中華民國第 63 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

050403

切割方程

學校名稱：新北市立中和高級中學

作者：	指導老師：
高二 李軒 高二 林城宇 高二 林祐德	顏詩穎

關鍵詞：數論、遞迴

切割方程

摘要

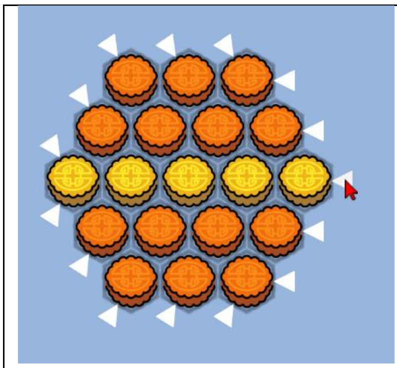
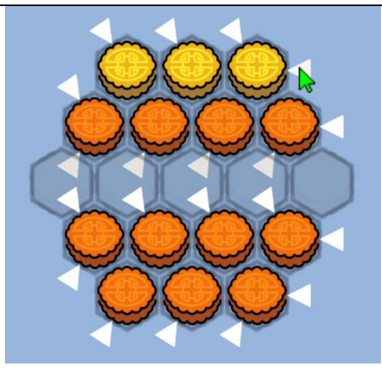
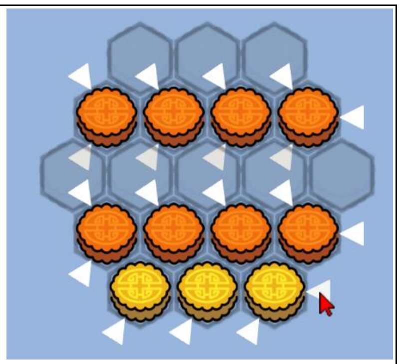
皮納姆的吃餅精靈是我們偶然間發現的遊戲，此遊戲在正六邊形的棋盤上，兩位玩家輪流取一整排相連的棋，取到最後一個棋的人即獲勝。在正六邊形棋盤下，先手玩家的必勝策略是很明顯的。因此本研究之目標為在等角六邊形棋盤上，對於先手玩家獲勝的策略探討。我們在兩位玩家追求獲勝的前提下，以不同的取棋總步數類型（取棋步數必為奇數步、取棋步數必為偶數步、取棋步數為可奇可偶）來分類盤局中常出現的殘局，進而定義不同的 Region Number，並定義 Area Number 來代表盤面上各類殘局數量狀況，結合兩者綜合分析各類殘局數量與取棋步數奇偶性，從而推論出先手玩家掌控取棋步數的奇偶性之策略，找出先手獲勝的方法。

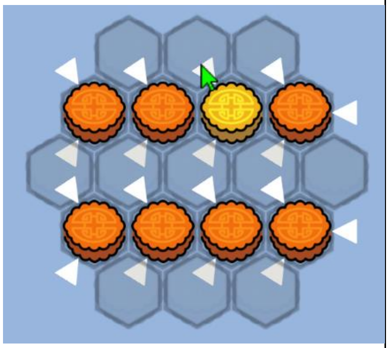
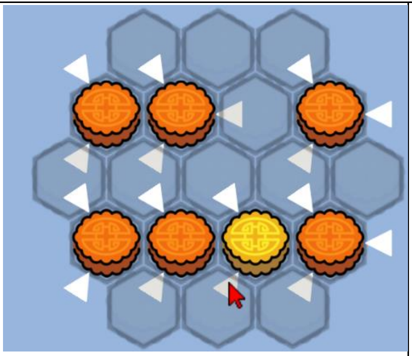
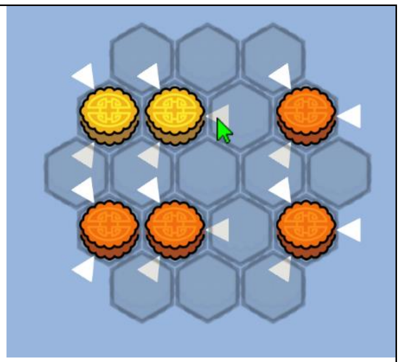
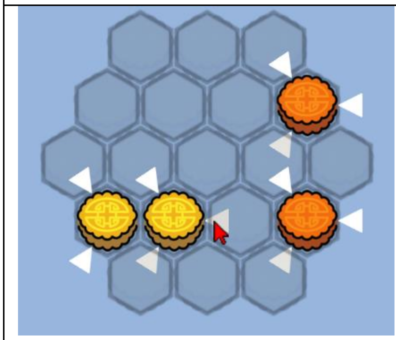
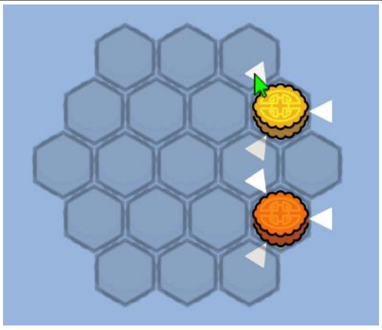
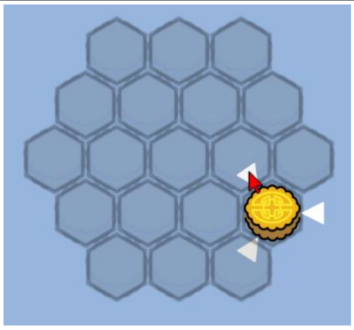
壹、前言

一、研究動機：

皮納姆的吃餅精靈為在正六邊形的盤面上，兩位玩家輪流取一整排相連的棋，取到最後一個棋的人即獲勝。操作遊戲的過程中，我們發現兩位玩家取棋總步數為奇數時，先手必獲勝。進而發現在遊戲進行過程中持續掌控取棋總步數之奇偶性為此遊戲獲勝關鍵。例如在正六邊形棋盤下，先手只需取對角線上的棋，剩下兩個對稱殘局，之後先手只需複製後手在另一個盤面的取法，必可保持取棋總步數為奇數步，即可必勝。

表 1　皮納姆的吃餅精靈先手必勝操作（以初始盤面為邊長為 3 的正六邊形為例）

		
先手取棋 取棋步數累積為 1	後手取棋 取棋步數累積為 2	先手取棋 取棋步數累積為 3

		
後手取棋 取棋步數累積為 4	先手取棋 取棋步數累積為 5	後手取棋 取棋步數累積為 6
		
先手取棋 取棋步數累積為 7	後手取棋 取棋步數累積為 8	先手取棋，先手勝利 取棋步數累積為 9

若調整遊戲初始盤面形狀為任意等角六邊形，取完對角線的棋後不一定會留下兩個對稱殘局，在上述必勝方式不一定存在的情況下，我們想知道此時先手玩家是否還能持續掌控取棋步數的奇偶性，進而保持先手必勝？也想知道哪一些殘局是玩家能掌控取棋步數的奇偶性？哪一些是不能掌控的？棋子數多、形狀較大的殘局取棋步數之奇偶性是否可以透過棋子數少、形狀較小的殘局取棋步數奇偶性來推論？

二、研究目的：

（一） 對殘局進行取棋步數奇偶性分析。

（二） 不相連的殘局數量搭配各殘局取棋步數奇偶性進行先手獲勝策略分析。

（三） 找出對於任意等角六邊形盤局都適用的掌控遊戲步數方法。

三、文獻回顧：

皮納姆的吃餅精靈遊戲設計者黃正憲表示此遊戲的設計靈感是來自於 *Winning Ways*[1]中，原本設定在方形棋盤下進行遊戲，但對稱的遊戲策略讓遊戲的可玩性降低很多，所以另外設計了正六邊形棋盤。張鎮華（1987）對於拈與其各種變形遊戲的安全殘局與不安全殘局做了詳盡的解說。和拈最大的不同是，皮納姆的吃餅精靈遊戲每次取

棋的數量是被取棋的位置與方向給固定，但我們想把類似這種安全殘局與不安全殘局的觀點帶進我們分析皮納姆的吃餅精靈遊戲中。

貳、研究設備及器材

電腦程式，手機，平板，筆電。

參、研究過程或方法

一、研究流程

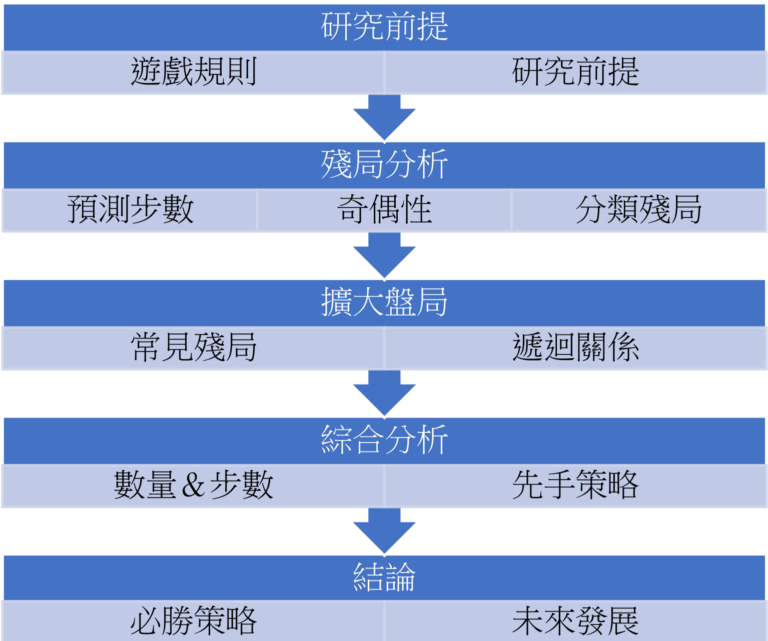
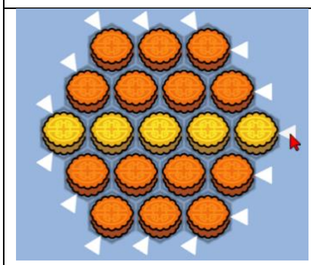
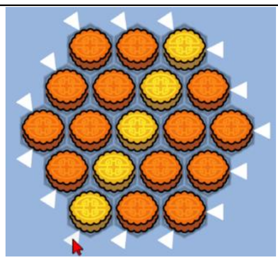
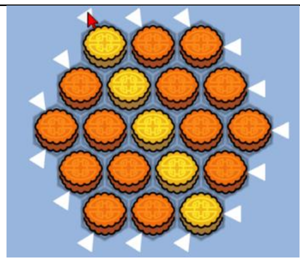


圖 1　研究流程圖

二、遊戲規則與研究前提

（一）兩個遊戲玩家輪流執行取棋，每人每次於盤局上以三種方向擇一取一整排的相鄰棋，如下表所示。

表 2：以三種方向擇一取一整排的相鄰棋

方向一	方向二	方向三
		

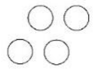
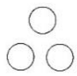
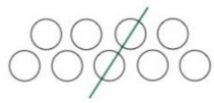
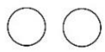
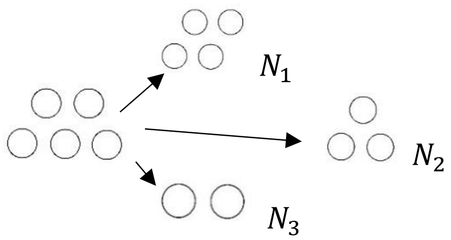
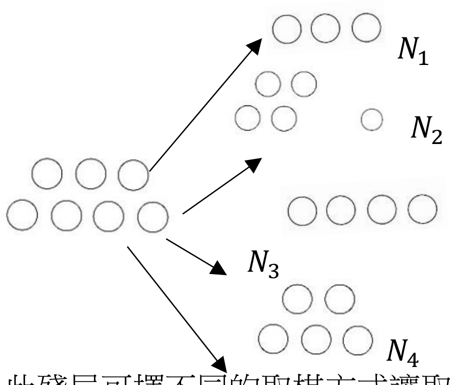
（二）雙方皆執行對自己最有利的取棋方式，不會執行無意義的取棋方式；雙方玩家皆設法讓自己取到最後一個棋，並設法讓對手取不到最後一個棋。

三、殘局分析

（一）同類型取棋步數之殘局集合

遊戲前提成立下，我們可以預測雙方玩家面對殘局將執行的取棋總步數，可分為取棋總步數為奇數、取棋總步數為偶數、取棋總步數可以是奇數或是偶數等，我們依此分類殘局，形成五種不同的取棋步數集合。

表 3：取棋步數集合一覽表

集合	定義	最小殘局	另一個殘局舉例	總步數
N_1	取棋總步數為奇數之殘局所形成的集合	 此殘局取棋總步數為 1	 此殘局取棋總步數為 3	不可控，必為奇數
N_2	取棋總步數為偶數之殘局所形成的集合	 此殘局取棋總步數為 2	 此殘局取棋總步數為 6	不可控，必為偶數
N_3	取棋總步數可為奇數或偶數之殘局所形成的集合；玩家取棋後之殘局可能屬於 N_1 或 N_2	 此殘局可擇不同的取棋方式讓取棋總步數為 1 或 2	 此殘局可擇不同的取棋方式讓取棋總步數為 1 或 2 或 4	可控
N_4	玩家取棋後之殘局可能屬於 N_1、 N_2或 N_3	 此殘局可擇不同的取棋方式讓取棋後之殘局可能屬於 N_1、 N_2或 N_3		可控
N_5	玩家取棋後之殘局可能屬於 N_1、 N_2、 N_3或 N_4	 此殘局可擇不同的取棋方式讓取棋後之殘局可能屬於 N_1、 N_2、 N_3或 N_4		可控

在遊戲前提成立下，玩家面對 N_1 、 N_2 的總取棋步數固定，故稱之為不可控殘局，；而 N_3 、 N_4 、 N_5 為可以選擇步數的，稱為可控殘局。

引理一：一個 N_1 為對執行此殘局之取棋玩家有利。

證明： N_1為奇數步，無論後手如何出招先手必可切到最後一刀。

引理二：面對一個 N_3 、 N_4 、 N_5 為對執行取棋玩家有利。

證明： N_3 、 N_4 、 N_5 皆可切出一刀變為偶數步，即對拿到此圖形之玩家有利。

引理三： N_1 、 N_2 、 N_3 、 N_4 、 N_5 以外之殘局不會出現。

證明：殘局步數類型只會到 N_5 ，因若有殘局能切出 N_5 ，代表先手留給後手一個可選擇要如何切 N_5 的機會，可知先手不會將此類殘局切成 N_5 。

（二）若多個殘局組合成盤面，但彼此不相連，我們用符號 + 連結各「不相鄰」殘局來表示，若有 n 個相同的殘局圖形，但彼此不相連，我們已可以 $n*$殘局類型來表示，也可持續推論多個殘局組合成後的盤面殘局之取棋步數類型，如下圖。

圖 2　$N_1 + N_1 = 2\,N_1 \in N_2$

（三）為方便討論盤局的變化，我們建立盤局遞迴關係式

$$\text{原殘局} = 1 + \text{剩下之殘局類型} + \text{剩下之殘局類型} + \cdots$$

其中 1 代表執行玩家對原殘局進行了取一整排相連的棋的動作（切第一刀）。若執行玩家對原殘局切第一刀後，剩下 n 個不相連但相同殘局類型的圖形，我們以

$$\text{原殘局} = 1 + n * \text{剩下之殘局類型}$$

來表示，也可持續推論多個殘局組合成後的盤面殘局之取棋步數類型，如下圖之殘局。此殘局 $= 1 + N_1 + N_1 = 1 + 2\,N_1 \in N_1$，也可此殘局 $= 1 \in N_1$，且依據遊戲前提此殘局 $\neq 1 + N_3$，故此殘局$\in N_1$。

圖 3　此殘局$\in N_1$

引理四：當原殘局 $= 1 +$ 剩下之殘局類型 $+$ 剩下之殘局類型時，不可切為一個可控及一個不可控之圖形。

證明：若原圖形切成一個可控和一個不可控，則對手必可選擇可控圖形要走奇數或偶數。

引理五：當原殘局 $=1+2N_3$或$=1+2N_4$或 $=1+2N_5$時，此圖形屬於可控之圖形。

證明：若原圖形可切成兩個相同類型的可控區（即兩個 N_3或兩個 N_4或兩個 N_5），則先手切完第一刀後必可切成和對手相同的圖形類型。

引理六：當原殘局 $=1+2$個可控圖形，此兩個可控圖形必為同一類。

證明：若兩可控圖形不同類，則對手可把兩可控圖形切為同類的可控圖形，可知先手不會切出兩不同類型之可控圖形。

引理七：若原殘局為可控之圖形且它$=1+$可控之圖形類型成立，則原殘局屬於N_3或N_4或N_5。

證明：若原圖形$=1+N_4$，則原圖形$\in N_3$；若原圖形$=1+N_3$，則原圖形$\in N_4$；若原圖形$=1+N_3$或 $1+N_4$，則原圖形$\in N_5$。

四、擴大盤局

為了擴大盤局時便於分析，我們進行以下步驟：

（一）對等角六邊形形狀進行分析

引理八：設等角六邊形的六邊長依序為a,b,c,d,e,f，則$a+b=d+e$、$b+c=e+f$、$f+a=c+d$。

證明：如圖 4 所示，因等角六邊形的三組對邊互相平行，且以 a 、 d 為底時高為 $\frac{\sqrt{3}}{2}(b+c)$ 和$\frac{\sqrt{3}}{2}(e+f)$且均相等，而得 $b+c=e+f$；依此類推， $a+b=d+e$、$f+a=c+d$。

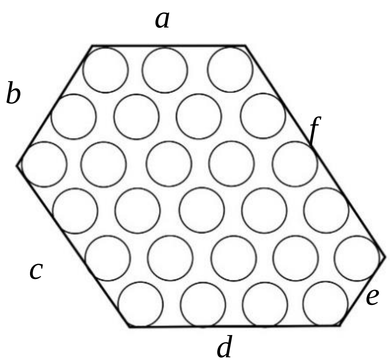


圖 4

（二）對殘局圖形形狀進行分類

因等角六邊形有六個邊，遊戲取棋可視為對此等角六邊形進行切割，可得六邊形、五邊形、四邊形、三角形，如下圖。

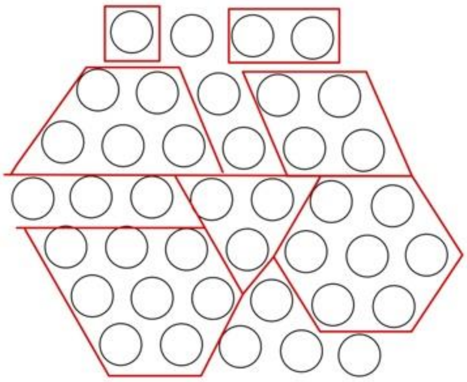
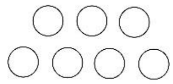
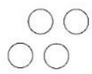
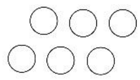
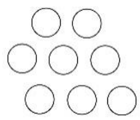
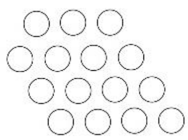


圖 5　六邊形、五邊形、四邊形、三角形殘局之舉例

其中除了六邊形型的殘局就是我們研究目的要探討的盤局，我們將其餘所有殘局形狀更精簡地分類如下表。

表 4：常出現的殘局進行圖形形狀分類，旋轉或鏡射後之圖形皆與原圖形同名稱

名稱	說明	最小圖形	另一個舉例
$A_{(x,y)}$	一共 x 橫排棋，最一橫排有 y 個棋，每往下一橫排就多一個棋的殘局，包含單一棋、單排棋、三角形與梯形形盤局。	 此殘局為$A_{(1,1)}$	 此殘局為$A_{(2,3)}$
$B_{(x,y)}$ 其中 $x>1, y>1$	一共 x 橫排棋，每一橫排有 y 個棋的平行四邊形殘局。	 此殘局為$B_{(2,2)}$	 此殘局為 $B_{(2,3)}$
$C_{(x,y,z)}$ 其中 $x>1, y>1, z>1$	將$A_{(x,y)}$的第x橫排與$B_{(z,x+y-1)}$的第一橫排疊合後所形成的五邊形殘局	 此殘局為 $C_{(2,2,2)}$	 此殘局為 $C_{(2,3,3)}$

（三）若多個形狀組合成盤面，但彼此不相連，我們用符號+連結各「不相鄰」圖形來表示，如下。

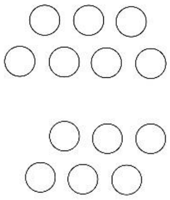


圖 6　$A_{(2,3)}+B_{(2,3)}$

（四）適用於先前定義的盤局遞迴關係式，如下圖可知$A_{(1,3)} = 1+A_{(1,1)} + A_{(1,1)} = 1+2A_{(1,1)}$。

圖 7　$A_{(1,3)} = 1+A_{(1,1)} + A_{(1,1)} = 1+2A_{(1,1)}$

（五）利用盤局遞迴關係式，對各種殘局進行分類：

我們依據引理三至引理七對取棋總步數尚未分類之各殘局進行分類，透過引理五，將圖形分為「不可分為兩相同類型之圖形」或「可切成兩相同類型之圖形」，「不可分為兩相同類型之圖形」即為 N_1或 N_2，「可切成兩相同類型之圖形」再透過引理六確認此圖形為 N_3、 N_4或 N_5，分類流程如下圖：

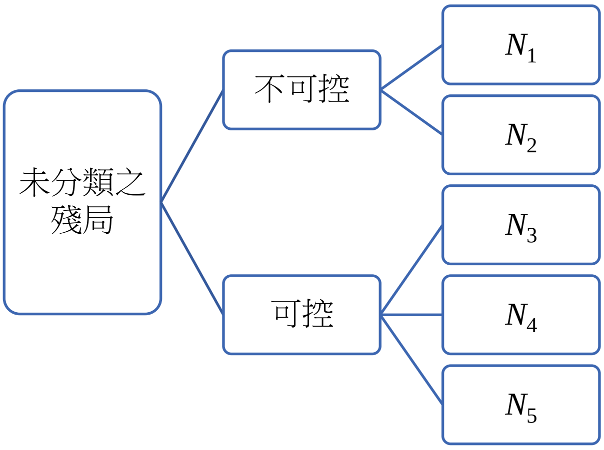


圖 8　分類流程

五、綜合分析：

（一）Area Number(An)：

當盤局越大時，遊戲進行將出現多個不相鄰之盤局，且可能有多種總步數類型，為了能夠表示整個殘局狀況，我們使用 Area Number $= |N_1| + |N_2| + |N_3| + |N_4| + |N_5|$代表殘局個數，$|N_k|$表示盤面上屬於 N_k 的殘局個數。

（二）Region Number(Rn)：

為了能夠綜合分析整個盤局的殘局個數與取棋步數，我們想用不同的數字代表不同取棋步數特性的殘局，並稱此數字為 Region Number(Rn)，對於屬於 N_1 的殘局取棋步數為奇數且會影響遊戲勝負，我們以奇數 1 代表 N_1 的 Region Number；對於屬於 N_2 的殘局取棋步數為偶數且不會影響勝負，我們以偶數 2 代表 N_2 的 Region Number；對於屬於 N_3 的殘局取棋步數可為奇數或偶數，但 N_3 會影響遊戲勝負，故我們用奇數 3 代表 N_3 的Region Number$r$；對於屬於 N_4 的殘局，可切一刀完變成 N_3 ，故我們用 1 + 3 = 4 代表 N_4 的 Region Number；屬於 N_5 的殘局，可切一刀完變成 N_4 ，故我們用 1 + 4 = 5 代表 N_5 的 Region Number。

我們定義N_1、N_2、N_3、N_4、N_5的 Region Number 為 1、2、3、4、5 後，而盤局上所有的 Region Number 總和（即盤面上屬於 N_k 的殘局個數乘上 N_k 的 Region Number）即為此盤局的 Region Number；在不知道盤局狀況時，我們定義 Region Function $= 1|N_1| + 2|N_2| + 3|N_3| + 4|N_4| + 5|N_5|$ 代表此盤局的 Region Number，自變數為各類殘局的數量。

肆、研究結果

一、 圖形 $A_{(1,y)}$，$y \in \mathbb{N}$之取棋步數奇偶性分析：

(1) y=1：$A_{(1,1)} \in N_1$。

圖 9 $A_{(1,1)}$

(2) y=2：$A_{(1,2)}=1\in N_1$或$A_{(1,2)}=1+A_{(1,1)}$，因$A_{(1,1)}\in N_1$，$A_{(1,2)}\in N_2$。故$A_{(1,2)}\in N_3$。

圖 10　$A_{(1,2)}$

(3) y=3：因$A_{(1,2)}\in N_3$，$A_{(1,3)}\neq 1+A_{(1,2)}$，$A_{(1,3)}=1+A_{(1,1)}+A_{(1,1)}=1+2A_{(1,1)}$，因$A_{(1,1)}\in N_1$，故$A_{(1,3)}\in N_1$。

圖 11　$A_{(1,3)}$

(4) y=4：$A_{(1,4)}=1\in N_1$或$A_{(1,4)}=1+A_{(1,3)}$，因$A_{(1,3)}\in N_1$，故$A_{(1,4)}\in N_2$，故$A_{(1,4)}\in N_3$。

圖 12　$A_{(1,4)}$

(5) y=5：$A_{(1,5)}=1+2A_{(1,2)}$，因$A_{(1,2)}\in N_3$，根據引理四，屬可控圖形。又$A_{(1,5)}=1+A_{(1,4)}$，因$A_{(1,4)}\in N_3$；根據引理七，即$A_{(1,5)}\in N_4$。

圖 13　$A_{(1,5)}$

(6) y=6：$\mathrm{A}_{(1,6)}$因無法切出相同類型之圖形，故需切掉一整排，屬N_1。

圖 14　$A_{(1,6)}$

(7) y=7：$A_{(1,7)}$切第三格可得1+$A_{(1,2)}$+$A_{(1,4)}\in N_3$；根據引理七，即$A_{(1,7)}\in N_3$

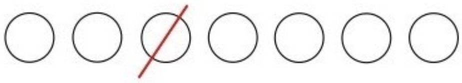


圖 15　$A_{(1,7)}$

(8)　y=8： $A_{(1,8)}$因無法切出兩個相同類型之圖形，故需切掉一整排，屬 N_1。

圖 16　$A_{(1,8)}$

(9)　y=9： $A_{(1,9)}$切第五個可得1+$A_{(1,4)}$+ $A_{(1,4)}$；根據引理七，即$A_{(1,9)} \in N_3$。

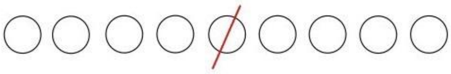


圖 17　$A_{(1,9)}$

(10) y=10：$A_{(1,10)}$切第三個可得1+$A_{(1,2)}$+ $A_{(1,7)}$；根據引理七，即$A_{(1,10)} \in N_4$。

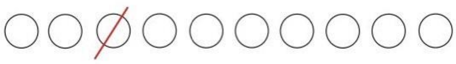


圖 18　$A_{(1,10)}$

(11) y=11：$A_{(1,11)}$切第六個可得1+$A_{(1,5)}$+ $A_{(1,5)}$；根據引理七，即$A_{(1,11)} \in N_3$。

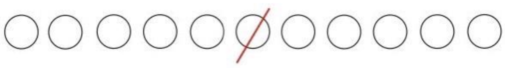


圖 19　$A_{(1,11)}$

(12) y=12：$A_{(1,12)}$切第三個可得1+$A_{(1,2)}$+ $A_{(1,9)}$；根據引理七，即$A_{(1,12)} \in N_3$。

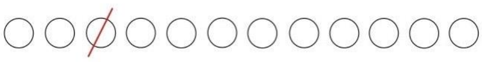


圖 20　$A_{(1,12)}$

(13) y=13：$A_{(1,13)} = 1 + 2\mathrm{A}_{(1,6)}$或$A_{(1,13)} = 1$，故$A_{(1,13)} \in N_1$。

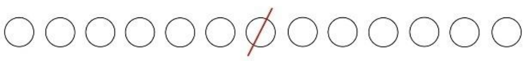


圖 21　$A_{(1,13)}$

(14) y=14：$A_{(1,14)}$切第三個可得1+$A_{(1,2)}$+ $A_{(1,11)}$；根據引理七，即$A_{(1,14)} \in N_3$。

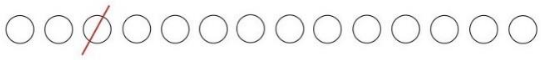


圖 22　$A_{(1,14)}$

(15) y=15：$A_{(1,15)}$切第八個可得1+$A_{(1,7)}$+ $A_{(1,7)}$；根據引理七，即$A_{(1,15)} \in N_4$。

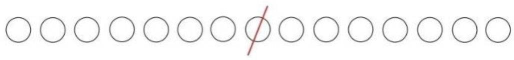


圖 23　$A_{(1,15)}$

(16) y=16：$A_{(1,16)}$切第六個得1+$A_{(1,5)}$+ $A_{(1,10)}$；根據引理七，即$A_{(1,16)} \in N_3$。

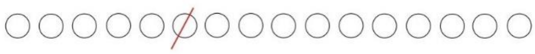


圖 24　$A_{(1,16)}$

(17) y=17：$A_{(1,17)}$切第三個得1+$A_{(1,2)}$+ $A_{(1,14)}$；根據引理七，即$A_{(1,17)} \in N_4$。

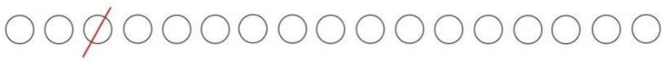


圖 25　$A_{(1,17)}$

(18) y=18：$A_{(1,18)}$切第六個得1+$A_{(1,5)}$+ $A_{(1,12)}$；根據引理七，即$A_{(1,18)} \in N_3$。

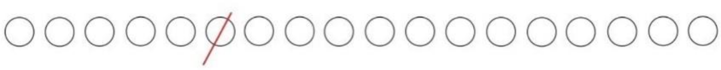


圖 26　$A_{(1,18)}$

(19) y=19：$A_{(1,19)}$切第三個得1+$A_{(1,2)}$+ $A_{(1,16)}$；根據引理七，即$A_{(1,19)} \in N_4$。

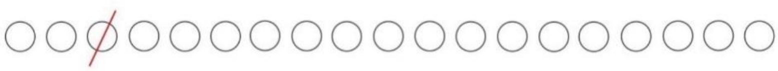


圖 27　$A_{(1,19)}$

(20) y=20：$A_{(1,20)}$因無法切出兩個相同可控之圖形，故只能為奇數步 N_1。

圖 28　$A_{(1,20)}$

(21) y=21：$A_{(1,21)}$切第三個得1+$A_{(1,2)}$+ $A_{(1,18)} \in N_3$；根據引理七，即$A_{(1,21)} \in N_3$。

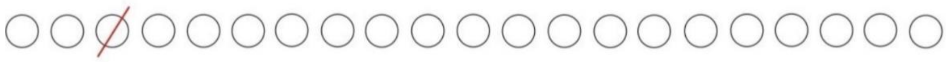


圖 29　$A_{(1,21)}$

(22) y=22：$A_{(1,22)}$切第八個得1+$A_{(1,7)}$+ $A_{(1,14)}$；根據引理七，即$A_{(1,22)} \in N_4$。

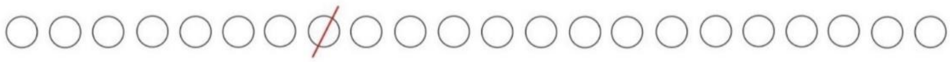


圖 30　$A_{(1,22)}$

(23) y=23：$A_{(1,23)}$切第六個得1+$A_{(1,5)}$+ $A_{(1,17)} \in N_3$；根據引理七，即$A_{(1,23)} \in N_3$。

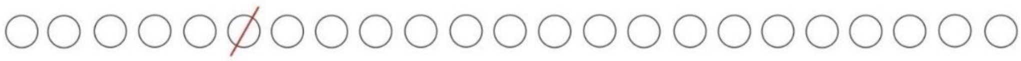


圖 31　$A_{(1,23)}$

(24) y=24：$A_{(1,24)}$切第三個得1+$A_{(1,2)}$+ $A_{(1,21)} \in N_4$；根據引理七，即$A_{(1,24)} \in N_4$。

圖 32　$A_{(1,24)}$

(25) y=25：$A_{(1,25)}$切第六個得1+$A_{(1,5)}$+ $A_{(1,19)} \in N_3$；根據引理七，即$A_{(1,25)} \in N_3$。

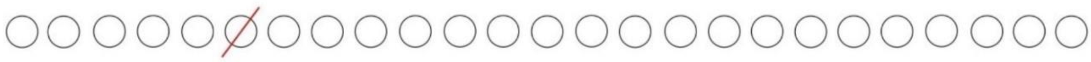


圖 33　$A_{(1,25)}$

(26) y=26：$A_{(1,26)}$切第三個得1+$A_{(1,2)}$+ $A_{(1,23)} \in N_4$；根據引理七，即$A_{(1,26)} \in N_4$。

圖 34　$A_{(1,26)}$

(27) y=27：$A_{(1,27)} = 1 + 2\text{A}_{(1,13)}$或$A_{(1,27)} = 1$，故$A_{(1,13)} \in N_1$。

圖 35　$A_{(1,27)}$

二、圖形 $A_{(2,y)}$和 $B_{(2,y)}$，$\alpha \in \mathbb{N}$，$\beta \in \mathbb{N}$ 之取棋步數奇偶性分析：

1. y=1：$B_{(2,1)}$為定義的 N_3。

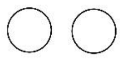


圖 36　$B_{(2,1)}$

y=1：$A_{(2,1)}$為定義的 N_2。

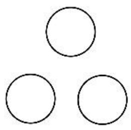


圖 37　$A_{(2,1)}$

2. y=2：$B_{(2,2)}$切掉一格變成$a_{(2,1)}$，得$1 +\ N_2 \in\ N_1$。

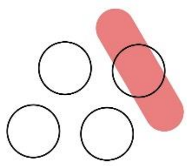


圖 38　$B_{(2,2)}$

3. y=2：$A_{(2,2)}$

   1. 情況一：切紅筆為 $B_{(2,2)}$，得$1 +\ N_2 \in\ N_1$。根據引理五此圖形屬可控。

   2. 情況二：切紅色螢光筆 $A_{(2,1)}$，得$1 +\ N_1 \in\ N_2$。

N_1和 N_2皆有可能，且可切一排為 N_3；根據引理七，即$A_{(2,2)} \in N_3$。

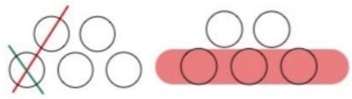


圖 39　$A_{(2,2)}$

4. y=3：$B_{(2,3)}$

切掉中間兩格得$1+\ N_3+\ N_3$，根據引理七，即$B_{(2,3)} \in N_3$。

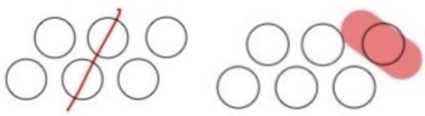


圖 40　$B_{(2,3)}$

5. y=3：$A_{(2,3)}$

(1) 情況一：切掉紅色筆得$1+N_1 \in N_2$。

(2) 情況二：切掉綠色筆得$1+N_1+N_1 \in N_1$。

(3) 情況三：切掉紅色螢光筆得 $1+N_3$。

(4) 情況四：切掉黃色螢光筆得 $1+N_4$。

根據引理七$A_{(2,3)} \in N_5$。

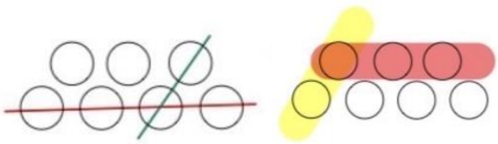


圖 41　$A_{(2,3)}$

6. y=4：$B_{(2,4)}$ 切紅色筆劃$=1+N_1+N_1$，$B_{(2,4)} \in N_1$。

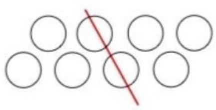


圖 42　$B_{(2,4)}$

7. y=4：$A_{(2,4)}$因無法切出相同類型之圖形，故需切第一排第三個跟第二排第三個=

$1+N_1+N_2 \in N_2$。

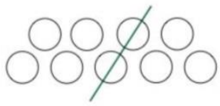


圖 43 $A_{(2,5)}$

8. y=5：$B_{(2,5)}$

情況一：切紅筆，得 1+$N_3+N_3 \in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切黃色螢光筆 1+$A_{(1,5)}$；根據引理七，即$B_{(2,5)} \in N_3$。

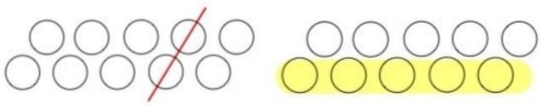


圖 44 $B_{(2,5)}$

9. y=5：$A_{(2,5)}$

情況一：切紅筆得$A_{(2,4)} \in N_2$，切綠筆得$A_{(1,6)} \in N_1$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切第二排，得 1+$A_{(1,5)}$；根據引理七，即$A_{(2,5)} \in N_3$。

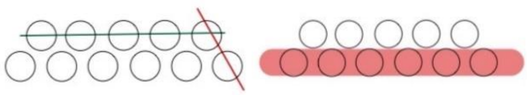


圖 45 $A_{(2,5)}$

10. y=6：$B_{(2,6)}$

情況一：切紅筆，得 1+$N_4+N_4 \in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切紅色螢光筆 1+1+$A_{(2,4)}$；根據引理七，即$A_{(2,6)} \in N_3$。

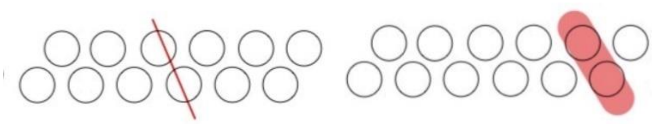


圖 46 $B_{(2,6)}$

11. y=6：$A_{(2,6)}$因無法切出相同類型之圖形，故需切最下面那排得 1+$N_1 \in N_2$。

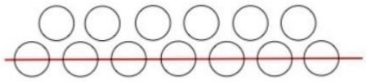


圖 47　$A_{(2,6)}$

12. y=7：$B_{(2,7)}$

情況一：切紅筆，得 1+$N_3 + N_3 \in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切紅色螢光筆 1+$A_{(1,7)} \in N_3$或黃色螢光筆 1+$B_{(2,6)} \in N_4$。

根據引理七，即$B_{(2,7)} \in N_4$。

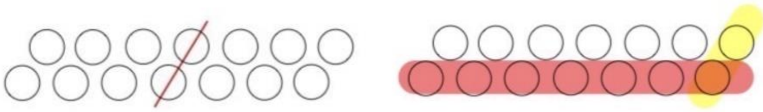


圖 48　$B_{(2,7)}$

13. y=7：$A_{(2,7)}$

情況一：切紅筆得$A_{(2,5)} + 1 + N_3 \in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切第二排，得 1+$A_{(1,7)}$；根據引理七，即$A_{(2,7)} \in N_4$。

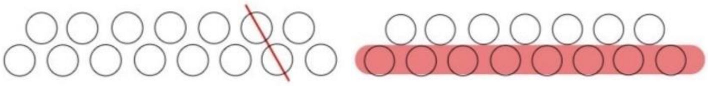


圖 49　$A_{(2,7)}$

14. y=8：$B_{(2,8)}$

情況一：切紅筆，得 1+$N_5 + N_5 \in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切紅色螢光筆 1+$A_{(2,7)}$；根據引理七，即$B_{(2,8)} \in N_3$。

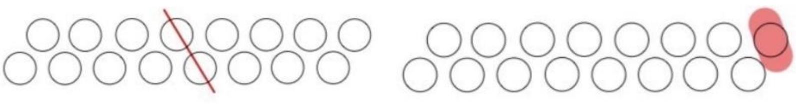


圖 50　$A_{(2,8)}$

15. y=8：$A_{(2,8)}$切最下面那排得N_2（因此圖形無法切出兩個相同類型之圖形）。

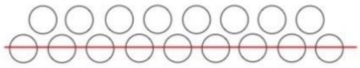


圖 51　$A_{(2,8)}$

16. y=9：$B_{(2,9)}$

情況一：切紅筆，得 1+$N_3 + N_3 \in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切紅色螢光筆 1+$A_{(1,9)}$；根據引理七，即$B_{(2,9)} \in N_4$。

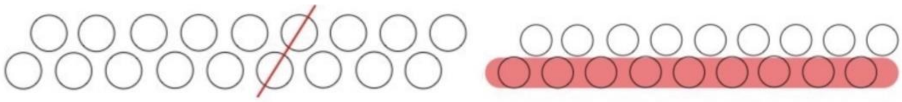


圖 52　$B_{(2,9)}$

17. y=9：$A_{(2,9)}$

情況一：切紅筆得$A_{(2,5)} + 1 + N_3 \in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切紅色螢光筆，得 1+$A_{(1,9)} \in N_4$，切黃色螢光筆，得 1+$A_{(1,10)} \in N_5$。

根據引理七，即$A_{(2,9)} \in N_5$。

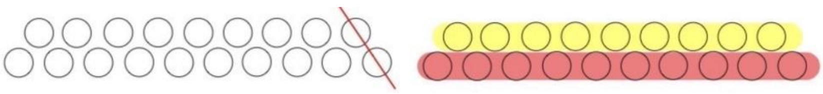


圖 53　$A_{(2,9)}$

18. y=10：$B_{(2,10)}$

情況一：切紅筆，得 1+$N_3 + N_3 \in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切紅色螢光筆 1+$B_{(2,9)}$；根據引理七，即$B_{(2,10)} \in N_3$。

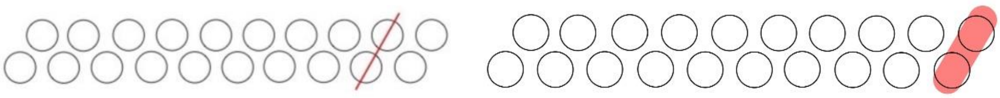


圖 54　$B_{(2,10)}$

19. y=10：$A_{(2,10)}$因無法切出相同類型之圖形，故需切最下面那排，得N_2。

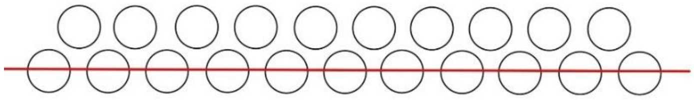


圖 55　$A_{(2,10)}$

20. y=11：$B_{(2,11)}$

情況一：切紅筆，得 1+$N_3+N_3\in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切紅色螢光筆 1+$B_{(2,10)}$；根據引理七，即$B_{(2,11)}\in N_4$。

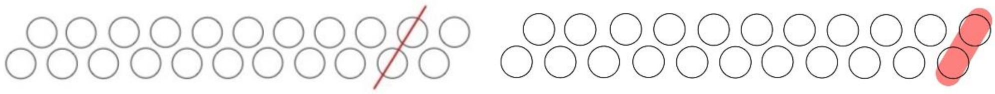


圖 56　$B_{(2,11)}$

21. y=11：$A_{(2,11)}$

情況一：切紅筆得$1+N_5+N_5\in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切紅色螢光筆得$A_{(1,11)}\in N_3$或切黃色螢光筆得$A_{(1,12)}\in N_4$；根據引理七，即$A_{(2,11)}\in N_5$。

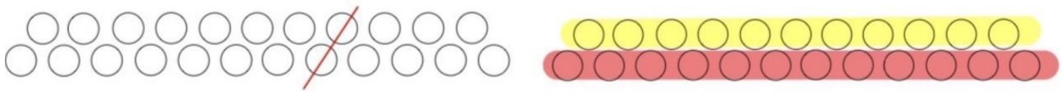


圖 57　$A_{(2,11)}$

22. y=12：$B_{(2,12)}$

情況一：切紅筆，得 1+$N_3+N_3\in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切紅色螢光筆 1+$B_{(2,11)}$；根據引理七，即$B_{(2,12)}\in N_3$。

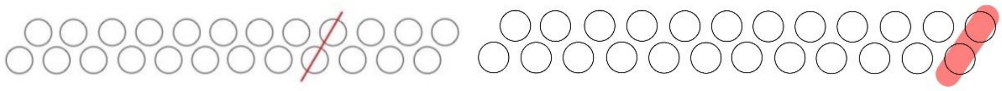


圖 58　$B_{(2,12)}$

23. y=12：$A_{(2,12)}$

情況一：切紅筆得$1 + N_4 + N_4 \in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切紅色螢光筆得$A_{(1,12)} \in N_4$或切黃色螢光筆得$B_{(2,12)} \in N_3$；根據引理七，

即$A_{(2,12)} \in N_5$。

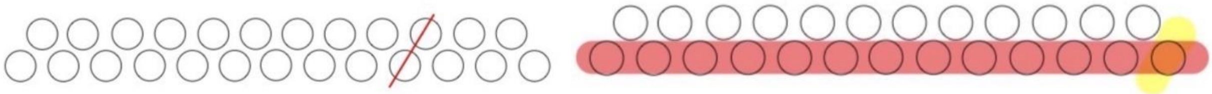


圖 59　$A_{(2,12)}$

1. y=13：$B_{(2,13)}$

情況一：切紅筆，得 1+$N_3 + N_3 \in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切紅色螢光筆 1+$B_{(2,12)}$；根據引理七，即$B_{(2,13)} \in N_4$。

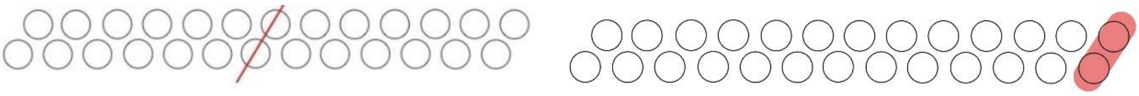


圖 60　$B_{(2,13)}$

2. y=13：$A_{(2,13)}$因無法切出兩個相同類型之圖形，故需切最下面那排得N_2。

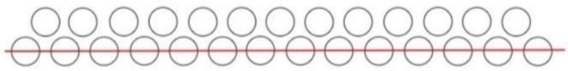


圖 61　$A_{(2,13)}$

3. y=14：$B_{(2,14)}$

情況一：切紅筆，得 1+$N_3 + N_3 \in N_3$；根據引理五此圖形屬可控；

情況二：切紅色螢光筆得 1+$A_{(1,14)} \in N_4$或切黃色螢光筆得 1+$B_{(2,14)} \in N_4$；

根據引理七，即$B_{(2,14)} \in N_5$。

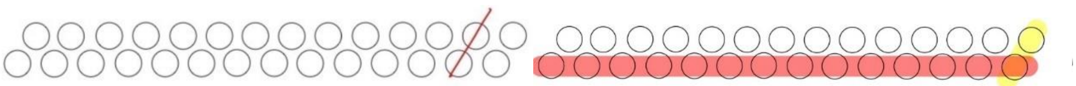


圖 62　$B_{(2,14)}$

4. y=14：$A_{(2,14)}$

情況一：切紅筆得$1+N_3+N_3 \in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切紅色螢光筆得$A_{(1,14)} \in N_3$或切黃色螢光筆得$A_{(1,15)} \in N_4$。

；根據引理七，即$A_{(2,14)} \in N_5$。

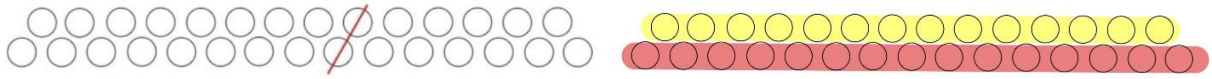


圖 63　$A_{(2,14)}$

1. y=15：$B_{(2,15)}$

情況一：切紅筆，得 1+$N_3+N_3 \in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切紅色螢光筆得 1+$A_{(1,15)}$；根據引理七，即$B_{(2,15)} \in N_3$。

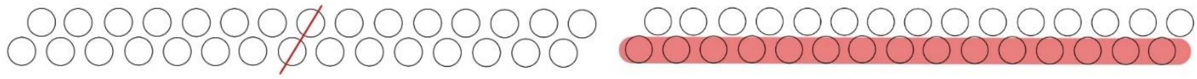


圖 64　$B_{(2,15)}$

2. y=15：$A_{(2,15)}$因無法切出相同類型之圖形，故需切最下面那排得N_2。

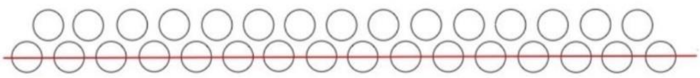


圖 65　$A_{(2,15)}$

3. y=16：$B_{(2,16)}$

情況一：切紅筆，得 1+$N_3+N_3 \in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切紅色螢光筆得 1+$B_{(2,15)}$；根據引理七，即$B_{(2,16)} \in N_4$。

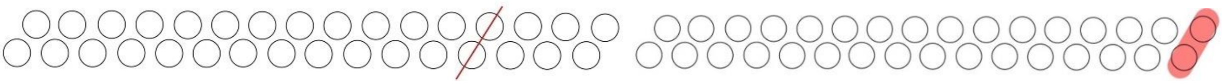


圖 66　$B_{(2,16)}$

4. y=16：$A_{(2,16)}$

情況一：切紅筆得$1+N_4+N_4 \in N_3$；根據引理五此圖形屬可控。

情況二：切紅色螢光筆得$A_{(1,16)} \in N_3$或切黃色螢光筆得$A_{(1,17)} \in N_4$。

；根據引理七，即$A_{(2,16)} \in N_5$。

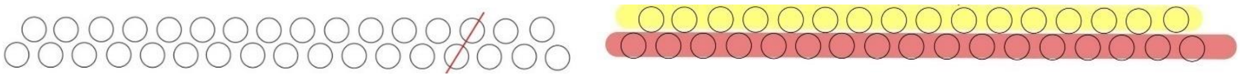


圖 67　$A_{(2,16)}$

伍、討論

一、由上述研究結果（一）可知$A_{(1,\alpha)}$之取棋步數奇偶性在$A_{(1,21)}$～$A_{(1,34)}$時會有七個一循環的規律：N_3、N_4、N_3、N_4、N_3、N_4、N_1。我們想要證明在$\alpha \geq 10$，$A_{(1,\alpha)}$會有有七個一循環的規律，證明如下：

表 5：$A_{(1,\alpha)}$之論證

已知	推論下一項	結論
$A_{(1,7y)} \in N_3$	$A_{(1,7y+7)} = 1 + A_{(1,2)} + A_{(1,7y+4)} \in 1 + N_3 + N_3 \in N_3$	成立
$A_{(1,7y+1)} \in N_4$	$A_{(1,7y+8)} = 1 + A_{(1,7)} + A_{(1,7y)} \in 1 + N_3 + N_3 \in N_4$	成立
$A_{(1,7y+2)} \in N_3$	$A_{(1,7y+9)} = 1 + A_{(1,5)} + A_{(1,7y+3)} \in 1 + N_4 + N_4 \in N_3$	成立
$A_{(1,7y+3)} \in N_4$	$A_{(1,7y+10)} = 1 + A_{(1,2)} + A_{(1,7y+7)} \in 1 + N_3 + N_3 \in N_4$	成立
$A_{(1,7y+4)} \in N_3$	$A_{(1,7y+11)} = 1 + A_{(1,5)} + A_{(1,7y+5)} \in 1 + N_4 + N_4 \in N_3$	成立
$A_{(1,7y+5)} \in N_4$	$A_{(1,7y+12)} = 1 + A_{(1,2)} + A_{(1,7y+9)} \in 1 + N_3 + N_3 \in N_4$	成立
$A_{(1,7x+6)} \in N_1$	$A_{(1,7y+13)}$較複雜，證明如下： 因$A_{(1,7y+6)} \in N_1$，可知$A_{(1,7y+6)}$不可切為兩個 N_3或兩個 N_4，若我們把 7*y*+*5* 分成 *a* 和 *b*，可知$A_{(1,a)}$和$A_{(1,b)}$不同時為 N_3或 N_4。 在$A_{(1,7x+13)}$中，我們可把$7y + 12$分成 *a* 和 *b*+*7*，又因$A_{(1,x)}$在 *y*≥*10* 時成立（7 個一組），可知 $b \geq 10$時，$A_{(1,b)}$與$A_{(1,b+7)}$屬同一類型，可得$A_{(1,a)}$和$A_{(1,b+7)}$也不同時為 N_3或 N_4。反之成立。	成立

由圖表證明結果可得$A_{(1,y)}$之遞迴關係式：

1. $A_{(1,y)} = 1 + A_{(1,2)} + A_{(1,y-3)} \in N_3 A_{(1,y-3)} \in N_3$，*y*≡0 (mod 7)，

2. $A_{(1,y)} = 1 + A_{(1,7)} + A_{(1,y-8)} \in N_4$，*y*≡1 (mod 7)，

3. $A_{(1,y)} = 1 + A_{(1,5)} + A_{(1,y-6)} \in N_3$，*y*≡2 (mod 7)，

4. $A_{(1,y)} = 1 + A_{(1,2)} + A_{(1,y-3)} \in N_4$，$y$≡3 (mod 7)，

5. $A_{(1,y)} = 1 + A_{(1,5)} + A_{(1,y-6)} \in N_3$，$y$≡4 (mod 7)，

6. $A_{(1,y)} = 1 + A_{(1,2)} + A_{(1,y-3)} \in N_4$，$y$≡5 (mod 7)，

7. $A_{(1,y)} \in N_1$，y≡6 (mod 7)。

二、由上述研究結果（二）可知$A_{(2,y)}$和$B_{(2,y)}$會出現N_5類的殘局，故我們要用到先前之引理四到七來協助我們分類：

在 $y \geq 10$ 時，$B_{(2,y)}$：

1. y為奇數，$B_{(2,y)} = 1 + B_{\left(2,\frac{y-1}{2}\right)} + B_{\left(2,\frac{y-1}{2}\right)}$，$B_{(2,y)} \in$可控區

2. y為偶數，$B_{(2,y)} = 1 + B_{(2,3)} + B_{(2,y-4)}$，$B_{(2,y)} \in$可控區

（特例出現於 y≡2 (mod 7)時，$B_{(2,y)} = 1 + B_{(2,2)} + B_{(2,y-3)}$）

在 $y \geq 10$ 時 $B_{(2,y)}$判斷其為可控圖形的變化以七個一依循：

1. $B_{(2,y)} = 1 + B_{(2,y-1)} \in N_4$、$1 + A_{(1,y)}$，為$N_3$，此圖為$N_5$，$y$≡0 (mod 7)，

2. $B_{(2,y)} = 1 + A_{(1,y)} \in N_5$，$y$≡1 (mod 7)，

3. $B_{(2,y)} = 1 + B_{(2,y-1)} \in N_4$，$y$≡2 (mod 7)，

4. $B_{(2,y)} = 1 + B_{(2,y-1)} \in N_3$，$y$≡3 (mod 7)，

5. $B_{(2,y)} = 1 + B_{(2,y-1)} \in N_4$，$y$≡4 (mod 7)，

6. $B_{(2,y)} = 1 + B_{(2,y-1)} \in N_3$，$y$≡5 (mod 7)，

7. $B_{(2,y)} = 1 + B_{(2,y-1)} \in N_4$，$y$≡6 (mod 7)。

且$A_{(2,y)}$為：

1. $A_{(2,y)} = 1 + A_{(2,2)} + B_{(2,y-3)} \in$可控區，$y$≡0 (mod 7)，$y \geq 9$，

2. $A_{(2,y)} = 1 + A_{(2,14)} + B_{(2,y-15)}$ ∈可控區，y≡1 (mod 7)，y ≥22，

3. $A_{(2,y)} = 1 + A_{(2,2)} + B_{(2,y-3)}$ ∈可控區，y≡2 (mod 7)，y ≥9，

4. $A_{(2,y)} = 1 + A_{(2,7)} + B_{(2,y-8)}$ ∈可控區，y≡3 (mod 7)，y ≥14，

5. $A_{(2,y)} = 1 + A_{(2,3)} + B_{(2,y-4)}$ ∈可控區，y≡4 (mod 7)，y ≥11，

6. $A_{(2,y)} = 1 + A_{(2,2)} + B_{(2,y-3)}$ ∈可控區，y≡5 (mod 7)，y ≥9，

7. $A_{(2,y)} = 1 + A_{(2,12)} + B_{(2,y-13)}$ ∈可控區，y≡6 (mod 7)，y ≥20。

在 y有限制範圍時 $A_{(2,y)}$若為可控圖形，則其必為N_5，$A_{(2,y)} = 1 + A_{(1,y)}$、$A_{(2,y)} = 1 + A_{(1,y+1)}$這兩種切法會形成一個切法是$N_3$，另一個切法即為$N_4$，因為$A_{(1,y)}$圖形本身的遞迴關係在 y≡6(mod 7)時為N_1，而此時當 y≡5 (mod 7)和 y≡6 (mod 7)不能切出$A_{(2,y)} = 1 + A_{(1,y)}$，此時的$A_{(2,y)}$，$y$≡5(mod 7)需切為 $1 + B_{(2,y)} = 1 + N_3$、$1 + A_{(1,y)} = 1 + N_4$兩種形式，即為 N_5；當$A_{(2,y)}$，y≡6(mod 7)需切為 $1 + B_{(2,y)} =$、$1 + A_{(1,y+1)} = 1 + N_3$兩$1 + N_4$種形式，即為 N_5，由上述可知：$A_{(2,y)}$在 y ≥22 時均為N_5。

三、使用 Region Function 進行獲勝策略分析：

以下表格皆為判斷此殘局是否對拿到此圖的人有利之方法，我們皆用 O 代表奇數(odd)、E 代表偶數(even)：

1. 當 Region Number 為奇數時：

$$\text{Region function}=|N_1|+2|N_2| + 3|N_3| + 4|N_4| + 5|N_5| \equiv 1 (\text{mod } 2)$$

$$|N_1|++|N_3| + |N_5| \equiv 1(\text{mod } 2)$$

$|N_1|++|N_3| + |N_5|$為奇數且均為非負整數，得二偶一奇或三奇，故分類討論於下表

表 6：當 Region Number 為奇數時之分析

N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	切法 執行玩家最有利作法
O	O	O	O	O	$N_5 \to N_2$
O	O	O	E	O	$N_5 \to N_4$
O	E	O	O	O	$N_5 \to N_2$
O	E	O	E	O	$N_5 \to N_4$
E	O	E	O	O	$N_5 \to N_4$
E	O	E	E	O	$N_5 \to N_2$
E	E	E	O	O	$N_5 \to N_4$
E	E	E	E	O	$N_5 \to N_2$
E	O	O	O	E	$N_4 \to N_3$
E	O	O	E	E	$N_3 \to N_2$
E	E	O	O	E	$N_4 \to N_3$
E	E	O	E	E	$N_3 \to N_2$
O	O	E	O	E	$N_4 \to N_1$
O	O	E	E	E	$N_1 \to N_2$
O	E	E	O	E	$N_4 \to N_1$
O	E	E	E	E	$N_1 \to N_2$

2. 當 Region Number 為偶數時：

$$\text{Region function}=|N_1|+2|N_2|+3|N_3|+4|N_4|+5|N_5|\equiv 0(\text{mod}2)$$

$$|N_1|++|N_3|+|N_5|\equiv 0(mod2)$$

$|N_1|++|N_3|+|N_5|$為偶數且均為非負整數，得二奇一偶或三偶，故分類討論於下表

表 7：當 Region Number 為奇數時之分析

N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	切法 執行玩家最有利作法
E	E	E	E	E	無（成對），必敗
E	O	E	E	E	無（成對），必敗

N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	切法 執行玩家最有利作法
E	E	E	O	E	$N_4 \rightarrow N_2$
E	O	E	O	E	$N_4 \rightarrow N_2$
E	E	O	E	O	$N_5 \rightarrow N_3$
E	O	O	E	O	$N_5 \rightarrow N_3$
E	E	O	O	O	$N_5 \rightarrow N_1$
E	O	O	O	O	$N_5 \rightarrow N_2$
O	E	E	E	O	$N_5 \rightarrow N_1$
O	O	E	E	O	$N_5 \rightarrow N_1$
O	E	E	O	O	$N_5 \rightarrow N_3$
O	O	E	O	O	$N_5 \rightarrow N_3$
O	E	O	E	E	$N_3 \rightarrow N_1$
O	O	O	E	E	$N_3 \rightarrow N_1$
O	E	O	O	E	無（成對），必敗
O	O	O	O	E	無（成對），必敗

由上述兩表可知：當 $|N_1|$、$|N_3|$、$|N_4|$均同為奇數或偶數，且 $|N_5|$為偶數個時，執行此殘局的人必敗，即為雙方玩家會希望切完後，留此類殘局給對方玩家來執行。

陸、結論

一、對殘局進行取棋步數奇偶性分析：

先將$A_{(x,y)}$和$B_{(x,y)}$之圖形一排和兩排的圖形依圖 68 之分類流程進行詳細的分析，將其最佳切法列出，再從中尋找規律，結果如研究結果之一與二。

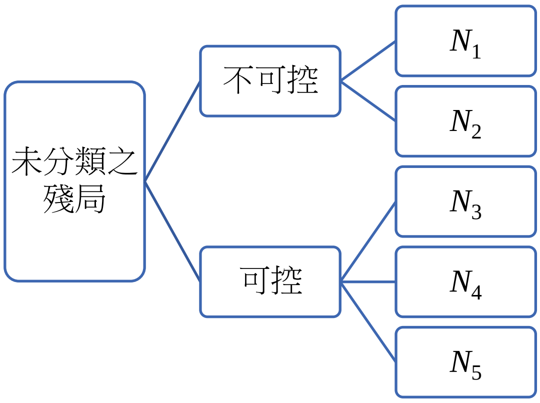


圖 68　分類流程

二、由討論之三可知「當 $|N_1|$、$|N_3|$、$|N_4|$ 同為奇數或偶數，且 $|N_5|$ 為偶數個時，對拿到此殘局的人不利」，即當今面臨一個盤局時，雙方玩家都會想把圖形切成上述提到之殘局，即為兩個同樣類型之圖形，若可以切出，即為先手勝利；反之，若先手無法切出，則代表先手不論用哪種切法都不會勝利。拿到殘局時的流程即為先確認是否有方法切一刀後，使殘局的 Rn 為偶數、Area Number 為偶數、且有多個可控區域，當對手拿到此殘局時，則必敗。

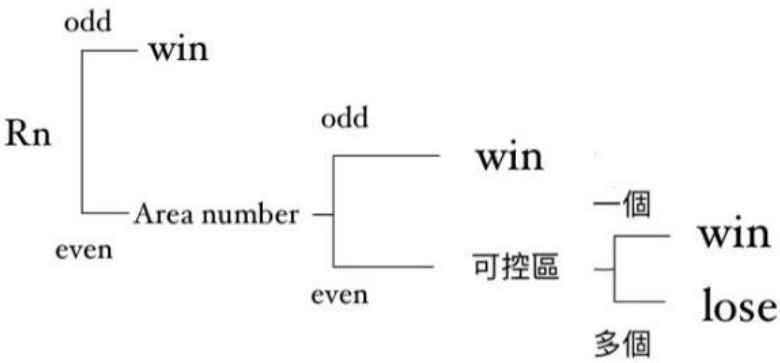


圖 69　利用本研究結果所得之先手獲勝策略

三、找出對於任意等角六邊形盤局都適用的掌控遊戲步數方法：

由上述研究結果可知，只要給任意一個等角六邊形，且能切成兩個同類型之圖形，則此六邊形為先手必勝。我們將其必勝策略分為兩種：

（一）對稱的對等角六邊形

由上述引理八可知：等角六邊形各邊長間有 $a+b=d+e$、 $b+c=e+f$、$c+d=f+a$之關係。若想出現對稱之六邊形，則需固定底邊故我們先定義

底邊皆為 a、d，圖形要對稱必建立在 $b=e$ 且 $c=f$ 時，而此時 $a+b=d+e$ 也會成立 $a=d$ ，則此六邊形的邊長依序為 a,b,c,a,b,c ，此類等角六邊形均為對稱的等角六邊形。

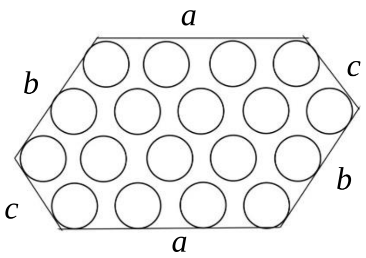


圖 70

又因遇到此種對稱圖形，我們的切法為切對稱的那條線讓兩剩餘圖形對稱，接著照著對手鏡像操作即可，則此類六邊形的對稱軸必得由格子組成，而得當今有邊長為a,b,c,a,b,c的六邊形，且 $a+b$ 或 $b+c$ 或 $c+a$ 至少一個為偶數，則此圖形必可切成兩個對稱之等角六邊形； $a+b$ 、 $b+c$ 和 $c+a$ 均為奇數，則此等角六邊形皆不以格子點對稱，可當 a 、b 、c均為正整數時，$a+b$、 $b+c$和 $c+a$不可能均為奇數，可知：只要有邊長依序為 a,b,c,a,b,c的等角六邊形，此圖形必可切成兩對稱圖形，即先手必勝。

（二） 適用於本研究結果之非對稱之等角六邊形邊長。

$A_{(x,y)}$和$B_{(x,y)}$之圖形一排和兩排的圖形依圖 68 之分類流程進行詳細的分析，將其最佳切法列出，再從中尋找規律，結果如研究結果之一與二。而若想推展到等角六邊形的步數探討，需先以有限邊長的六邊形進行探討，由於我們$A_{(x,y)}$和$B_{(x,y)}$之圖形只有分析出一排和兩排的圖形，所以以六邊形邊長中的 $a+b-1\leq 5$。則邊長c的長度則不限時（有幾個橫排）能夠使用我們的策略來進行盤局對弈。

四、未來展望

未來可將$A_{(x,y)}$、$B_{(x,y)}$和$C_{(x,y,z)}$圖形延伸到邊長無限大的各種圖形，並非侷限於三個橫排的圖形，若不延伸到邊長無限的圖形，就無法得知較大圖形切完一刀後，是

否剩下的兩個殘局皆為我們想要的圖形類型，目前只能將大圖形一步一步切成小圖形後，才能進行必勝策略的分析。

柒、參考文獻資料

[1] Elwyn R., John H., and Richard K.（2001）. *Winning Ways.*（2nd ed）. A. K. Peters, Ltd.

[2] 張鎮華（1978）。拈及其各種變型遊戲。數學傳播，3(2)。
https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d32/3202.pdf

【評語】050403

本作品探討一種特殊的拈遊戲：兩名玩家在一個布滿棋子的六邊形棋盤上，每次都要沿直線方向，將所有相鄰的棋子全數取走，取走最後一子者勝。作者將結局分成 N_1 至 N_5 五類，用 enumeration 的手法研究出大約 40 種初始情況的情形。本作品以遞迴關係論證，周詳嚴謹。但建議可以研究該遊戲的 nimber，將會得到較一般性的結論。

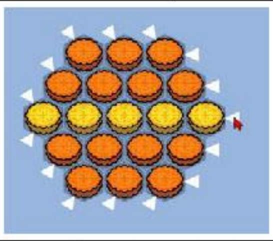
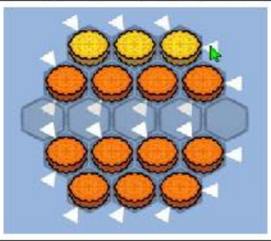
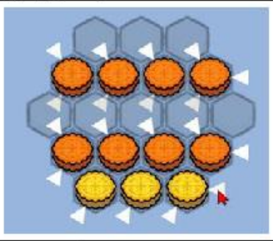
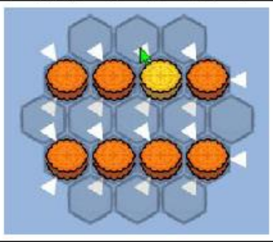
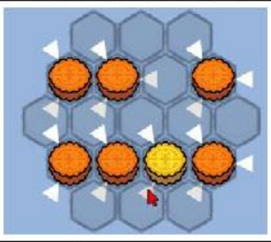
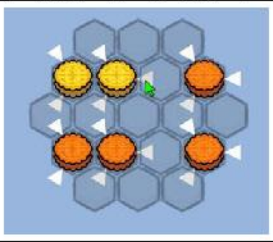
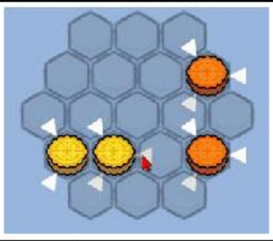
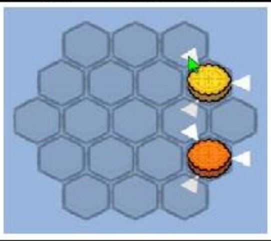
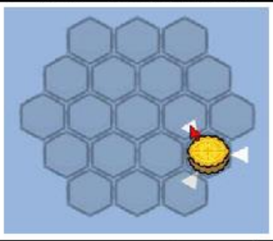
作品海報

切割方程

壹、前言

皮納姆的吃餅精靈是我們偶然間發現的遊戲，此遊戲在正六邊形的棋盤上，兩位玩家輪流取一整排相連的棋，取到最後一個棋的人即獲勝。在正六邊形棋盤下，先手玩家的必勝策略是很明顯的。因此本研究之目標為在等角六邊形棋盤上，對於先手玩家獲勝的策略探討。

表 1　皮納姆的吃餅精靈先手必勝操作

		
先手取棋 取棋步數累積為 1	後手取棋 取棋步數累積為 2	先手取棋 取棋步數累積為 3
		
後手取棋 取棋步數累積為 4	先手取棋 取棋步數累積為 5	後手取棋 取棋步數累積為 6
		
先手取棋 取棋步數累積為 7	後手取棋 取棋步數累積為 8	先手取棋，先手獲勝 取棋步數累積為 9

貳、研究目的

（一）　對殘局進行取棋步數奇偶性分析。
（二）　不相連的殘局數量搭配各殘局取棋步數奇偶性進行先手獲勝策略分析。
（三）　找出對於任意等角六邊形盤局都適用的掌控遊戲步數方法。

參、研究流程

研究前提 → 殘局分析 → 擴大盤局 → 綜合分析 → 研究結論

一、圖形類型分類

表 2　取棋步數集合分類

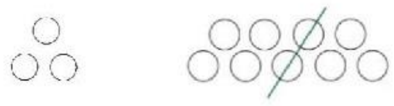
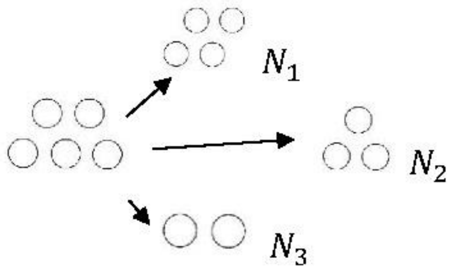
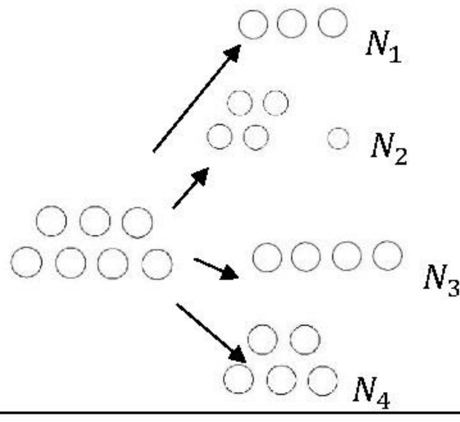
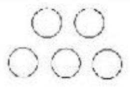
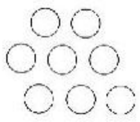
集合	定義	舉例	總步數
N_1	取棋總步數為奇數之殘局		不可控必為奇數
N_2	取棋總步數為偶數之殘局		不可控必為偶數
N_3	取棋後之殘局可屬 N_1 或 N_2		可控
N_4	取棋後之殘局可屬 N_1、N_2 或 N_3		可控
N_5	取棋後之殘局可屬 N_1、N_2、N_3 或 N_4		可控

表 3　常出現的殘局圖形形狀分類

圖形名稱	說明	舉例
$A_{(x,y)}$	一共 x 橫排棋，第一橫排有 y 個棋的梯形殘局	 $A_{(2,2)}$
$B_{(x,y)}$	一共 x 橫排棋，每一橫排有 y 個棋的平行四邊形殘局	 $B_{(2,2)}$
$C_{(x,y,z)}$	$A_{(x,y)}$和$B_{(z,x+y-1)}$組成的五邊形殘局	 $C_{(2,2,1)}$

二、分類流程

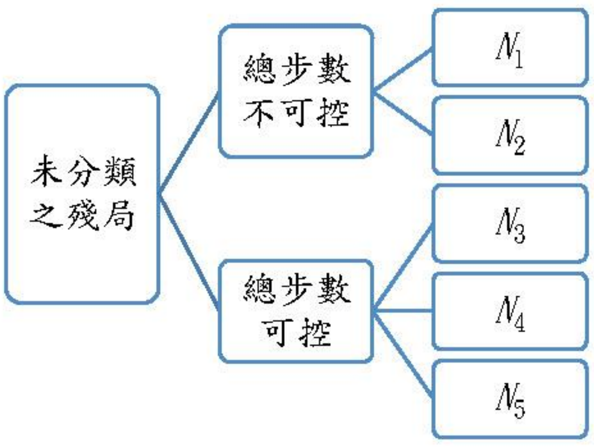


圖 1 圖型分類流程

三、圖形遞迴式定義

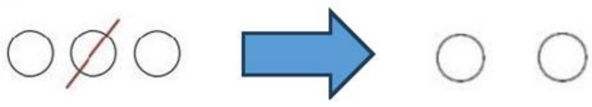


圖 2　$A_{(1,3)} = 1+A_{(1,1)} + A_{(1,1)} = 1+2A_{(1,1)}$

四、圖形分類之引理

引理三　N_1 、N_2 、N_3 、N_4 、N_5 以外之殘局不會出現。

引理四　當原殘局 $= 1 +$ 剩下之殘局類型 $+$ 剩下之殘局類型時，不可切為一個可控及一個不可控之圖形。

引理五　當原殘局 $= 1 + 2N_3$ 或 $= 1 + 2N_4$ 或 $= 1 + 2N_5$ 時，此圖形屬於可控之圖形。

引理七　若原殘局為可控之圖形且它 $= 1 +$ 可控之圖形類型成立，則原殘局屬於 N_3 或 N_4 或 N_5。

五、運算方式分析

Area Number $= |N_1| + |N_2| + |N_3| + |N_4| + |N_5|$ 代表殘局個數，$|N_k|$ 表示盤面上屬於 N_k 的殘局個數。

Region Number $= 1|N_1| + 2|N_2| + 3|N_3| + 4|N_4| + 5|N_5|$ 代表此盤局的 Region Number。

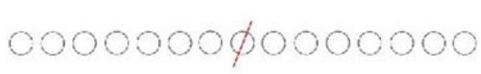
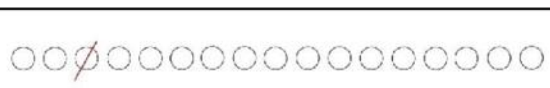
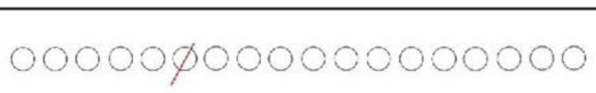
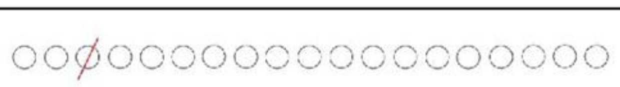
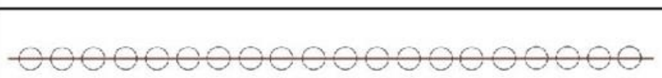
當 Region Number 為奇數時：$|N_1| + |N_3| + |N_5|$ 為奇數且均為非負整數

當 Region Number 為偶數時：$|N_1| + |N_3| + |N_5|$ 為偶數且均為非負整數。

肆、研究結果

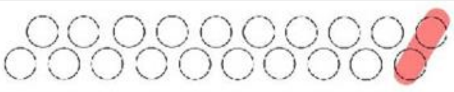
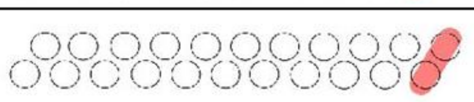
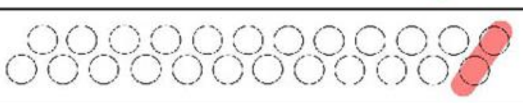
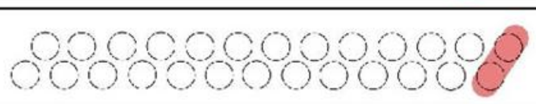
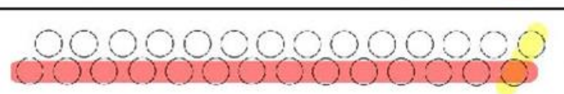
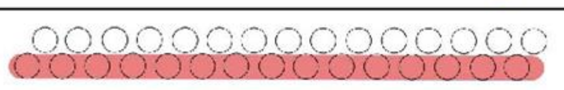
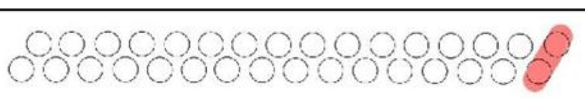
一、研究結果: $A_{(1,y)}$ 圖形

表 5　$A_{(1,y)}$ 之舉例及推論

$A_{(1,y)}$	圖形	結果	下一項推論
$A_{(1,14)} \in N_3$		$A_{(1,7y)} \in N_3$	$A_{(1,7y+7)} = 1 + A_{(1,2)} + A_{(1,7y+4)} \in 1 + N_3 + N_3 \in N_3$
$A_{(1,15)} \in N_4$		$A_{(1,7y+1)} \in N_4$	$A_{(1,7y+8)} = 1 + A_{(1,7)} + A_{(1,7y)} \in 1 + N_3 + N_3 \in N_4$
$A_{(1,16)} \in N_3$		$A_{(1,7y+2)} \in N_3$	$A_{(1,7y+9)} = 1 + A_{(1,5)} + A_{(1,7y+3)} \in 1 + N_4 + N_4 \in N_3$
$A_{(1,17)} \in N_4$		$A_{(1,7y+3)} \in N_4$	$A_{(1,7y+10)} = 1 + A_{(1,2)} + A_{(1,7y+7)} \in 1 + N_3 + N_3 \in N_4$
$A_{(1,18)} \in N_3$		$A_{(1,7y+4)} \in N_3$	$A_{(1,7y+11)} = 1 + A_{(1,5)} + A_{(1,7y+5)} \in 1 + N_4 + N_4 \in N_3$
$A_{(1,19)} \in N_4$		$A_{(1,7y+5)} \in N_4$	$A_{(1,7y+12)} = 1 + A_{(1,2)} + A_{(1,7y+9)} \in 1 + N_3 + N_3 \in N_4$
$A_{(1,20)} \in N_1$		$A_{(1,7x+6)} \in N_1$	無法切出相同類型，只能一刀切完

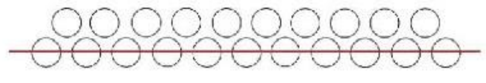
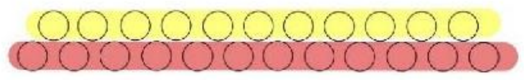
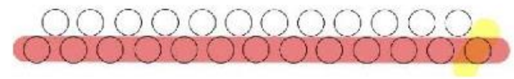
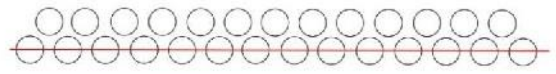
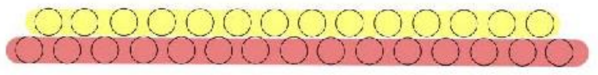
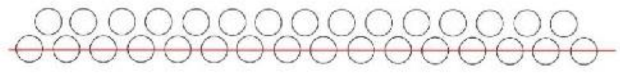
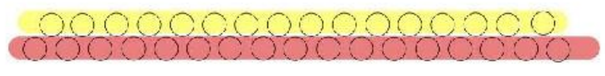
二、研究結果: $B_{(2,y)}$ 圖形

表 6　$B_{(2,y)}$ 之舉例及推論

$B_{(2,y)}$	圖形	推論	下一循環
$B_{(2,10)} \in N_3$		$B_{(2,7y+3)} \in N_3$	$B_{(2,7y+3)} = 1 + B_{(2,7y+2)} \in N_3$
$B_{(2,11)} \in N_4$		$B_{(2,7y+4)} \in N_4$	$B_{(2,7y+4)} = 1 + B_{(2,7y+3)} \in N_4$
$B_{(2,12)} \in N_3$		$B_{(2,7y+5)} \in N_3$	$B_{(2,7y+5)} = 1 + B_{(2,7y+3)} \in N_3$
$B_{(2,13)} \in N_4$		$B_{(2,7x+6)} \in N_4$	$B_{(2,7y+6)} = 1 + B_{(2,7y+4)} \in N_4$
$B_{(2,14)} \in N_5$		$B_{(2,7y)} \in N_5$	$\mathrm{B}_{(2,y)} = 1 + \mathrm{B}_{(2,y-1)} \in \mathrm{N}_4$ 或 $1 + \mathrm{A}_{(1,y)} \in \mathrm{N}_3$，因此為 N_5
$B_{(2,15)} \in N_3$		$B_{(2,7y+1)} \in N_5$	$B_{(2,7y+1)} = 1 + A_{(1,7y+1)} \in N_5$
$B_{(2,16)} \in N_4$		$B_{(2,7y+2)} \in N_4$	$B_{(2,y)} = 1 + B_{(2,y-1)} \in N_4$

三、研究結果:$A_{(2,y)}$圖形

表 7　$A_{(2,y)}$之舉例及推論

$A_{(2,y)}$	圖形	結果	下一項推論
$A_{(2,10)} \in N_2$		$A_{(2,7y+3)} \in N_2$	$A_{(2,7y+10)} = 1 + A_{(2,7)} + B_{(2,7y+2)} \in N_5$
$A_{(2,11)} \in N_5$		$A_{(2,7y+4)} \in N_5$	$A_{(1,7y+11)} = 1 + A_{(2,3)} + B_{(2,7y+7)} \in N_5$
$A_{(2,12)} \in N_5$		$A_{(2,7y+5)} \in N_5$	$A_{(1,7y+12)} = 1 + A_{(2,2)} + B_{(1,7y+9)} \in N_5$
$A_{(2,13)} \in N_2$		$A_{(2,7y+6)} \in N_2$	$A_{(1,7y+13)} = 1 + A_{(2,12)} + B_{(2,7y)} \in N_5$
$A_{(2,14)} \in N_5$		$A_{(2,7y)} \in N_5$	$A_{(2,7y+7)} = 1 + A_{(2,2)} + B_{(2,7y+4)} \in N_5$
$A_{(2,15)} \in N_2$		$A_{(2,7y+1)} \in N_2$	$A_{(2,7y+8)} = 1 + A_{(2,14)} + B_{(2,7y-7)} \in N_5$
$A_{(2,16)} \in N_5$		$A_{(2,7x+2)} \in N_5$	$A_{(2,7y+9)} = 1 + A_{(2,2)} + B_{(2,7y+6)} \in N_5$

伍、討論與結論

一、 對殘局進行取棋步數奇偶性分析：將 $A_{(x,y)}$ 和 $B_{(x,y)}$ 依圖之分類流程找出最佳切法之規律。

二、 當 $|N_1|$、$|N_3|$、$|N_4|$ 同為奇數或偶數，且 $|N_5|$ 為偶數時，對拿到此殘局的人不利，如圖 3。

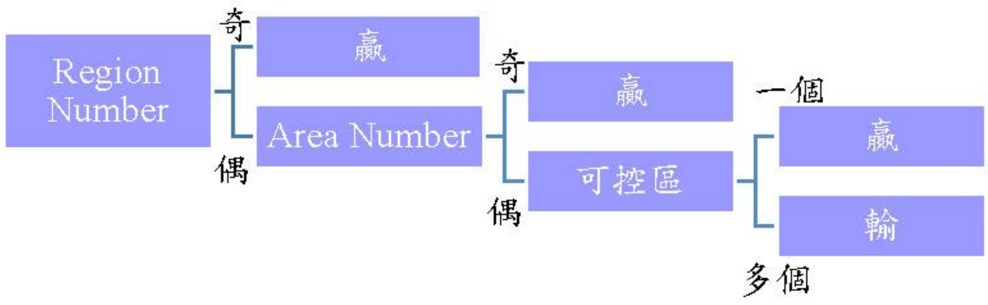


圖 3　利用本研究結果所得之先手獲勝策略

三、 找出對於任意邊長的等角六邊形盤局都適用的掌控遊戲步數方法：

由上述研究結果可知，給定一個等角六邊形，我們將其必勝策略分為兩種：

（一）對稱的對等角六邊形

等角六邊形各邊長間有 $a + b = d + e$、$b + c = e + f$、$c + d = f + a$之關係。此六邊形的邊長依序為a, b, c, a, b, c ，此類等角六邊形均為對稱的等角六邊形。

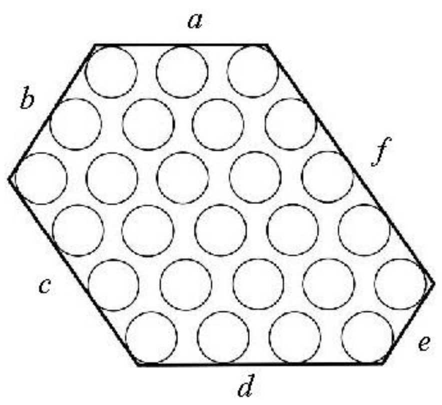


圖 4　等角六邊形

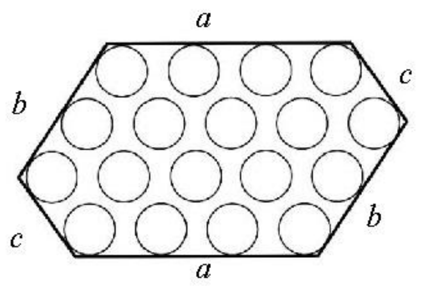


圖 5　對稱等角六邊形

（二）適用於本研究結果之非對稱之等角六邊形邊長。

$A_{(x,y)}$ 和 $B_{(x,y)}$ 已完成一排以及兩排的分析，而若想推展到更大的等角六邊形，需先以有限邊長的六邊形進行探討，由於我們 $A_{(x,y)}$ 和 $B_{(x,y)}$ 之圖形只有分析出一排和兩排的圖形，所以當六邊形邊長中的$a + b - 1 \leq 5$。則邊長 c 的長度則不限時能夠使用我們的策略來進行盤局對弈。

陸、未來展望

在未來我們希望可將 $A_{(x,y)}$ 和 $B_{(x,y)}$ 和 $C_{(x,y,z)}$ 圖形延伸到邊長無限大的各種圖形，並非侷限於三個橫排的圖形，若不延伸到邊長無限的圖形，就無法得知較大圖形切完一刀後，是否剩下的兩個殘局皆為相同圖形類型。目前只能將大圖形一步一步切成小圖形後，才能進行必勝策略的分析。

柒、參考文獻資料

[1] Elwyn R., John H., and Richard K.（2001）. *Winning Ways.* （2nd ed）. A. K. Peters, Ltd.
[2] 張鎮華（1978）。拈及其各種變型遊戲。數學傳播，3(2)，6-15。