

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組 數學科

團隊合作獎

050402

埋「崙破」「柱」—拿破崙多邊形與角柱截面之
探討

學校名稱：臺中市立文華高級中等學校

作者： 高二 陳奕霏 高二 鄭米秀	指導老師： 楊舒雯 張仲凱
---------------------------------	-----------------------------

關鍵詞：拿破崙定理、正多角柱、拿破崙初始多邊形

摘要

本研究主要在探討拿破崙初始 n 邊形與拿破崙正 n 邊形以及正 n 角柱的關係。研究中得知只需知道拿破崙初始 n 邊形的相鄰兩邊與其夾角，即可推得完整拿破崙初始 n 邊形，進而求得拿破崙正 n 邊形的邊長與面積，且證明初始 n 邊形的頂點共橢圓。

此外，觀察正三角柱與一平面截出三角形，利用畢氏定理，可從三角形邊長推出正三角柱底面邊長，並將其推至拿破崙初始 n 邊形與正 n 角柱；發現當正 n 角柱底面和截面夾角固定時，截出的初始 n 邊形所作的拿破崙正 n 邊形皆全等；最後，我們利用解析幾何，證明任意三角形皆為一正三角柱與一平面的截痕，並透過投影面積與底面積，得知截面與正 n 角柱底面的夾角，企圖從幾何面確切應證如何截出該三角形。

壹、研究動機

在歷屆科展報告中尋找題目時，我們找到了一篇關於拿破崙初始 n 邊形探討的報告，其中談到「平面和正 n 角柱所截的 n 邊形為拿破崙初始 n 邊形」的結論，我們對此產生好奇，於是由此發想，展開了拿破崙初始 n 邊形與正 n 角柱之間關係的研究。

貳、研究目的

- 一、在已知條件中，探討其至少包含多少邊長與角度方能作出唯一的拿破崙初始 n 邊形。
- 二、給定拿破崙初始 n 邊形，求出拿破崙正 n 邊形的邊長、面積。
- 三、已知拿破崙初始 n 邊形為正 n 角柱與一平面截出來的圖形，給定一任意拿破崙初始 n 邊形，求所在平面與角柱底面的夾角以及正 n 角柱邊長。
- 四、探討固定相鄰兩邊及一夾角，以 *SAS* 作圖反推其初始 n 邊形並探討彼此間的關係。
- 五、探討拿破崙初始 n 邊形是否有平行判別性質以外的其他延伸性質。
- 六、探討拿破崙初始 n 邊形所推得的拿破崙正 n 邊形與正 n 角柱底面的關係
- 七、證明任意三角形皆為正三角柱與一平面的截痕。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、數學繪圖軟體 Geogebra

肆、名詞定義與文獻探討

一、名詞定義

(一)拿破崙定理：

若將任意三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三邊分別往外側作正三角形，再將三個正三角形的重心 (P_1, P_2, P_3) 連線，則 $\Delta P_1P_2P_3$ 必為正三角形(如圖 1)。

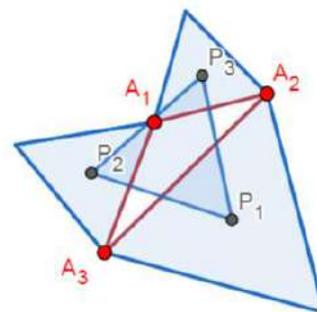


圖 1

(二)拿破崙初始 n 邊形與拿破崙正 n 邊形：

給定一 n 邊形(在此研究中討論到的 n 邊形皆為凸多邊形)，將各邊分別作外接正 n 邊形，相鄰兩正 n 邊形的中心連線得到一個新 n 邊形，若新的 n 邊形是正 n 邊形，則稱給定的 n 邊形為拿破崙初始 n 邊形，新的 n 邊形為拿破崙正 n 邊形。

如圖 1， $\Delta A_1A_2A_3$ 為拿破崙初始三邊形，而 $\Delta P_1P_2P_3$ 為拿破崙正三邊形。

(三)逆拿破崙法

作一正 n 邊形，在內部給定一點 A_1 ，以此點與正 n 邊形任一頂點連線，令此頂點為 P_1 並以 P_1 為中心， $\overline{P_1A_1}$ 為半徑，逆時針旋轉 $\frac{360^\circ}{n}$ ，旋轉後會得到新的點 A_2 ；將 P_1 依順時針序找到下一個正 n 邊形頂點 P_2 ，重複上述步驟，連 $\overline{P_2A_2}$ ，並以 P_2 為中心， $\overline{P_2A_2}$ 為半徑，逆時針旋轉 $\frac{360^\circ}{n}$ ，得到新的點 A_3 ；將 P_2 依順時針序找到下一個正 n 邊形頂點 P_3 ，重複上述步驟，直到與原先選定一點 A_1 重疊，依序將 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_1$ 連線，則可得到一拿破崙初始 n 邊形，稱此作圖法為「逆拿破崙法」。

以圖 2 為例，在正八邊形內部給定一點為 A_1 ，連接 $\overline{P_1A_1}$ ，以 P_1 為中心， $\overline{P_1A_1}$ 為半徑，逆時針旋轉 45° ，得到 A_2 ，接著連 $\overline{P_2A_2}$ ，重複以上步驟直到回 A_1 點為止，並將得到的 n 個頂點連線就能作出拿破崙初始 n 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_n$ 。

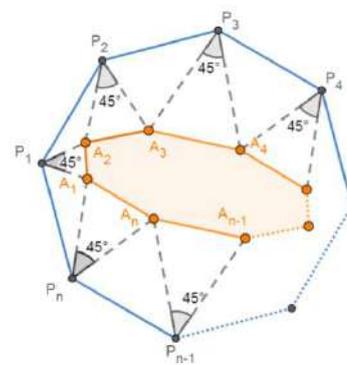


圖 2

二、文獻探討

在研究過程中，我們找到幾篇談論拿破崙初始 n 邊形的作品 (參考資料[一]~[三])，其中提到拿破崙初始 n 邊形的一些性質，分述如下。

(一) 拿破崙 n 邊形判別性質

選定拿破崙初始 n 邊形中任一邊，將邊上兩頂點分別沿著邊往順時針及逆時針方向各移動 m 個頂點，將得出的兩頂點相連後的線段將與原選定的邊平行；反之，若 n 邊形滿足上述性質，則必為拿破崙初始 n 邊形。

以圖 3 為例，選定邊 \overline{AB} ，將頂點 A 沿著邊往逆時針方向移動兩個頂點得到 G 點，並將 B 點沿著邊往順時針方向移動兩個頂點得到 D 點，則 $\overline{GD} \parallel \overline{AB}$ ；進一步地，可推得 $\overline{AB} \parallel \overline{HC} \parallel \overline{GD} \parallel \overline{FE}$ 。

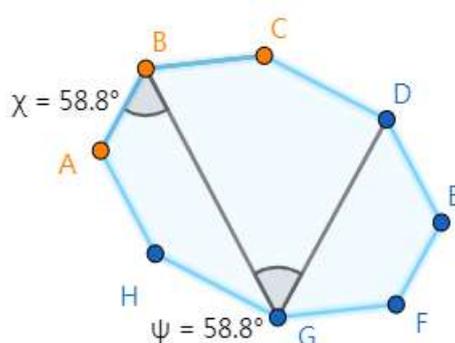


圖 3

(二) 拿破崙初始 n 邊形重心及其性質

1. 拿破崙初始奇數邊形重心：各頂點與對邊中點的交點。
2. 拿破崙初始偶數邊形重心：各平分對角線交點。

拿破崙正 n 邊形中心與拿破崙初始 n 邊形重心重合；如圖 4 為拿破崙初始五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 重心 G 與其拿破崙正五邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 中心 G 重合，圖 5 為拿破崙初始八邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 重心 G 與其拿破崙正八邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 中心 G 重合。

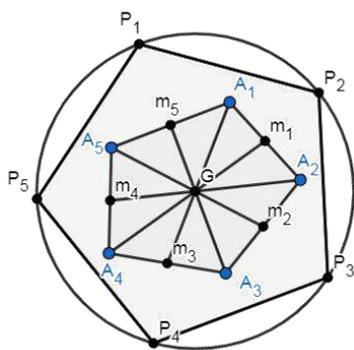


圖 4

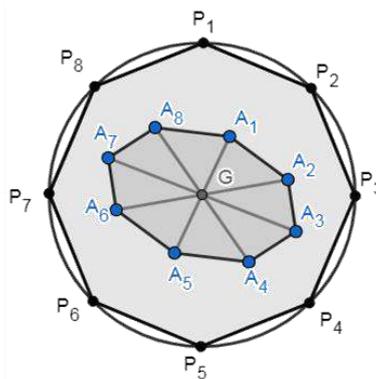


圖 5

(三) 拿破崙初始 n 邊形為正 n 角柱與平面的截面

給定一平面 E 及任意正 n 角柱，若平面 E 與正 n 角柱底面不平行，則平面將與正 n 角柱截出一個拿破崙初始 n 邊形，以圖 6 為例，平面 E 與正八角柱所截八邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 為拿破崙初始八邊形。

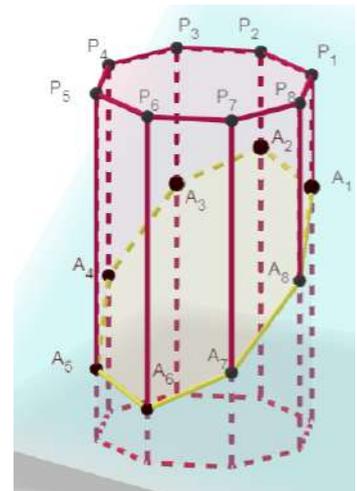


圖 6：平面 E 與正八角柱所截八邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 為拿破崙初始八邊形

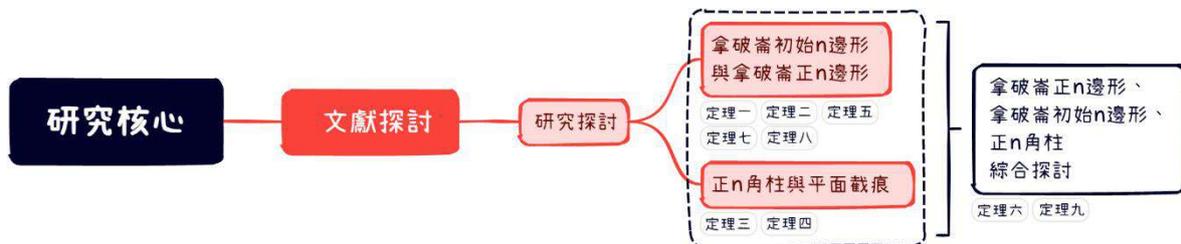
(四) 圓柱與平面的截面

由參考資料(三)得知，可用 Dandelin 雙球法證明「任一不與圓柱底面平行之平面與圓柱的截面為橢圓」。

由上述文獻探討，讓我們開始猜想拿破崙初始 n 邊形的唯一性，以及角柱與截面的關係，自此展開本研究。

伍、研究過程及方法

一、研究架構



二、觀察與初探

拿破崙初始 n 邊形有平行的判別性質，這讓我們不禁思考：是不是只要知道幾個邊長或角度，就能因平行判別性質做出唯一的拿破崙初始 n 邊形？於是決定用逆拿破崙法進行嘗試。

(一) 觀察-以拿破崙初始四邊形為例

觀察拿破崙初始四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 與其對應之拿破崙正四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ 得知：

1. 拿破崙初始四邊形的兩相鄰頂點，如圖 7 中的 A_1 、 A_2 ，若以 $\overline{A_1A_2}$ 為邊作外接正方形，此正方形的重心為 P_1 ，則 $\Delta P_1A_1A_2$ 形成一個以 90° 為頂角的等腰三角形。

2.由平行性質，我們知道拿破崙初始四邊形必定為平行四邊形，因此若知道拿破崙初始四邊形的相鄰兩邊與其夾角，即可得到完整的拿破崙初始四邊形。此外，我們亦可將拿破崙初始四邊形(如圖 8)中相鄰兩邊 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_1A_4}$ ，分別作外接正四邊形，取其重心 P_1 、 P_4 ，連接 $\overline{P_1P_4}$ 即為拿破崙正四邊形的一邊，即可得拿破崙正四邊形，再加上「逆拿破崙法」，即可得到完整的拿破崙初始四邊形。

將上述觀察整理後，我們提出猜想「若已知拿破崙初始 n 邊形的相鄰兩邊及其夾角，則可得到該拿破崙初始 n 邊形」。

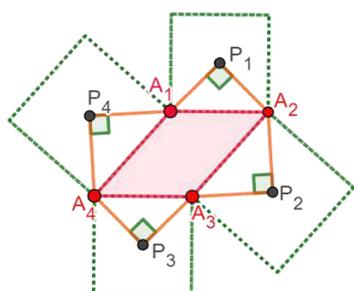


圖 7

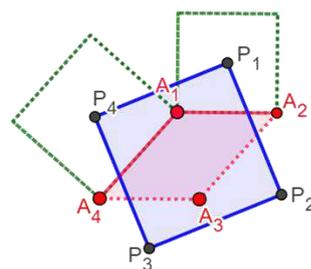


圖 8

(二)實作初探

1.拿破崙初始五邊形

要使用「逆拿破崙法」作出拿破崙初始五邊形，首先需要一個正五邊形做為拿破崙正五邊形，而有正五邊形的一邊和畫正五邊形的方向，就能確定唯一的正五邊形。正五邊形的一邊由兩相鄰頂點決定，而頂點正是以拿破崙初始五邊形的邊往外作正五邊形之重心。即：若已知拿破崙初始五邊形的相鄰兩邊及其夾角，就能得到拿破崙正五邊形的一邊，便可畫出整個正五邊形，並以「逆拿破崙法」作出唯一拿破崙初始五邊形(如圖 9)。

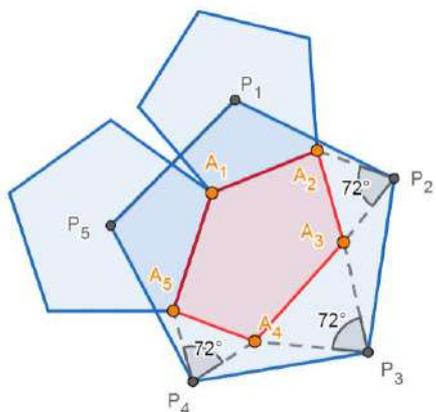


圖 9：已知 $\overline{A_2A_1}$ 、 $\overline{A_1A_2}$ 及其夾角，作圖得拿破崙正五邊形、拿破崙初始五邊形。

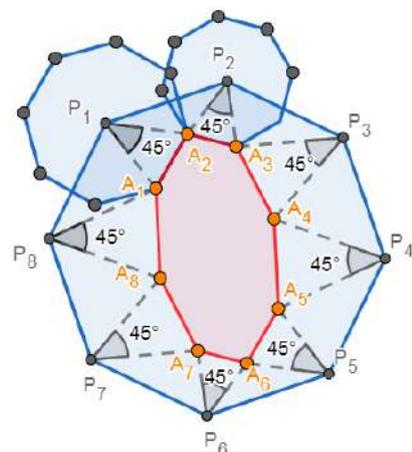


圖 10：已知 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 及其夾角，作圖得拿破崙正八邊形、拿破崙初始八邊形。

2. 拿破崙初始八邊形

將上述猜想，嘗試推及八邊形。如圖 10，給定 A_1 、 A_2 、 A_3 三點，分別以 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 為邊向外側作正八邊形，將其中心 P_1 、 P_2 連線， $\overline{P_1P_2}$ 即為拿破崙正八邊形的一邊，便可得完整拿破崙正八邊形，再利用「逆拿破崙法」可做出完整拿破崙初始八邊形，用此方法作出的拿破崙初始八邊形為唯一。經過實作嘗試，我們發現給定拿破崙初始 n 邊形的相鄰兩邊及其夾角，即可得拿破崙初始 n 邊形及其拿破崙正 n 邊形。

三、拿破崙初始 n 邊形的存在性探討

【定理一】 若給定拿破崙初始 n 邊形任意相鄰兩邊及其夾角 θ ($0 < \theta < 180^\circ$)，則該拿破崙初始 n 邊形必唯一存在。

【證明】 以「逆拿破崙法」作圖，顯然得證。

【作法】：已知 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 及其夾角 $\angle A_1A_2A_3$ ，如圖 11

1. 以 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 為邊，分別向外側作正 n 邊形，取其中心 P_1 、 P_2 ，連 $\overline{P_1P_2}$ 。
2. 以 $\overline{P_1P_2}$ 為邊，作正 n 邊形 $P_1P_2P_3\dots P_n$ 。
3. 以 P_3 為頂點， $\overline{P_3A_3}$ 為半徑，逆時針旋轉 $\frac{360^\circ}{n}$ ，旋轉後會得到新的點 A_4 ；
4. 連 $\overline{P_4A_4}$ ，以 A_4 為頂點， $\overline{P_4A_4}$ 為半徑，逆時針旋轉 $\frac{360^\circ}{n}$ ，旋轉後得到新的點 A_5 ；
5. 重複上述步驟，直到得到 A_n ，則拿破崙初始 n 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_n$ 即為所求。

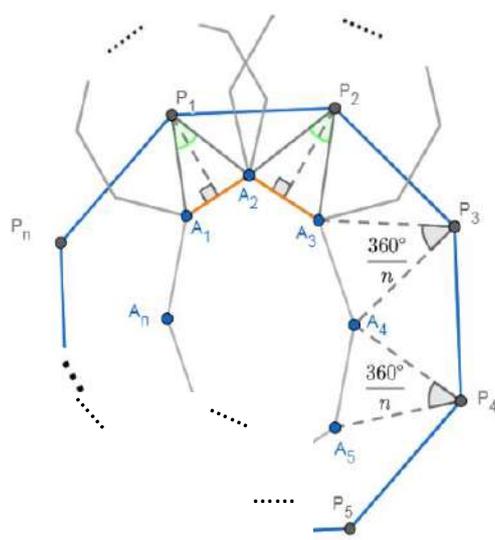


圖 11

我們將上述作圖法稱為「拿破崙初始 n 邊形 SAS 作圖法」。

【定理二】任一正 n 邊形必存在其拿破崙初始 n 邊形。

【證明】

已知 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 及其夾角 $\angle A_1A_2A_3$ 。以 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 為邊，分別向外側作正 n 邊形，取其中心 P_1 、 P_2 。

連 $\overline{P_1A_1}$ 、 $\overline{P_1A_2}$ 、 $\overline{P_2A_2}$ 、 $\overline{P_2A_3}$ ，得兩個頂角為 $\frac{360^\circ}{n}$ ，底角

為 $(90^\circ - \frac{180^\circ}{n})$ 的等腰 $\Delta P_1A_1A_2$ 與等腰 $\Delta P_2A_2A_3$ ，如圖 12

設 $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ ，則 $\angle P_1A_2A_1 = \angle P_2A_2A_3 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

在 $\Delta P_1A_1A_2$ 中， $\overline{P_1A_2} = \frac{\overline{A_1A_2}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}$ ，

同理，在 $\Delta P_2A_2A_3$ 中， $\overline{P_2A_2} = \frac{\overline{A_2A_3}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}$

在 $\Delta P_1P_2A_2$ 中，利用餘弦定理可得 $\cos \angle P_1A_2P_2 = \frac{\overline{P_1A_2}^2 + \overline{P_2A_2}^2 - \overline{P_1P_2}^2}{2 \times \overline{P_1A_2} \times \overline{P_2A_2}}$

$$\Rightarrow \cos \left(360^\circ - \angle A_1A_2A_3 - 2 \left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n} \right) \right) = \frac{\left(\frac{\overline{A_1A_2}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right)^2 + \left(\frac{\overline{A_2A_3}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right)^2 - \overline{P_1P_2}^2}{2 \left(\frac{\overline{A_1A_2}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right) \left(\frac{\overline{A_2A_3}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right)}$$

$$\Rightarrow \cos(180^\circ - \angle A_1A_2A_3 + \alpha) = \frac{\left(\frac{\overline{A_1A_2}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right)^2 + \left(\frac{\overline{A_2A_3}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right)^2 - \overline{P_1P_2}^2}{2 \left(\frac{\overline{A_1A_2}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right) \left(\frac{\overline{A_2A_3}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right)}$$

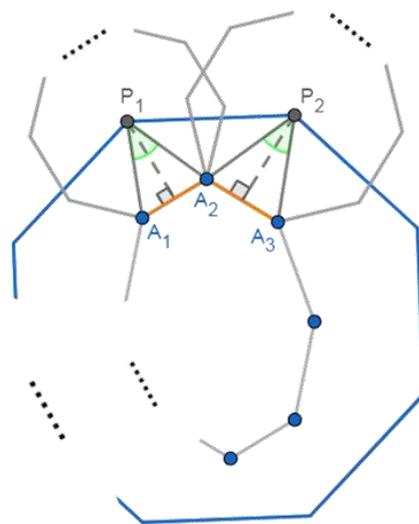


圖 12

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2 \left(\frac{\overline{A_1 A_2}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right) \left(\frac{\overline{A_2 A_3}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right) \times \cos(180^\circ - \angle A_1 A_2 A_3 + \alpha) = \left(\frac{\overline{A_1 A_2}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right)^2 + \left(\frac{\overline{A_2 A_3}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right)^2 - \overline{P_1 P_2}^2 \\ &\Rightarrow \overline{P_1 P_2}^2 = \left(\frac{\overline{A_1 A_2}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right)^2 + \left(\frac{\overline{A_2 A_3}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{A_1 A_2}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right) \left(\frac{\overline{A_2 A_3}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right) \times \cos(180^\circ - \angle A_1 A_2 A_3 + \alpha) \\ &\Rightarrow \overline{P_1 P_2} = \sqrt{\left(\frac{\overline{A_1 A_2}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right)^2 + \left(\frac{\overline{A_2 A_3}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{A_1 A_2}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right) \left(\frac{\overline{A_2 A_3}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \right) \times \cos(180^\circ - \angle A_1 A_2 A_3 + \alpha)} \\ &\text{整理得 } \overline{P_1 P_2} = \sqrt{\frac{\overline{A_1 A_2}^2 + \overline{A_2 A_3}^2 + 2 \cos(-\angle A_1 A_2 A_3 + \alpha) \times \overline{A_1 A_2} \times \overline{A_2 A_3}}{4 \cos^2(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}} \quad \text{恆正} \end{aligned}$$

拿破崙正 n 邊形之邊長 $\overline{P_1 P_2}$ 為 $\frac{\sqrt{\overline{A_1 A_2}^2 + \overline{A_2 A_3}^2 + 2 \cos(-\angle A_1 A_2 A_3 + \alpha) \times \overline{A_1 A_2} \times \overline{A_2 A_3}}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}$ 。

由上述推導可知：已知拿破崙初始 n 邊形的相鄰兩邊與其夾角，可以得到唯一的拿破崙正 n 邊形邊長，也就能推出一拿破崙正 n 邊形。

若將 $\overline{A_1 A_2}$ 、 $\overline{A_2 A_3}$ 乘上 n 倍，夾角不變，令此時拿破崙正 n 邊形新邊長為 $\overline{P_1' P_2'}$ ，

$$\begin{aligned} \text{則 } \overline{P_1' P_2'} &= \sqrt{\frac{(n \times \overline{A_1 A_2})^2 + (n \times \overline{A_2 A_3})^2 + 2 \cos(-\angle A_1 A_2 A_3 + \alpha) (n \times \overline{A_1 A_2}) (n \times \overline{A_2 A_3})}{4 \cos^2(90^\circ - \frac{\alpha}{2})}} \\ &= \frac{\sqrt{n^2 \times (\overline{A_1 A_2}^2 + \overline{A_2 A_3}^2 + 2 \cos(-\angle A_1 A_2 A_3 + \alpha) \times \overline{A_1 A_2} \times \overline{A_2 A_3})}}{2 \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} \\ &= n \times \overline{P_1 P_2} \text{，即新的拿破崙正 } n \text{ 邊形邊長也會乘上 } n \text{ 倍。} \end{aligned}$$

也就是說，透過縮放 n 倍比例，就能得到任意邊長的拿破崙正 n 邊形。

換言之，任意正 n 邊形都能是某一拿破崙初始 n 邊形的拿破崙正 n 邊形。

綜上，任一正 n 邊形必存在其拿破崙初始 n 邊形，得證。

四、拿破崙初始 n 邊形求拿破崙正 n 邊形的面積

已知拿破崙初始 n 邊形的任意相鄰兩邊為 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 及其夾角 $\angle A_1A_2A_3$ ，令點 G

為其拿破崙正 n 邊形之中心，連 $\overline{P_1G}$ 、 $\overline{P_2G}$ ，令 $\angle P_1GP_2 = \frac{360^\circ}{n} = \alpha$ ，可得一頂角為 α ，

底角為 $\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$ 的等腰三角形 ΔP_1P_2G ，其中， \overline{GH} 為 ΔP_1P_2G 在 $\overline{P_1P_2}$ 上的高，如圖 13

所示。

所求拿破崙正 n 邊形之面積

$$= \Delta P_1P_2G \text{ 之面積} \times n$$

$$= n \times \left(\overline{P_1P_2} \times \overline{GH} \times \frac{1}{2} \right)$$

$$= n \times \left(\overline{P_1P_2} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{P_1P_2} \times \tan \angle QPG \right) \times \frac{1}{2} \right)$$

$$= n \times \left(\overline{P_1P_2} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{P_1P_2} \times \tan \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \right) \times \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{n}{4} \times \overline{P_1P_2}^2 \times \tan \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right), \text{ 由定理二}$$

$$\overline{P_1P_2} = \frac{\sqrt{\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + 2 \cos(-\angle A_1A_2A_3 + \alpha) \times \overline{A_1A_2} \times \overline{A_2A_3}}}{2 \cos \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}$$

$$= \frac{n}{4} \times \tan \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \times \left(\frac{\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + 2 \cos(-\angle A_1A_2A_3 + \alpha) \times \overline{A_1A_2} \times \overline{A_2A_3}}{4 \cos^2 \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)} \right)$$

拿破崙正 n 邊形之面積為

$$\frac{n}{4} \times \tan \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \times \left(\frac{\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + 2 \cos(-\angle A_1A_2A_3 + \alpha) \times \overline{A_1A_2} \times \overline{A_2A_3}}{4 \cos^2 \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)} \right)。$$

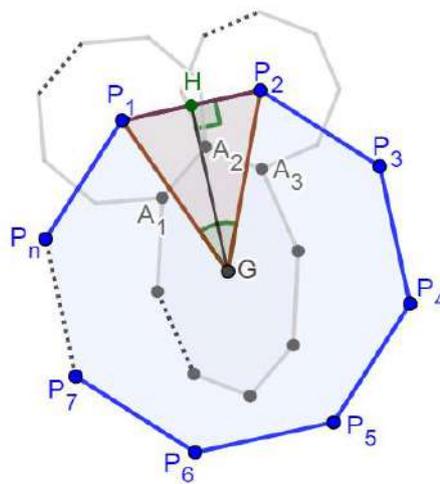


圖 13

五、由初始 n 邊形所在平面反推正 n 角柱

由第 58 屆全國科展國中組數學得獎作品-從零開始 - 初始多邊形及拿破崙多角星之性質，在其文末的觀察發現：

平面和正 n 角柱所截的 n 邊形為拿破崙初始 n 邊形，因此判定拿破崙初始 n 邊形 並非正 n 邊形壓縮而是正 n 邊形之投影。

我們對這個發現很有興趣，然而該作品並沒有給出直接的證明，僅引用符合其作品裡的性質進而推斷結論：「正 n 角柱與平面的截痕，為一拿破崙初始 n 邊形」。於是我們持續發想，先嘗試反推正 n 角柱，而在下一個章節—「陸、延伸討論」，進一步探討拿破崙初始 n 邊形與正 n 角柱以及拿破崙正 n 邊形三者之間的關聯與其他發現。

(一)任意三角形反推正三角柱

從拿破崙定理可知：「任意三角形均為拿破崙初始三角形」，配合「正 n 角柱與平面的截痕，為一拿破崙初始 n 邊形」，猜想：「任意三角形能由一正三角柱與一平面截面產生」。為了證明猜想，嘗試反推正 n 角柱的存在，我們給出定理三、定理四。

【定理三】若已知三角形為平面與正三角柱之截痕，則該正三角柱必唯一存在。

【證明】

已知 $\triangle ABC$ 為一平面與正三角柱之截痕，令 $\triangle ABC$ 邊長為 a 、 b 、 c ，其中 $a \leq b \leq c$ 。且平行正三角柱底面之平面與正三角柱截出正三角形 $\triangle A'B'C'$ ，設所求正三角柱存在且其底面邊長為 x ，如圖 14。

將 $\triangle ABC$ 平移，使其點 B 與與 B' 重合，如圖 15。

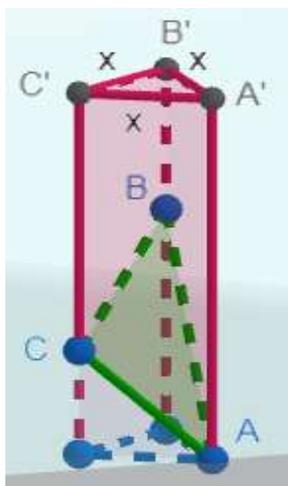


圖 14

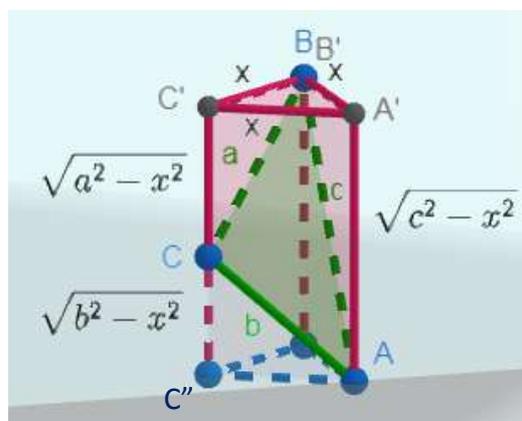


圖 15：將 B 與 B' 重合進行推導

直角 $\Delta BCC'$ 中，由畢氏定理可得 $\overline{CC'} = \sqrt{a^2 - x^2}$ ；

同理， $\overline{CC''} = \sqrt{b^2 - x^2}$ 、 $\overline{AA'} = \sqrt{a^2 - x^2}$

$\therefore \overline{CC'} + \overline{CC''} = \overline{AA'}$ ，可得 $\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{c^2 - x^2}$

平方展開： $a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2b^2 - a^2x^2 - b^2x^2 + x^4} = c^2 + x^2$

$$\Rightarrow 4(a^2b^2 - a^2x^2 - b^2x^2 + x^4) = (c^2 + x^2 - a^2 - b^2)^2$$

$$\Rightarrow 3x^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)x^2 - (a^4 + b^4 + c^4) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2) \pm 2\sqrt{\frac{1}{2}[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2]}}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 \pm \sqrt{2[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2]}}{3}$$

討論：

(1) 若 $a = b = c$ ，則 $\sqrt{2[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2]} = 0$

得 $x^2 = \frac{3a^2}{3} = a^2 \therefore x = \pm a$ (負不合)

即 $x = a = b = c$ (ΔABC 即為正三角柱的底面大小，視為垂直投影)

(2) 若 a 、 b 、 c 不完全相等，則 $\sqrt{2[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2]} > 0$

當 $x^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2]}}{3} > \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} > \frac{3a^2}{3} = a^2$ (不合)

故 $x^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - \sqrt{2[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2]}}{3}$

得 $x = \pm \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + c^2) - \sqrt{2[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2]}}{3}}$ ，負不合

其中，分子的部分：

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2]$$

$$\begin{aligned}
&= -3(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2) \\
&= 3(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c) > 0 \text{ 恆正} \\
\therefore a^2 + b^2 + c^2 - \sqrt{2[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2]} > 0 \\
\text{即 } x &= \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + c^2) - \sqrt{2[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2]}}{3}} \text{ 存在且唯一，得證。}
\end{aligned}$$

(二) 初始 n 邊形反推正 n 角柱

承上，將正三角柱推廣到正 n 角柱，利用「拿破崙初始 n 邊形 SAS 作圖法」的概念，將其反推，可以延伸得到定理四。

【定理四】若拿破崙初始 n 邊形為一平面 E 與正 n 角柱之截痕，則該正 n 角柱必唯一存在。

由【定理一】，本命題可簡化考慮：若已知拿破崙初始 n 邊形的相鄰兩邊及其夾角，則該正 n 角柱必唯一存在，(如圖 16)，利用【定理三】給出一般化證明。

【證明】

設正 n 邊形 $P_1P_2P_3\dots P_n$ 及正 n 邊形 $P'_1P'_2P'_3\dots P'_n$ 分別為正 n 角柱的底面與頂面。

設拿破崙初始 n 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_n$ 中，已知 $\overline{A_2A_1}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\angle A_1A_2A_3$ 。

如圖 17，平移 n 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_n$ ，使 A_2 與 P_2 重合，因由相鄰兩邊及其夾角就可得到其完整的拿破崙初始 n 邊形，所以只需要考慮 $\Delta A_1A_2A_3$ 及其對應的 $\Delta P_1P_2P_3$ ，而 $\Delta A_1A_2A_3$ 可視為以 $\Delta P_1P_2P_3$ 為底面的三角柱與一平面截出來的圖形，再利用【定理三】的計算方式求解。

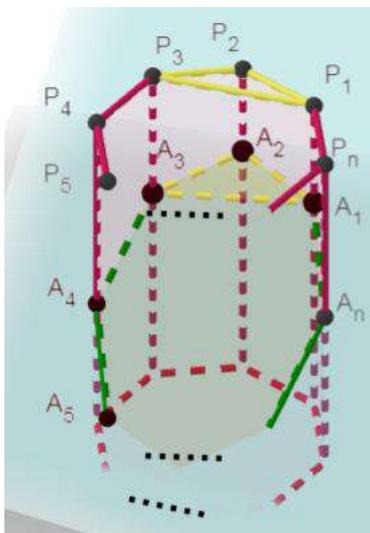


圖 16

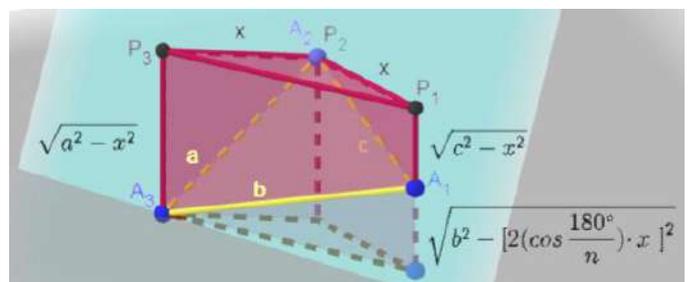


圖 17

設 $\overline{A_2A_3} = a$, $\overline{A_1A_2} = c$, $\angle A_1A_2A_3 = \theta$, $b = \overline{A_1A_3} = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta}$, $d = \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$,

設正 n 角柱底面邊長 $= \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = x$, $\overline{P_1P_3} = 2dx$

(1) 當 $c \geq a$ 且 $c \geq b$ 時

設 $a \leq b \leq c$, 則 $0 < x \leq a$

$$\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{b^2 - (2dx)^2}$$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 + 2\sqrt{a^2c^2 - a^2x^2 - c^2x^2 + x^4} = b^2 + (2 - 4d^2)x^2$$

$$\Rightarrow 4(a^2c^2 - a^2x^2 - c^2x^2 + x^4) = [(b^2 - a^2 - c^2) + (2 - 4d^2)x^2]^2$$

$$\Rightarrow (16d^4 - 16d^2)x^4 + (4b^2 - 8b^2d^2 + 8a^2d^2 + 8c^2d^2)x^2 + (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 - 2a^2b^2) = 0$$

$$\Rightarrow 16d^2(d^2 - 1)x^4 + 4[b^2 + 2d^2(a^2 + c^2 - b^2)]x^2 + (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{-4[b^2 + 2d^2(a^2 + c^2 - b^2)] \pm \sqrt{16[b^2 + 2d^2(a^2 + c^2 - b^2)]^2 - 64d^2(d^2 - 1)(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2)}}{32d^2(d^2 - 1)}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{-[b^2 + 2d^2(a^2 + c^2 - b^2)] \pm \sqrt{[b^2 + 2d^2(a^2 + c^2 - b^2)]^2 - 4d^2(d^2 - 1)(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2)}}{8d^2(d^2 - 1)}}$$

(負不合)

(2) 當 $b \leq a$ 或 $b \leq c$ 時

設 $a \leq b \leq c$,

$$\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{b^2 - (2dx)^2} = \sqrt{c^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - 4d^2x^2 + 2\sqrt{a^2b^2 - 4a^2d^2x^2 - b^2x^2 + 4d^2x^4} = c^2$$

$$\Rightarrow 4(a^2b^2 - 4a^2d^2x^2 - b^2x^2 + 4d^2x^4) = (c^2 - a^2 - b^2 + 4d^2x^2)^2$$

$$\Rightarrow 4(a^2b^2 - 4a^2d^2x^2 - b^2x^2 + 4d^2x^4) = a^4 + b^4 + c^4 + 16d^4x^4 + 2(a^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2 + 4c^2d^2x^2 - 4a^2d^2x^2 - 4b^2d^2x^2)$$

$$\Rightarrow 16(a^2b^2 - 4a^2d^2x^2 - b^2x^2 + 4d^2x^4) = a^4 + b^4 + c^4 + 16d^4x^4 + 2(a^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2 + 4c^2d^2x^2 - 4a^2d^2x^2 - 4b^2d^2x^2)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 16d^2(1-d^2)x^4 + 4(-2a^2d^2 - 2c^2d^2 + 2b^2d^2 - b^2)x^2 - (a^4 + b^4 + c^4) - 2(-a^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2) = 0 \\
&\Rightarrow 16(d^4 - d^2)x^4 + 4[2d^2(a^2 + c^2 - b^2) + b^2]x^2 + [a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)] = 0 \\
&\Rightarrow x^2 = \pm \frac{-4[2d^2(a^2 + c^2 - b^2) + b^2] \pm \sqrt{16[2d^2(a^2 + c^2 - b^2) + b^2]^2 - 64(d^4 - d^2)[a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)]}}{32(d^4 - d^2)} \\
&\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-[2d^2(a^2 + c^2 - b^2) + b^2] \pm \sqrt{[2d^2(a^2 + c^2 - b^2) + b^2]^2 - 4(d^4 - d^2)[a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)]}}{8d^2(d^2 - 1)}} \\
&\Rightarrow x = \sqrt{\frac{-[2d^2(a^2 + c^2 - b^2) + b^2] + \sqrt{[2d^2(a^2 + c^2 - b^2) + b^2]^2 - 4(d^4 - d^2)[a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)]}}{8d^2(d^2 - 1)}}
\end{aligned}$$

故正 n 角柱必唯一存在，得證。

陸、延伸討論

由上述研究過程，我們發現一些值得深入探討的問題，分別探究如後。

一、固定相鄰兩邊及一夾角，以 SAS 作圖反推正 n 邊形或初始 n 邊形關係之探討

由「拿破崙初始 n 邊形 SAS 作圖法」：已知兩邊及其夾角，則作圖所得的初始 n 邊形唯一存在。我們嘗試利用同一組 SAS，重複作圖，得到拿破崙初始四、五、六、七、八邊形，如圖 18，觀察這些拿破崙多邊形彼此的關係，並將觀察到的發現給出定理六、定理七。

已知兩邊 \overline{PQ} 、 \overline{QR} 及夾角 $\angle PQR$ ，以 SAS 作圖法反推邊數 n ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$) 的拿破崙初始 n 邊形，且拿破崙初始偶數邊形之平分對角線交點為重心，拿破崙初始奇數邊形的頂點與對應邊中點之連線的交點為重心。

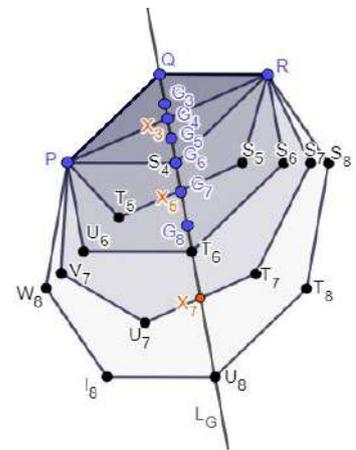


圖 18

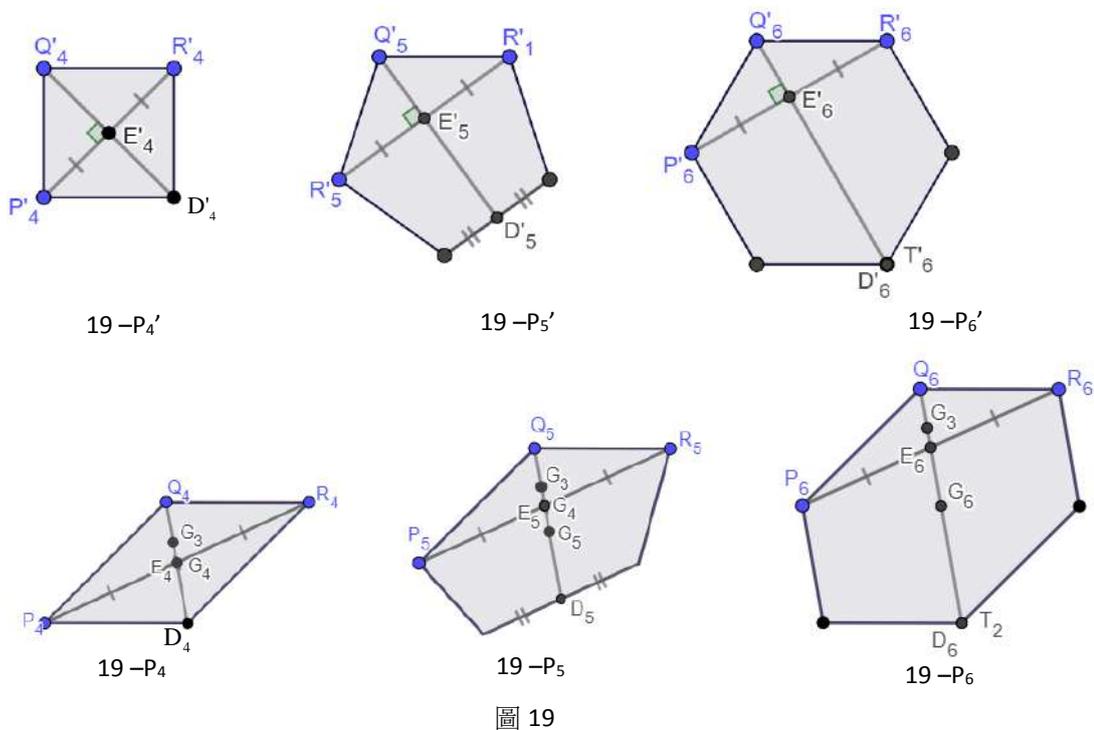
【定理五】 已知兩邊 \overline{PQ} 、 \overline{QR} 及夾角 $\angle PQR$ ，以 SAS 作圖法反推拿破崙初始 n 邊形 ($n \geq 3, n \in N$)，則所得的拿破崙初始 n 邊形的重心 G_n ($n \geq 3, n \in N$) 共線。

【證明】

將圖 18 的拿破崙初始四、五、六邊形折解如圖 19。

圖 19- P_4 、19- P_5 、19- P_6 為 \overline{PQ} 、 \overline{QR} 和 $\angle PQR$ 所做的拿破崙初始四、五、六邊形，而圖 19- P'_4 、19- P'_5 、19- P'_6 為圖 20- P_4 、20- P_5 、20- P_6 對應的正 n 角柱底面。

利用拿破崙初始 n 邊形與正 n 角柱的對應關係， P'_n 、 Q'_n 、 R'_n 、 D'_n 、 E'_n ($n \geq 3, n \in N$) 為 P_n 、 Q_n 、 R_n 、 D_n 、 E_n ($n \geq 3, n \in N$) 投影到角柱底面上的點。



$\because Q'_n, D'_n, E'_n$ 皆在 $\overline{P'_n R'_n}$ 的中垂線上 ($n \geq 3, n \in N$)

$\therefore Q_n, D_n, E_n$ 三點共線 ($n \geq 3, n \in N$) $\cdots\cdots$ (I)

\because $\begin{cases} \text{當為奇數時, } G_n (n \geq 3, n \in N) \text{ 為拿破崙初始邊形各頂點至對邊中點連線交點} \\ \text{當為偶數時, } G_n (n \geq 3, n \in N) \text{ 為拿破崙初始邊形平分對角線交點} \end{cases}$

$\therefore Q_n, G_n, D_n$ 共線 ($n \geq 3, n \in N$) $\cdots\cdots$ (II)

由 (I)、(II)： Q_n, G_n, E_n, D_n 共線 ($n \geq 3, n \in N$)

$\Rightarrow G_n \in \overline{QE}$

\Rightarrow 固定 ΔPQR ，則所得的拿破崙初始 n 邊形的重心 G_n ($n \geq 3, n \in N$) 共線，得證。

二、拿破崙初始 n 邊形所在平面與正 n 角柱底面的夾角探討

由於拿破崙初始 n 邊形均為正 n 角柱與一平面之截痕，我們好奇：平面如何與正 n 角柱相交，才能截出我們要的拿破崙初始 n 邊形？

圖 20 為截面 E_1 與底面所在平面 E_2 夾角示意圖，在此利用面積比值求得兩平面夾角的餘弦值，分別以任意三角形以及拿破崙初始 n 邊形敘述如後。

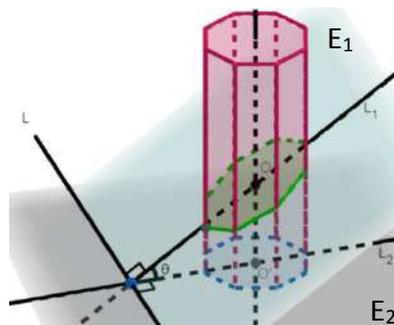


圖 20：截面與底面夾角示意圖

(一)任意三角形

設三角形的三邊長為 a 、 b 、 c ，三角形所在平面與三角柱底面夾角為 θ ，如圖 21

$$\cos \theta = \frac{\text{正三角柱底面積}}{\text{平面截出三角形面積}} \quad (\text{利用定理三以及海龍公式代入})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{12} \left[(a^2 + b^2 + c^2) - \sqrt{2 \left[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \right]} \right]}{\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2} \right) \cdot \left(\frac{b+c-a}{2} \right) \cdot \left(\frac{a+c-b}{2} \right) \cdot \left(\frac{a+b-c}{2} \right)}} \\ &= \frac{\sqrt{3} \left[(a^2 + b^2 + c^2) - \sqrt{2 \left[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \right]} \right]}{3\sqrt{(a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c)}} \end{aligned}$$

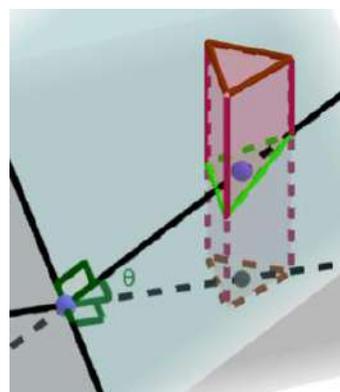


圖 21：三角形截面與底面夾角示意圖

(二)拿破崙初始 n 邊形

拿破崙初始 n 邊形中，由【定理一】給定兩邊夾一角，進行截面與底面夾角的計算。

已知 $\Delta A_1 A_2 A_3$ ，設 $\overline{A_2 A_3} = a$ ， $\overline{A_1 A_2} = c$ ， $\angle A_1 A_2 A_3 = \delta$ ，

$$b = \overline{A_1 A_3} = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \delta}, \quad d = \cos \left(\frac{180^\circ}{n} \right),$$

拿破崙初始 n 邊形所在平面與正 n 角柱底邊夾角為 θ 且 $(0^\circ \leq \theta < 90^\circ)$ ，圖 22 為以拿破崙初始八邊形為例的示意圖，推導截面與底面夾角餘弦值的一般式。

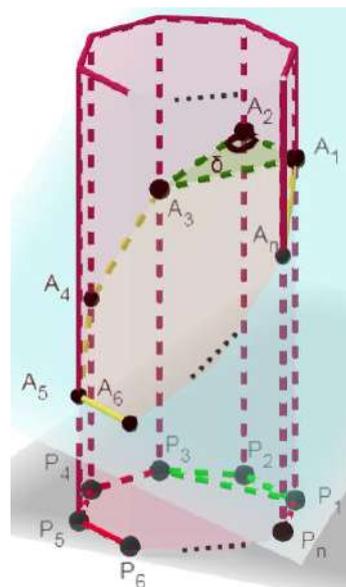


圖 22

由【定理四】， $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3}$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{-\left[2d^2(a^2+c^2-b^2)+b^2\right]+\sqrt{\left[2d^2(a^2+c^2-b^2)+b^2\right]^2-4(d^4-d^2)\left[a^4+b^4+c^4-2(a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2)\right]}}{8d^2(d^2-1)}} \\
 \cos \theta &= \frac{\text{正}n\text{角柱底面積}}{\text{拿破崙初始}n\text{邊形面積}} = \frac{\text{初始}n\text{邊形上3頂點對應角柱底面3點所圍成三角形面積}}{\text{拿破崙初始}n\text{邊形任意相鄰3頂點所圍成三角形面積}} \\
 &= \frac{\Delta P_1P_2P_3 \text{面積}}{\Delta A_1A_2A_3 \text{面積}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_2P_3} \cdot \sin \angle P_1P_2P_3}{\frac{1}{2} \cdot \overline{A_2A_1} \cdot \overline{A_2A_3} \cdot \sin \angle A_1A_2A_3}, \quad \sin \angle P_1P_2P_3 = \sin \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = \sin \frac{360^\circ}{n} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{-\left[2d^2(a^2+c^2-b^2)+b^2\right]+\sqrt{\left[2d^2(a^2+c^2-b^2)+b^2\right]^2-4(d^4-d^2)\left[a^4+b^4+c^4-2(a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2)\right]}}{8d^2(d^2-1)}}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \delta} \cdot \sin \left(\frac{360^\circ}{n}\right) \\
 &= \frac{-\left[2d^2(a^2+c^2-b^2)+b^2\right]+\sqrt{\left[2d^2(a^2+c^2-b^2)+b^2\right]^2-4d^2(d^2-1)\left[a^4+b^4+c^4-2(a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2)\right]}}{8d^2(d^2-1)} \cdot \sin \left(\frac{360^\circ}{n}\right) \\
 &= \frac{\left\{-\left[2d^2(a^2+c^2-b^2)+b^2\right]+\sqrt{\left[2d^2(a^2+c^2-b^2)+b^2\right]^2-4d^2(d^2-1)\left[a^4+b^4+c^4-2(a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2)\right]}\right\} \cdot 2 \cdot d \cdot \sqrt{1-d^2}}{8d^2(d^2-1) \cdot a \cdot c \cdot \sin \delta} \\
 &= \frac{\left[2d^2(a^2+c^2-b^2)+b^2\right]-\sqrt{\left[2d^2(a^2+c^2-b^2)+b^2\right]^2-4d^2(d^2-1)\left[a^4+b^4+c^4-2(a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2)\right]}}{4d\sqrt{(1-d^2)}} \cdot a \cdot c \cdot \sin \delta
 \end{aligned}$$

三、拿破崙初始 n 邊形所推得的拿破崙正 n 邊形與正 n 角柱底面的關係

在觀察拿破崙初始 n 邊形與拿破崙正 n 邊形以及正 n 角柱時，我們發現只要在角柱與截面角度固定的情況下，得出來的拿破崙正 n 邊形皆會全等。為利表達，我們錄製動態影片，並整理為定理六及給出證明。

【定理六】 若正 n 角柱與截面角度固定，則所截的拿破崙初始 n 邊形，其所對應的拿破崙正 n 邊形皆全等。

【證明】

設平面 E 為空間中一包含 x 軸的平面，且平面 E 的法向量與 y 軸正向的夾角為 α ，其中 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ，如圖 23，

則平面 $E : \cos \alpha \cdot y + \sin \alpha \cdot z = 0$ 。

已知正 n 角柱以 z 軸為中心軸，其與正 n 角柱的稜線所在直線均垂直於 xy 平面，分別為 $L_k, k = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

$$\text{則 } L_k : \begin{cases} x = \cos(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}) \\ y = \sin(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}), \quad t_k \in \mathbb{R}, 0^\circ \leq \theta < 2\pi, \\ z = t_k \end{cases}$$

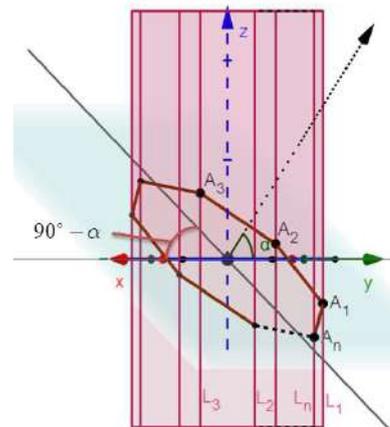


圖 23

所以正 n 角柱與平面 E 所交的拿破崙初始 n 邊形的頂點為

$$P_k \left(\cos(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}), \sin(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}), -\frac{\cos \alpha \cdot \sin(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n})}{\sin \alpha} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

將點 $P_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 繞 x 軸旋轉 $(90^\circ - \alpha)$ 得到點 $P'_k (k = 1, 2, \dots, n)$ ，如圖 24，

則點 P'_k 的 x 坐標與 P_k 的 x 坐標相同，

而 P'_k 點的 y 、 z 坐標的變換公式為：

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos(90^\circ - \alpha) & -\sin(90^\circ - \alpha) \\ \sin(90^\circ - \alpha) & \cos(90^\circ - \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \cdot y - \cos \alpha \cdot z \\ \cos \alpha \cdot y + \sin \alpha \cdot z \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

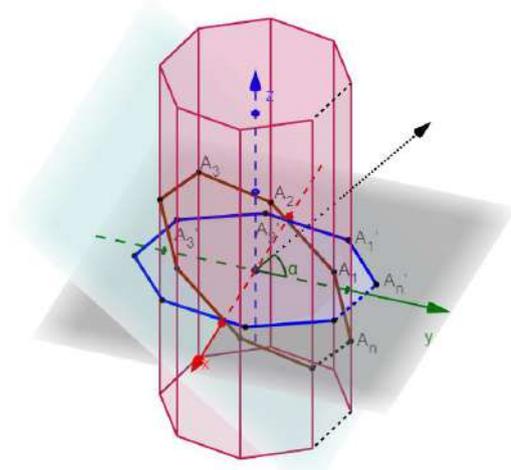


圖 24

所以點

$$P'_k \left(\cos(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}), \frac{\sin(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n})}{\sin \alpha}, 0 \right), \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots \dots \dots (\star) \text{式}$$

由於點 P'_k , $k=1,2,\dots,n$, 皆落在 xy 平面上，
故可將 P'_k , $k=1,2,\dots,n$ 轉換到複數平面上，如圖 25。

$$\text{設 } \omega_k = \left(\cos\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right) + i \frac{\sin\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right)}{\sin \alpha} \right), \quad k=1,2,\dots,n,$$

且每邊 $\overline{\omega_k \omega_{k+1}}$ 之外接正 n 邊形中心分別為 Z_k ,
 $k=1,2,\dots,n-1$, $\overline{\omega_n \omega_1}$ 之外接正 n 邊形中心分別為
 Z_n ,

$$\text{則 } \begin{cases} Z_k = \omega_k + r(\omega_{k+1} - \omega_k) \\ Z_n = \omega_n + r(\omega_1 - \omega_n) \end{cases}, \quad k=1,2,\dots,n-1, \text{ 其中}$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \left(\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)\right) + i \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)\right) \right) \\ &= \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - i \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right), \end{aligned}$$

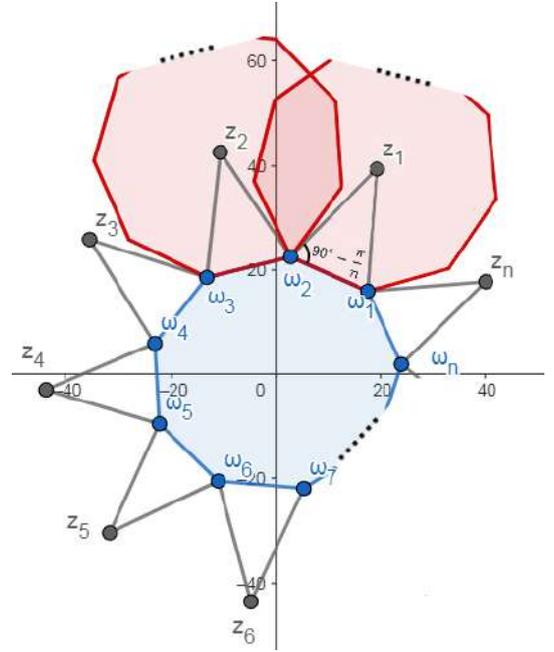


圖 25

由於 $\omega_{k+1} - \omega_k$

$$\begin{aligned} &= \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) - \cos\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right) + \frac{i}{\sin \alpha} \left(\sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) - \sin\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right) \right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \left[-\sin\left(\theta + \frac{(2k-1)\pi}{n}\right) + \frac{i}{\sin \alpha} \cos\left(\theta + \frac{(2k-1)\pi}{n}\right) \right], \end{aligned}$$

因此 $r(\omega_{k+1} - \omega_k)$

$$\begin{aligned} &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - i \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \times \left[-\sin\left(\theta + \frac{(2k-1)\pi}{n}\right) + \frac{i}{\sin \alpha} \cdot \cos\left(\theta + \frac{(2k-1)\pi}{n}\right) \right] \\ &= -\sin\left(\theta + \frac{(2k-1)\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{\cos\left(\theta + \frac{(2k-1)\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin \alpha} \\ &\quad + i \left[\sin\left(\theta + \frac{(2k-1)\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{\cos\left(\theta + \frac{(2k-1)\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin \alpha} \right], \end{aligned}$$

根據積化和差公式推得

$$r(\omega_{k+1} - \omega_k) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) - \cos\left(\theta + \frac{(2k-2)\pi}{n}\right) + \frac{\cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) + \cos\left(\theta + \frac{(2k-2)\pi}{n}\right)}{\sin \alpha} \right] + \frac{i}{2} \left[\sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\theta + \frac{(2k-2)\pi}{n}\right) + \frac{\sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) - \sin\left(\theta + \frac{(2k-2)\pi}{n}\right)}{\sin \alpha} \right]$$

因此 $Z_k = \omega_k + r(\omega_{k+1} - \omega_k)$ ，其中 $k = 1, 2, \dots, n-1$ ，

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \left[\cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) + \cos\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right) \right] + \frac{i}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \left[\sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right) \right] ,$$

可知

$$|Z_k| = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \sqrt{\left[\cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) + \cos\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right) \right]^2 + \left[\sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right) \right]^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \sqrt{1 + \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)\cos\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right) + \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right)} ,$$

利用和角公式，可得到

$$|Z_k| = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \sqrt{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)} , \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \text{-----}(\ast)$$

接著考慮 $Z_n = \omega_n + r(\omega_1 - \omega_n)$ ，

$$\text{已知 } \omega_1 = \cos \theta + i \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} ,$$

$$\omega_n = \cos\left(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i \frac{\sin\left(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}{\sin \alpha} = \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right) + i \frac{\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)}{\sin \alpha} ,$$

$$\text{可得到 } \omega_1 - \omega_n = \cos \theta - \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right) + i \frac{\sin \theta - \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)}{\sin \alpha}$$

$$\omega_1 - \omega_n = 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \left[-\sin\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) + i \frac{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right)}{\sin \alpha} \right],$$

所以 $r(\omega_1 - \omega_n)$

$$\begin{aligned} &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - i \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \left[-\sin\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) + i \frac{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right)}{\sin \alpha} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \theta - \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right) + \frac{\cos \theta + \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)}{\sin \alpha} \right] + \frac{i}{2} \left[\sin \theta + \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right) + \frac{\sin \theta - \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)}{\sin \alpha} \right] \end{aligned}$$

因此 $Z_n = \omega_n + r(\omega_1 - \omega_n)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[\cos \theta + \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right) + \frac{\cos \theta + \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)}{\sin \alpha} \right] + \frac{i}{2} \left[\sin \theta + \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right) + \frac{\sin \theta + \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right)}{\sin \alpha} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \left[\cos \theta + \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right) \right] + \frac{i}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \left[\sin \theta + \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

$$|Z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \sqrt{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \text{-----}(\ast\ast\ast),$$

由 $(\ast)(\ast\ast\ast)$ 可以得知 $|Z_1| = |Z_2| = \dots = |Z_n|$ ，拿破崙正 n 邊形的邊長**僅受 α 影響**。

所以當平面 E 與正 n 角柱底面截角固定時，所截得的拿破崙初始 n 邊形對應之拿破崙正 n 邊形皆全等，得證。

四、拿破崙初始 n 邊形的頂點共橢圓

拿破崙初始 n 邊形除了平行判別性質，我們還發現拿破崙初始 n 邊形的頂點，都在同一個橢圓上。參考資料(二)中僅提及「拿破崙初始多邊形的頂點會在同一個橢圓上」，但並未加以證明，而我們給了兩個證明方法。首先，由【定理七】的證明過程中，我們發現了拿破崙初始多邊形的頂點會在同一個橢圓上；此外，由本研究的【定理三】、【定理四】發想，利用空間中正 n 角柱唯一存在的性質亦可得證。

【定理七】 拿破崙初始 n 邊形的頂點共橢圓。

【證明一】：

在本研究【定理六】第 18 頁(★)式， n 邊形 $P'_1P'_2\dots P'_n$ 為拿破崙初始 n 邊形，

其頂點 $P'_k \left(\cos\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right), \frac{\sin\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right)}{\sin \alpha}, 0 \right)$, $k=1, 2, \dots, n$ ，可知頂點均落在 xy

坐標平面上，且頂點 P'_k 均落在橢圓 $x^2 + \sin \alpha \cdot y^2 = 1$ 方程式上，得證拿破崙初始 n 邊形之頂點共橢圓。

【證明二】：

已知正 n 角柱與任意平面之截面均為拿破崙初始 n 邊形，且圓柱可內接正 n 角柱(圖 26 所示為圓柱內接正八角柱)，由參考資料(三)中，可知「圓柱與非平行圓柱底面的平面所截之曲線為橢圓」，得證：拿破崙初始 n 邊形之頂點共橢圓。

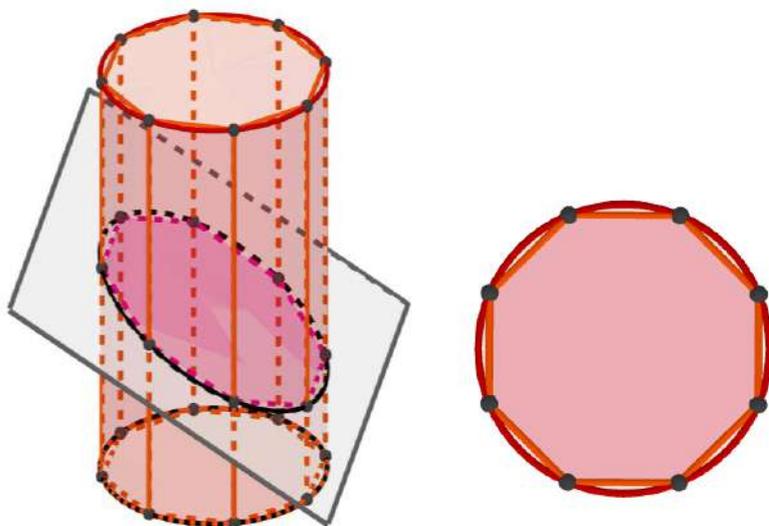


圖 26：以圓柱內接正八角柱，並被一平面所截示意圖

五、拿破崙初始 n 邊形的外擴效應

由【拿破崙定理】：「以任意三角形各邊分別向外側作正三角形，則它們的中心(三中心)連線必構成一個正三角形。」我們嘗試更改「正三角形」為「相似三角形」，套用在其他拿破崙初始 n 邊形上($n \geq 4$)，發現其外擴的頂點或相似三角形的重心，所形成的多邊形亦為拿破崙初始多邊形。

如圖 27，以拿破崙初始四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 各邊向外側作相似三角形，使 $\Delta A_1'A_1A_2 \sim \Delta A_2'A_2A_3 \sim \Delta A_3'A_3A_4 \sim \Delta A_4'A_4A_1$ ，以四邊形 $A_1'A_2'A_3'A_4'$ 各邊向外側作正方形，其中心連線形成正方形 $P_1'P_2'P_3'P_4'$ ，即四邊形 $A_1'A_2'A_3'A_4'$ 亦為拿破崙初始四邊形。

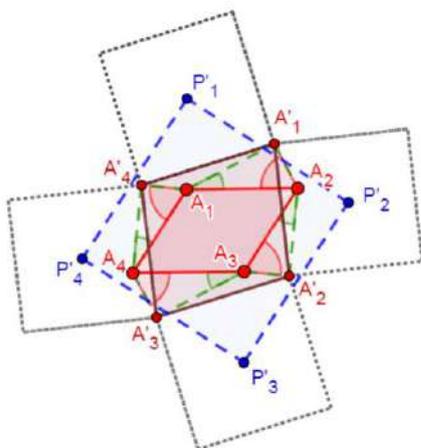


圖 27

我們先從考慮 $n = 5$ 的特殊化命題開始嘗試並證明如下：

【命題】已知五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 為拿破崙初始五邊形，以其各邊向外側作相似三角形，使

$$\Delta A_1A_2A_1' \sim \Delta A_2A_3A_2' \sim \Delta A_3A_4A_3' \sim \Delta A_4A_5A_4' \sim \Delta A_5A_1A_5'$$

試證：五邊形 $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$ 為拿破崙初始五邊形。

【證明】

1. 已知五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 為拿破崙初始五邊形，由拿破崙 n 邊形平行判別性質：

$$\overline{A_1A_2} \parallel \overline{A_3A_5}, \overline{A_2A_3} \parallel \overline{A_1A_4}, \overline{A_3A_4} \parallel \overline{A_2A_5}, \overline{A_2A_5} \parallel \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_5} \parallel \overline{A_2A_4}, \text{ 如圖 28。}$$

$$\text{所求 } \frac{\overline{A_4A_5}}{\overline{A_1A_3}} = \frac{\overline{A_3G}}{\overline{A_1G + GA_3}} = \frac{k\overline{A_2A_3}}{k\overline{A_1F} + k\overline{A_2A_3}}, \quad k \in R$$

$$(\Delta GA_1F \sim \Delta GA_3A_2 \text{ (AA 相似)})$$

$$\frac{\overline{A_4A_5}}{\overline{A_1A_3}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_1F + A_2A_3}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_1F + A_4F}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_1A_4}},$$

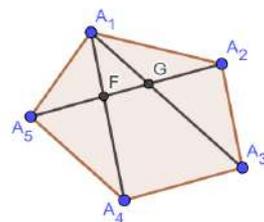


圖 28

同理， $\frac{\overline{A_1A_2}}{A_3A_5} = \frac{\overline{A_2A_3}}{A_1A_4} = \frac{\overline{A_3A_4}}{A_2A_5} = \frac{\overline{A_4A_5}}{A_1A_3} = \frac{\overline{A_1A_5}}{A_2A_4}$ 。

2. 設點 $A_1(\omega_1)$ 、 $A_2(\omega_2)$ 、 $A_3(\omega_3)$ 、 $A_4(\omega_4)$ 、 $A_5(\omega_5)$ 為複數平面上五點，如圖 29

∴ 五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 為拿破崙初始五邊形，

且 $\frac{\overline{A_1A_2}}{A_3A_5} = \frac{\overline{A_2A_3}}{A_1A_4} = \frac{\overline{A_3A_4}}{A_2A_5} = \frac{\overline{A_4A_5}}{A_1A_3} = \frac{\overline{A_1A_5}}{A_2A_4}$ (如 1. 所證)

$$\therefore \begin{cases} \omega_2 - \omega_1 = t(\omega_5 - \omega_3) \\ \omega_3 - \omega_2 = t(\omega_1 - \omega_4) \\ \omega_4 - \omega_3 = t(\omega_2 - \omega_5) \\ \omega_5 - \omega_4 = t(\omega_3 - \omega_1) \\ \omega_1 - \omega_5 = t(\omega_4 - \omega_2) \end{cases}, t \in R, \dots\dots(\text{甲})$$

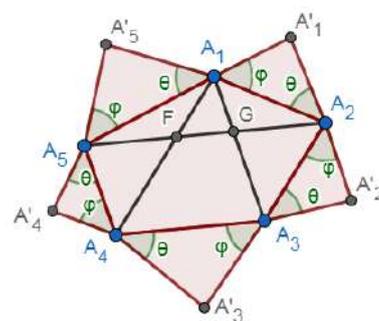


圖 29

設點 $A_1'(\omega_6)$ 、 $A_2'(\omega_7)$ 、 $A_3'(\omega_8)$ 、 $A_4'(\omega_9)$ 、 $A_5'(\omega_{10})$ 為複數平面上五點，

$$\text{則} \begin{cases} \omega_6 = \omega_1 + \omega(\omega_2 - \omega_1) \\ \omega_7 = \omega_2 + \omega(\omega_3 - \omega_2) \\ \omega_8 = \omega_3 + \omega(\omega_4 - \omega_3) \\ \omega_9 = \omega_4 + \omega(\omega_5 - \omega_4) \\ \omega_{10} = \omega_5 + \omega(\omega_1 - \omega_5) \end{cases} \dots\dots(\text{乙})$$

其中 $\omega = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ， $\varphi = \angle A_1'A_1A_2$ ， $r = \frac{\overline{A_1A_1'}}{A_1A_2}$ ，

$$\begin{aligned} \Rightarrow \omega_6 - \omega_{10} &= \omega_1 - \omega_5 + \omega(\omega_2 - \omega_1) - \omega(\omega_1 - \omega_5) \\ &= (\omega_1 - \omega_5)(1 - \omega) + \omega(\omega_2 - \omega_1) \\ &= t[(\omega_4 - \omega_2)(1 - \omega) + \omega(\omega_5 - \omega_3)] \text{, (由甲式代入)} \end{aligned}$$

又 ∵ $\omega_9 - \omega_7 = (\omega_4 - \omega_2)(1 - \omega) + \omega(\omega_5 - \omega_3)$ ，(由乙式推得)

∴ $\overline{A_1'A_5'} \parallel \overline{A_4'A_2'}$ ，

同理 $\overline{A_1'A_2'} \parallel \overline{A_5'A_3'}$ 、 $\overline{A_2'A_3'} \parallel \overline{A_4'A_1'}$ 、 $\overline{A_3'A_4'} \parallel \overline{A_5'A_2'}$ 、 $\overline{A_4'A_5'} \parallel \overline{A_1'A_3'}$

∴ 五邊形 $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$ 為拿破崙初始五邊形，得證。

我們嘗試利用上述 n=5 方法將其推廣到一般化，但窒礙難行，於是我們嘗試將其坐標化，利用【定理六】證明中的假設，先將截平面旋轉，再將其轉換至複數平面，並給出一般化的證明。

【定理八】以拿破崙初始 n 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_n$ 各邊分別向外側作相似三角形，使

$$\Delta A_1A_2B_1 \sim \Delta A_2A_3B_2 \sim \Delta A_3A_4B_3 \sim \dots \sim \Delta A_nA_1B_n, \text{ 如圖 30}$$

則它們外擴新頂點連線行程之 n 邊形 $B_1B_2B_3\dots B_n$ 亦為拿破崙初始 n 邊形。

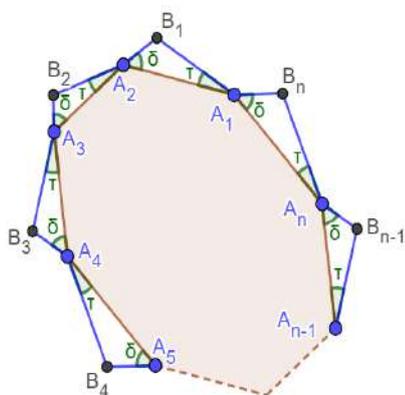


圖 30

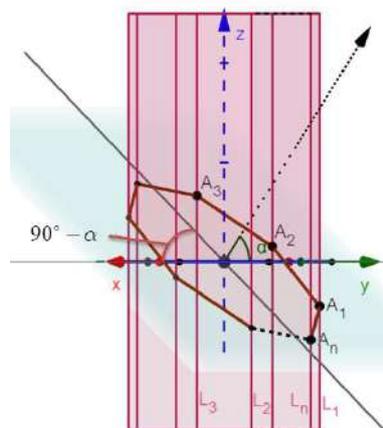


圖 31

【證明】

如同【定理六】，

我們假設平面 E 為空間中一包含 x 軸的平面，

且平面 E 的法向量與 y 軸正向的夾角為 α ，其中 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ，如圖 31，則平面 E ：

$$\cos \alpha \cdot y + \sin \alpha \cdot z = 0 \text{。}$$

已知正 n 角柱以 z 軸為中心軸，其與正 n 角柱的稜線所在直線均垂直於 xy 平面，

分別為 $L_k, k=1, 2, 3, \dots, n$ 。

$$\text{則 } L_k : \begin{cases} x = \cos(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}) \\ y = \sin(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}), \quad t_k \in \mathbb{R}, 0^\circ \leq \theta < 2\pi, \\ z = t_k \end{cases}$$

所以正 n 角柱與平面 E 所交的拿破崙初始 n 邊形的頂點為

$$A_k \left(\cos(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}), \sin(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}), -\frac{\cos \alpha \cdot \sin(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n})}{\sin \alpha} \right), \quad k=1, 2, \dots, n,$$

將點 $A_k (k=1, 2, \dots, n)$ 繞 x 軸旋轉 $(90^\circ - \alpha)$ 得到點 $A'_k (k=1, 2, \dots, n)$ ，則點 A'_k 的 x 坐標與 A_k 的 x 坐標相同，而 A'_k 點的 y 、 z 坐標的變換公式為：

$$\begin{bmatrix} \cos(90^\circ - \alpha) & -\sin(90^\circ - \alpha) \\ \sin(90^\circ - \alpha) & \cos(90^\circ - \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \cdot y - \cos \alpha \cdot z \\ \cos \alpha \cdot y + \sin \alpha \cdot z \end{bmatrix},$$

所以點 $A'_k \left(\cos\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right), \frac{\sin\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right)}{\sin\alpha}, 0 \right)$, $k=1, 2, \dots, n$,

由於點 A'_k , $k=1, 2, \dots, n$, 皆落在 xy 平面上, 故可將 A'_k , $k=1, 2, \dots, n$ 轉換到複數平面上。

設 $A'_k(\omega_k) = \cos\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right) + i \frac{\sin\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right)}{\sin\alpha}$, $k=1, 2, \dots, n$,

且設 B_k 為相似三角形頂點, 則

$$\begin{cases} B_k = \omega_k + \omega(\omega_{k+1} - \omega_k), & k=1, 2, \dots, n-1, \\ B_n = \omega_n + \omega(\omega_1 - \omega_n) \end{cases}$$

其中 $\omega = r(\cos(-\tau) + i\sin(-\tau))$,

$$\tau = \angle B_1 A'_1 A'_2, \quad r = \frac{\overline{A'_1 B_1}}{A'_1 A'_2}, \quad \text{如圖 32,}$$

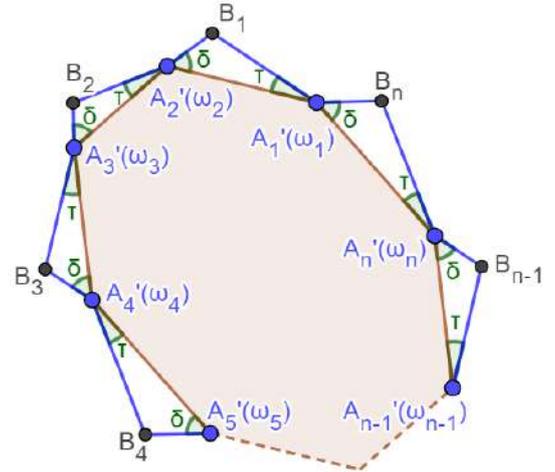


圖 32

若能證明 n 多邊形 $B_1 B_2 B_3 \dots B_n$ 滿足拿破崙平行判別性質, 則 $B_1 B_2 B_3 \dots B_n$ 為拿破崙初始 n 邊形, 那麼即可得證。

不失一般性, 假設 $1 \leq i, j \leq n$, 如圖 33,

考慮

$$B_i - B_j = (1-\omega)(\omega_i - \omega_j) + \omega(\omega_{i+1} - \omega_{j+1}), \quad \text{其中 } i \neq j,$$

$$B_{i+1} - B_{j-1} = (1-\omega)(\omega_{i+1} - \omega_{j-1}) + \omega(\omega_{i+2} - \omega_j), \quad i+1 \neq j-1,$$

$$\begin{aligned} \omega_i - \omega_j &= \cos\left(\theta + \frac{2(i-1)\pi}{n}\right) + \frac{i}{\sin\alpha} \sin\left(\theta + \frac{2(i-1)\pi}{n}\right) \\ &\quad - \cos\left(\theta + \frac{2(j-1)\pi}{n}\right) - \frac{i}{\sin\alpha} \sin\left(\theta + \frac{2(j-1)\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

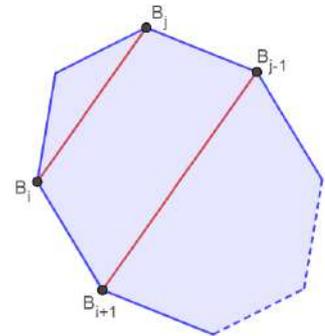


圖 33

利用和差化積公式, 可得

$$\begin{aligned} \omega_i - \omega_j &= -2 \sin\left(\theta + \frac{(i+j-2)\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{(i-j)\pi}{n}\right) + \frac{i}{\sin\alpha} \cdot 2 \cos\left(\theta + \frac{(i+j-2)\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{(i-j)\pi}{n}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{(i-j)\pi}{n}\right) \left[-\sin\left(\theta + \frac{(i+j-2)\pi}{n}\right) + \frac{i}{\sin\alpha} \cdot \cos\left(\theta + \frac{(i+j-2)\pi}{n}\right) \right], \end{aligned}$$

$$\omega_{i+1} - \omega_{j-1} = 2 \sin\left(\frac{(i-j+2)\pi}{n}\right) \left[-\sin\left(\theta + \frac{(i+j-2)\pi}{n}\right) + \frac{i}{\sin\alpha} \cdot \cos\left(\theta + \frac{(i+j-2)\pi}{n}\right) \right],$$

$$\text{所以 } \omega_{i+1} - \omega_{j-1} = \frac{\sin\left(\frac{(i-j+2)\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{(i-j)\pi}{n}\right)} (\omega_i - \omega_j),$$

若 $i+1 < 1, j-1 < 1, i+1 > n, j-1 > n$ ，則將下標 $i+1, j-1$ ，分別改為同餘 n 的值 $(i+1)', (j-1)'$ ，且 $1 \leq (i+1)', (j-1)' \leq n$ ；

$$\text{同理 } \omega_{i+2} - \omega_j = \frac{\sin\left(\frac{(i-j+2)\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{(i-j)\pi}{n}\right)} (\omega_{i+1} - \omega_{j+1}),$$

$$\text{可得到 } B_{i+1} - B_{j-1} = \frac{\sin\left(\frac{(i-j+2)\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{(i-j)\pi}{n}\right)} (B_i - B_j), \text{ 因此我們知道 } \overline{B_1 B_j} // \overline{B_{i+1} B_{j-1}},$$

根據拿破崙平行判別性質， $B_1 B_2 B_3 \dots B_n$ 為拿破崙初始 n 邊形，得證。

六、任意三角形皆可被正三角柱與一平面所截

拿破崙定理揭示任意三角形都存在拿破崙正三角形，而正 n 角柱與任一平面截痕所成皆為拿破崙初始 n 變形，我們不禁猜想：「任意三角形皆可被正三角柱與一平面所截」，利用幾何解析輔以代數求解，我們獲得此猜想的證實。

【定理九】 任意三角形皆可被正三角柱與一平面所截出。

【證明】

設正三角柱 $A_1' A_2' A_3' - A_1'' A_2'' A_3''$ 位於第一卦限， $\overline{A_2' A_3'} // \overline{A_2'' A_3''} // y$ 軸， $\overline{A_2' A_3'} = 2$ ，

令 $A_1(\sqrt{3}, 1, s)$ 、 $A_2(0, 2, t)$ 、 $A_3(0, 0, 0)$ ，如圖 34，

且 $\overline{A_1 A_2} = kc$ 、 $\overline{A_1 A_3} = kb$ 、 $\overline{A_2 A_3} = ka$ ， $s, t \in \mathbb{R}$

$$\text{則 } \begin{cases} \overline{A_1 A_2}^2 = (kc)^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 + (t-s)^2 \dots\dots ① \\ \overline{A_1 A_3}^2 = (kb)^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 + s^2 \dots\dots ② \\ \overline{A_2 A_3}^2 = (ka)^2 = 0^2 + 2^2 + t^2 \dots\dots ③ \end{cases}$$

由 ②+③-①

$$\text{得 } 2ts + 4 = a^2 k^2 + b^2 k^2 - c^2 k^2$$

$$\Rightarrow (2ts)^2 = \left[(a^2 + b^2 - c^2) k^2 - 4 \right]^2$$

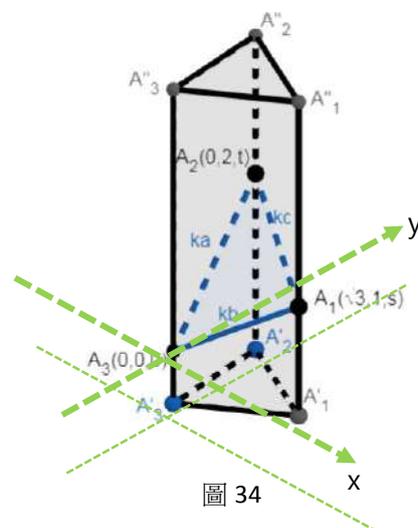


圖 34

$$\Rightarrow 4t^2s^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2k^4 - 8(a^2 + b^2 - c^2)k^2 + 16$$

由②③： $t^2 = a^2k^2 - 4$ 、 $s^2 = b^2k^2 - 4$ 代入

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 - c^2)^2k^4 - 8(a^2 + b^2 - c^2)k^2 + 16 - 4(a^2k^2 - 4)(b^2k^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \left[(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 \right] k^4 + 8(a^2 + b^2 + c^2)k^2 - 48 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{-8(a^2 + b^2 + c^2) \pm \sqrt{64(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 64 \cdot 3 \left[(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 \right]}}{2 \left[(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 \right]}$$

$$= \frac{4(a^2 + b^2 + c^2) \pm 4\sqrt{2((a^2 - c^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (b+c-a) \cdot (c+a-b)}$$

$\because a, b, c$ 為三角形三邊長，使得分母必為正

$$\therefore k^2 = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2) + 4\sqrt{2((a^2 - c^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (b+c-a) \cdot (c+a-b)} \text{ 必為正}$$

$\therefore k$ 恆有正實數解

綜合以上， $\exists k \in \mathbb{R}^+$ ，s.t. 底面邊長為 2 的正三角柱，能被平面截出邊長為 a, b, c 的相似三角形，因此任意三角形皆可被正三角柱與一平面所截出，得證。

柒、研究結果

一、拿破崙初始 n 邊形的存在性探討

(一)定理一：給定初始 n 邊形任意兩邊夾一角，則該初始 n 邊形必唯一存在。

(二)定理二：任一正 n 邊形必存在其拿破崙初始 n 邊形。

二、已知一拿破崙 n 邊形的其中相鄰兩邊為 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ ，夾角為 $\angle A_1A_2A_3$ ， $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ ，此

時，拿破崙正 n 邊形的邊長為 $\frac{\sqrt{\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + 2\cos(-\angle A_1A_2A_3 + \alpha) \cdot \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_2A_3}}}{2\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$ ，

$$\text{面積為 } \frac{n}{4} \times \tan\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \times \left[\frac{\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + 2\cos(-\angle A_1A_2A_3 + \alpha) \times \overline{A_1A_2} \times \overline{A_2A_3}}{4\cos^2\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} \right]。$$

三、由拿破崙初始 n 邊形所在平面反推正 n 角柱

(一) 定理三：若已知三角形為平面與正三角柱之截痕，則該正三角柱必唯一存在

(二) 定理四：若拿破崙初始 n 邊形為一平面 E 與正 n 角柱之截痕，則該正 n 角柱必唯一存在。

四、拿破崙初始 n 邊形的重心共線

定理五：已知兩邊 \overline{PQ} 、 \overline{QR} 及夾角 $\angle PQR$ ，以 *SAS* 作圖法反推拿破崙初始 n 邊形

($n \geq 3, n \in N$)，則所得的拿破崙初始 n 邊形的重心 G_n ($n \geq 3, n \in N$) 共線。

五、拿破崙初始 n 邊形所在平面與正 n 角柱底面的夾角探討

(一) 三角形所在平面與正三角柱底面夾角

設此三角形邊長為 a 、 b 、 c ，三角形所在平面與正三角柱底面夾角為 θ

($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)，則

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3} \left[(a^2 + b^2 + c^2) - \sqrt{2 \left[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \right]} \right]}{3\sqrt{(a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c)}}$$

(二) 拿破崙初始 n 邊形所在平面與正 n 角柱底面夾角

取拿破崙初始 n 邊形的其中相鄰兩邊所成 $\Delta A_1 A_2 A_3$ ，設 $\overline{A_2 A_3} = a$ ， $\overline{A_1 A_2} = c$ ，

$\angle A_1 A_2 A_3 = \delta$ ， $b = \overline{A_1 A_3} = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \delta}$ ， $d = \cos \left(\frac{180^\circ}{n} \right)$ ，則拿破崙初始 n 邊形

所在平面與正 n 角柱底面夾角為 θ 且 ($0^\circ \leq \theta < 90^\circ$)，此時

$$\cos \theta = \frac{\left[2d^2(a^2 + c^2 - b^2) + b^2 \right] - \sqrt{\left[2d^2(a^2 + c^2 - b^2) + b^2 \right]^2 - 4d^2(d^2 - 1) \left[a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2 c^2 + b^2 c^2 + a^2 b^2) \right]}}{4d \sqrt{(1-d^2)} \cdot a \cdot c \cdot \sin \delta}$$

六、拿破崙初始 n 邊形所推得的拿破崙正 n 邊形與正 n 角柱底面的關係

定理六：若正 n 角柱與截面角度固定，則所截的拿破崙初始 n 邊形，其所對應的拿破崙正 n 邊形皆全等。

七、拿破崙初始 n 邊形的性質

定理七：拿破崙初始 n 邊形的頂點共橢圓。

八、拿破崙初始 n 邊形的外擴效應

定理八：以拿破崙初始 n 邊形 $A_1A_2A_3\dots A_n$ 各邊分別向外側作相似三角形，使

$$\Delta A_1A_2B_1 \sim \Delta A_2A_3B_2 \sim \Delta A_3A_4B_3 \sim \dots \sim \Delta A_nA_1B_n,$$

則它們外擴新頂點連線行程之 n 邊形 $B_1B_2B_3\dots B_n$ 亦為拿破崙初始 n 邊形。

九、**定理九：**任意三角形皆可被正三角柱與一平面所截出。

捌、未來展望

利用解析幾何，成功證明任一三角形皆可為一正三角柱與一平面的截痕，進一步嘗試從幾何面著手，構思「如何利用一正三角柱與一平面作圖截出特定三角形」。搭配「陸、延伸研究-四」找到平面和正三角柱底面的夾角，發現繞著圓柱軸心(三角柱軸心)還有無限多種三角形的截痕，圓心角每 120° 會重複這些三角形的截痕。而在這 120° 的旋轉截痕中，哪一個角度是對接特定三角形，有待進一步的研究。

如圖 35，截面與正三角柱夾角固定為 40° ，底面正三角形作外接圓， α 為圓心角。當 $\alpha = 41^\circ$ (圖 35-(a))、 $\alpha = 161^\circ$ (圖 35-(b))、 $\alpha = 281^\circ (-79^\circ)$ (圖 35-(c))時，截面與正三角柱均截出 $49.9^\circ - 57.3^\circ - 72.8^\circ$ 的全等三角形。

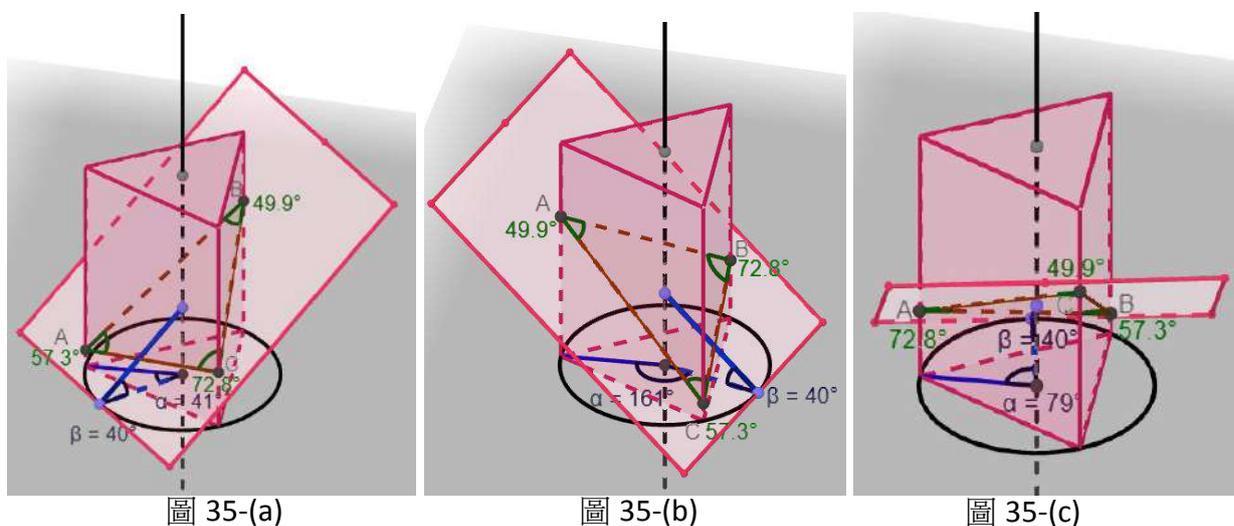


圖 35

玖、參考資料

- 一、中華民國第 58 屆中小學科學展覽會—從零開始-初始多邊形及拿破崙多角星之性質探討
- 二、中華民國第 55 屆中小學科學展覽會—拿破崙定理對多邊形之推廣
- 三、Dandelin 雙球系列一：平面與圓柱面的截面 <https://kknews.cc/news/vkqr6b4.html>

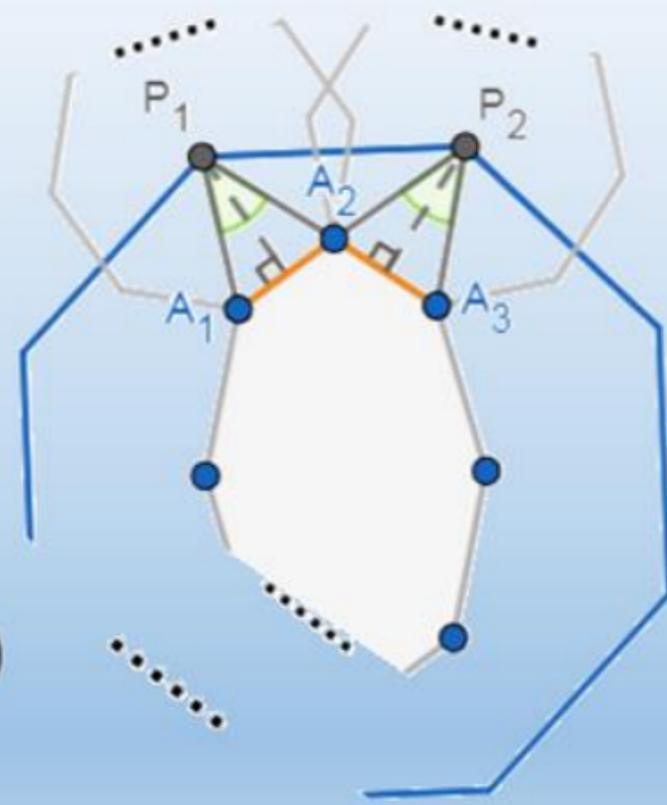
【評語】 050402

而本研究主要在探討拿破崙初始 n 邊形與拿破崙正 n 邊形以及正角柱的關係。觀察正三角柱與一平面截出三角形，可從三角形邊長推得正三角柱底面邊長，並將其推至拿破崙初始 n 邊形與正 n 角柱。作者並證明任意三角形皆為一正三角柱與一平面的截痕，並透過投影面積與底面積，得知截面與正 n 角柱底面的夾角。作者適切運作立體幾何，值得嘉許。也建議作者可以考慮將正 n 角柱與一平面的截痕改成正 n 邊形經由平面上的線性變換後的像，也許可簡化許多計算。

作品海報

埋「崙破」「柱」

拿破崙多邊形與角柱截面之探討



研究動機

在歷屆科展報告中尋找題目時，我們找到了一篇關於拿破崙初始 n 邊形探討的報告，其中談到「平面和正 n 角柱所截的 n 邊形為拿破崙初始 n 邊形」的結論，我們對此產生好奇，於是由此發想，展開了拿破崙初始 n 邊形與正 n 角柱之間關係的研究。

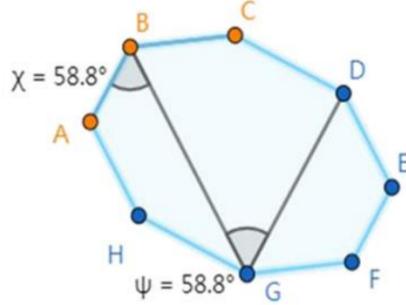
研究目的

- 一、在已知條件中，探討其至少包含多少邊長與角度方能作出唯一的拿破崙初始 n 邊形。
- 二、給定拿破崙初始 n 邊形，求出拿破崙正 n 邊形的邊長、面積。
- 三、已知拿破崙初始 n 邊形為正 n 角柱與一平面截出來的圖形，給定一任意拿破崙初始 n 邊形，求所在平面與角柱底面的夾角以及正 n 角柱邊長。
- 四、探討拿破崙初始 n 邊形是否有平行判別性質以外的延伸性質。
- 五、探討固定相鄰兩邊及一夾角，以 SAS 作圖反推其初始 n 邊形並探討彼此間的關係。
- 六、探討拿破崙初始 n 邊形所推得的拿破崙正 n 邊形與正 n 角柱底面的關係
- 七、證明任意三角形皆為正三角柱與一平面的截痕。

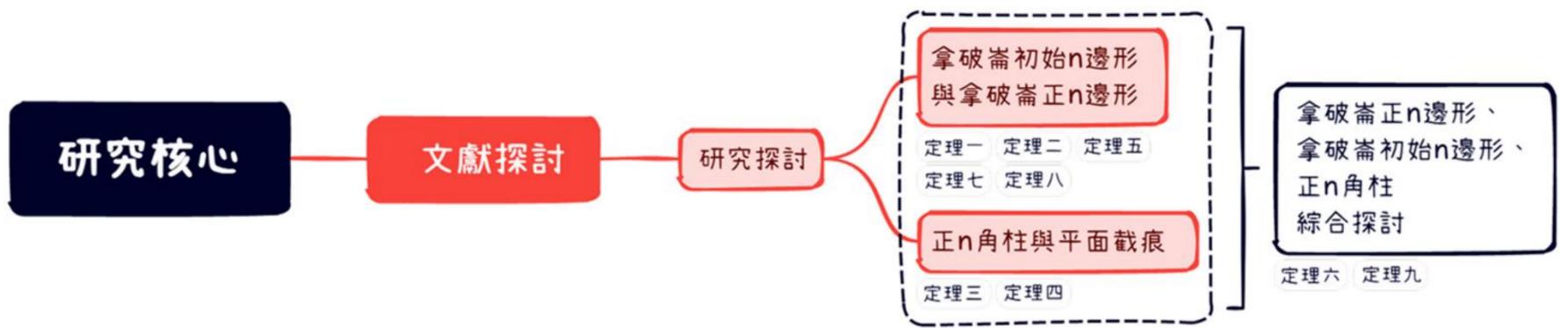
文獻探討與名詞釋義

- 一、拿破崙定理：將任意三角形的三邊分別往外側作正三角形，再將三個正三角形的重心連線，其連線必構成正三角形。
- 二、拿破崙初始 n 邊形：符合拿破崙定理之 n 邊形稱為拿破崙初始 n 邊形；由其推出的正 n 邊形稱為拿破崙正 n 邊形。
- 三、逆拿破崙法：以已知的正 n 邊形以及一點 A ，反推其包含點 A 的拿破崙初始 n 邊形。

- 四、平行判別性質：將任意 n 邊形中相鄰兩點分別往順時針及逆時針方向推 m 個頂點，得出新點的連線與兩點的連線平行，則其 n 邊形即為拿破崙初始 n 邊形。



研究架構

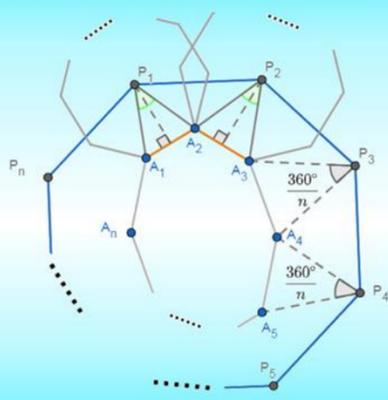


研究過程與方法

一、拿破崙初始 n 邊形的存在性探討

定理一

給定拿破崙初始 n 邊形任意兩邊夾一角 θ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$)，則該拿破崙初始 n 邊形必唯一存在。



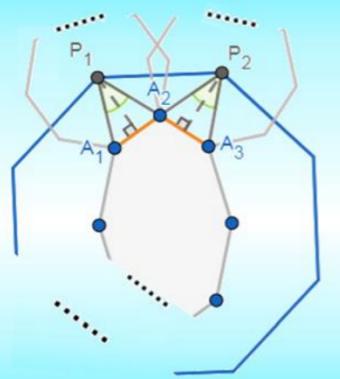
【證明】：以「逆拿破崙法」作圖，顯然得證。

「拿破崙初始 n 邊形 SAS 作圖法」

做法：
 已知 A_1A_2 、 A_2A_3 及其夾角 $\angle A_1A_2A_3$ 。
 以 A_1A_2 、 A_2A_3 為邊，分別向外側作正 n 邊形，取其中心 P_1 、 P_2 ，連 P_1P_2 。
 以 P_1P_2 為邊，作正 n 邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 。
 以 P_3 為頂點， P_3A_3 為半徑，逆時針旋轉 $\frac{360^\circ}{n}$ ，旋轉後會得到新的點 A_4 。
 連 P_4A_4 ，以 A_4 為頂點， P_4A_4 為半徑，逆時針旋轉 $\frac{360^\circ}{n}$ ，旋轉後得到新的點 A_5 。
 重複上述步驟，直到得到 A_n ，則 n 邊形 $A_1A_2A_3 \dots A_n$ 即為拿破崙初始 n 邊形。

定理二

任一正 n 邊形必存在其拿破崙初始 n 邊形。



【證明】：
 已知 A_1A_2 、 A_2A_3 及其夾角 $\angle A_1A_2A_3$ 。以 A_1A_2 、 A_2A_3 為邊，分別向外側作正 n 邊形，取其中心 P_1 、 P_2 。

$$\text{設 } \alpha = \frac{360^\circ}{n}, \text{ 則 } \angle P_1A_2A_1 = \angle P_2A_2A_3 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

利用餘弦定理化簡得

$$\overline{P_1P_2} = \frac{\sqrt{A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + 2 \cos(-\angle A_1A_2A_3 + \alpha) \times A_1A_2 \times A_2A_3}}{2 \cos(90^\circ - \alpha)}$$

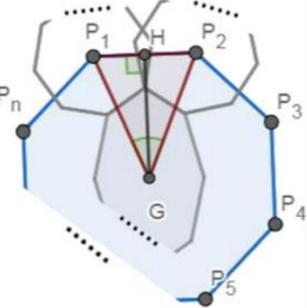
若將 A_1A_2 、 A_2A_3 乘上 n 倍，夾角不變，令此時拿破崙正 n 邊形新邊長為

$$\begin{aligned} \overline{P_1'P_2'} &= \frac{\sqrt{n^2 \times (A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + 2 \cos(-\angle A_1A_2A_3 + \alpha) \times A_1A_2 \times A_2A_3)}}{2 \cos(90^\circ - \alpha)} \\ &= n \times \overline{P_1P_2} \end{aligned}$$

二、拿破崙初始多邊形反求正 n 邊形的面積

拿破崙正 n 邊形之面積

$$\begin{aligned} &= n \times \left\{ \overline{P_1P_2} \times \left[\frac{1}{2} \times \overline{P_1P_2} \times \tan(90^\circ - \alpha) \right] \times \frac{1}{2} \right\}_{P_n} \\ &= \frac{n}{4} \times \overline{P_1P_2}^2 \times \tan(90^\circ - \alpha) \end{aligned}$$



由定理二得

$$\overline{P_1P_2} = \frac{\sqrt{A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + 2 \cos(-\angle A_1A_2A_3 + \alpha) \times A_1A_2 \times A_2A_3}}{2 \cos(90^\circ - \alpha)}$$

得拿破崙正 n 邊形之面積

$$= \frac{n}{4} \times \tan(90^\circ - \alpha) \times \left(\frac{A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + 2 \cos(-\angle A_1A_2A_3 + \alpha) \times A_1A_2 \times A_2A_3}{4 \cos^2(90^\circ - \alpha)} \right)$$

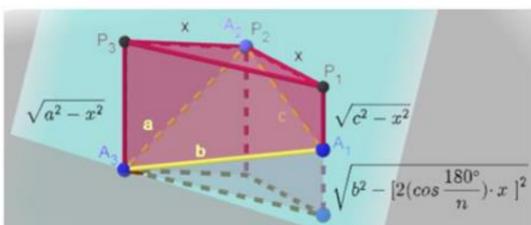
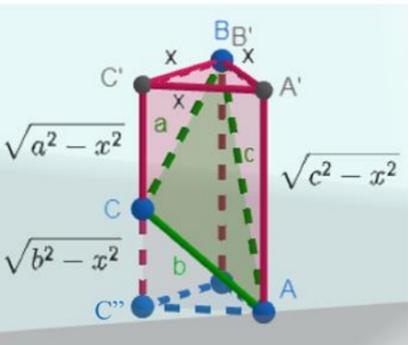
五、由初始 n 邊形所在平面反求正 n 角柱

定理三

已知任意 $\triangle ABC$ 為一平面 E 與正三角柱之截痕，則該正三角柱必唯一存在。

定理四

已知拿破崙初始 n 邊形為一平面 E 與正 n 角柱之截痕，則該正 n 角柱必唯一存在。



【證明】：

(1)

令 $\triangle ABC$ 邊長為 a, b, c ，其中 $a \leq b \leq c$ ，設所求正三角柱底面邊長為 x ，利用畢氏定理可得 $\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{c^2 - x^2}$

$$\text{化簡得 } x = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + c^2) - \sqrt{2[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2]}}{3}} \text{ 存在且唯一，}$$

得證。

(2)

設 $A_2A_3 = a$ ， $A_1A_2 = c$ ， $\angle A_1A_2A_3 = \theta$ ， $b = A_1A_3 = \sqrt{a^2 + c^2 - 2accos\theta}$

$d = \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$ ，正 n 角柱底面邊長 $= P_1P_2 = P_2P_3 = x$ ， $P_1P_3 = 2dx$

此時有 b 是否為最長邊兩種情況，分別列出兩種式子

$\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{b^2 - (2dx)^2}$ 和 $\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{b^2 - (2dx)^2} = \sqrt{c^2 - x^2}$ ，兩個式子化簡後皆得到

$$x = \sqrt{\frac{-[2d^2(a^2 + c^2 - b^2) + b^2] + \sqrt{[2d^2(a^2 + c^2 - b^2) + b^2]^2 - 4(d^4 - d^2)[a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2)]}}{8d^2(d^2 - 1)}}$$

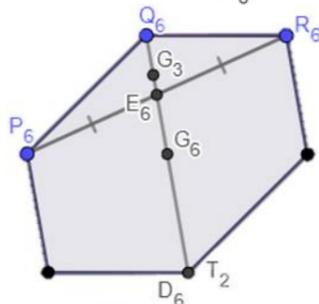
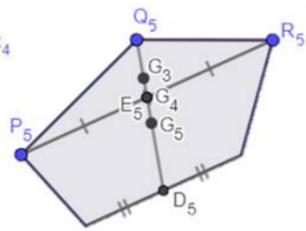
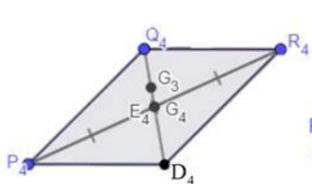
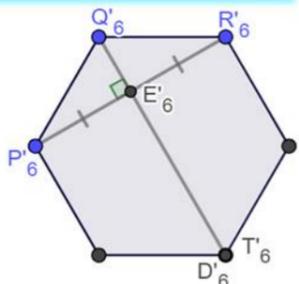
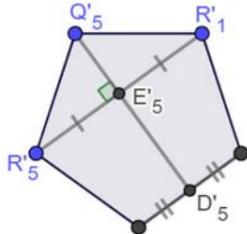
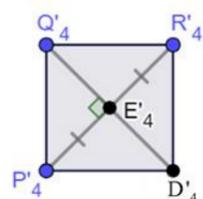
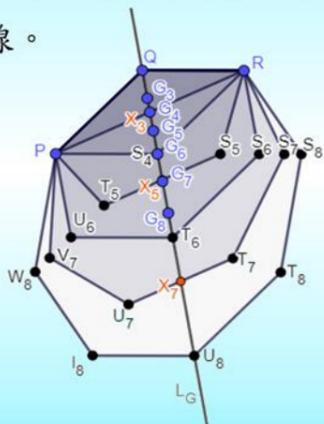
必唯一存在，得證

延伸討論

一、固定相鄰兩邊及一夾角，以 SAS 作圖反推正 n 邊形或初始 n 邊形關係之探討

定理五

已知兩邊 PQ, QR 及夾角 $\angle PQR$ ，以 SAS 作圖法反推拿破崙初始 n 邊形 ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$)，則所得的拿破崙初始 n 邊形的重心 ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$) 共線。



【證明】：

已知兩邊 PQ, QR 及夾角 $\angle PQR$ ，以 SAS 作圖法反推拿破崙初始四、五、六邊形以及其正四、五、六角柱底面上的投影

$\therefore Q'_n, D'_n, E'_n$ 共線 $\therefore Q_n, D_n, E_n$ 共線

又 Q_n, G_n, D_n 共線，得 Q_n, G_n, E_n, D_n 4 點共線

$\Rightarrow G_n \in QE$

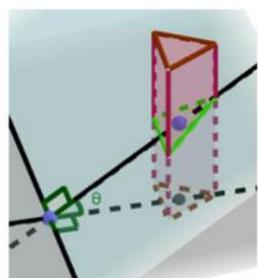
\Rightarrow 固定 $\triangle PQR$ ，所得的 $G_n (n \geq 3, n \in \mathbb{N})$ 共線，得證。

二、拿破崙初始 n 邊形所在平面與正 n 角柱底面的夾角探討

(一) 任意三角形

設三角形的三邊長為 a, b, c ，三角形所在平面與三角柱底面夾角為 $\theta (0^\circ \leq \theta < 90^\circ)$

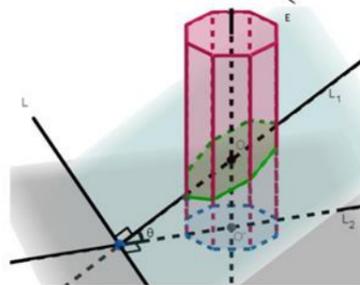
$$\cos\theta = \frac{\text{正三角柱底面積}}{\text{平面截出三角形面積}} = \frac{\sqrt{3}[(a^2 + b^2 + c^2) - \sqrt{2[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2]}}{3\sqrt{(a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c)}}$$



(二) 拿破崙初始 n 邊形

已知 $\triangle ABC$ ，設 $AB = c$ ， $BC = a$ ， $\angle ABC = \delta$ ， $d = \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$ ，拿破崙初始 n 邊形所在平面與正 n 角柱底面夾角為 θ 且 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$

$$\cos\theta = \frac{\text{正 } n \text{ 角柱面積}}{\text{拿破崙初始 } n \text{ 邊形面積}} = \frac{\Delta A'B'C' \text{ 面積}}{\Delta ABC \text{ 面積}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{A'B'} \cdot \overline{B'C'} \cdot \sin\angle A'B'C'}{\frac{1}{2} \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BC} \cdot \angle ABC}$$



$$= \frac{[2d^2(a^2 + c^2 - b^2) + b^2] - \sqrt{[2d^2(a^2 + c^2 - b^2) + b^2]^2 - 4d^2(d^2 - 1)[a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2)]}}{4d\sqrt{(1-d^2)} \cdot a \cdot c \cdot \sin\delta}$$

三、拿破崙初始 n 邊形所推得的拿破崙正 n 邊形與正 n 角柱底面的關係

定理六

正 n 角柱與截面角度固定，所截的拿破崙初始 n 邊形，其所推得的拿破崙正 n 邊形皆全等。

【證明】：

設空間中一包含 x 軸之平面 E 的法向量與 y 軸正向的夾角為 $\alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ ，

已知正 n 角柱以 z 軸為中心軸，並正立於 xy 平面

正 n 角柱與平面 E 所交的頂點為

$$P_k \left(\cos\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right), \sin\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right), -\frac{\cos\alpha \cdot \sin\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right)}{\sin\alpha} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

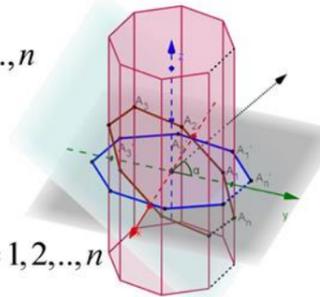
將點 $P_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 繞 x 軸旋轉 $90^\circ - \alpha$ ，使其落在 xy 平面上，得

$$P'_k \left(\cos\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right), \frac{\sin\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right)}{\sin\alpha}, 0 \right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

.....(★) 式

再將其轉換到複數平面，並設

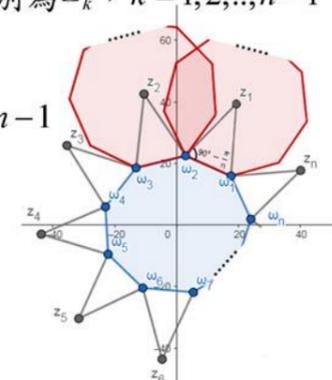
$$\omega_k = \left(\cos\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right) + i \frac{\sin\left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right)}{\sin\alpha} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$



且每邊 $\overline{\omega_k \omega_{k+1}}$ 之外接正 n 邊形中心分別為 $Z_k, k = 1, 2, \dots, n-1$ ， $\overline{\omega_n \omega_1}$ 之外接正 n 邊形中心分別為 Z_n ，

$$\begin{cases} Z_k = \omega_k + r(\omega_{k+1} - \omega_k) \\ Z_n = \omega_n + r(\omega_1 - \omega_n) \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

其中 $r = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - i \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right)$



根據積化和差與和角公式得出

$$|Z_k| = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right) \sqrt{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}, \quad |Z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right) \sqrt{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

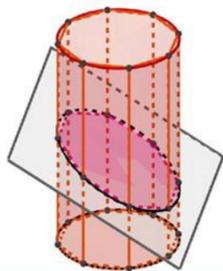
由此得知 $|Z_1| = |Z_2| = \dots = |Z_n|$ ，拿破崙正 n 邊形的邊長僅受 α 影響。所以當平面 E 與正 n 角柱底面截角固定時，所截得的拿破崙初始 n 邊形對應之拿破崙正 n 邊形皆全等，得證。

四、拿破崙初始 n 邊形的頂點共橢圓

定理七 拿破崙初始 n 邊形之頂點共橢圓。

【證明二】：

已知正 n 角柱與任意平面之截面均為拿破崙初始 n 邊形，且圓柱可內接正 n 角柱，而圓柱與任意平面之截面為橢圓，得證：拿破崙初始 n 邊形之頂點共橢圓。



【證明一】：

在【定理六】(★)式，n 邊形 $P'_1 P'_2 \dots P'_n$ 為拿破崙初始 n 邊形，其頂點 $P'_k \left(\cos(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}), \frac{\sin(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n})}{\sin \alpha}, 0 \right)$ ， $k=1, 2, \dots, n$ ，可知頂點均落在 y 坐標平面上，且頂點 P'_k 均落在橢圓 $x^2 + \sin^2 \alpha \cdot y^2 = 1$ 方程式上，得證拿破崙初始 n 邊形之頂點共橢圓。

五、拿破崙初始 n 邊形的外擴效應

定理八 以拿破崙初始 n 邊形各邊分別向外側作相似三角形，則它們外擴的新頂點連線必為拿破崙初始 n 邊形。

我們先從考慮 $n=5$ 的特殊化命題開始嘗試並證明如下：

【證明】：

1. 由拿破崙 n 邊形平行判別性

質： $\overline{A_1 A_2} \parallel \overline{A_3 A_5}$ 、 $\overline{A_2 A_3} \parallel \overline{A_1 A_4}$ 、 $\overline{A_3 A_4} \parallel \overline{A_2 A_5}$ 、 $\overline{A_4 A_5} \parallel \overline{A_1 A_3}$ 、 $\overline{A_1 A_5} \parallel \overline{A_2 A_4}$ 。

$$\frac{\overline{A_4 A_5}}{\overline{A_1 A_3}} = \frac{\overline{A_3 G}}{\overline{A_1 G + G A_3}} = \frac{k \overline{A_2 A_3}}{k \overline{A_1 F + F A_2 A_3}} = \frac{\overline{A_2 A_3}}{\overline{A_1 F + A_2 A_3}} = \frac{\overline{A_2 A_3}}{\overline{A_1 F + A_4 F}} = \frac{\overline{A_2 A_3}}{\overline{A_1 A_4}}$$

同理， $\frac{\overline{A_1 A_2}}{\overline{A_3 A_5}} = \frac{\overline{A_2 A_3}}{\overline{A_1 A_4}} = \frac{\overline{A_3 A_4}}{\overline{A_2 A_5}} = \frac{\overline{A_4 A_5}}{\overline{A_1 A_3}} = \frac{\overline{A_1 A_5}}{\overline{A_2 A_4}}$

2. 設點 $A_1(\omega_1)$ 、 $A_2(\omega_2)$ 、 $A_3(\omega_3)$ 、 $A_4(\omega_4)$ 、 $A_5(\omega_5)$ 為複數平面上五點

再設點 A'_1 、 A'_2 、 A'_3 、 A'_4 、 A'_5 為複數平面上五點，坐標為 (ω_6) 、 (ω_7) 、 (ω_8) 、 (ω_9) 、 (ω_{10})

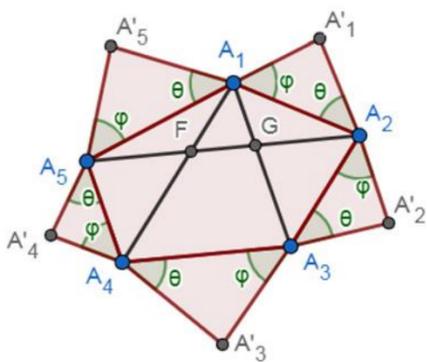
由 1. 可得

$$\begin{cases} \omega_2 - \omega_1 = t(\omega_5 - \omega_3) \\ \omega_3 - \omega_2 = t(\omega_1 - \omega_4) \\ \omega_4 - \omega_3 = t(\omega_2 - \omega_5) \\ \omega_5 - \omega_4 = t(\omega_3 - \omega_1) \\ \omega_1 - \omega_5 = t(\omega_4 - \omega_2) \end{cases}, \text{ 又 } \begin{cases} \omega_6 = \omega_1 + \omega(\omega_2 - \omega_1) \\ \omega_7 = \omega_2 + \omega(\omega_3 - \omega_2) \\ \omega_8 = \omega_3 + \omega(\omega_4 - \omega_3) \\ \omega_9 = \omega_4 + \omega(\omega_5 - \omega_4) \\ \omega_{10} = \omega_5 + \omega(\omega_1 - \omega_5) \end{cases}, \omega = \frac{\overline{AA'}}{\overline{AB}} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow \omega_6 - \omega_{10} = t(\omega_9 - \omega_7)$$

同理： $\overline{A'_1 A'_5} \parallel \overline{A'_4 A'_2}$ 、 $\overline{A'_1 A'_2} \parallel \overline{A'_5 A'_3}$ 、 $\overline{A'_2 A'_3} \parallel \overline{A'_4 A'_1}$ 、 $\overline{A'_3 A'_4} \parallel \overline{A'_5 A'_2}$ 、 $\overline{A'_4 A'_5} \parallel \overline{A'_1 A'_3}$
 \therefore 五邊形 $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 A'_5$ 為拿破崙初始五邊形，得證。

我們嘗試利用上述 $n=5$ 方法將其推廣到一般化，但窒礙難行，於是我們嘗試將其坐標化，利用【定理六】證明中的假設，先將截平面旋轉，再將其轉換至複數平面，並給出一般化的證明。



如同【定理六】，

我們假設平面 E 為空間中一包含 x 軸的平面，且平面 E 的法向量與 y 軸正向的夾角為 α ，其中 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ，則平面 E： $\cos \alpha \cdot y + \sin \alpha \cdot z = 0$ 。

已知正 n 角柱以 z 軸為中心軸，其與正 n 角柱的稜線所在直線均垂直於 xy 平面

正 n 角柱與平面 E 所交的頂點為

$$A_k \left(\cos(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}), \sin(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}), -\frac{\cos \alpha \cdot \sin(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n})}{\sin \alpha} \right), k=1, 2, \dots, n$$

將點 $A_k (k=1, 2, \dots, n)$ 繞 x 軸旋轉 $90^\circ - \alpha$ ，使其落在 xy 平面上，得

$$A'_k \left(\cos(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}), \frac{\sin(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n})}{\sin \alpha}, 0 \right), k=1, 2, \dots, n$$

設 $A'_k(\omega_k) = \cos(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n}) + i \frac{\sin(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n})}{\sin \alpha}$ ， $k=1, 2, \dots, n$

且設 B_k 為相似三角形頂點，則

$$\begin{cases} B_k = \omega_k + \omega(\omega_{k+1} - \omega_k), k=1, 2, \dots, n-1 \\ B_n = \omega_n + \omega(\omega_1 - \omega_n) \end{cases}$$

其中 $\omega = r(\cos(-\tau) + i \sin(-\tau))$ ， $\tau = \angle B_1 A'_1 A'_2$ ， $r = \frac{\overline{A'_1 B_1}}{\overline{A'_1 A'_2}}$

假設 $1 \leq i, j \leq n$ ，考慮

$$B_i - B_j = (1 - \omega)(\omega_i - \omega_j) + \omega(\omega_{i+1} - \omega_{j+1}), \text{ 其中 } i \neq j$$

$$B_{i+1} - B_{j-1} = (1 - \omega)(\omega_{i+1} - \omega_{j-1}) + \omega(\omega_{i+2} - \omega_j), i+1 \neq j-1$$

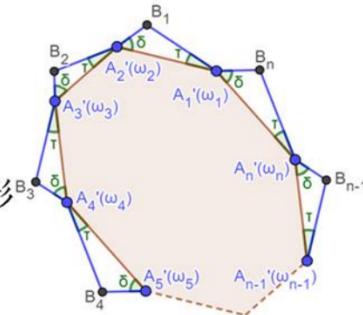
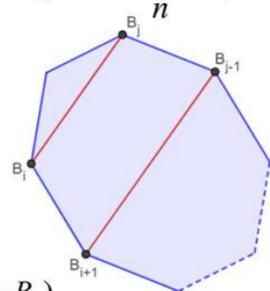
$$\omega_i - \omega_j = \cos(\theta + \frac{2(i-1)\pi}{n}) + \frac{i}{\sin \alpha} \sin(\theta + \frac{2(i-1)\pi}{n}) - \cos(\theta + \frac{2(j-1)\pi}{n}) - \frac{i}{\sin \alpha} \sin(\theta + \frac{2(j-1)\pi}{n})$$

利用和差化積公式，可得

$$\omega_{i+1} - \omega_{j-1} = \frac{\sin(\frac{(i-j+2)\pi}{n})}{\sin(\frac{(i-j)\pi}{n})} (\omega_i - \omega_j)$$

$$\text{所以 } B_{i+1} - B_{j-1} = \frac{\sin(\frac{(i-j+2)\pi}{n})}{\sin(\frac{(i-j)\pi}{n})} (B_i - B_j)$$

，因此我們知道 $\overline{B_i B_j} \parallel \overline{B_{i+1} B_{j-1}}$ ，根據拿破崙平行判別性質， $B_1 B_2 B_3 \dots B_n$ 為拿破崙初始 n 邊形，得證。



六、任意三角形皆可被正三角柱與一平面所截

定理九 任意三角形皆可被正三角柱與一平面所截出。

【證明】：

假設正三角柱 $A'B'C' - A''B''C''$ 位於第一卦限

， $\overline{B'C'} \parallel \overline{B''C''} \parallel y$ 軸， $B'C' = 2$

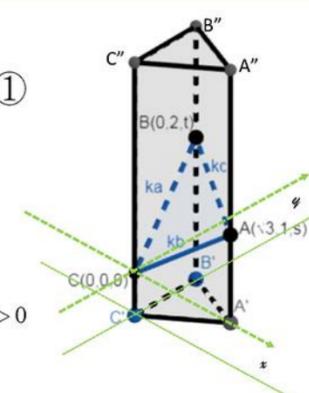
令 $A(\sqrt{3}, 1, s)$ 、 $B(0, 2, t)$ 、 $C(0, 0, 0)$ 且 $\overline{AB} = kc$ 、 $\overline{BC} = ka$ 、 $\overline{AC} = kb$ ， $s, t \in R$

$$\begin{cases} \overline{AB}^2 = (kc)^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 + (t-s)^2 \dots\dots ① \\ \overline{AC}^2 = (kb)^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 + s^2 \dots\dots ② \\ \overline{BC}^2 = (ka)^2 = 0^2 + 2^2 + t^2 \dots\dots ③ \end{cases}$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2) + 4\sqrt{2((a^2 - c^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2)}}{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} > 0$$

$\Rightarrow k$ 恆有正實數解

\therefore 任意三角形皆可被正三角柱與一平面所截出，得證。



未來展望

利用解析幾何證明任一三角形皆可為一正三角柱與一平面的截痕，進一步嘗試從幾何面著手，構思「如何利用一正三角柱與一平面作圖截出特定三角形」。搭配「陸、延伸研究-四」找到平面和正三角柱底面的夾角，發現繞著圓柱軸心(三角柱軸心)還有無限多種三角形的截痕，圓心角每 120° 會重複這些三角形的截痕。而在這 120° 的旋轉截痕中，哪一個角度是對接特定三角形，有待進一步的研究。

