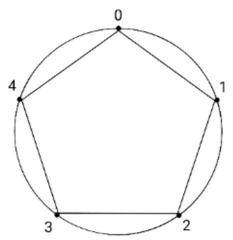


圖 6.

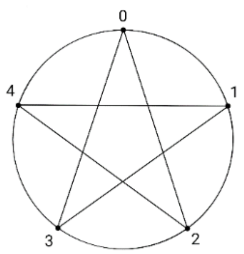


圖 7.

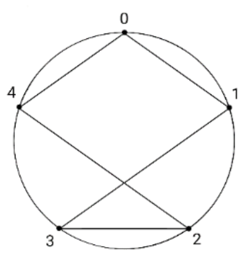


圖 8.

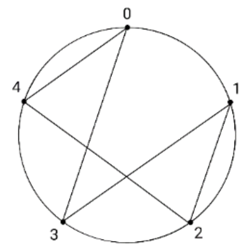


圖 9.

貳、研究目的

<u>**探討對於每一個大於等於 3 的正整數 n ，找出不同構的迴圈圖形數 $g(n)$。**</u>

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦。

肆、研究過程或方法

一、名詞定義

（一）圓上點的總數以正整數 n 表示。

（二）已知圓上有 n 個點，則其不同構的迴圈圖形數以 $g(n)$ 表示。

（三）一個迴圈圖形 G 可以用其**邊集** $E(G)$ 表示。例如圖 10 的迴圈圖形可以表示為 $E(G) = \{(0, 2), (2, 4), (4, 1), (1, 3), (3, 0)\}$。為了簡便可寫為 $E(G) = \{02, 24, 41, 13, 30\}$。在這種寫法下，02 和 20 都是 0,2 連接的簡寫，所以 $(0,2) = (2,0)$ 。因為迴圈圖形中所有點均被通過恰好一次，即每點連接兩條邊，故在任意邊集中，每點均只出現兩次。

（四）一個邊集 $E(G)$ 可寫成**排列表示**〈$E(G)$〉，例如圖 10 的邊集的排列表示可寫成〈$E(G)$〉=〈0, 2, 4, 1, 3〉。其中內部排列表示具有順序性，即序列中的元素順序不可互換，即〈0, 2, 4, 1, 3〉≠〈2, 4, 1, 3, 0〉。因為迴圈圖形中所有點均被通過恰好一次，故在任意排列表示〈$E(G)$〉中，每一點均只出現一次。

（五）對於正整數 a，將圖形「**旋轉 a 個弧**」意指將圖形「順時針方向旋轉 a 個弧」，而將圖形「旋轉 $-a$ 個弧」意指將圖形「逆時針方向旋轉 a 個弧」。此後僅說「旋轉 b 個弧」，視 b 值為正、零、負，分別解讀為順時針方向旋轉、不轉、逆時針方向旋轉。將迴圈圖形 G 旋轉 a 個弧得到迴圈圖形 G_a，其中

$$E(G_a) = \{\ (a+i,\ a+j) \mid (i,\ j) \in E(G)\ \},$$

因為數值最大為 $n-1$，所以此處 $x+y$ 指的是 $(x+y) \bmod n$。例如圖 11 的迴圈圖形 G 旋轉 1 個弧得到圖 12 的迴圈圖形 G_1。

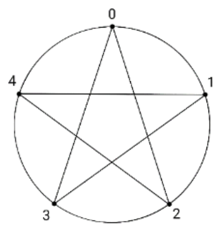


圖 10

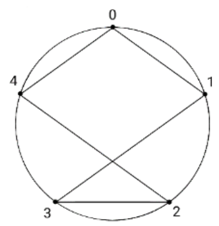


圖 11. 迴圈圖形 G

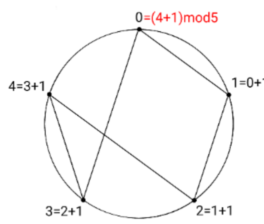


圖 12. 迴圈圖形 G_1

（六）使得 $G_r = G$ 的最小正整數 r，稱為 G 的**最小旋轉重合數**，且 $1 \le r \le n$ ，後文我們皆以 r 代表最小旋轉重合數。

（七）圓上點 i 和點 $i+1$ 正中間的點用 i^*（或是 $\frac{2i+1}{2}=i+\frac{1}{2}=i+0.5$）表示。

（八）當 $n=2m+1$ 時（m 為正整數），以通過 a 和 $(a+m)^*$ 的直線為軸（或是，當 $n=2m$ 時，以通過 a 和 $(a+m)$ 的直線為軸），將迴圈圖形 G 翻轉後得到 $G^{[a]}$，如圖 13 翻轉後得到圖 14，其中

$$E(G^{[a]})=\{\ (2a-i,\ 2a-j)\mid(i,\ j)\in E(G)\ \}。$$

或是，當 $n=2m$ 時，以通過 a^* 和 $(a+m)^*$ 的直線為軸，將迴圈圖形 G 翻轉得到 $G^{(a)}$，如圖 15 翻轉後得到圖 16，其中

$$E(G^{(a)})=\{\ (2a+1-i,\ 2a+1-j\ )\mid(i,\ j)\in\ E(G)\ \}。$$

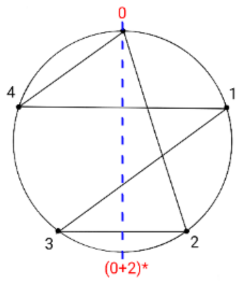


圖 13. 迴圈圖形 G 示例

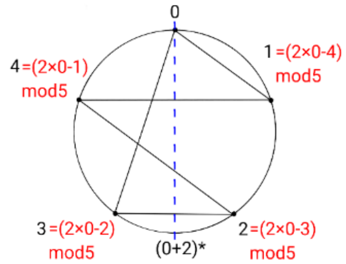


圖 14. 迴圈圖形 $G^{[0]}$ 示例

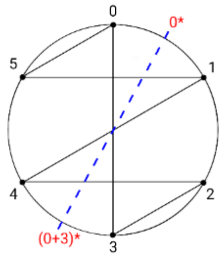


圖 15. 迴圈圖形 G 示例

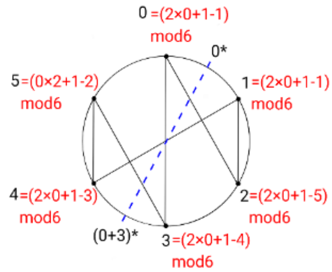


圖 16. 迴圈圖形 $G^{(0)}$ 示例

（九）當 $n=2m+1$ 時（m 為正整數），以通過 a 和 $(a+m)^*$ 的直線為軸，這種對稱軸稱為**頂點對稱軸**，如圖 17 所示。當 $n=2m$ 時，以通過 a^* 和 $(a+m)^*$ 的直線為軸，這種對稱軸稱為**中點對稱軸**，如圖 18 所示。

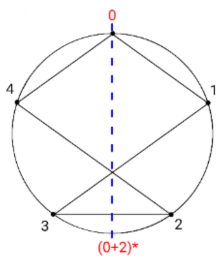


圖 17. 頂點對稱軸示例

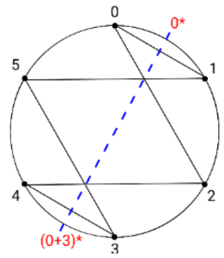


圖 18. 中點對稱軸示例

（十）對於正整數 n，歐拉函數定義為 $\phi(n)=|\{i\mid 1\le i\le n,\gcd(i,n)=1\}|$。若 n 的質因數分解為 $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots\ldots p_k^{a_k}$，則 $\phi(n)=n\left(\frac{p_1-1}{p_1}\right)\left(\frac{p_2-1}{p_2}\right)\ldots\left(\frac{p_k-1}{p_k}\right)$。

二、迴圈圖形的基本性質

由前面的名詞定義的基本概念，可以推導出引理 1 到 7 如下。

引理 1. 對於圓上 n 個點的迴圈圖形 G，以及整數 a 和 b，下列性質成立。

(1) $G_0 = G$　　(2) $G_n = G$　　(3) $(G_a)_b = G_{a+b}$ 。

證明：

(1) $E(G_0) = \{ (0+i, 0+j) \mid (i, j) \in E(G) \} = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E(G) \} = E(G)$。

(2) $E(G_n) = \{ (n+i, n+j) \mid (i, j) \in E(G) \} = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E(G) \} = E(G)$。

(3) $E((G_a)_b) = \{ (b+i, b+j) \mid (i, j) \in E(G_a) \} = \{ (a+b+i, a+b+j) \mid (i, j) \in E(G) \}$

$= E(G_{a+b})$。

◎ 以 $n = 7$，$a = 1$，$b = 2$ 為例。

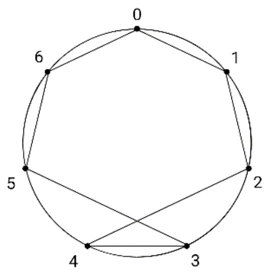


圖 19. 原迴圈圖形

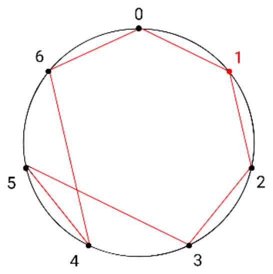


圖 20. 旋轉 1 個弧

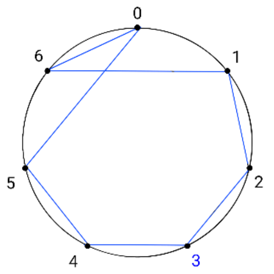


圖 21. 再旋轉 2 個弧

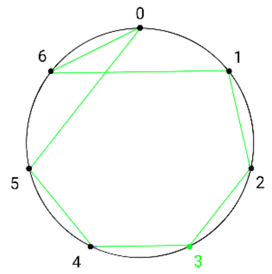


圖 22. 旋轉 1+2 個弧

引理 2. 如果 $G_a = G_b = G$，而 r 是 G 的最小旋轉重合數，則下列性質成立。

(1) $G_{-a} = G$　　(2) $G_{a+b} = G$　　(3) k 為正整數，$G_{ka} = G$

(4) r 是 a 的因數，同時 r 也是 n 的因數。

證明：

(1) 由引理 1 第 1 點和第 3 點可知 $G_{-a} = (G_a)_{-a} = G_{a-a} = G_0 = G$。

(2) 由引理 1 第 3 點可知 $G_{a+b} = (G_a)_b = G_b = G$ 。

(3) 由引理 1 第 3 點可知 $G_{ka} = (G_a)_{(k-1)a} = G_{(k-1)a} = G_{(k-2)a} = \ldots\ldots = G_{(k-(k-1))a} = G_a = G$。

(4) 如果 r 不是 a 的因數，利用除法可知 $a = qr + p$，其中 q 和 p 均為整數，且 $1 \le p < r$。

由名詞定義 (五) 和引理 2 第 1 點到第 3 點，可推得 $G_a = G_{qr+p} = (G_{qr})_p = (G_r)_p = G$。

圖形旋轉 p 個弧後會重合，與「r 是此圖形的最小旋轉重合數」矛盾。故假設錯誤，r 是 a 的因數。令 $a = r$，由定義 (五) $G_r = G$ 可知， r 亦為 n 的因數。

引理 3. 若迴圈圖形 G 對稱，且 G 的最小旋轉重合數為 r ，則下列性質成立。

(1) 若圖形 G 對稱於直線 L，則 $G_{\frac{r}{2}}$ 亦對稱於直線 L。

(2) G 共有 $\frac{n}{r}$ 條對稱軸。

證明：

(1) 若 L 為頂點對稱軸，設 L 通過點 a 和 $(a+\frac{n}{2})$。以 L 為軸，將迴圈圖形 G 翻轉後得到 $G^{[a]}$，其中

$E(G^{[a]}) = \{ (2a-i, 2a-j) \mid (i, j) \in E(G) \} = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E(G) \} = E(G)$。

將迴圈圖形 G 旋轉 $\frac{r}{2}$ 個弧後得到$G_{\frac{r}{2}}$，以 L 為軸將迴圈圖形$G_{\frac{r}{2}}$ 翻轉後得到 $G_{\frac{r}{2}}{}^{[a]}$ ，其中

$E(G_{\frac{r}{2}}{}^{[a]}) =\{ (2a-(i+\frac{r}{2}), 2a-(j+\frac{r}{2})) \mid (i, j) \in E(G) \}$

$= \{ (2a-i+\frac{r}{2}, 2a-j+\frac{r}{2}) \mid (i, j) \in E(G) \}$

$= \{ (i+\frac{r}{2}, j+\frac{r}{2}) \mid (i, j) \in E(G) \} = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E(G_{\frac{r}{2}}) \} = E(G_{\frac{r}{2}})$，

對稱於直線 L。同理，若 L 為中點對稱軸，

$E(G(a)) =\{ (2a+1-i, 2a+1-j) \mid (i, j) \in E(G) \}$，$E(G_{\frac{r}{2}}{}^{(a)})$

$= \{ ((2a+1)-(i+\frac{r}{2}), (2a+1)-(j+\frac{r}{2})) \mid (i, j) \in E(G) \}$

$= \{ (i+\frac{r}{2}, j+\frac{r}{2}) \mid (i, j) \in E(G) \} = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E(G_{\frac{r}{2}}) \} = E(G_{\frac{r}{2}})$ ，

$G_{\frac{r}{2}}$ 亦對稱於直線 L。

(2) 承 1，若圖形 G 對稱於直線 L ，則 $G_{\frac{r}{2}}, G_r, G_{\frac{3r}{2}}, \dots\dots, G_{(n-\frac{r}{2})}$，亦對稱於直線 L 。將 L 分別旋轉 $\frac{r}{2}, r, \frac{3r}{2}, \dots\dots, (n-\frac{r}{2})$ 個弧後得到直線 $L_1, L_2, \dots\dots, L_{(\frac{2n}{r}-1)}$，$L_1, L_2, \dots\dots, L_{(\frac{2n}{r}-1)}$ 皆為 G 的對稱軸，如圖 24。其中 $L = L_{\frac{r}{2}}$ ，$L_1 = L_{(\frac{r}{2}+1)}, \dots\dots, L_{\frac{r}{2}-1} = L_{(\frac{2n}{r}-1)}$，如圖 25 所示。故 G 共有 $\frac{n}{r}$ 條對稱軸。

◎ 以 $n=9$，$r=3$，$a=0$ 的一圖形為例，使對稱軸旋轉 $\frac{r}{2}$ 個弧。

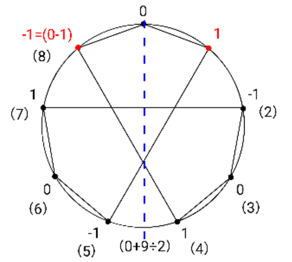


圖 23. 原圖之對稱點示例

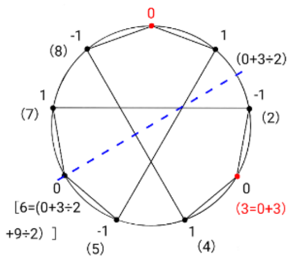


圖 24.旋轉後之對稱點示例

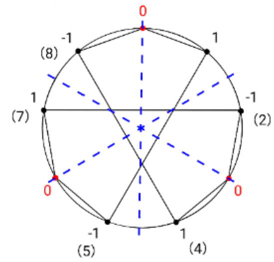


圖 25. 共有 $\frac{9}{3}=3$ 條對稱軸

引理 4. 若迴圈圖形 G 對稱，且 G 的最小旋轉重合數為 r ，m 為正整數，則下列性質成立。

(1) 若 $n=2m+1$，則 G 的對稱軸皆為頂點對稱軸。

(2) 若 $n=2m$， r 為偶數，則 G 的對稱軸皆為頂點對稱軸或皆為中點對稱軸。

(3) 若 $n=2m$， r 為奇數，則 G 的對稱軸中有 $\frac{n}{2r}$ 條為頂點對稱軸、$\frac{n}{2r}$ 條為中點對稱軸。

證明：

承定義 (八) 和引理 3，設通過點 a 和 ($a+\frac{n}{2}$) 的直線 L 和通過點 ($a+\frac{r}{2}$) 和 ($a+\frac{n}{2}+\frac{r}{2}$) 的直線 L'為迴圈圖形 G 的對稱軸。若直線通過的點中有至少一點的數值為整數，則該直線為頂點對稱軸，反之則是中點對稱軸。

(1)若 $n=2m+1$，則點 a 和點 ($a+\frac{n}{2}$) 必一為整數點，一為兩點之中點。直線 L 為通過圓上一頂點的頂點對稱軸，如圖 26 、圖 27 所示。故若 $n=2m+1$，則 G 的對稱軸皆為頂點對稱軸。

(2) 若 $n=2m$ 且 r 為偶數，則點 a 、($a+\frac{n}{2}$) 、($a+\frac{r}{2}$)、($a+\frac{n}{2}+\frac{r}{2}$) 必皆為整數點或皆為兩點之中點，故 G 的對稱軸皆為頂點對稱軸 (如圖 28) 或皆為中點對稱軸(如圖 29)。

(3) 若 $n=2m$ 且 r 為奇數，如果 a 和 ($a+\frac{n}{2}$) 都是整數，則 ($a+\frac{r}{2}$) 和 ($a+\frac{n}{2}+\frac{r}{2}$) 都不是整數，得直線 L 為頂點對稱軸，L' 為中點對稱軸；反之，如果 a 和 ($a+\frac{n}{2}$) 都不是整數，則 ($a+\frac{r}{2}$) 和 ($a+\frac{n}{2}+\frac{r}{2}$) 都是整數，得直線 L 為中點對稱軸，L' 為頂點對稱軸。由引理 3 第三點，可推得在 $\frac{n}{r}$ 條對稱軸中，有一半是頂點對稱軸，一半是中點對稱軸，如圖 30 、圖 31 所示。故若 $n=2m$， r 為奇數，則 G 的對稱軸中有 $\frac{n}{2r}$ 條為頂點對稱軸， $\frac{n}{2r}$ 條為中點對稱軸。

◎ 若 n 為奇數，以 $n=5$ 為例。

⊙以 $a=0$ 為例

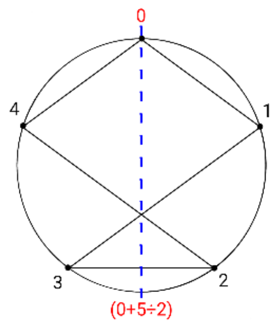


圖 26.

⊙以 $a=2.5$ 為例

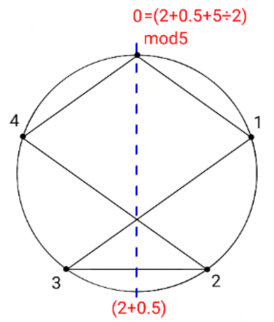


圖 27.

◎若 n 和 r 皆為偶數。

⊙以 $n=r=8$，$a=0$ 為例

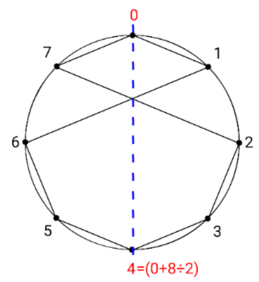


圖 28.

⊙以 $n=6$，$r=2$，$a=0.5$ 為例

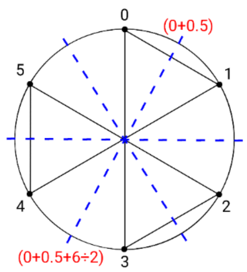


圖 29.

◎ 若 n 為偶數， r 為奇數，以 $n = 6$，$r = 3$ 為例。

⊙以 $a = 0$ 為例	⊙以 $a = 1.5$ 為例

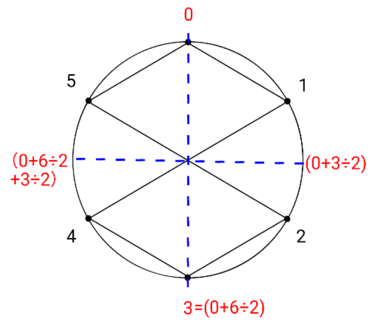
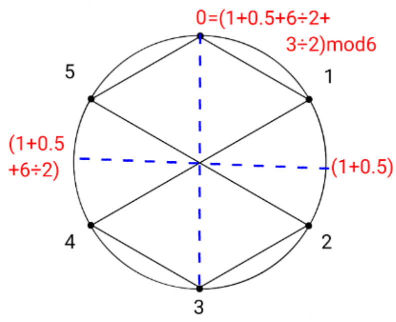

	

圖 30.	圖 31.

引理 5. 所有迴圈圖形的同構圖形數乘其排列表示數相加後等於 n 的總排列表示數 ，即 $n!$。

證明：由點數標號 1~n 的排列方法數可推知。

引理 6. 一個迴圈圖形的 G 共有 $2n$ 種相異的排列表示〈$E(G)$〉。

證明：對於任意迴圈圖形 G，圓上 n 個點，每一個點都可當作起點，所以就有 n 種排列，加上順時針、逆時針兩種方向，故一個迴圈圖形 G 共有 $2n$ 種排列表示〈$E(G)$〉。

引理 7. 已知圖形 G，其最小旋轉重合數為 r，則下列性質成立。

(1) 若迴圈圖形 G 對稱，則圖形 G 共可造出 r 個相異的同構圖形，且 G 和 G 的同構圖形共有 $2nr$ 個相異的排列表示。

(2) 若迴圈圖形 G 不對稱，則圖形 G 共可造出 $2r$ 個相異的同構圖形，且 G 和 G 的同構圖形共有 $4nr$ 個相異的排列表示。

證明：

(1) 由名詞定義(五)，圖形 G 每旋轉 r 個弧後會重合，因此將圖形 G 分別旋轉 1, 2, 3, ..., $n-1$ 個弧後共可造出 r 個相異且同構的迴圈圖形。

除了旋轉能造出同構的圖，翻轉也可以造出同構的圖。

設 G 沿通過點 a 和 $(a+\frac{n}{2})$ 的對稱軸 L 翻轉後的圖形為 G^a，沿通過點 b 和 $(b+\frac{n}{2})$ 的任意直線 L 翻轉後的圖形為 G^b，且

$E(G^a) = \{ (p-i, p-j) \mid (i,\ j) \in E(G) \} = E(G)$，

$E(G^b) = \{ (q-i, q-j) \mid (i,\ j) \in E(G) \} = E(G)$。

可推得

$E(G^b) = \{ (q-i, q-j) \mid (i,\ j) \in E(G) \}$

$= \{\ (\ p\ -\ (p-q\ )-i,\ p-\ (p-q\ )-j)\ |\ (i,\ j) \in E(G)\ \}$

$= \{\ (\ i\ -\ (p-q\ )\ ,\ j-\ (p-q\ )\ )\ |\ (i,\ j) \in E(G)\ \}$，

得 G^b 為 G^a 旋轉 $-(p-q\ )$ 而來，又 $G^a = G$，因此我們無法透過翻轉造出新的同構圖形，故圖形 G 共可造出 r 個不重合的同構迴圈圖形。由引理 6，可推得 G 和 G 的同構圖形共有 $2nr$ 種相異的排列表示。

◎ 以圖 32 ($n = 6$，$r = 3$) 為例，將其旋轉 0, 1, 2 個弧，可造出 3 個不重合的同構圖形，每個有 2*6 種排列表示。故圖 32 和它的同構圖形共有 2*6*3 = 36 種相異的排列表示。

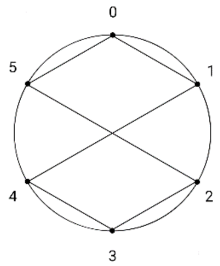


圖 32.對稱圖形示例

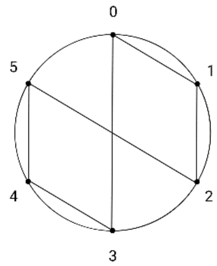


圖 33.旋轉 1 個弧

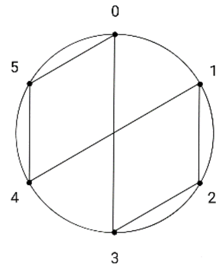


圖 34.旋轉 2 個弧

(2)承 1，若圖形 G 不對稱，翻轉後之迴圈圖形 ($G^{[a]}$ 或 $G^{(a)}$) 之邊集必和 $E(G)$ 不同，故 G 旋轉共可造出 r 個不重合的同構迴圈圖形，加上翻轉後共可造出 $2r$ 個不重合的同構迴圈圖形。由引理 6， G 和 G 的同構圖形共有 $4nr$ 種相異的排列表示。

◎ 以圖 35 ($n = 6$，$r = 3$) 為例，將其旋轉 0, 1, 2 個弧，可造出 3 個不重合的同構圖形。每個圖形有 2*6 = 12 種排列表示。

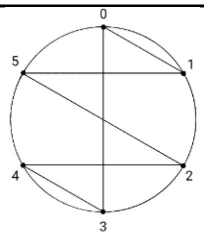


圖 35.不對稱圖形示例

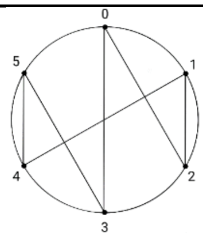


圖 36.旋轉 1 個弧

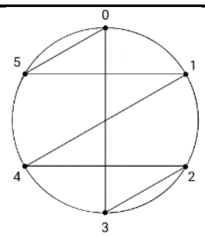


圖 37. 旋轉 2 個弧

⇨將圖 35 以通過點 0, 3 的直線為軸翻轉得到圖 38，將其旋轉 0, 1, 2 個弧，又可以得到 3 個不重合的同構圖形。

⇨將圖 35 以通過點 0, 3 的直線為軸翻轉得到圖 38，將其旋轉 0, 1, 2 個弧，又可以得到 3 個不重合的同構圖形。

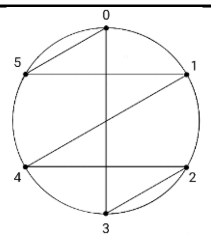


圖 38. 翻轉後不對稱圖形示例

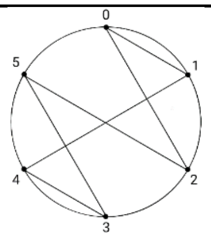


圖 39. 旋轉 1 個弧

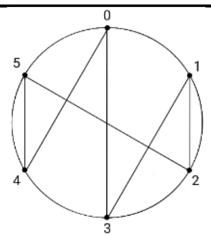


圖 40. 旋轉 2 個弧

三、迴圈圖形的排列表示

首先我們探討**旋轉 a 個弧後重合的迴圈圖形共有幾種排列表示**。

由引理 2 可知，旋轉 a 個弧後重合的迴圈圖形當中會包含最小旋轉重合數 r 為 a 的因數的所有迴圈圖形，因此旋轉 a 個弧後重合的迴圈圖形其最小旋轉重合數不一定是 a。在這裡推導出定理 1 。

定理 1 . 已知圓上有 n 個點，若 a 為 n 的因數，計算滿足$G_a = G$ 的所有圖形其總相異排列表示如下。

(1) 當 $\frac{n}{a} \neq 2$ 時，共有$\boldsymbol{a}! \times (\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a}})^{\boldsymbol{a}} \times \boldsymbol{\phi}(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a}})$ 種相異的排列表示。

(2) 當 $\frac{n}{a} = 2$ 時，共有$\boldsymbol{a}! \times (\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a}})^{\boldsymbol{a}} \times (\boldsymbol{\phi}(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a}}) + \boldsymbol{a})$ 種相異的排列表示。

證明：

(1) 當 $\frac{n}{a} \neq 2$ 時，對於一個滿足$G_a = G$ 的迴圈圖形 G，假設其排列表示

〈$E(G)$〉=〈$m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$〉。

下面我們欲證明當 $\frac{n}{a} \neq 2$ 且 $G_a = G$ 時，取相鄰 a 個點中的任意兩點皆會滿足 $m_i(mod\ a) \neq m_j(mod\ a)$ 。在此先導出引理 8。

引理 8. 給定一迴圈圖形 G，當 $\frac{n}{a} \neq 2$ 且 $G_a = G$ 時，取相鄰 a 個點中的相異兩點皆會滿足 $m_i(mod\ a) \neq m_j(mod\ a)$ 。

證明：

假設 $m_i(mod\ a) = m_j(mod\ a)$，即 $m_i + ya = m_j$，其中 $y \in N$ 且 $1 \leq y < \frac{n}{a}$，不失其一般性，使得 $i < j$，$1 \leq i \leq (a - j)$，$1 \leq j \leq a$，i、j 皆為非負整數。則

$$\{m_i\, m_{i+1}, m_{i+1}\, m_{i+2}, \ldots\ldots m_{(j-1)} m_j\} \subseteq E(G)。$$

因為 $G_{ya}=G$ ，得

$\{\,(m_i+ya)\,(m_{i+1}+ya)\,,(m_{i+1}+ya)\,(m_{i+2}+ya)\,,\ldots\ldots,(m_{j-1}+ya)(m_j+ya)\,\}=$

$\{\,m_j(m_{i+1}\;+ya),\;(m_{i+1}+ya)\,(m_{i+2}+ya),\;\ldots\ldots,\;(m_{j-1}+ya)(m_j+ya)\,\}\subseteq\;E(G)$。

又 $G_{2ya}=G$ ，得

$\{\,(m_i+2ya)\,(m_{i+1}+2ya)\,,(m_{i+1}+2ya)\,(m_{i+2}+2ya)\,,\ldots\ldots,(m_{j-1}+2ya)(m_j+2ya)\,\}$

$=\{\,(m_j+ya)(m_{i+1}+2ya)\,,(m_{i+1}+2ya)\,(m_{i+2}+2ya)\,,\ldots\ldots,$

$(m_{j-1}+2ya)\,(m_j+2ya)\,\}\subseteq\;E(G)$

將上述三個邊集整理後得

$\{\,m_i\,m_{i+1}\;,\ldots\ldots m_{(j-1)}m_j,m_j(m_{i+1}\;+ya),,\ldots\ldots,(m_{j-1}+ya)(m_j+ya)\,,$

$(m_j+ya)(m_{i+1}+2ya),\ldots\ldots,(m_{j-1}+2ya)(m_j+2ya)\,\}\subseteq\;E(G)$。

以此類推，當$m_i+ya\;=\;m_j$ 時，得到一不包含所有 n 個點的封閉圖形，其邊集如下。

$\{\,m_i\,m_{i+1}\,,m_{i+1}\,m_{i+2}\,,\ldots\ldots,m_{(j-1)}m_j\,,m_j\;\;(m_{i+1}+ya)\,,(m_{i+1}+ya)\,(m_{i+2}+ya)$

$,\ldots\ldots,(m_{j-1}+ya)(m_j+ya)\,,\,(m_j+ya)\,(m_{i+1}+2ya)\,,(m_{i+1}+2ya)\,(m_{i+2}+2ya)$

$,\ldots\ldots,(m_{j-1}+2ya)(m_j+2ya)\;,\ldots\ldots,\,(m_j-ya)\,(m_{i+2}+-ya)$

$,\ldots\ldots,(m_{j-1}-ya)m_i\,\}\subseteq\;E(G)$。

故當 $\boldsymbol{\frac{n}{a}\neq 2}$ 且 $\boldsymbol{G_a=G}$ 時，取相鄰 a 個點中的任意兩點皆會滿足

$$\boldsymbol{m_i(mod\;a)\neq m_j(mod\;a)}\;。$$

由引理 8，我們可以假設其排列表示

$\langle E(G)\rangle=\langle\,m_1\,,m_2\,,\ldots\ldots,m_{(a-1)}\,,m_a\;\;,\;\;(m_1+xa),(m_2+xa),\ldots\ldots,(m_a+xa),(m_1+$
$2xa),\ldots\ldots,(m_a+2xa),\ldots\ldots,\left[m_1+\left(\frac{n}{a}-1\right)xa\right],\ldots\ldots,[m_a+(\frac{n}{a}-1)xa]\,\rangle$ 。

且若已知點 $m_1\,,m_2\,,\ldots\ldots,m_{(a-1)}\,,m_a$和 x，即可得到圖形 G。

下面我們欲證明當 $\boldsymbol{\frac{n}{a}\neq 2}$ 且 $\boldsymbol{G_a=G}$ 時，$\boldsymbol{x}$ 的個數為和 $\boldsymbol{\frac{n}{a}}$ 互質的數目。導出引理 9。

引理 9. 給定一個迴圈圖形 G，當 $\frac{n}{a}\neq 2$ 且 $G_a=G$ 時，其排列表示$\langle E(G)\rangle$可假設為
$\langle E(G)\rangle=\langle\,m_1\,,m_2\,,\ldots\ldots,m_{(a-1)}\,,m_a\;\;,\;\;(m_1+xa),(m_2+xa),\ldots\ldots,(m_a+xa),(m_1+$
$2xa),\ldots\ldots,(m_a+2xa),\ldots\ldots,\left[m_1+\left(\frac{n}{a}-1\right)a\right],\ldots\ldots,[m_a+(\frac{n}{a}-1)a]\,\rangle$ ，此時 x 和 $\boldsymbol{\frac{n}{a}}$ 互質。

證明：

不失其一般性，假設 $1\le x\le\boldsymbol{\frac{n}{a}}$ 且 x 和 $\boldsymbol{\frac{n}{a}}$ 不互質，則 $E(G)$ 中必可找到

$\{m_a(m_1+xa),\dots\dots,(m_a+xa)(m_1+2xa),\dots,[m_a+(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{ax}}-1)xa](m_1+(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{ax}})xa))\subseteq E(G)$，形成不通過所有點 (如點 $m_i=m_1+(y-1)a$) 的封閉圖形，不滿足形成迴圈圖形的條件，故假設錯誤，x 和 $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a}}$ 互質。

由引理 9，當 $\frac{n}{a}\neq 2$ 時，x 共有 $\phi(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a}})$ 種可能的值。

◎ 當 $\frac{n}{a}\neq 2$ 時，以 $n=12$，$a=4$ 為例。

⦿以 $x=1$ 時為例。

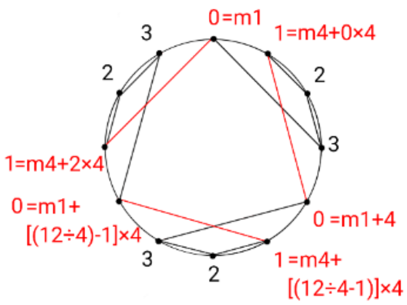


圖 41.

⦿ x 共有 $\phi\left(\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{4}}\right)=\mathbf{2}$ 種可能的值

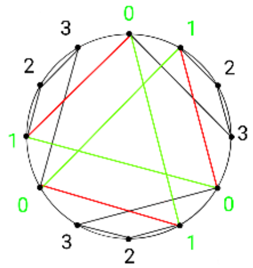


圖 42.可擇綠線或紅線

綜上所述，因為 $m_i(mod\ a)\neq m_j(mod\ a)$，所以點 m_1， m_2， m_3， … ，m_a 的共有 $a!\times(\frac{n}{a})^a$ 種排列。

由引理 8 可知，當 $\frac{n}{a}\neq 2$ 時，x 共有 $\phi(\frac{n}{a})$ 種可能的值。

故已知圓上有 n 個點，若 a 為 n 的因數，則滿足$G_a=G$ 的所有圖形形共有 $a!\times(\frac{n}{a})^a\times\phi(\frac{n}{a})$ 個相異的排列表示。

承上所述，當 $\frac{n}{a}=2$ 時，在引理 8 中，若 $a=\frac{n}{2}$， $m_i+a\ =\ m_j$，則邊集

$\{\,m_i\,m_{i+1}\,,m_{i+1}\,m_{i+2}\,,\dots\dots,m_{(j-1)}m_j\,,m_j\ (m_{i+1}+ya)\,,(m_{i+1}+ya)\,(m_{i+2}+ya)\,,\dots\dots,$
$(m_{j-1}+ya)(m_j+ya)\,,(m_j+ya)\,(m_{i+1}+2ya)\,,(m_{i+1}+2ya)\,(m_{i+2}+2ya)\,,\dots\dots,$
$(m_{j-1}+2ya)(m_j+2ya)\,\}=\{m_im_j\}\subseteq\ E(G)$

，形成一條通過點 m_i 和點 m_j 的直線而非封閉圖形。

令 $m_{i+1}=\ m_j$，下面我們欲證明點 $\boldsymbol{m_i}$，$\boldsymbol{m_{i-1}}$， $\boldsymbol{m_{i-2}}$， $\boldsymbol{m_{i-3}}$， … ，$\boldsymbol{m_{i-a+1}}$ 這 a 個點中，取相鄰的任意兩點皆會滿足 $\boldsymbol{m_k(mod\ a)\neq m_j(mod\ a)}$ ，其中 k,j 為正整數。

在此導出引理 10。

引理 10. 給定一迴圈圖形 G，當 $\frac{n}{a}=2$ 且 $G_a=G$ 時，若有一邊集 $\{m_im_j\}\subseteq\ E(G)$ 且 $m_{i+1}=m_i+a=m_j$ ，則在點 m_i，m_{i-1}， m_{i-2}， m_{i-3}， … ，m_{i-a+1} 中取任意相異兩點皆會滿足 $m_k(mod\ a)\neq m_s(mod\ a)$ ，其中 k,s 為正整數。

證明：

假設 $m_k (mod\ a) = m_s (mod\ a)$，即 $m_k + a\ =\ m_s$。

不失其一般性，使得 $k < s$，$1 \le k \le (i - s)$，$1 \le s \le i$，則

$\{ m_k\ m_{k+1}\ , m_{k+1}\ m_{k+2}\ , \dots \dots , m_{(s-1)} m_s\ , m_s\ m_{s+1}\ , \dots \dots , m_{i-1} m_i\ , m_i m_j \} \subseteq\ E(G)$。

因為 $G_a = G$ ，得

$\{ (m_k + a)\ (m_{k+1} + a)\ , (m_{k+1} + a)\ (m_{k+2} + a)\ , \dots \dots , (m_{s-1} + a)(m_s + a), \dots \dots,$

$(m_{i-1} + a)(m_i + a)\ \}$

$= \{ m_s\ (m_{k+1} + a)\ , (m_{k+1} + a)\ (m_{k+2} + a)\ , \dots \dots , (m_{s-1} + a)(m_s + a), \dots \dots,$

$(m_{i-1} + a) m_j\ \}$，

上述兩個邊集形成了一不包含所有 n 個點的封閉圖形，不滿足迴圈圖形的條件，**故在點 m_i，m_{i-1}， m_{i-2}， m_{i-3}， … ，m_{i-a+1} 中取任意相異兩點皆會滿足 $m_k(mod\ a) \ne m_s(mod\ a)$**

由引理 10，我們可以假設其排列表示

$\langle E(G) \rangle = \langle m_1\ , m_2\ , \dots \dots , m_{(a-1)}\ , m_a\ ,\ (m_1 + a), (m_2 + a), \dots \dots , (m_a + a) \rangle$ 或

$\langle m_1\ , m_2\ , \dots \dots , m_{(a-1)}\ , m_a\ ,\ (m_a + a), (m_{a-1} + a), \dots \dots , (m_1 + a) \rangle$ 或

$\langle m_2\ m_3\ , \dots \dots , m_{(a-1)} m_a\ ,\ m_a\ (m_a + a), (m_a + a)(m_{a-1} + a), \dots \rangle$ 或

$\langle m_3\ m_4\ , \dots \dots , m_{(a-1)} m_a\ ,\ m_a\ (m_a + a), (m_a + a)(m_{a-1} + a), \dots \rangle$ ……或

$\langle\ m_a\ (m_a + a), (m_a + a)(m_{a-1} + a), \dots, m_{(a-1)} m_a \rangle$ ……，共 $a + \phi(\frac{n}{a})$種。

其中點 m_1， m_2， m_3， … ，m_a 共有 $a! \times \left(\frac{n}{a}\right)^a$ 種不同的排列方法，

計算後得**當 $\frac{n}{a} = 2$ 時，G 共有$a! \times (\frac{n}{a})^a \times (\phi(\frac{n}{a}) + a)$種相異的排列表示。**

◎ 當 $\frac{n}{a} = 2$ 時

⊙ 以 $n = 8$，$a = 4$ 時為例

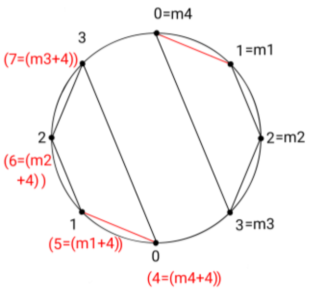


圖 43. 連接 $m_1 m_4$ 而得到了兩個封閉圖形

⊙ 以 $n = 8$，$a = 4$ 時為例

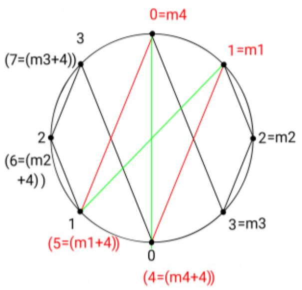


圖 44.可擇綠線或紅線

※ 由定理 1，當 n 為奇數時，可以透過下面的步驟作出旋轉 a 個弧後重合的迴圈圖形。

1. 將圓上 n 個點每 a 個點分為一組，標號為 $0, 1, \dots \dots, (a - 1)$，共有 $\frac{n}{a}$ 組點，如圖 45。

2. 通過圓上標號為 0, 1, … …, ($a-$ 1) 的點各恰一次，如圖 46 所示。此時 a 個標號的排列數共有 a ! 個，且每個標號皆有 $\frac{n}{a}$ 個，故此步驟之排列數共有 a ! × $(\frac{n}{a})^{a}$ 個。

3. 將步驟 2 的圖形分別旋轉 1, 2, … …, ($\frac{n}{a}-$ 1) 個弧後作於圖上，得到圖 47。

4. 以一條邊連接步驟 3 中的兩個部分迴圈圖形。令此邊兩端點的標號分別為 k, j，以圖 47 為例 (n = 9, a = 3)，當 k = 0 , j = 2 (或 k = 2 , j = 0) 時，連接方式有兩種，分別為跨 1 組數、跨 2 組數相連 (如圖 48、圖 49)。當 $k = j$ 時，會形成不包含所有點的封閉圖形，不能構成迴圈圖形，如圖 50。跨的組數需要和 $\frac{n}{a}$ 互質。

5. 將步驟 4 中所作的邊分別旋轉 1, 2, … …, ($\frac{n}{a}-$ 1) 個弧後作於圖上，如圖 48、圖 49 所示，完成。

◎ 以 n = 9，a = 3 ， k = 0，j = 2 為例作圖。

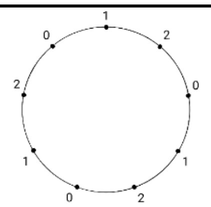


圖 45. 標 $\frac{9}{3}$ 組 1 ~ 3 號

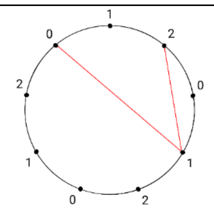


圖 46. 連接 3 個點

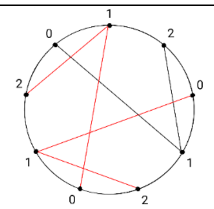


圖 47. 作部分圖形 $\frac{9}{3}$ 次

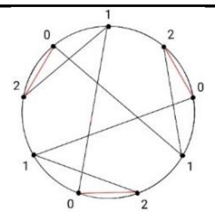


圖 48

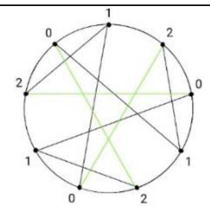


圖 49

共有$\phi\left(\frac{9}{3}\right)$種連法

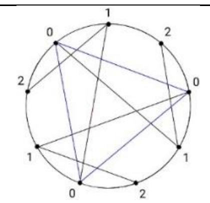


圖 50. n 為奇數時同標號相連，作圖失敗

四、 *a* 為奇數時的對稱迴圈圖形

接著探討 **a 為奇數時，旋轉 a 個弧後重合且對稱的不同構迴圈圖形共有幾種**。

定理 2. 已知圓上有 n 個點，若 a 是正奇數且 a 為 n 的因數，計算滿足$G_a = G$且對稱的不同構迴圈圖形數為

(1) 當 $\frac{n}{a} \neq 2$ 時，共有$(\frac{a-1}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a-1}{2}} \times \phi(\frac{n}{a}) \times \frac{1}{2}$ 個不同構的對稱迴圈圖形。

(2) 當 $\frac{n}{a} = 2$ 時，共有 $(\frac{a-1}{2})! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a-1}{2}} \times (\phi\left(\frac{n}{a}\right) + 1) \times \frac{1}{2}$ 個不同構的對稱迴圈圖形。

證明：

(1) 當 $\frac{n}{a} \neq 2$ 時，由引理 8，設迴圈圖形 G 的邊集

$E(G) = \{m_1 m_2, m_2 m_3, \ldots\ldots, m_{(a-1)} m_a, m_a (m_1 + xa), (m_1 + xa)(m_2 + xa), \ldots\ldots,$
$(m_{a-1} + xa)(m_a + xa), (m_a + xa)(m_1 + 2xa), (m_1 + 2xa)(m_2 + 2xa), \ldots\ldots,$
$(m_{a-1} + 2xa)(m_a + 2xa), \ldots\ldots, \left[m_1 + \left(\frac{n}{a} - 1\right) xa\right] \left[m_2 + \left(\frac{n}{a} - 1\right) xa\right], \ldots\ldots,$
$\left[m_{a-1} + \left(\frac{n}{a} - 1\right) xa\right] \left[m_a + \left(\frac{n}{a} - 1\right) xa\right], \left[m_a + \left(\frac{n}{a} - 1\right) xa\right] m_1\}$。

由引理 4 第 1 點，不失其一般性，設對稱軸通過圓上標號為 0 的點 $m_{\frac{a+1}{2}}$。

因為 $G^{[0]} = G$，若已知 $\{(m_{\frac{a+1}{2}}, m_{\frac{a+3}{2}})\} = \{(0, k)\}$，$k$ 為正整數，則由名詞定義(八)，可知 $\{(m_{\frac{a+1}{2}}, m_{\frac{a-1}{2}})\} = \{(0, -k)\}$。

故若已知點 $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_{\frac{a-3}{2}}, m_{\frac{a-1}{2}}$ 和 x，即可得到圖形 G。

下面我們欲證明在 $\boldsymbol{m_1, m_2, \ldots\ldots, m_{\frac{a-3}{2}}, m_{\frac{a-1}{2}}}$ 這 $\boldsymbol{\frac{a-1}{2}}$ 個點中任取兩個點 $\boldsymbol{m_i}$ 和 $\boldsymbol{m_j}$ $\boldsymbol{(i < j)}$，則 $\boldsymbol{|m_i (\mathrm{mod}\ a)| \neq |m_j (\mathrm{mod}\ a)|}$ 恆成立。

引理 11. 給定一迴圈圖形 G，當 $\frac{n}{a} \neq 2$，$G^{[0]} = G_a = G$，且 $m_{\frac{a+1}{2}} = 0$時，**在 $\boldsymbol{m_1, m_2, \ldots\ldots, m_{\frac{a-3}{2}}, m_{\frac{a-1}{2}}}$ 這 $\boldsymbol{\frac{a-1}{2}}$ 個點中任取兩個點 $\boldsymbol{m_i}$ 和 $\boldsymbol{m_j}$ $\boldsymbol{(i < j)}$，則 $\boldsymbol{|m_i (\mathrm{mod}\ a)| \neq |m_j (\mathrm{mod}\ a)|}$ 恆成立。**

證明：

由引理 8 可知，$m_i (\mathrm{mod}\ a) \neq m_j (\mathrm{mod}\ a)$。假設 $m_i (\mathrm{mod}\ a) = -(m_j (\mathrm{mod}\ a)$，即 $m_i = -m_j + ya$（y 為任意正整數）

$\{m_{i-1} m_i, m_i m_{i+1}, m_{i+1} m_{i+2}, \ldots\ldots, m_{j-1} m_j, m_j m_{j+1}, \ldots\ldots, m_{\frac{a-1}{2}} m_{\frac{a+1}{2}}\} \subseteq E(G)$。

因為 $G^{[0]} = G$，得

$\{(-m_{i-1})(-m_i), (-m_i)(-m_{i+1}), (-m_{i+1})(-m_{i+2}), \ldots\ldots, (-m_{j-1})(-m_j), (-m_j)(-m_{j+1}),$
$\ldots\ldots, (-m_{\frac{a-1}{2}})(-m_{\frac{a+1}{2}})\} \subseteq E(G)$，

由$G_{xa} = G$，得

$\{(m_i + xa)(m_{i+1} + ya), \ldots\ldots, (m_{j-1} + ya)(m_j + ya), \ldots\ldots, (m_{\frac{a-1}{2}} + ya)(m_{\frac{a+1}{2}} + ya),$
$(m_{\frac{a+1}{2}} + ya)(-m_{\frac{a-1}{2}}), \ldots\ldots, (-m_{j+1} + ya)(-m_j + ya), (-m_j)(-m_{j-1}), \ldots\ldots,$
$(-m_{i+2})(-m_{i+1})\} \subseteq E(G)$。

觀察上述邊集可以發現，因為 $m_i = -m_j + xa$，因此邊集$E(G)$中點 m_i 共會出現 3 次，不滿足形成迴圈圖形的條件，故假設錯誤，$m_i (\mathrm{mod}\ a) \neq -m_j (\mathrm{mod}\ a)$。

由引理 11，點 m_1， m_2， m_3， …，$m_{\frac{a-1}{2}}$ 的共有 $(\frac{a-1}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a-1}{2}}$ 種排列方法。由引理 8，x 共有 $\phi(\frac{n}{a})$ 種可能的值。

下面我們還要扣除在上述 $(\frac{a-1}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a-1}{2}} \times \phi(\frac{n}{a})$ 個可能的邊集中，重複計算的同構圖形。

由於圖形對稱，每個不同構的圖形 G 皆有兩種 $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_{\frac{a-3}{2}}, m_{\frac{a-1}{2}}$ 的排列方法。因此每個不同構的圖形 G 皆會產生 2 個同構圖形。**故給定正整數 n，$r|a$，a 是正奇數且 a 為 n 的因數，$\frac{n}{a} \neq 2$ 時，計算其對稱的迴圈圖形數為$(\frac{a-1}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a-1}{2}} \times \phi(\frac{n}{a}) \times \frac{1}{2}$。**

(2) 承 1 ，當 $\frac{n}{a} = 2$ 時，由引理 10，可假設其排列表示

$E(G) = \{m_1, m_2, \ldots\ldots, m_{(a-1)}, m_a, (m_1 + a), (m_2 + a), \ldots\ldots, (m_a + a)\}$
或 $\{m_1, m_2, \ldots\ldots, m_{(a-1)}, m_a, (m_a + a), (m_{a-1} + a), \ldots\ldots, (m_1 + a)\}$。

又點 m_1， m_2，m_3， …，$m_{\frac{a-1}{2}}$ 的共有 $(\frac{a-1}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a-1}{2}}$ 種排列方法。**故當 $\frac{n}{a} = 2$ 時，共有 $(\frac{a-1}{2})! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a-1}{2}} \times (\varphi\left(\frac{n}{a}\right) + 1) \times \frac{1}{2}$ 個不同構的對稱迴圈圖形。**

※ 由定理 2，我們可以透過下面的步驟作出旋轉 a 個弧後重合且對稱的迴圈圖形：

1. 為了表示圖形旋轉 a 個弧後重合以及圖形對稱，將圓上 n 個點每 a 個點分為一組，標號為 $-\frac{a-1}{2}, -\frac{a-3}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{a-3}{2}, \frac{a-1}{2}$，共有 $\frac{n}{a}$ 組點，如圖 51 所示。
2. 固定出發點 0 ，通過圓上標號絕對值為 1, 2, ..., $\frac{a-1}{2}$ 的點各恰一次，如圖 52 所示。此時 $\frac{a-1}{2}$ 個標號的排列數共有 $(\frac{a-1}{2})!$ 個，且每個標號皆有 $\frac{2n}{a}$ 個，故此步驟之排列數共有 $(\frac{a-1}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a-1}{2}}$ 個。
3. 以通過出發點 0 和其旋轉 $\frac{n}{2}$ 個弧後的中點之直線 L 作為對稱軸，作步驟 2 的圖形之對稱圖形，如圖 53 所示。
4. 將步驟 3 的圖形分別旋轉 0, 1, 2, ..., $(\frac{n}{a} - 1)$ 個弧後作於圖上，得到 $\frac{n}{a}$ 個步驟 3 的圖形，如圖 54 所示。
5. 以一條邊連接步驟 3 中的兩個不相連的部分迴圈圖形，並將此邊分別旋轉 0, 1, 2, ..., $(\frac{n}{a} - 1)$ 個弧後作於圖上，共有$\phi(\frac{n}{a})$ 種連接方式，完成。

◎ 以 $n=9$，$a=3$ 為例作圖。

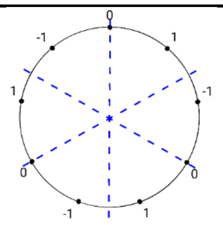


圖 51. 標$\frac{9}{3}$組 – 1 ~ 1 號

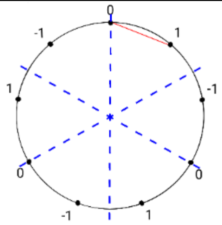


圖 52. 連接 2 個點

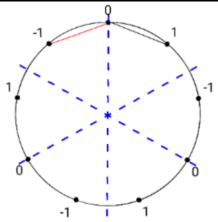


圖 53. 作對稱圖形

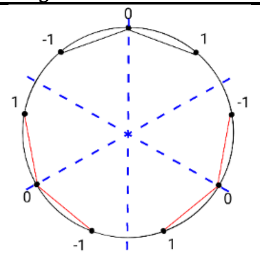


圖 54. 作部分圖形($\frac{9}{3}-1$)次

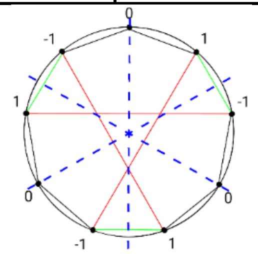


圖 55. 藉綠線或紅線連接所有圖形，完成！

五、 *a* 為偶數時的對稱迴圈圖形

接著我們探討 a **為偶數時，旋轉 a 個弧後重合且對稱的不同構迴圈圖形共有幾種**。

當 a 為偶數時，最小旋轉重合數 r 可能是奇數或偶數。由引理 4，若 r 為偶數，則圖形的對稱軸皆為頂點對稱軸或皆為中點對稱軸；若 r 為奇數時，則圖形的對稱軸一半是頂點對稱軸，一半是中點對稱軸，即同時有頂點對稱軸和中點對稱軸。因此**定理 3 和定理 4 分別計算有頂點對稱軸和有中點對稱軸的圖形，定理 5 將定理 3 和定理 4 的結果相加並扣除 r 為奇數時重複計算的圖形，即可得到旋轉 a 個弧後重合且對稱的迴圈圖形數。**

定理 3. 已知圓上有 n 個點，若 a 為偶數且 a 為 n 的因數，y 為 a 最大的奇因數且圖形至少有一條頂點對稱軸，計算滿足$G_a=G$且對稱的迴圈圖形數如下。

(1) 當 $a=2$ 時，共有 $\frac{1}{2}\phi(n)$ 個不同構的迴圈圖形。

(2) 當 $a\neq 2$ ，$\frac{n}{a}$ 為偶數時，共有

$$\left(\frac{a-2}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a-2}{2}}\times 2\phi\left(\frac{n}{a}\right)\times\frac{1}{4}+\left(\frac{y-1}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)}\times\phi\left(\frac{n}{y}\right)\times\frac{1}{4}$$ 個不同構的迴圈圖形。

(3) 當 $a\neq 2$，$\frac{n}{a}$ 為奇數時，共有

$$\left(\frac{a-2}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a-2}{2}}\times\phi\left(\frac{2n}{a}\right)\times\frac{1}{4}+\left(\frac{y-1}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)}\times\phi\left(\frac{n}{y}\right)\times\frac{1}{4}$$ 個不同構的迴圈圖形。

證明：

(1) 由引理 8，當 $\frac{n}{a}\neq 2$ 時，設迴圈圖形 G 的邊集

$E(G) = \{m_1\, m_2, m_2\, m_3, \ldots\ldots, m_{(a-1)}\, m_a\ , m_a\,(m_1 + xa)\,,$

$(m_1 + xa)(m_2 + xa), \ldots\ldots, (m_{a-1} + xa)(m_a + xa), (m_a + xa)(m_1 + 2xa),$

$(m_1 + 2xa)\ (m_2 + 2xa), \ldots\ldots, (m_{a-1} + 2xa)(m_a + 2xa), \ldots\ldots, \left[m_1 + \left(\frac{n}{a} - 1\right) xa\right]$

$\left[m_2 + \left(\frac{n}{a} - 1\right) xa\right], \ldots\ldots, \left[m_{a-1} + \left(\frac{n}{a} - 1\right) xa\right]\left[m_a + \left(\frac{n}{a} - 1\right) xa\right],$

$\left[m_a + \left(\frac{n}{a} - 1\right) xa\right] m_1\}$。

由引理 4，不失其一般性，設頂點對稱軸通過圓上標號為 0 的點 $m_{\frac{a}{2}}$。

因為 $G^{[0]} = G$，若已知 $\{(m_{\frac{a}{2}},\ m_{\frac{a+2}{2}})\} = \{(0, k)\}$， k 為正整數，則由定義(八)，可知 $\{(m_{\frac{a}{2}},\ m_{\frac{a-2}{2}})\} = \{(0, -k)\}$，以此類推，若已知 $\{(m_{\boldsymbol{a-1}}\,,\ m_a)\} = \{(i, j)\}$，$i$、$j$ 為正整數，則可推得 $\{(m_{\boldsymbol{1}}\ , [m_{\boldsymbol{a}} + (\frac{n}{a} - 1)xa])\} = \{(-i, -j)\}$，又$G_{xa} = G$，

$\{(m_{\boldsymbol{1}} + xa\ , m_{\boldsymbol{a}})\} = \{(-i + xa, -j + xa)\}$， $m_{\boldsymbol{a}} =\ j = -j + xa$，$x = \frac{2j}{a}$。

故若已知點 $m_{\frac{a}{2}}, m_{\frac{a+2}{2}}, \ldots\ldots, m_{\boldsymbol{a}}$，即可得到迴圈圖形 G。

下面我們欲證明對於有至少一條頂點對稱軸的迴圈圖形 G，其最小旋轉重合數 $r \neq 2$ 恆成立。

承前面所述，已知有一圖形 G 有至少一條頂點對稱軸，假設其最小旋轉重合數 $r = 2$，則其邊集

$E(G) = \{m_1\, m_2, m_2\ \ (m_1 + 2x)\,, (m_1 + 2x)(m_2 + 2x), \ldots\ldots, [m_1 + (n-2)x]\ [m_2 + (n-2)x],\ [m_2 + (n-2)x] m_1\}$，

其中 $m_2 - m_1 = m_{\boldsymbol{1}} - [m_{\boldsymbol{2}} + (n-2)x] = (m_1 + 2x) - m_2$。

因此令 $m_2 = m_1 + y$，y 為正整數代入，

$E(G) = \{m_1(m_1 + y), (m_1 + y)\ \ (m_1 + 2y)\,, \ldots\ldots, [m_1 + (n-1)y]\ [m_1 + ny]\}$，

$G_{\boldsymbol{1}} = G$，和假設矛盾，故假設錯誤，G 的最小旋轉重合數 $r \neq 2$。

因此當 $a = 2$ 時，只需要計算旋轉 1 個弧後重合的圖形即可。故可視為 $a = 1$ 代入定理 2，得 $a = 2$ 時共有 $\left(\frac{1-1}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{1}\right)^{\left(\frac{1-1}{2}\right)} \times \phi\left(\frac{n}{1}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\phi(n)$ 個不同構的迴圈圖形。

(2) 承(1)，**下面我們欲證明當 $a \neq 2$ 時，$m_a(\mathbf{mod}\ a) = \frac{a}{2}$**。

假設 $m_i(\mathrm{mod}\ a) = \frac{a}{2}$，且 $i \neq a$，則令 $m_i = \frac{a}{2} + ka$，k 為正整數，且

$$\left\{m_{(i-1)} m_i\,, m_i m_{(i+1)}\right\} = \left\{m_{(i-1)}\left(\frac{a}{2} + ka\right), \left(\frac{a}{2} + ka\right) m_{(i+1)}\right\} \subseteq E(G)。$$

因為 $G^{[0]} = G$，所以

$\{m_{(a-i+1)}m_{(a-i)}\, , m_{(a-i)}m_{(a-i-1)}\}$

$=\{(-m_{(i-1)})\left(-\frac{a}{2}-ka\right),\left(-\frac{a}{2}-ka\right)(-m_{(i+1)}))$

$=\{(-m_{(i-1)})(m_i-(k+1)a),(m_i-(k+1)a)\left(-m_{(i+1)}\right)\subseteq E(G)$。

又$G_{(k+1)a}=G$，觀察邊集$E(G)$，點 m_i 重複了 4 次，和「在任意邊集中，每一點均只出現兩次」矛盾，故假設錯誤，$i=a$，$\boldsymbol{m_a(\mathrm{mod}\ a)=\frac{a}{2}}$。

因此，由引理 8 和上面所述，點$m_{\frac{a}{2}}, m_{\frac{a+2}{2}}, \dots\dots, m_{a-1}$ 這 $\frac{a-2}{2}$ 個點共有

$\left(\frac{a-2}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a-2}{2}}$種可能的排列方法。**下面我們接著分析當 $\boldsymbol{a\neq 2}$ 時，$\boldsymbol{m_a}$ 共有多少種可能的值。**

設 $m_a=\frac{a}{2}+ka$， k是正整數且$0\leq k\leq\frac{n}{a}-1$ ，則 $x=\frac{a+2ka}{a}=2k+1$，

$1\leq 2k+1\leq\frac{2n}{a}-1$。

由引理 9 可知，當 $\frac{n}{a}\neq 2$ 時，$2k+1$和 $\boldsymbol{\frac{n}{a}}$ 互質。

當 $\frac{n}{a}$ 為偶數時，和 $\frac{n}{a}$ 互質的數皆為奇數，故 k 共有 $2\phi\left(\frac{n}{a}\right)$ 種可能，即 m_a 共有 $2\phi\left(\frac{n}{a}\right)$ 種可能的值。當 $\frac{n}{a}=2$ 時，$2\phi\left(\frac{n}{a}\right)$ =2，與邊集的假設方法有兩種恰相等，因此上述的推理亦成立。

由引理 11， $m_{\frac{a}{2}}, m_{\frac{a+2}{2}}, \dots\dots, m_{a-1}$ 共有$\left(\frac{a-2}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a-2}{2}}\times 2\phi\left(\frac{n}{a}\right)$種排列方法。

當 $\frac{n}{a}$ 為奇數時，和 $\frac{n}{a}$ 互質的奇數個數等同於和 $\frac{2n}{a}$ 互質的奇數個數，故 k 共有 $\phi\left(\frac{2n}{a}\right)$ 種可能，即 m_a 共有 $\phi\left(\frac{2n}{a}\right)$ 種可能的值。

由引理 11， $m_{\frac{a}{2}}, m_{\frac{a+2}{2}}, \dots\dots, m_{a-1}$ 共有 $\left(\frac{a-2}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a-2}{2}}\times\phi\left(\frac{2n}{a}\right)$ 種排列方法。

下面我們還要扣除在上述所有可能的邊集中，重複計算的同構圖形。

為了方便討論，我們令 $k=c_k$。

在 $(\frac{a-1}{2})!\times(\frac{2n}{a})^{\frac{a-1}{2}}\times c_k$ 個邊集中，由於圖形對稱，每個相異圖形 G 皆有兩種 $m_{\frac{a}{2}}, m_{\frac{a+2}{2}}, \dots\dots, m_{a-1}$ 的排列方法。

又由引理 3，每個不同構的迴圈圖形皆可產生 G和 $G_{\frac{r}{2}}$ 兩種對稱於同一條直線的相異圖形，由引理 4，當 r 為偶數時，該直線對於 G和 $G_{\frac{r}{2}}$ 皆為頂點對稱軸；當 r 為奇數時，該直線對於 G和 $G_{\frac{r}{2}}$ 的其中一個為頂點對稱軸，另一個為中點對稱軸。

因此在上述所有可能的邊集中，r 為偶數的圖形 G 共會產生 4 個同構圖形，r 為奇數的圖形 G 共會產生 2 個同構圖形。

◎ 若 r 為偶數

⊙以 $n = 8$， $r = 4$ 為例

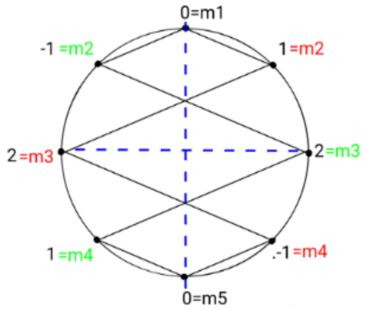


圖 56. 能選擇綠色或紅色標記的路徑

⊙以 $n = 8$， $r = 4$ 為例

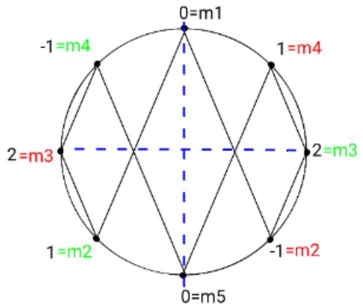


圖 57. 又能選擇綠色或紅色標記的路徑

◎ 若 r 為奇數

⊙以 $n = 6$， $r = 3$ 為例

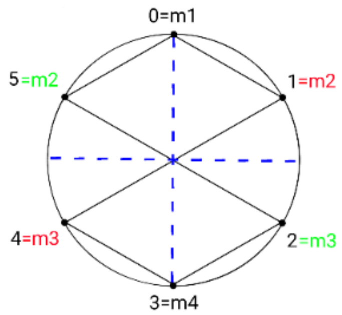


圖 58.能選擇綠色或紅色標記的路徑

以將 a 分解成 $2^z \times y$（y, z 皆為正整數），y 為 a 的因數中最大的奇數。根據定理 2 的結果，將 $a = y$ 代入 $(\frac{a-1}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a-1}{2}} \times \phi(\frac{n}{a}) \times \frac{1}{2}$，得到 r 為奇數時的迴圈圖形數為 $\left(\frac{y-1}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)} \times \phi\left(\frac{n}{y}\right) \times \frac{1}{2}$，可推得 r 為偶數時的迴圈圖形數為

$\{[\left(\frac{a-2}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a-2}{2}} \times c_k] - [\left(\frac{y-1}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)} \times \phi\left(\frac{n}{y}\right) \times \frac{1}{2} \times 2]\} \times \frac{1}{4}$

，相加並化簡後得 $(\frac{a-2}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a-2}{2}} \times c_k \times \frac{1}{4} + (\frac{y-1}{2})! \times (\frac{2n}{y})^{(\frac{y-1}{2})} \times \phi(\frac{n}{y}) \times \frac{1}{4}$。

將 $c_k = 2\phi\left(\frac{n}{a}\right)$ 代入，$\frac{n}{a}$ 為偶數且 $a \neq 2$ 時共有$\left(\frac{a-2}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a-2}{2}} \times \phi\left(\frac{n}{a}\right) \times \frac{1}{2} +$ $\left(\frac{y-1}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)} \times \phi\left(\frac{n}{y}\right) \times \frac{1}{4}$ 個不同構的迴圈圖形。

(3) 承 (1)(2)，將 $c_k = \phi\left(\frac{2n}{a}\right)$ 代入，$\frac{n}{a}$ 為奇數且 $a \neq 2$ 時，共有

$\left(\frac{a-2}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a-2}{2}} \times \phi\left(\frac{2n}{a}\right) \times \frac{1}{4} + \left(\frac{y-1}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)} \times \phi\left(\frac{n}{y}\right) \times \frac{1}{4}$ 個不同構的迴圈圖形。

※ 由定理 3，我們可以透過下面的步驟作出旋轉 a 個弧後重合且具有至少一條頂點對稱軸的迴圈圖形：

1. 為了表示圖形旋轉 a 個弧後重合以及圖形對稱，將圓上 n 個點每 a 個點分為一組，標號為 $-\frac{a-2}{2}, \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots, \frac{a-2}{2}, \frac{a}{2}$，共有 $\frac{n}{a}$ 組。其中標號的絕對值分別為 $1, 2, \ldots, \frac{a-2}{2}$ 的點皆

有 $\frac{2n}{a}$ 個，並標示出對稱軸，如圖 59 所示。

2. 固定出發點 0，通過圓上標號絕對值為 1, 2, ..., $\frac{a-2}{2}$ 的點各恰一次，如圖 60 所示。此時 $\frac{a-2}{2}$ 個標號的排列數共有 $(\frac{a-2}{2})!$ 個，且每個標號皆有 $\frac{2n}{a}$ 個，故此步驟之排列數共有 $\left(\frac{a-2}{2}\right)! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a-2}{2}}$ 個。
3. 將步驟 2 中通過的第 $\frac{a-2}{2}$ 點連接一標號為 $\frac{a}{2}$ 的點，如圖 61 所示。若 $\frac{n}{a}$ 為偶數，則此步驟之排列數共有$2\phi\left(\frac{n}{a}\right)$ 個。若 $\frac{n}{a}$ 為奇數，則此步驟之排列數共有 $\phi\left(\frac{2n}{a}\right)$ 個。
4. 以通過出發點的對稱軸作為對稱軸，作步驟 3 圖形之對稱圖形，如圖 62 所示。
5. 將步驟 4 中的圖形旋轉 1, 2, ..., , $\left(\frac{n}{a}-1\right)$ 個弧後作於圖上，得到 $\frac{n}{a}$ 個步驟 4 的圖形，完成。

◎以 $n = 6$，$a = 6$ 為例作圖。

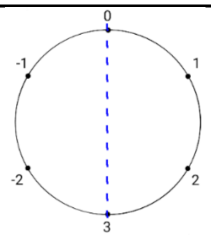


圖 59. 標 $\frac{6}{6}$ 組－ 2 ~ 3 號

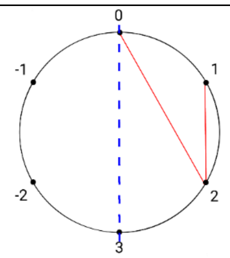


圖 60. 連接 3 個點

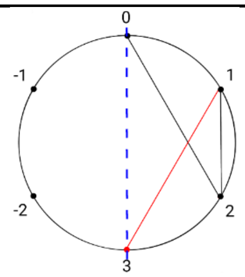


圖 61.通過的第 $\frac{6-2}{2}$ 點連接一標號為 $\frac{6}{2}$ 的點

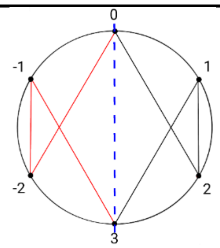


圖 62. 作對稱圖形(此處不需再旋轉作圖)，完成！

接著探討**旋轉 *a* 個弧後重合且具有至少一條中點對稱軸的迴圈圖形數**。

定理 4. 已知圓上有 *n* 個點，若 *a* 為偶數且 *a* 為 *n* 的因數，*y* 是 *a* 的最大奇因數，且圖形至少有一條中點對稱軸，計算其迴圈圖形數如下。

(1) 當$a < \frac{n}{2}$時，共有

$$\left(\frac{a}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a}{2}} \times \phi\left(\frac{n}{a}\right) \times \frac{1}{8} + \left(\frac{y-1}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)} \times \phi\left(\frac{n}{y}\right) \times \frac{1}{4}$$ 個不同構的迴圈圖形。

(2)當 $a=\frac{n}{2}$ 時，共有

$(\frac{a}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}} \times \frac{3}{8} + (\frac{y-1}{2})! \times (\frac{2n}{y})^{(\frac{y-1}{2})} \times \phi(\frac{n}{y}) \times \frac{1}{4}$ 個不同構的迴圈圖形。

(3) 當 $a=n$，$\frac{a}{2}$ 為奇數時，共有

$\left(\frac{a}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a}{2}} \times \phi\left(\frac{n}{a}\right) \times \frac{n+2}{8n} + \left(\frac{y-1}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)} \times \frac{1}{2}$ 個不同構的迴圈圖形。

(4) 當 $a=n$，$\frac{a}{2}$ 為偶數時，共有

$(\frac{a}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}} \times \frac{n+2}{8n} + (\frac{y-1}{2})! \times (\frac{2n}{y})^{(\frac{y-1}{2})} \times \phi(\frac{n}{y}) \times \frac{1}{4}$ 個不同構的迴圈圖形。

證明：

(1) 由引理 8 第 1 點得知當 $\dfrac{n}{a} \neq 2$ 時，設迴圈圖形 G 的邊集

$E(G)=\{m_1\, m_2, m_2\, m_3, \ldots\ldots, m_{(a-1)}\, m_a, m_a\,(m_1+xa), (m_1+xa)(m_2+xa), \ldots\ldots,$
$(m_{a-1}+xa)(m_a+xa), (m_a+xa)(m_1+2xa), (m_1+2xa)\,(m_2+2xa), \ldots\ldots,$
$(m_{a-1}+2xa)(m_a+2xa), \ldots\ldots, \left[m_1+\left(\frac{n}{a}-1\right)xa\right]\left[m_2+\left(\frac{n}{a}-1\right)xa\right], \ldots\ldots,$
$\left[m_{a-1}+\left(\frac{n}{a}-1\right)xa\right]\left[m_a+\left(\frac{n}{a}-1\right)xa\right], \left[m_a+\left(\frac{n}{a}-1\right)xa\right]m_1\}$。

由引理 4，不失其一般性，設對稱軸通過圓上中點 0* 。因為 $G(0)=G$，若已知 $\{(m_1, m_2)\} \subseteq E(G)$ ，則由定義(八)，可知$\{(1-m_1, 1-m_2)\} \subseteq E(G)$，以此類推，若已知 $\{m_1\, m_2, m_2\, m_3, \ldots\ldots, m_{\frac{a-2}{2}}\, m_{\frac{a}{2}}\} \subseteq E(G)$ ，則邊集

$\{(1-m_1)(1-m_2), (1-m_2)(1-m_3), \ldots\ldots, (1-m_{\frac{a-2}{2}})(1-m_{\frac{a}{2}})\} \subseteq E(G)$

且旋轉 a, $2a$, ……, $\left(\frac{n}{a}-1\right)a$ 個弧後皆不會和 $\{m_1\, m_2, m_2\, m_3, \ldots\ldots, m_{\frac{a-2}{2}}\, m_{\frac{a}{2}}\}$ 有交集。

下面我們欲證明當 $a \neq n$ 時，$m_{\frac{a+2}{2}} (\mathrm{mod}\ a) = (1-m_{\frac{a}{2}})$。

由引理 8 可知，$m_{\frac{a+2}{2}} (\mathrm{mod}\ a) \neq 1$ 或 a。假設 $m_{\frac{a+2}{2}} (\mathrm{mod}\ a) \neq (1-m_1)$ ，則令

$m_{\frac{a+2}{2}} \neq 1-m_1+ka$，得

$\left\{m_{\frac{a}{2}}(1-m_1+ka)\right\} \subseteq E(G)$。

因為 $G(0)=G$，$\{(1-m_{\frac{a}{2}})(m_1-ka)\} \subseteq E(G)$。又 $G_{ka}=G$，$\{(1-m_{\frac{a}{2}}+ka)m_1\} \subseteq E(G)$。$\left\{m_1\, m_2, m_2\, m_3, \ldots\ldots, m_{\frac{a-2}{2}}\, m_{\frac{a}{2}}, m_{\frac{a}{2}}(1-m_1+ka), \ldots\ldots, \left(1-m_{\frac{a}{2}}+ka\right)m_1\right)$

$\subseteq E(G)$，形成一不通過所有點(例如：$m_{\frac{a+2}{2}}$)的的封閉圖形，不滿足形成迴圈圖形的條件，故假設錯誤，$m_{\frac{a+2}{2}}(\text{mod } a) = (1 - m_{\frac{a}{2}})$。

因為當 $\frac{n}{a} < 2$ 時，$\{m_{\frac{a}{2}}(1 - m_1 + ka)\} \subseteq E(G)$必會平行 G 的其中一條對稱軸，因此為了簡化計算，我們不妨令 k=1，故若已知點 $m_1, m_2, \dots\dots, m_{\frac{a+1}{2}}$ 和 x，即可得到圖形 G。

由引理 9，x 有 $\phi(\frac{n}{a})$ 個可能的值。由引理 11，點 $m_1, m_2, \dots\dots, m_{\frac{a}{2}}$ 共有 $\left(\frac{a}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a}{2}}$ 種排列方法。

下面我們還要扣除 $\left(\frac{a}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a}{2}} \times \phi(\frac{n}{a})$ 個邊集當中的同構圖形。

其扣除方法和定理 3 十分類似。在 $\left(\frac{a}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a}{2}} \times \phi(\frac{n}{a})$ 個邊集中，由於圖形對稱且對稱軸未通過圓上任一個頂點，因此每個相異圖形 G 皆有 4 種 $m_{\frac{a}{2}}, m_{\frac{a+2}{2}}, \dots\dots, m_{a-1}$ 的排列方法。

又由引理 3、4 可知，在上述所有可能的邊集中，每個 r 為偶數的不同構圖形 G 共會產生 8 個同構圖形，每個 r 為奇數的不同構圖形 G 共會產生 4 個同構圖形。

◎ a 為偶數，以 $n = 6$， $a = 2$ 為例

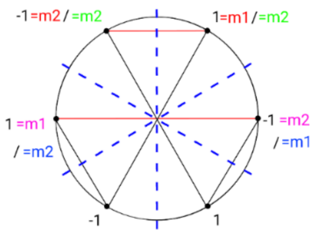


圖 63.

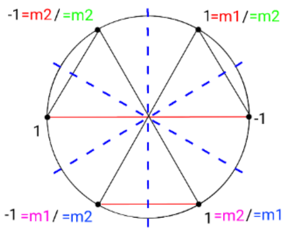


圖 64.

◎ a 為奇數，以 $n = 6$，$a = 3$ 為例

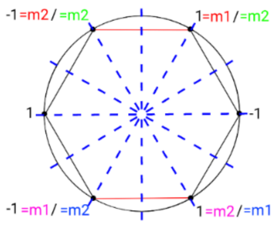


圖 65.

⇨由紅線連線的兩點之連線路徑，可選擇紅色、綠色、藍色或粉色標記的路徑

將 a 分解成 $2^z \times y$（y, z 皆為正整數），y 為 a 的因數中最大的奇數。由定理 2，得到 r 為奇數且不同構的迴圈圖形數為 $(\frac{y-1}{2})! \times (\frac{2n}{y})^{(\frac{y-1}{2})} \times \phi(\frac{n}{y}) \times \frac{1}{2}$，可推得 r 為偶數且不同構的迴圈圖形數為

$$\{[(\frac{a}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}} \times \phi(\frac{n}{a})] - [(\frac{y-1}{2})! \times (\frac{2n}{y})^{(\frac{y-1}{2})} \times \phi(\frac{n}{y}) \times \frac{1}{2} \times 4]\} \times \frac{1}{8}，$$

相加並化簡後得 $(\frac{a}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}} \times \phi(\frac{n}{a}) \times \frac{1}{8} + (\frac{y-1}{2})! \times (\frac{2n}{y})^{(\frac{y-1}{2})} \times \phi(\frac{n}{y}) \times \frac{1}{4}$。

故當 a 為正偶數，$\boldsymbol{a < \frac{n}{2}}$ 時，共有

$(\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}})! \times (\frac{\mathbf{2n}}{\boldsymbol{a}})^{\frac{\boldsymbol{a}}{2}} \times \boldsymbol{\phi}(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a}}) \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}} + (\frac{\boldsymbol{y}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}})! \times (\frac{\mathbf{2n}}{\boldsymbol{y}})^{(\frac{\boldsymbol{y}-\mathbf{1}}{2})} \times \boldsymbol{\phi}(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{y}}) \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ 個不同構的迴圈圖形。

(2) 承(1)，當 $\frac{n}{a} = 2$ 時，不失其一般性，由引理 10，設邊集 $E(G)$ $=\{m_1m_2, m_2m_3, \ldots\ldots, m_{(a-1)}m_a,\ (m_1+a)(m_2+a), \ldots\ldots, (m_{a-1}+a)(m_a+a)\}$ 或 $\{m_1m_2, m_2m_3, \ldots\ldots, m_{(a-1)}m_a,\ (m_a+a)(m_{a-1}+a), \ldots\ldots, (m_2+a)(m_1+a)\}$，由引理 4，設對稱軸通過圓上中點 0* 。由(1)可知，邊集$\{m_1m_2, m_2m_3, \ldots\ldots, m_{(a-1)}m_a,$ $(m_1+a)(m_2+a), \ldots\ldots, (m_{a-1}+a)(m_a+a)\}$ 共會產生$\left(\frac{a}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a}{2}} \times \phi\left(\frac{n}{a}\right) \times \frac{1}{8} +$ $\left(\frac{y-1}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)} \times \phi\left(\frac{n}{y}\right) \times \frac{1}{4}$ 個不同構的迴圈圖形。因此，下面我們計算 $E(G)=\{m_1m_2, m_2m_3, \ldots\ldots, m_{(a-1)}m_a,\ (m_a+a)(m_{a-1}+a), \ldots\ldots, (m_2+a)(m_1+a)\}$ 時，共會產生多少種不同構的迴圈圖形。

由 (1) ，其點m_1， m_2， … ，$m_{\frac{a}{2}}$ 的排列組合共有 $(\frac{a}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}}$ 種排列方法。下面我們還要扣除當中的同構圖形。每個相異圖形 G 皆有 4 種 $m_{\frac{a}{2}}, m_{\frac{a+2}{2}}, \ldots\ldots, m_{a-1}$ 的排列方法。由引理 3、4，每個不同構的迴圈圖形皆可產生 G 和 $G_{\frac{r}{2}}$ 兩種相異圖形，使得 G 和 $G_{\frac{r}{2}}$ 皆以同一條直線作為中點對稱軸。但在 $E(G_{\frac{r}{2}})$ 中 $(m_{\frac{a}{2}} + m_{\frac{a+2}{2}}) (\mathrm{mod}\, n) \neq 1$，因此病不會包含在 $(\frac{a}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}}$ 種排列方法中。因此在上述所有可能的邊集中，每個不同構圖形 G 共會產生 4 個同構圖形。計算後得到 $(\frac{a}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}} \times \frac{1}{4}$ 個不同構迴圈圖形。

將所有不同構迴圈圖形相加並化簡，得到

$$\left(\frac{a}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a}{2}} \times \phi\left(\frac{n}{a}\right) \times \frac{1}{8} + \left(\frac{y-1}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)} \times \phi\left(\frac{n}{y}\right) \times \frac{1}{4} + \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}\right)! \times \left(\frac{\mathbf{2n}}{\boldsymbol{a}}\right)^{\frac{\boldsymbol{a}}{2}} \times \boldsymbol{\phi}\left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a}}\right) \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

$$= (\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}})! \times (\frac{\mathbf{2n}}{\boldsymbol{a}})^{\frac{\boldsymbol{a}}{2}} \times \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}} + (\frac{\boldsymbol{y}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}})! \times (\frac{\mathbf{2n}}{\boldsymbol{y}})^{(\frac{\boldsymbol{y}-\mathbf{1}}{2})} \times \boldsymbol{\phi}(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{y}}) \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}。$$

故當 $a = \frac{n}{2}$ 時，共有 $(\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}})! \times (\frac{\mathbf{2n}}{\boldsymbol{a}})^{\frac{\boldsymbol{a}}{2}} \times \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}} + (\frac{\boldsymbol{y}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}})! \times (\frac{\mathbf{2n}}{\boldsymbol{y}})^{(\frac{\boldsymbol{y}-\mathbf{1}}{2})} \times \boldsymbol{\phi}(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{y}}) \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ 個不同構的迴圈圖形。

(3) 承(1)(2)，當$a = n$ 時，邊集$E(G) =$

$$\left\{m_1 m_2, m_2 m_3, \ldots\ldots, m_{\frac{a-2}{2}} m_{\frac{a}{2}},\ m_{\frac{a}{2}}(1 - m_1 + ka), \ldots\ldots, \left(1 - m_{\frac{a}{2}} + ka\right) m_1\right\}，$$

不會形成封閉圖形，因此 $m_{\frac{a+2}{2}} = 1 - m_1$ 或 $1 - m_{\frac{a}{2}}$。當 $m_{\frac{a+2}{2}} = 1 - m_1$ 時，由 (1)，共有 $(\frac{a}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}} \times \phi(\frac{n}{a}) \times \frac{1}{8} + (\frac{y-1}{2})! \times (\frac{2n}{y})^{(\frac{y-1}{2})} \times \phi(\frac{n}{y}) \times \frac{1}{4}$ 個不同構的圖形。

下面我們將分析當 $m_{\frac{a+2}{2}} = 1 - m_{\frac{a}{2}}$ 時，共有多少個不同構的圖形。

由 (1) ，已知點 m_1， m_2， … ，$m_{\frac{a}{2}}$ 的排列組合共有 $(\frac{a}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}}$ 種排列方法。因此下面我們要扣除當中的同構的圖形。

在這種情況中，圖形的最小旋轉重合數 $r = n$ 或 $\frac{n}{2}$，且 G 任意相鄰的 $\frac{a}{2}$ 個點 (mod $\frac{n}{2}$) 後皆相等，因此每個相異圖形皆會有 $2n$ 種排列。

當$r = n$時，由引理 3、4，每個不同構的迴圈圖形皆可產生 G 和 $G_{\frac{r}{2}}$ 兩種相異圖形，如圖 66、67 所示，使得 G 和 $G_{\frac{r}{2}}$ 皆以同一條直線作為中點對稱軸。

故每個不同構的迴圈圖形 G 共會產生 $4n$ 個同構圖形。

◎ 以 $n = 6$， $r = 6$，$a = 3$ 為例

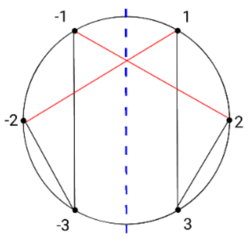


圖 66.

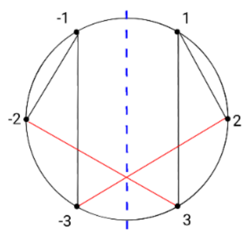


圖 67.

⇨ G 和 $G_{\frac{r}{2}}$ 皆以同一條直線作為中點對稱軸。

當 $r = \frac{n}{2}$ 時，若 $\frac{n}{2}$ 為奇數，由引理 3、4 和上文所述，每個不同構的迴圈圖形 G 共會產生 $2n$ 個同構圖形。又 r 恰好是 n 的最大奇因數 y，由定理 2， $r = \frac{n}{2}$ 時共會產生 $(\frac{y-1}{2})! \times (\frac{2n}{y})^{(\frac{y-1}{2})} \times \frac{1}{2}$ 種不同構的迴圈圖形。

可推得 $r = n$ 時共有

$$[(\frac{a}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}} - (\frac{y-1}{2})! \times \left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)} \times (\phi\left(\frac{n}{a}\right) + 1) \times \frac{1}{2} \times 2n] \times \frac{1}{4n}$$ 個不同構的迴圈圖形，

相加並化簡後得

$$\left(\frac{y-1}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)} \times \frac{1}{2} + [(\frac{a}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}} - (\frac{y-1}{2})! \times (\frac{2n}{y})^{(\frac{y-1}{2})} \times \frac{1}{2} \times 2n] \times \frac{1}{4n}$$

$$= (\frac{a}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}} \times \frac{1}{4n} + \left(\frac{y-1}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)} \times \frac{1}{4}$$ 。

最後將全部不同構的迴圈圖形相加，得到當$a = n$，$\frac{a}{2}$ 為奇數時，共有

$$\left(\frac{a}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a}{2}} \times \frac{1}{8} + \left(\frac{y-1}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)} \times \phi\left(\frac{n}{y}\right) \times \frac{1}{4} + \left(\frac{a}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a}{2}} \times \frac{1}{4n}$$

$+\left(\frac{y-1}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)}\times\frac{1}{4}=\left(\frac{a}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a}{2}}\times\frac{n+2}{8n}+\left(\frac{y-1}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)}\times\frac{1}{2}$

個不同構的迴圈圖形。

(4) 承 (3)，當 $r=\frac{n}{2}$ 時，若 $\frac{n}{2}$ 為偶數，則由引理 3、4 和上文所述，每個不同構的迴圈圖形 G 共會產生 $4n$ 個同構圖形。因此在這種情況中，$r=n$ 和 $r=\frac{n}{2}$ 共會產生 $(\frac{a}{2})!\times(\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}}\times\frac{1}{4n}$ 個不同構迴圈圖形。

最後將全部不同構的迴圈圖形相加並化簡，得到當 $a=n$，$\frac{a}{2}$ 為偶數時，共有

$(\frac{a}{2})!\times(\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}}\times\frac{n+2}{8n}+(\frac{y-1}{2})!\times(\frac{2n}{y})^{(\frac{y-1}{2})}\times\phi(\frac{n}{y})\times\frac{1}{4}$ 個不同構的迴圈圖形。

※ 由定理 4，我們可以透過下面的步驟作出旋轉 a 個弧後重合且具有至少一條中點對稱軸的迴圈圖形：

1. 將圓上 n 點每 a 個分為一組，標號為 $-\frac{a}{2}, \frac{a-2}{2}$, ..., – 2, – 1, 1, 2, ..., $\frac{a-2}{2}, \frac{a}{2}$，如圖 65 所示。

2. 通過圓上標號絕對值為 1, 2, ..., $\frac{a}{2}$ 的點各恰一次，如圖 65 所示。此時 $\frac{a}{2}$ 個標號的排列數共有 $\left(\frac{a}{2}\right)!$ 個，且每個標號皆有 $\frac{2n}{a}$ 個，故此步驟之排列數共有 $(\frac{a}{2})!\times(\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}}$ 個。

3. 將步驟 2 中的圖形對稱後作於圖上，並連接通過的第 $\frac{a}{2}$ 個點和其對稱點，如圖 67 所示。

4. 將步驟 3 的圖形分別旋轉 1, 2, ..., , $(\frac{n}{a}-1)$ 個弧後作於圖上，得到 $\frac{n}{a}$ 個步驟 3 的圖形，如圖 68 所示。

5. 將步驟 4 中的圖形依照引理 8 的方法作一條邊接兩個不相連的部分迴圈圖形，其方法數為 $\phi(\frac{n}{a})$，如圖 69 所示。

6. 將步驟 5 的圖形分別旋轉 1, 2, ..., , $(\frac{n}{a}-1)$ 個弧後作於圖上，如圖 70 所示，完成。

◎ 以 $n=6$，$a=2$ 為例作圖。

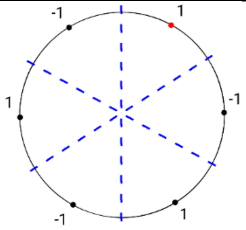


圖 68. 標 $\frac{6}{2}$ 組 − 1 、 1 號
(此處 $\frac{2}{2}=1$ 僅一點無法連線)

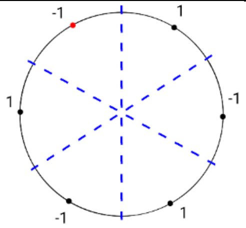


圖 69. 對稱點示例

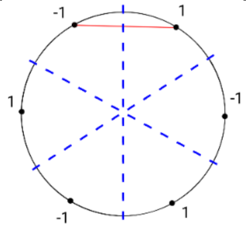


圖 70. 連接通過的第 $\frac{2}{2}$ 個點和其對稱點

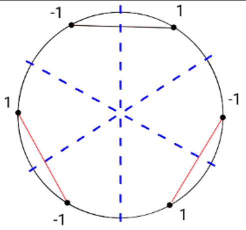


圖 71. 作部分圖形($\frac{6}{2}-1$)次

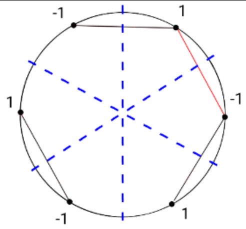


圖 72. 作一條邊接兩個不相連的部分迴圈圖形

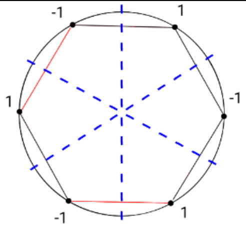


圖 73.作連接邊($\frac{6}{2}-1$)次，完成!

六、 $g(n)$ 的求法

給定一個大於等於 3 的正整數 n ，下面我們探討其不同構的迴圈圖形數 $g(n)$ 的求法。

令 n 的因數分別為 p_1 ， p_2 ， p_3 ， …… ， p_i ， p_{i+1} ， …… p_k。$g(n)$ 相當於所有 $r=p_i$ 的不同構迴圈圖形數的和。

由此我們可以假設最小旋轉重合數 $r=p_i$ 時，對稱和不對稱的迴圈圖形數如下。

r	不對稱的迴圈圖形數	對稱的迴圈圖形數
p_1	b_1	c_1
p_2	b_2	c_2
⋮	⋮	⋮
$p_k=n$	b_k	c_k

由引理 7，當 r 為 p_i 時，可以得到下面兩個等式。

第 1 式. $4np_i\times b_i+2np_i\times c_i$ 等於 r 為 p_i 時的總排列表示數。

第 2 式. b_i+c_i等於 r 為 p_i 時的不同構迴圈圖形數。

故已知正整數 n 、以 n 的任意因數為最小旋轉重合數 r 的總排列表示數、對稱迴圈圖形數，即可得到不同構的迴圈圖形數 $g(n)$ 。

在定理 1 到 4 中，我們只能得到圖形 G 滿足「旋轉 a 個弧後重合」的結果，由引理 2 第 4 點，對於一個旋轉 a 個弧後重合的迴圈圖形 G ，其最小旋轉重合數 r 必為 a 的因數，但不一定等於 a 。因此必須以類似排容原理概念扣除「 r 是 a 的因數但 $r \neq a$ 」的結果，才能得到圖形 G 滿足「最小旋轉重合數 $r = a$ 」的結果。計算後，我們可以由定理 1 得到最小旋轉重合數 r 為 p_i 的迴圈圖形排列表示數；由定理 2 到 4，得到最小旋轉重合數 r 為 p_i 的對稱迴圈圖形數。以 $n = 6$ 為例，用上述方法計算 $n = 6$ 時 $g(6)$ 的值。

◎ 分別將 6 的因數 1, 2, 3, 6 帶入定理 1，得到

旋轉 1 個弧後重合的迴圈圖形其排列表示數為 $1! \times 6^1 \times \phi(6) = 12$，

旋轉 2 個弧後重合的迴圈圖形其排列表示數為 $2! \times 3^2 \times \phi(3) = 36$，

旋轉 3 個弧後重合的迴圈圖形其排列表示數為 $3! \times 2^3 \times (\phi(2) + 3) = 192$，

旋轉 6 個弧後重合的迴圈圖形其排列表示數為 $6! \times 1^6 \times \phi(1) = 720$ 。

◎分別將 6 的奇因數 1, 3 帶入定理 2，得到

旋轉 1 個弧後重合且對稱的不同構迴圈圖形數有 $0! \times 12^0 \times \phi(6) \times \frac{1}{2} = 1$ 個，

旋轉 3 個弧後重合且對稱的不同構迴圈圖形數有 $1! \times 4^1 \times (\phi(2)+1) \times \frac{1}{2} = 4$ 個。

◎ 分別將 6 的偶因數 2, 6 帶入定理 3，得到

旋轉 2 個弧後重合且至少有一條頂點對稱軸的迴圈圖形數為 $\frac{1}{2}\phi(6) = 1$

旋轉 6 個弧後重合且至少有一條頂點對稱軸的迴圈圖形數有

$2! \times 2^2 \times \phi(2) \times \frac{1}{4} + 1! \times 4^1 \times (\phi(2)+1) \times \frac{1}{4} = 4$ 個。

◎ 分別將 6 的偶因數 2, 6 帶入定理 4，得到

旋轉 2 個弧後重合且有一條中點對稱軸的迴圈圖形數為

$1! \times 6^1 \times \phi(3) \times \frac{1}{8} + 0! \times 12^0 \times \phi(3) \times \frac{1}{4} = 2$ ，

旋轉 6 個弧後重合且且有一條中點對稱軸的迴圈圖形數為

$3! \times 2^3 \times \phi(1) \times \frac{1}{6} + 1! \times 4^1 \times \frac{1}{2} = 8 + 2 = 10$。

◎ 結合定理 3、 4，相加後扣除最小旋轉重合數為奇數的圖形。

旋轉 2 個弧後重合且對稱的不同構迴圈圖形數為 $2 + 1 - 1 = 2$，

旋轉 6 個弧後重合且對稱的不同構迴圈圖形數為 $4 + 10 - 4 = 10$。

計算得到

$r = 1$ 的迴圈圖形表示數為 12，對稱迴圈圖形數有 1 個；

$r = 2$ 的迴圈圖形表示數為 $36 - 12 = 24$，對稱迴圈圖形數有 $2 - 1 = 1$ 個；

$r = 3$ 的迴圈圖形表示數為 $192 - 12 = 180$，對稱迴圈圖形數有 $4 - 1= 3$ 個；

$r = 6$ 的迴圈圖形表示數為 $720 - 180 - 24 - 12 = 504$，對稱迴圈圖形數有

$(10 + 4 - 4) - 3 - 1 - 1 = 5$ 個；

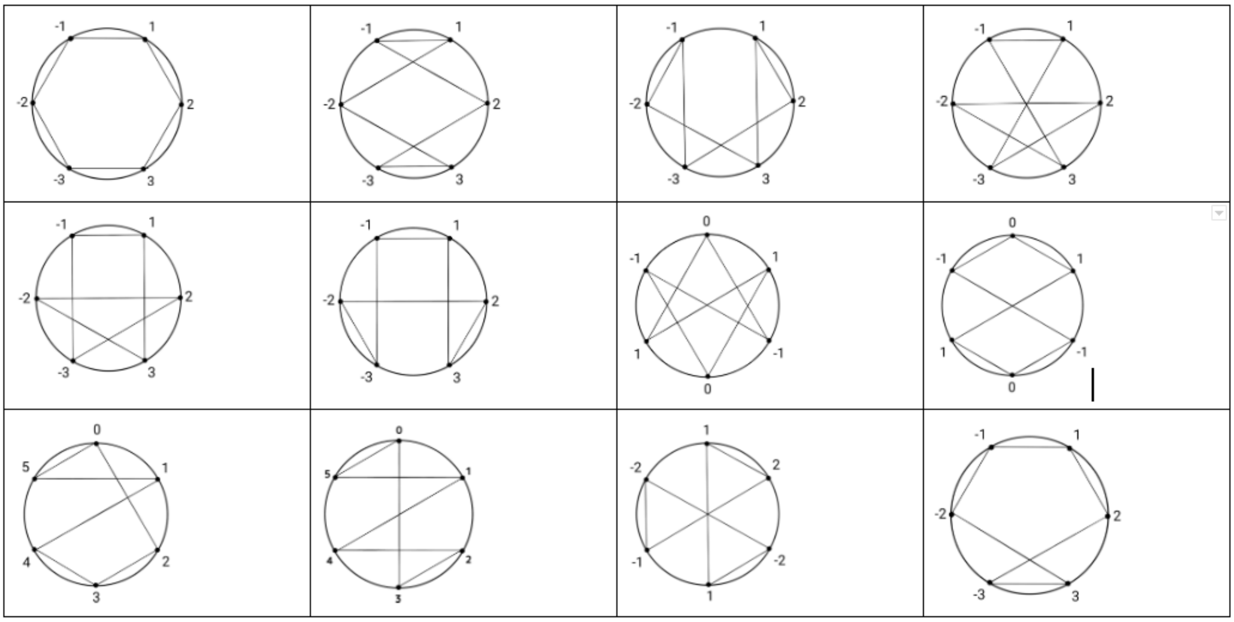
$r = 1$ 且不對稱的迴圈圖形數有 0 個。

$r = 2$ 且不對稱的迴圈圖形數為 $(24 - 1 \times 2 \times 6 \times 2) \div (4 \times 6 \times 2) = 0$ 個。

$r = 3$ 且不對稱的迴圈圖形數為 $(180 - 3 \times 2 \times 6 \times 3) \div (4 \times 6 \times 3) = 1$ 個。

$r = 6$ 且不對稱的迴圈圖形數有 $(504 - 5 \times 2 \times 6 \times 6) \div (4 \times 6 \times 6) = 1$ 個。

總迴圈圖形數 $g(6) = 1 + 1 + 3 + 5 + 0 + 1 + 1 = 12$ 個。



伍、結論

一、 已知圓上有 n 個點，若 a 為 n 的因數，計算滿足 $G_a = G$ 的所有迴圈圖形其總相異排列表示如下。

(一) 當 $\frac{n}{a} \neq 2$ 時，共有$\boldsymbol{a}! \times (\frac{n}{a})^{a} \times \boldsymbol{\phi}(\frac{n}{a})$ 種相異的排列表示。

(二) 當 $\frac{n}{a} = 2$時，共有 $\boldsymbol{a}! \times (\frac{n}{a})^{a} \times (\boldsymbol{\phi}(\frac{n}{a}) + \boldsymbol{a})$ 種相異的排列表示。

(證明詳見定理 1)。

二、已知圓上有 n 個點，若 a 是正奇數且 a 為 n 的因數，計算滿足 $G_a = G$ 且對稱的不同構

迴圈圖形數為

(一) 當 $\frac{n}{a} \neq 2$ 時，共有$(\frac{a-1}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a-1}{2}} \times \phi(\frac{n}{a}) \times \frac{1}{2}$ 個不同構的對稱迴圈圖形。

(二) 當 $\frac{n}{a} = 2$ 時，共有 $(\frac{a-1}{2})! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a-1}{2}} \times (\phi\left(\frac{n}{a}\right) + 1) \times \frac{1}{2}$ 個不同構的對稱迴圈圖形。

(證明詳見定理 2)。

三、已知圓上有 n 個點，若 a 為偶數且 a 為 n 的因數，y 為 a 最大的奇因數且圖形至少有一條頂點對稱軸，計算滿足 $G_a = G$ 且對稱的迴圈圖形數如下。

(一) 當 $a = 2$ 時，共有 $\frac{1}{2}\phi(n)$ 個不同構的迴圈圖形。

(二) 當 $a \neq 2$ ，$\frac{n}{a}$ 為偶數時，共有

$\left(\frac{a-2}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a-2}{2}} \times 2\phi\left(\frac{n}{a}\right) \times \frac{1}{4} + \left(\frac{y-1}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)} \times \phi\left(\frac{n}{y}\right) \times \frac{1}{4}$ 個不同構的迴圈圖形。

(三) 當 $a \neq 2$，$\frac{n}{a}$ 為奇數時，共有

$\left(\frac{a-2}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a-2}{2}} \times \phi\left(\frac{2n}{a}\right) \times \frac{1}{4} + \left(\frac{y-1}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)} \times \phi\left(\frac{n}{y}\right) \times \frac{1}{4}$ 個不同構的迴圈圖形。

(證明詳見定理 3)。

四、已知圓上有 n 個點，若 a 為偶數且 a 為 n 的因數，y 是 a 的最大奇因數，且圖形至少有一條中點對稱軸，計算其迴圈圖形數如下：

(一) 當$a < \frac{n}{2}$ 時，共有

$\left(\frac{a}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a}{2}} \times \phi\left(\frac{n}{a}\right) \times \frac{1}{8} + \left(\frac{y-1}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)} \times \phi\left(\frac{n}{y}\right) \times \frac{1}{4}$ 個不同構的迴圈圖形。

(二) 當 $a = \frac{n}{2}$ 時，共有

$(\frac{a}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}} \times \frac{3}{8} + (\frac{y-1}{2})! \times (\frac{2n}{y})^{(\frac{y-1}{2})} \times \phi(\frac{n}{y}) \times \frac{1}{4}$ 個不同構的迴圈圖形。

(三) 當 $a = n$，$\frac{a}{2}$ 為奇數時，共有

$\left(\frac{a}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a}{2}} \times \phi\left(\frac{n}{a}\right) \times \frac{n+2}{8n} + \left(\frac{y-1}{2}\right)! \times \left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)} \times \frac{1}{2}$ 個不同構的迴圈圖形。

(四) 當 $a = n$，$\frac{a}{2}$ 為偶數時，共有

$(\frac{a}{2})! \times (\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}} \times \frac{n+2}{8n} + (\frac{y-1}{2})! \times (\frac{2n}{y})^{(\frac{y-1}{2})} \times \phi(\frac{n}{y}) \times \frac{1}{4}$ 個不同構的迴圈圖形。

(證明詳見定理 4)。

五、對於每一個大於等於 3 的正整數 n ，令 n 的因數分別為 p_1， p_2， p_3，……， p_i，

p_{i+1}，…… p_k其不同構的迴圈圖形數 $g(n)$ 的計算方式如下。

(一) 由定理 1，分別得到所有最小旋轉重合數 r 為 p_i 時的迴圈圖形排列表示數。

(二) 由定理 2 到 4，分別得到所有最小旋轉重合數 r 為 p_i 時的對稱不同構迴圈圖形數。

(三) 由 (一) (二) 的結果，計算最小旋轉重合數 r 為 p_i 時的對稱不同構迴圈圖形數為

$$\frac{\left(r \text{ 為 } p_i \text{ 時的迴圈圖形排列表示數}\right) - (r \text{ 為 } p_i \text{ 時的對稱迴圈圖形數}) \times 2np_i}{4np_i}$$

(四) 將 (二) (三) 的結果相加，得到 r 為 p_i 時的對稱迴圈圖形數。

(五) 將 (四) 計算出的所有 r 為 p_i 時的對稱迴圈圖形數相加，即為 $g(n)$ 。

陸、未來展望

希望未來能使用群的概念推廣出更一般的式子，並且能發現其他可以加以推廣的性質。

柒、參考資料及其他

一、楊惠后 (2009) 。正 n 角星的內角和探討。數學傳播。第三十三卷第一期。

二、陳界山編著。高中數學課本第二冊。南一出版社。

【評語】050404

作品嘗試找出所有不同構的迴圈的數目 g(n)，作者將迴圈圖形分成對稱和不對稱兩種，對稱圖形又根據 n 為奇數或偶數分別進行研究。作者首先計算圓上點的排列組合數和不同構的對稱迴圈圖形數，而後藉此得到不同構的不對稱迴圈圖形數。將兩者相加後得到 g(n)。公式上還出現尤拉函數，推導不簡單。但若作者用上群論的觀點，內容會簡化許多。因爲旋轉及線對稱等算子可組成群，利用群論的 Burnside Lemma 應可處理計算分類的問題。

作品海報

回首向來蕭瑟處——一筆畫迴圈圖形

摘要

本研究主要探討「一筆畫迴圈圖形」的種類數。圓上 n 個點平均分布，任選一點為起始點，經過圓上每一點恰一次，最後回到起始點，所構成的一筆畫圖形稱作迴圈圖形。我們的研究目的是若給定任意正整數 $n \geq 3$，算出這些點共能作出多少種不同構的一筆畫迴圈圖形 $g(n)$。

壹、研究動機

圓上 n 個點等距分布，依順時鐘標號 0, 1, 2, ..., n-1。考慮由某一點開始，通過所有點恰一次，最終回到出發點的迴圈所畫出的圖形，如圖 1 所示，之後稱之為迴圈圖形。旋轉或翻轉所造出來的同構迴圈圖形算同一種迴圈圖形。我們用窮舉法發現，當 $n = 5$ 時，竟然只有 4 種不同構的迴圈圖形，和我們一開始根據數學課所學之排列組合，計算出 5 點的排列數有 120 種方法有很大的出入，引發了我們對這類圖形的興趣，進而有了下面一系列的研究。

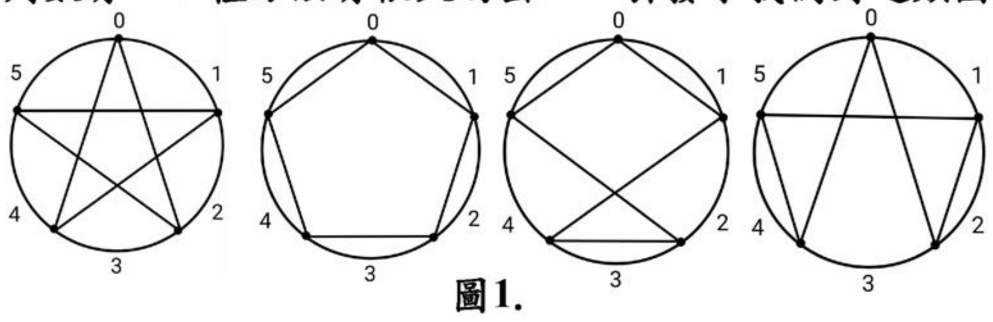


圖1.

貳、研究目的

探討對於每一個大於等於 3 的正整數 n，找出不同構的迴圈圖形數 $g(n)$。

參、研究過程與方法

一、名詞定義

（一）最小旋轉重合數 r：將圖形「順時針方向旋轉 r 個弧」後重合的最小正整數 r，我們將它稱作最小旋轉重合數。其中 $1 \leq r \leq n$ 且 r 是 n 的因數。如圖 2 為 $r = 2$ 的圖形。

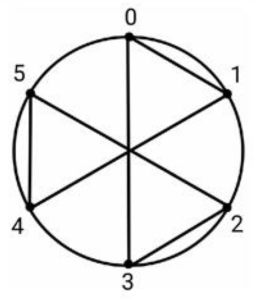


圖2.

（二）對稱軸：如果圖形 G 是一個軸對稱圖形，G 有 n 個點，且 G 的最小旋轉重合數為 r，則共有 $\frac{n}{r}$ 條對稱軸。其中通過圓上 1 個或 2 個點的對稱軸稱作頂點對稱軸，沒有通過圓上任何一點的對稱軸稱作中點對稱軸。若 m 為正整數，則下列性質成立。

1. 若 $n = 2m + 1$，則 G 的對稱軸皆為頂點對稱軸。如圖 3。
2. 若 $n = 2m$，r 為偶數，則 G 的對稱軸皆為頂點對稱軸或皆為中點對稱軸。如圖 4。
3. 若 $n = 2m$，r 為奇數，則 G 的頂點對稱軸與中點對稱軸數目相同，皆為 $\frac{n}{2r}$ 條。如圖 5。

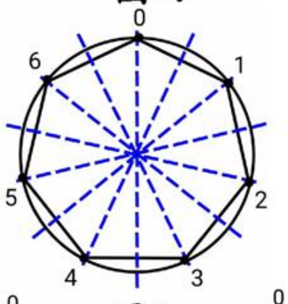


圖3.

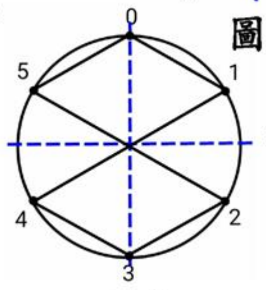


圖4.

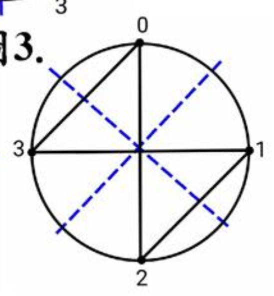


圖5.

二、$g(n)$ 的解題策略

圓上 n 個點共有 $n!$ 種排列表示。

我們發現這些排列表示中包含對稱與不對稱迴圈圖形，且對稱和不對稱的迴圈圖形重複的排列表示數各不相同。於是我們決定從對稱的迴圈圖形出發，將總排列表示數扣除對稱迴圈圖形的排列表示數，得到不對稱迴圈圖形的排列表示數，即可得不對稱的迴圈圖形數。最後，將對稱與不對稱的迴圈圖形相加即為 $g(n)$。

三、迴圈圖形的排列表示

定理 1. 已知圓上 n 個點，若 a 為 n 的因數，計算滿足旋轉 a 個弧，$G_a = G$ 的所有圖形其總相異排列表示如下。

(1) 當 $\frac{n}{a} \neq 2$ 時，共有 $a! \times (\frac{n}{a})^a \times \phi(\frac{n}{a})$ 種相異的排列表示。

(2) 當 $\frac{n}{a} = 2$ 時，共有 $a! \times (\frac{n}{a})^a \times (\phi(\frac{n}{a}) + a)$ 種相異的排列表示。

證明：(1) 當 $\frac{n}{a} \neq 2$ 時，

令排列表示 $\langle E(G) \rangle = \langle m_1, m_2, \ldots\ldots, m_a, (m_1 + xa), \ldots\ldots, (m_a + xa), \ldots\ldots, (m_a + \left(\frac{n}{a} - 1\right)xa) \rangle$。

由引理 8 得 $m_i(mod\ a) \neq m_j(mod\ a)$。因為若 $m_i(mod\ a) = m_j(mod\ a)$，無法形成迴圈圖形。

※ 以 $n = 9$，$a = 3$ 為例。

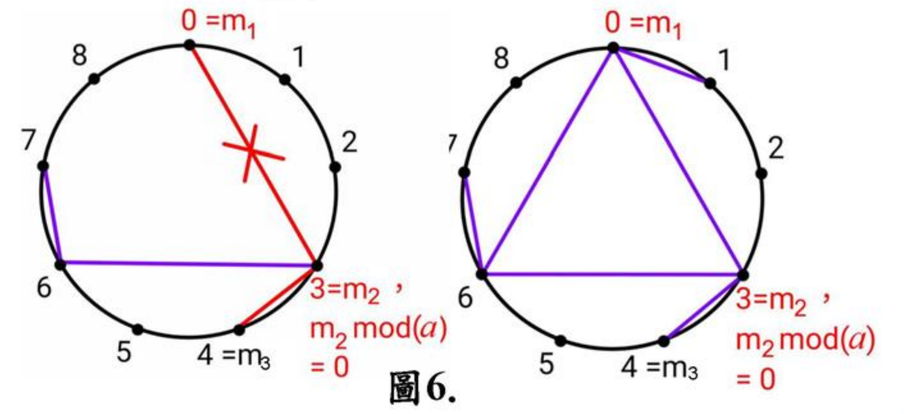


圖6.

由引理 9，x 和 $\frac{n}{a}$ 互質。因為當 $1 \leq x \leq \frac{n}{a}$ 且 x 和 $\frac{n}{a}$ 不互質時，無法形成迴圈圖形。

※ 以 $n = 12$，$a = 3$ 為例，$\phi(\frac{12}{3}) = 2$。

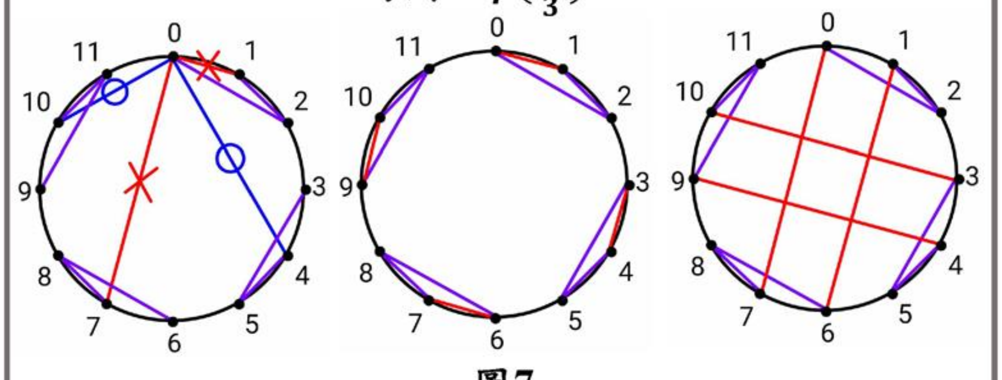


圖7.

(2) 當 $\frac{n}{a}=2$ 時

在引理 8 中，若 $m_j=m_i+a$，會形成一條通過點 m_i 和點 m_j 的直線，而非封閉圖形。

※ 以 $n=6$，$a=3$ 為例。

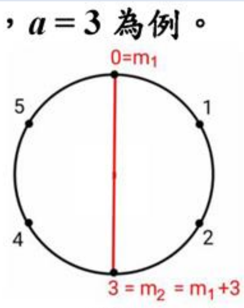


圖8.

由引理10得 $m_k(mod\ a)\neq m_s(mod\ a)$ 因為當 $m_k(mod\ a)=m_s(mod\ a)$時無法形成一筆畫迴圈圖形。

※ 以 $n=6$，$a=3$ 為例。

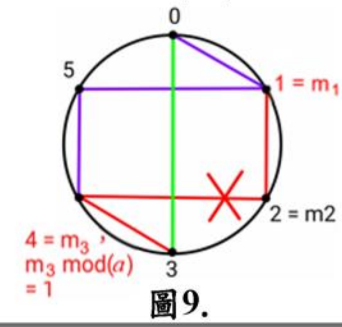
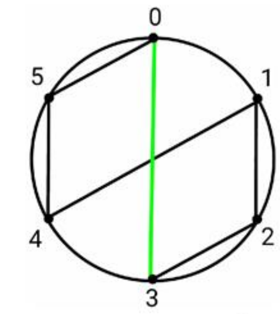


圖9.

例如，當 $\frac{n}{a}=2$ 時，會多出以下情況。

※ 以 $n=6$，$a=3$ 為例。



排列表示：
〈123054〉
〈230541〉
〈305412〉

圖10.

四、a為奇數時的對稱迴圈圖形

定理 2. 已知圓上有 n 個點，若a 是正奇數且 a 為 n 的因數，計算滿足$G_a=G$且對稱的不同構迴圈圖形數為

(1)當 $\frac{n}{a}\neq 2$ 時，共有$(\frac{a-1}{2})!\times(\frac{2n}{a})^{\frac{a-1}{2}}\times\phi(\frac{n}{a})\times\frac{1}{2}$ 個不同構的對稱迴圈圖形。

(2)當 $\frac{n}{a}=2$ 時，共有 $(\frac{a-1}{2})!\times\left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a-1}{2}}\times\left(\phi\left(\frac{n}{a}\right)+1\right)\times\frac{1}{2}$ 個不同構的對稱迴圈圖形。

證明：(1) 當 $\frac{n}{a}\neq 2$ 時

由引理 11，$m_i(mod\ a)=(-m_j)(mod\ a)$。因為若 $m_i(mod\ a)\neq(-m_j)(mod\ a)$，則形成有點重複出現 3 次的邊集。

※ 以 $n=15$，$a=5$ 為例。

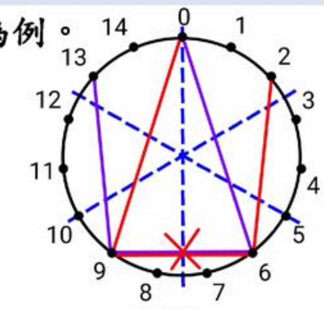


圖11.

五、a為偶數時的對稱迴圈圖形(至少有一條頂點對稱軸)

定理 3. 已知圓上有 n 個點，若a為偶數且 a 為 n 的因數，y 為 a 最大的奇因數且圖形至少有一條頂點對稱軸，計算滿足$G_a=G$且對稱的迴圈圖形數如下。

(1)當 $a=2$ 時，共有 $\frac{1}{2}\phi(n)$ 個不同構的迴圈圖形。

(2)當 $a\neq 2$，$\frac{n}{a}$ 為偶數時，共有 $\left(\frac{a-2}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a-2}{2}}\times 2\phi\left(\frac{n}{a}\right)\times\frac{1}{4}+\left(\frac{y-1}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)}\times\phi\left(\frac{n}{y}\right)\times\frac{1}{4}$ 個不同構的迴圈圖形。

(3)當 $a\neq 2$，$\frac{n}{a}$ 為奇數時，共有 $\left(\frac{a-2}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a-2}{2}}\times\phi\left(\frac{2n}{a}\right)\times\frac{1}{4}+\left(\frac{y-1}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)}\times\phi\left(\frac{n}{y}\right)\times\frac{1}{4}$ 個不同構的迴圈圖形。

證明：令邊集 $E(G)=\{m_1m_2,\dots\dots,m_{a-1}m_a,m_a(m_1+xa),\dots\dots,(m_a+xa)(m_1+2xa),\dots\dots,(m_{a-1}+\left(\frac{n}{a}-1\right)xa)(m_a+\left(\frac{n}{a}-1\right)xa)\}$

(1) 當 $a=2$ 時

最小旋轉重合數 $r\neq 2$ 恆成立。

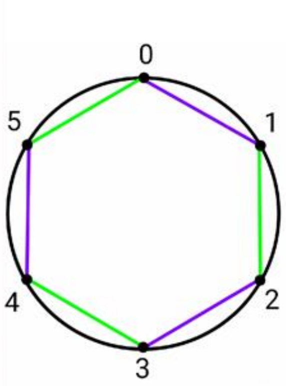


圖12.

(2) 當 $a\neq 2$，$\frac{n}{a}$ 為偶數時

$m_a(\text{mod } a)=\frac{a}{2}$，因為若 $m_i(\text{mod } a)=\frac{a}{2}$ $i\neq a$，會得到一不包含所有 n 個點的封閉圖形。

※ 以 $n=18$，$a=6$ 為例。

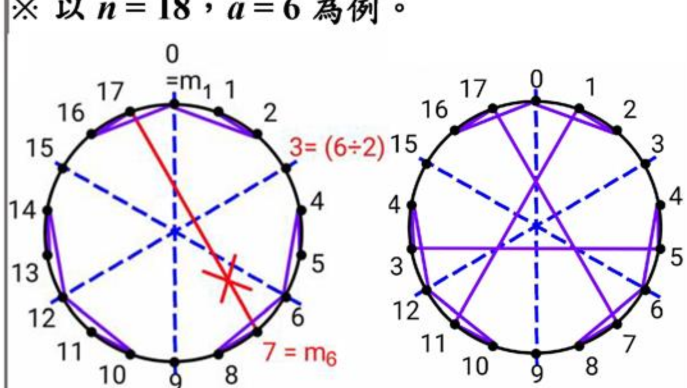


圖13.

設 $m_a=\frac{a}{2}+ka$，$x=\frac{a+2ka}{a}=2k+1$，$1\leq 2k+1\leq\frac{2n}{a}-1$，且 x 和 $\frac{n}{a}$ 互質。則 m_a有 $2\phi\left(\frac{n}{a}\right)$ 種可能。

※ 以 $n=16$，$a=4$ 為例，$2\phi(\frac{16}{4})=4$。

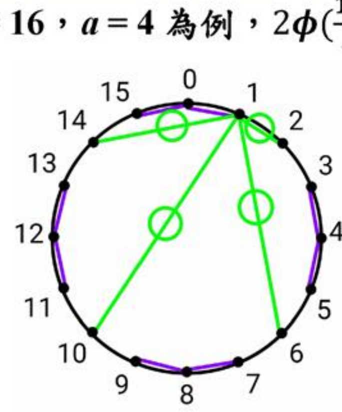


圖14.

(3)當 $a\neq 2$，$\frac{n}{a}$ 為奇數時

m_a有$\phi\left(\frac{2n}{a}\right)$ 種可能。

※ 以 $n=18$，$a=6$ 為例，$\phi(\frac{2\times 18}{6})=2$。

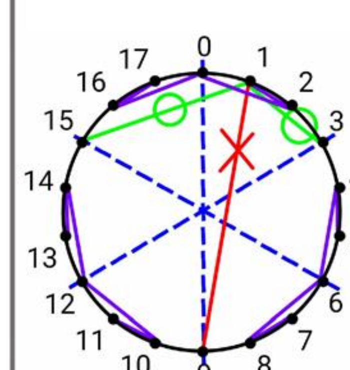


圖15.

六、a為偶數時的對稱迴圈圖形(至少有一條中點對稱軸)

定理 4. 已知圓上有 n 個點，若 a為偶數且 a 為 n 的因數，y 是 a 的最大奇因數，且圖形至少有一條中點對稱軸，計算其迴圈圖形數如下。

(1)當$a<\frac{n}{2}$時，共有 $\left(\frac{a}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a}{2}}\times\phi\left(\frac{n}{a}\right)\times\frac{1}{8}+\left(\frac{y-1}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)}\times\phi\left(\frac{n}{y}\right)\times\frac{1}{4}$ 個不同構的迴圈圖形。

(2)當 $a=\frac{n}{2}$時，共有 $(\frac{a}{2})!\times(\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}}\times\frac{3}{8}+(\frac{y-1}{2})!\times(\frac{2n}{y})^{(\frac{y-1}{2})}\times\phi(\frac{n}{y})\times\frac{1}{4}$ 個不同構的迴圈圖形。

(3) 當 $a=n$，$\frac{a}{2}$ 為奇數時，共有 $\left(\frac{a}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{a}\right)^{\frac{a}{2}}\times\phi\left(\frac{n}{a}\right)\times\frac{n+2}{8n}+\left(\frac{y-1}{2}\right)!\times\left(\frac{2n}{y}\right)^{\left(\frac{y-1}{2}\right)}\times\frac{1}{2}$ 個不同構的迴圈圖形。

(4) 當 $a=n$，$\frac{a}{2}$ 為偶數時，共有 $(\frac{a}{2})!\times(\frac{2n}{a})^{\frac{a}{2}}\times\frac{n+2}{8n}+(\frac{y-1}{2})!\times(\frac{2n}{y})^{(\frac{y-1}{2})}\times\phi(\frac{n}{y})\times\frac{1}{4}$ 個不同構的迴圈圖形。

證明：

(1) 當 $a<\frac{n}{2}$ 時

$m_{\frac{a+2}{2}}(\mathrm{mod}\ a)=(1-m_{\frac{a}{2}})$。因為若 $m_{\frac{a+2}{2}}(\mathrm{mod}\ a)\neq(1-m_{\frac{a}{2}})$，會得到一不包含所有 n 個點的封閉圖形。

※ 以 $n=16$，$a=4$ 為例。

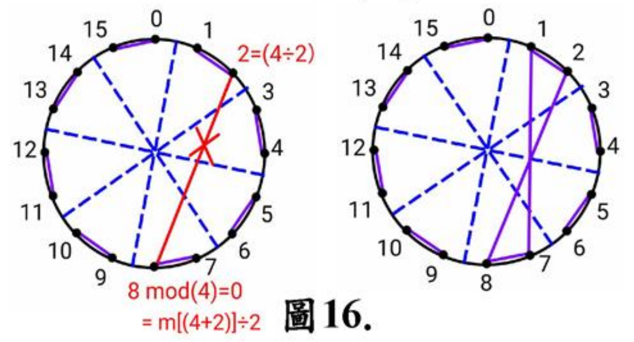


圖16.

(2) 當 $a=\frac{n}{2}$ 時

承 (1)，加上邊集 $E(G)=\{m_1m_2,\ldots\ldots,m_{a-1}m_a,(m_a+a)(m_{a-1}+a),\ldots\ldots,(m_2+a)(m_1+a)\}$ 的圖形。

※ 以 $n=6$，$a=3$為例。

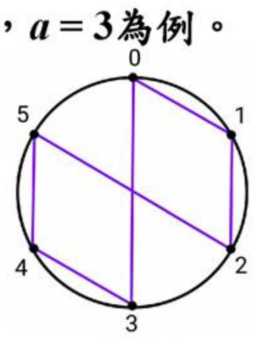


圖17.

(3)(4) 當 $a=n$ 時

承 (1)，加上 $m_{\frac{a+2}{2}}(\mathrm{mod}\ a)\neq(1-m_{\frac{a}{2}})$ 的圖形。

※ 以 $n=a=6$ 和 $n=a=4$ 為例。

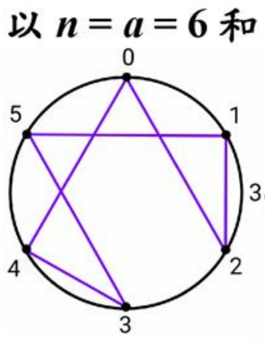


圖18.

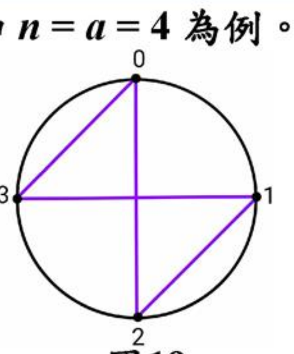


圖19.

七、計算過程演示

（一）求 $g(5)$

	① 排列表示數（由定理 1）	② 對稱的圖形數（由定理 2）
$a=1$	20	2
$a=5$	120	4

➡

	排列表示數			圖形數	
	③ 全部（由①）	④ 對稱（⑥ × $2nr$）	⑤不對稱（③ − ④）	⑥對稱（由②）	⑦不對稱（⑤ ÷ $4nr$）
$r=1$	20	20	0	2	0
$r=5$	100	100	0	2	0

➡ 總迴圈圖形數 $g(5)=2+2+0+0=4$ 個。

（二）求 $g(6)$

	① 排列表示數（由定理 1）	② r 為奇數的對稱的圖形數（由定理 2）	③ a 為偶數，至少有一條頂點對稱軸的對稱圖形數（由定理 3）	④ a 為偶數，至少有一條中點對稱軸的對稱圖形數（由定理 4）	⑤ 對稱圖形數（同 ②或③ + ④ − ②）
$a=1$	12	1	無	無	1
$a=2$	36	1	1	2	2
$a=3$	192	4	無	無	4
$a=6$	720	4	4	10	10

➡

	排列表示數			圖形數	
	⑥ 全部（由①）	⑦ 對稱（⑨ × $2nr$）	⑧不對稱（⑥ − ⑦）	⑨對稱（由⑤）	⑩不對稱（⑧ ÷ $4nr$）
$r=1$	12	12	0	1	0
$r=2$	24	24	0	1	0
$r=3$	180	108	72	3	1
$r=6$	504	360	144	5	1

➡ 總迴圈圖形數 $g(6)=1+1+3+5+0+0+1+1=12$ 個。

伍、結論

令 n 的因數分別為 p_1，p_2，p_3，……，p_i，p_{i+1}，……p_k。$g(n)$ 相當於所有 $r=p_i$ 的不同構迴圈圖形數的和。假設最小旋轉重合數 $r=p_i$ 時，對稱和不對稱的迴圈圖形數如下。

r	不對稱的迴圈圖形數	對稱的迴圈圖形數
p_1	b_1	c_1
p_2	b_2	c_2
⋮	⋮	⋮
$p_k=n$	b_k	c_k

➡ r為 p_i 時的總排列表示數：$4np_i\times b_i+2np_i\times c_i$

r 為 p_i 時的不同構迴圈圖形數：b_i+c_i

故已知正整數 n、以 n 的任意因數為最小旋轉重合數 r 的總排列表示數、對稱迴圈圖形數，即可得到不同構的迴圈圖形數 $g(n)$。

陸、未來展望

希望未來能使用群的概念推廣出更一般的式子，並且能發現其他可以加以推廣的性質。

柒、參考資料和其它

一、楊惠后（2009）。正 n角星的內角和探討。數學傳播。第三十三卷第一期。

二、陳界山編著。高中數學課本第二冊。南一出版社。