中華民國第 63 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

探究精神獎

050401

繞遠路的螞蟻

學校名稱：臺北市立成功高級中學

作者：	指導老師：
高二 黃子恆 高二 柯典辰	陳君毅

關鍵詞：期望值、矩陣、圖

摘要

本研究探討螞蟻在一個無向簡單圖上，由原點出發沿著邊移動。當抵達某一點時，螞蟻會選擇和此點相鄰的某一點前進，作為下一步移動，但不能往回走，若螞蟻回到原點便不再移動。已知圖上各點的度皆大於等於 2，試問螞蟻在數次移動後回到原點時，移動次數的期望值為多少？

我們最初是藉由觀察螞蟻經移動後回到原點的機率，推測每次回到原點時的機率之規律，但此方法難以在較為複雜的圖形上得到結果。接著使用了矩陣來研究，以矩陣乘法表示一次移動。有了矩陣，我們便能透過矩陣運算得到螞蟻在數次移動後抵達各點的機率，也能更方便的求出期望值。

壹、 前言

我們在瀏覽科學研習月刊時，看到了游森棚教授所撰寫的數學文章，對於其所描述的題目深感興趣，便由此延伸，開始著手進行這次的研究，希望能找出其中的規律。原文敘述如下：

在立方體的一條邊上有一隻螞蟻，沿著這條邊向前走。 每次碰到點後，這隻螞蟻就以 $\frac{1}{2}$ 的機率選擇左邊的路，$\frac{1}{2}$ 的機率選擇右邊的路，然後繼續往前走。 一、請問螞蟻回到原點時，移動次數的期望值是多少？ 二、足球是由一堆五邊形與六邊形拼接起來的，如果螞蟻在足球的邊上走，答案又是如何？

本研究的研究目的如下：

一、找出當螞蟻在正多面體上移動，回到原點時移動次數的期望值。

二、找出當螞蟻在 n 角錐上移動，回到原點時移動次數的期望值。

三、找出當螞蟻在 n 角柱上移動，回到原點時移動次數的期望值。

四、找出當螞蟻在 n 邊循環圖和 n 階完全圖上移動，回到原點時移動次數的期望值。

貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦、C＋＋11、GeoGeBra、Matrix Calculator。

參、研究過程或方法

在開始研究前，我們有以下說明。

原題敘述中，描述的是螞蟻在立體圖形上的移動情況。但我們在分析題目後，發現到螞蟻移動的機率僅和點與邊的集合有關，與圖形的面並沒有關聯，於是將我們的核心研究轉為每個點的度皆大於等於 2 的無向簡單圖。因此在此研究中，會將立體圖形以簡單圖表示。因僅考慮點和邊的關係，為了敘述方便，我們在研究中也採用了一些圖論的定義來描述圖形。

一、分析機率的規則

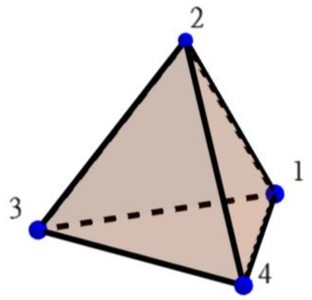
（一）名詞定義

圖一是一個正四面體，我們將圖中每一個點編號。

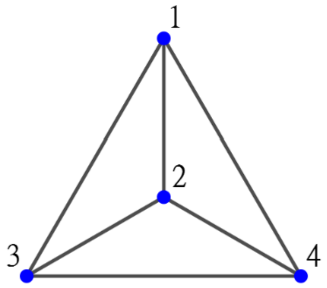
對於某些立體圖，我們能找到一個簡單圖，使得他們的點與邊的集合等價原立體圖的點與邊的集合，如圖二即能以簡單圖表示圖一正四面體各點的關係。

定義一、我們定義 (i,j) 表示為螞蟻由 i 號點走到 j 號點，稱為指向移動。

如：$(1,2)$ 為螞蟻由點 1 走到點 2。另外，我們一般讓螞蟻第一步為 $(1,2)$。



圖一



圖二

定義二、 P_i^n 表示螞蟻在經過 n 次移動後停在 i 號點上的機率，稱為點機率。

如：正四面體中，$P_2^1 = 1$、$P_1^1 = P_3^1 = P_4^1 = 0$。

定義三、當螞蟻進行(i,j)後，此移動的下一步有 $P_{(i,j,k)}$ 的機率發生 (j,k)。

稱為定向機率。

如：在正四面體中，若已知 $(1,2)$，此移動的下一步將有$\frac{1}{2}$的可能為 $(2,3)$ 及 $\frac{1}{2}$的可能為 $(2,4)$，即 $P_{(1,2,3)} = P_{(1,2,4)} = \frac{1}{2}$。

定義四、$P_{(i,j,k)}^n$ 表示螞蟻第 $n-1$ 步移動為 (i,j) 且第 n 步為 (j,k) 的機率。

稱為移動機率。

如：在正四面體中，第一步為 $(1,2)$，下一步則有 $P_{(1,2,3)}^2 = P_{(1,2,4)}^2 = \frac{1}{2}$。

每次的移動機率都會建立在某次的指向移動後，也就是說，題目給定由 1 號點出發的第一步移動不在我們對移動機率的考慮範圍內。又因 1 號點為原點，抵達後螞蟻就不再移動，因此有我們會有 $P^n_{(i,1,j)} = 0$。

需要注意的是定義三和定義四的不同之處。定義三代表的是類似於兩個指向移動間的生成關係，$P_{(i,j,k)}$ 數值僅和 j 號點的度有關；而定義四則是記錄數次移動後某個指向移動發生的可能，其大小相對受到許多變因影響，如移動的次數、前次指向移動為何。注意到，對於正整數 n、i、j、k、l，假設螞蟻在一個有 m 個點的圖上移動，我們會有 $\sum_{i=1}^{m} P^n_{(i,j,k)} \times P_{(j,k,l)} = P^{n+1}_{(j,k,l)}$。

（二）計算過程

1. 正四面體

如圖二，觀察螞蟻在正四面體上的移動情形，我們透過下表表示螞蟻在數次移動後位於各點的機率，表格內容代表 $\sum_{i=1}^{4} P^n_{(i,j,k)}$。

(j,k) \ n	2	3	4	5	6	7	8
(2,1)	0	0	0	1/8	0	0	1/64
(3,1)	0	1/4	1/8	0	1/32	1/64	0
(4,1)	0	1/4	1/8	0	1/32	1/64	0
(3,2)	0	0	1/8	0	0	1/64	0
(4,2)	0	0	1/8	0	0	1/64	0
(2,3)	1/2	0	0	1/16	0	0	1/128
(4,3)	0	1/4	0	0	1/32	0	0
(2,4)	1/2	0	0	1/16	0	0	1/128
(3,4)	0	1/4	0	0	1/32	0	0

觀察正四面體的 P^n_1 會有

n	2	3	4	5	6	7	8
P^n_1	0	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64

由上表不難看出

$P^3_1 = \frac{1}{2^1}$、$P^4_1 = \frac{1}{2^2}$、$P^5_1 = \frac{1}{2^3}$、$P^6_1 = \frac{1}{2^4}$、$P^7_1 = \frac{1}{2^5}$、$P^8_1 = \frac{1}{2^6}$、⋯

於是有以下猜測

猜想一、$P_1^{a+2}=\frac{1}{2^a}\quad \forall\, a\in\mathbb{N}, a\geq 1$

我們可以證明此猜想，如下：

$proof$：假設螞蟻在正四面體上移動時，第 a 次移動有

$\sum_{i=1}^4 P_{(i,3,2)}^a=p_1$、$\sum_{i=1}^4 P_{(i,4,2)}^a=p_2$、$\sum_{i=1}^4 P_{(i,2,3)}^a=p_3$、

$\sum_{i=1}^4 P_{(i,4,3)}^a=p_4$、$\sum_{i=1}^4 P_{(i,2,4)}^a=p_5$、$\sum_{i=1}^4 P_{(i,3,4)}^a=p_6$。

則在第 $a+1$ 次移動時會有

$\sum_{i=1}^4 P_{(i,3,2)}^{a+1}=\frac{p_4}{2}$、$\sum_{i=1}^4 P_{(i,4,2)}^{a+1}=\frac{p_6}{2}$、$\sum_{i=1}^4 P_{(i,2,3)}^{a+1}=\frac{p_2}{2}$、

$\sum_{i=1}^4 P_{(i,4,3)}^{a}=\frac{p_5}{2}$、$\sum_{i=1}^4 P_{(i,2,4)}^{a}=\frac{p_1}{2}$、$\sum_{i=1}^4 P_{(i,3,4)}^{a}=\frac{p_3}{2}$。

由此我們能推出

$P_1^{a+1}=\frac{p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6}{2}$，

$P_1^{a+2}=\frac{\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2}+\frac{p_3}{2}+\frac{p_4}{2}+\frac{p_5}{2}+\frac{p_6}{2}}{2}=\frac{p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6}{4}=\frac{1}{2}P_1^{a+1}$。

又 $P_1^3=\frac{1}{2}\Longrightarrow P_1^{a+2}=\frac{1}{2^a}$ □

由 P_1^a 的一般式，可求出此情況中螞蟻回到原點時所經邊數的期望值，如下：

所求$=\sum_{i=3}^{\infty}\left(P_1^i\times i\right)=\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{4}\times 4+\frac{1}{8}\times 5+\cdots+\frac{1}{2^n}\times(n+2)+\cdots$

$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}(i+2)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i-1}}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^i}=2+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^i}$

$=2+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^i}=2+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\right)=2+\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\right)$

$=2+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\cdots\right)\right)$

$=2+2\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)=2+2\times\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=2+2=4$

由此可得，螞蟻在正四面體上移動時，走回原點的移動次數的期望值為 4。

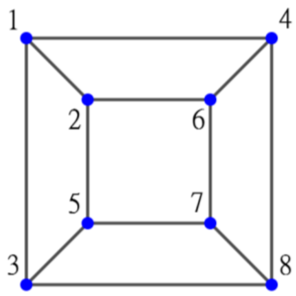
2. 正六面體

接著我們研究正六面體，其編號如圖三所示，

且圖三為一個正六面體的等價圖。

我們透過下表表示螞蟻在 $n\leq 8$ 次移動的情況下

所有移動機率，表格內容代表 $\sum_{i=1}^{8} P_{(i,j,k)}^n$。



圖三

n / (j,k)	2	3	4	5	6	7	8
(2,1)	0	0	0	0	1/16	0	5/64
(3,1)	0	0	1/8	0	1/8	0	1/32
(4,1)	0	0	1/8	0	1/8	0	1/32
(5,2)	0	0	0	1/16	0	5/64	0
(6,2)	0	0	0	1/16	0	5/64	0
(5,3)	0	1/4	0	1/16	0	3/64	0
(8,3)	0	0	0	3/16	0	1/64	0
(6,4)	0	1/4	0	1/16	0	3/64	0
(8,4)	0	0	0	3/16	0	1/64	0
(2,5)	1/2	0	0	0	1/32	0	5/128
(3,5)	0	0	0	0	3/32	0	1/128
(7,5)	0	0	1/8	0	1/16	0	3/64
(2,6)	1/2	0	0	0	1/32	0	5/128
(4,6)	0	0	0	0	3/32	0	1/128
(7,6)	0	0	1/8	0	1/16	0	3/64
(5,7)	0	1/4	0	0	0	1/16	0
(6,7)	0	1/4	0	0	0	1/16	0
(8,7)	0	0	0	1/8	0	1/32	0
(3,8)	0	0	1/8	0	1/32	0	3/128
(4,8)	0	0	1/8	0	1/32	0	3/128
(7,8)	0	0	1/4	0	0	0	1/16

觀察正六面體的 P_1^n 會有

n	2	3	4	5	6	7	8
P_1^n	0	0	1/4	0	5/16	0	9/64

也算出了 $P_1^{10}=\frac{29}{256}$。我們發現，螞蟻回到原點的機率有某種規律，如下：

$P_1^8=\frac{9}{64}=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{16}+\frac{1}{4}\right)=\frac{P_1^6+P_1^4}{4}$ 、$P_1^{10}=\frac{29}{256}=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{64}+\frac{5}{16}\right)=\frac{P_1^8+P_1^6}{4}$ 、⋯

於是有以下猜想：

猜想二、$P_1^4=\frac{1}{4},P_1^6=\frac{5}{16},P_1^a=\begin{cases}\frac{1}{4}(P_1^{a-2}+P_1^{a-4}), & \forall\, 2|a\ and\ a\geq 8\\ 0, & \forall\, 2\nmid a\ or\ a=2\end{cases}$

我們能夠證明此關係，如下：

$proof$：先證明下式，將八個點塗色，1、5、6、8 號點塗白，其餘塗黑。

如此能保證螞蟻每次移動前後抵達的點為不同顏色，故由 1 號點出發後的移動次數若為奇數，螞蟻只會抵達黑色點，不可能回到原點。

接著證明上式。同前述將八點塗色，螞蟻經數次移動後抵達的點有兩種情況：可能抵達 1、5、6、8 號點，或是可能抵達 2、3、4、7 號點。故我們在假設移動機率時，可將以 1、5、6、8 號點為起點之指向移動的發生機率都定為 0，或將以 2、3、4、7 號點為起點之指向移動的發生機率都定為 0。在此採用後者。

假設螞蟻在正六面體上移動時，第 a 次移動有

$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,5,2)}^a=0$、$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,6,2)}^a=0$、$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,5,3)}^a=0$、

$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,8,3)}^a=0$、$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,6,4)}^a=0$、$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,8,4)}^a=0$、

$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,2,5)}^a=p_1$、$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,3,5)}^a=p_2$、$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,7,5)}^a=p_3$、

$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,2,6)}^a=p_4$、$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,4,6)}^a=p_5$、$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,7,6)}^a=p_6$、

$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,5,7)}^a=0$、$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,6,7)}^a=0$、$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,8,7)}^a=0$、

$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,3,8)}^a=p_7$、$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,4,8)}^a=p_8$、$\sum_{i=1}^{8}P_{(i,7,8)}^a=p_9$。

由此我們能推出：

$P_1^{a+2}=\frac{p_1+p_2+2p_3+p_4+p_5+2p_6+p_7+p_8+2p_9}{4}$，

$P_1^{a+4}=\frac{5p_1+5p_2+2p_3+5p_4+5p_5+2p_6+5p_7+5p_8+2p_9}{16}$，

$$P_1^{a+6}=\frac{9p_1+9p_2+10p_3+9p_4+9p_5+10p_6+9p_7+9p_8+10p_9}{64}$$

$$=\frac{\frac{p_1+p_2+2p_3+p_4+p_5+2p_6+p_7+p_8+2p_9}{4}+\frac{5p_1+5p_2+2p_3+5p_4+5p_5+2p_6+5p_7+5p_8+2p_9}{16}}{4}$$

$$=\frac{1}{4}(P_1^{a+4}+P_1^{a+2})$$ ◻

藉由此關係，我們能求出此情況的期望值。過程如下：

考慮一個以點機率為係數的生成函數 $f(x)$，我們會有

$f(x)=\sum_{i=2}^{\infty}P_1^{2i}x^{2i}=P_1^4x^4+P_1^6x^6+P_1^8x^8+\cdots$

$\Rightarrow f'(x)=\sum_{i=2}^{\infty}2i\times P_1^{2i}x^{2i-1}$

$\Rightarrow f'(1)=\sum_{i=2}^{\infty}2i\times P_1^{2i}=$所求

$$\left(1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x^4\right)f(x)$$
$$=(P_1^4x^4+P_1^6x^6+P_1^8x^8+\cdots)-\frac{1}{4}(P_1^4x^6+(P_1^4+P_1^6)x^8+(P_1^6+P_1^8)x^{10}+\cdots)$$
$$=(P_1^4x^4+P_1^6x^6+P_1^8x^8+\cdots)-\left(\frac{1}{4}P_1^4x^6+P_1^8x^8+P_1^{10}x^{10}+\cdots\right)=\frac{1}{4}(x^4+x^6)$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^4+x^6}{4-x^2-x^4}\Rightarrow f'(x)=\frac{(4x^3+6x^5)(4-x^2-x^4)+(x^4+x^6)(4x^3+2x)}{(4-x^2-x^4)^2}$$
$$\Rightarrow \text{所求}=f'(1)=\frac{(4+6)(4-1-1)+(1+1)(4+2)}{(4-1-1)^2}=8$$

我們用上述方法計算出了正四面體和正六面體的期望值結果，但在研究更複雜的圖形時，不易使用此方法，因此我們接著著手找其他計算方法。

二、利用生成矩陣求期望值

（一）名詞定義

定義五、已知圖的情況下，將能代表由螞蟻第 n 次移動和第 $n+1$ 次移動間的生成關係之矩陣定義為生成矩陣，符號為 M。此矩陣的行和列分別代表某種指向移動，矩陣的元素則代表定向機率，其繪製方法如下：首先定義行列的排列順序，因排列順序不會影響結果，一般情況下為求方便，我們會在排列 (i,j) 時先考慮 j 的大小再考慮 i 的大小。依前述的方法排列，設代表 (a_1,a_2) 的行被排在第 a 位，代表 (b_1,b_2) 的列被排在第 b 位。若 $a_2\neq b_1$ 或 $a_1=b_2$，則在 M 的第 a 行第 b 列填入 0 ；若 $a_2=b_1$ 則在第 a 行第 b 列填入 $P_{(a_1,a_2,b_2)}$ 。

以正四面體為例，觀察指向移動 $(3,2)$，下一步可能會出現 $(2,1)$ 或 $(2,4)$，因此在代表 $(3,2)$ 的行及代表 $(2,1)$ 的列和代表 $(2,4)$ 的列的位置填入 $P_{(3,2,1)}=P_{(3,2,4)}=\frac{1}{2}$ 。以同樣方式將正四面體的生成矩陣其餘元素補齊，如下

$$M=\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0\end{bmatrix}$$

其中，矩陣第一行到第九行及第一列到第九列分別代表

$$(2,1)\,(3,1)\,(4,1)\,(3,2)\,(4,2)\,(2,3)\,(4,3)\,(2,4)\,(3,4)$$

如：第四行第一列填入的值為給定指向移動 $(3,2)$ 的情況下，下一步出現 $(2,1)$ 的機率，也就是 $P_{(3,2,1)}$ 的值。

定義六、v_n 表示螞蟻在圖上經過數次移動後，其移動 n 步時各指向移動的發生可能。稱為移動機率向量，且排列順序和生成矩陣的順序相同。

如：正四面體中，以和生成矩陣相同的順序排列，我們有

$$v_3=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{4}P_{(i,2,1)}^{3}\\ \sum_{i=1}^{4}P_{(i,3,1)}^{3}\\ \sum_{i=1}^{4}P_{(i,4,1)}^{3}\\ \sum_{i=1}^{4}P_{(i,3,2)}^{3}\\ \sum_{i=1}^{4}P_{(i,4,2)}^{3}\\ \sum_{i=1}^{4}P_{(i,2,3)}^{3}\\ \sum_{i=1}^{4}P_{(i,4,3)}^{3}\\ \sum_{i=1}^{4}P_{(i,2,4)}^{3}\\ \sum_{i=1}^{4}P_{(i,3,4)}^{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{(1,2,1)}^{3}+P_{(2,2,1)}^{3}+P_{(3,2,1)}^{3}+P_{(4,2,1)}^{3}\\ P_{(1,3,1)}^{3}+P_{(2,3,1)}^{3}+P_{(3,3,1)}^{3}+P_{(4,3,1)}^{3}\\ P_{(1,4,1)}^{3}+P_{(2,4,1)}^{3}+P_{(3,4,1)}^{3}+P_{(4,4,1)}^{3}\\ P_{(1,3,2)}^{3}+P_{(2,3,2)}^{3}+P_{(3,3,2)}^{3}+P_{(4,3,2)}^{3}\\ P_{(1,4,2)}^{3}+P_{(2,4,2)}^{3}+P_{(3,4,2)}^{3}+P_{(4,4,2)}^{3}\\ P_{(1,2,3)}^{3}+P_{(2,2,3)}^{3}+P_{(3,2,3)}^{3}+P_{(4,2,3)}^{3}\\ P_{(1,4,3)}^{3}+P_{(2,4,3)}^{3}+P_{(3,4,3)}^{3}+P_{(4,4,3)}^{3}\\ P_{(1,2,4)}^{3}+P_{(2,2,4)}^{3}+P_{(3,2,4)}^{3}+P_{(4,2,4)}^{3}\\ P_{(1,3,4)}^{3}+P_{(2,3,4)}^{3}+P_{(3,3,4)}^{3}+P_{(4,3,4)}^{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\\ 0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{4}\\ 0\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

設某圖共有 n 個點，有一頂點編號為 a ，與其相連的點之編號為 $a_1,a_2,\dots,a_x$。藉由定義三和定義四，不難發現：

$$\sum_{i=1}^{n}P_{(i,a_1,a)}^{k}\times P_{(a_1,a,a_x)}+\cdots+\sum_{i=1}^{n}P_{(i,a_{x-1},a)}^{k}\times P_{(a_{x-1},a,a_x)}$$
$$=P_{(a_1,a,a_x)}^{k+1}+P_{(a_2,a,a_x)}^{k+1}+\cdots+P_{(a_{x-1},a,a_x)}^{k+1}=\sum_{i=1}^{x-1}P_{(a_i,a,a_x)}^{k+1}$$

接著考慮生成矩陣和移動機率向量。藉由矩陣乘法和上述關係能發現，$M\cdot v_k$ 的結果即代表了 v_k 下一步的所有可能，也就是 v_{k+1}。以正四面體為例，如下：

$$M\cdot v_k=\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ 0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}\\ 0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0\\ 0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{4}P_{(i,2,1)}^{k}\\ \sum_{i=1}^{4}P_{(i,3,1)}^{k}\\ \sum_{i=1}^{4}P_{(i,4,1)}^{k}\\ \sum_{i=1}^{4}P_{(i,3,2)}^{k}\\ \sum_{i=1}^{4}P_{(i,4,2)}^{k}\\ \sum_{i=1}^{4}P_{(i,2,3)}^{k}\\ \sum_{i=1}^{4}P_{(i,4,3)}^{k}\\ \sum_{i=1}^{4}P_{(i,2,4)}^{k}\\ \sum_{i=1}^{4}P_{(i,3,4)}^{k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\left(P_{(i,3,2)}^{k}+P_{(i,4,2)}^{k}\right)\\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\left(P_{(i,2,3)}^{k}+P_{(i,4,3)}^{k}\right)\\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\left(P_{(i,2,4)}^{k}+P_{(i,3,4)}^{k}\right)\\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}P_{(i,4,3)}^{k}\\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}P_{(i,3,4)}^{k}\\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}P_{(i,4,2)}^{k}\\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}P_{(i,2,4)}^{k}\\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}P_{(i,3,2)}^{k}\\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}P_{(i,2,3)}^{k}\end{bmatrix}$$

觀察圖二，若第 $k+1$ 步希望 $(2,1)$ 發生，則第 k 步要出現 $(3,2)$ 或 $(4,2)$，且因上述兩指向移動都只有 $\frac{1}{2}$ 的機率在下一步發生 $(2,1)$，由此得：

$\sum_{i=1}^{4} P_{(i,2,1)}^{k+1} = \sum_{i=1}^{4} P_{(i,3,2)}^{k} \times P_{(3,2,1)} + \sum_{i=1}^{4} P_{(i,4,2)}^{k} \times P_{(4,2,1)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\left(P_{(i,3,2)}^{k} + P_{(i,4,2)}^{k}\right)$

以同樣的方法，不難求得

$\sum_{i=1}^{4} P_{(i,3,1)}^{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\left(P_{(i,2,3)}^{k} + P_{(i,4,3)}^{k}\right)$

$\sum_{i=1}^{4} P_{(i,4,1)}^{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\left(P_{(i,2,4)}^{k} + P_{(i,3,4)}^{k}\right), \sum_{i=1}^{4} P_{(i,3,2)}^{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} P_{(i,4,3)}^{k}$

$\sum_{i=1}^{4} P_{(i,4,2)}^{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} P_{(i,3,4)}^{k}, \sum_{i=1}^{4} P_{(i,2,3)}^{k+!} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} P_{(i,4,2)}^{k}, \sum_{i=1}^{4} P_{(i,4,3)}^{k+!} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} P_{(i,2,4)}^{k}$

$\sum_{i=1}^{4} P_{(i,2,4)}^{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} P_{(i,3,2)}^{k}, \sum_{i=1}^{4} P_{(i,3,4)}^{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} P_{(i,2,3)}^{k}$

觀察 $M \cdot v_k$ 的結果，可以發現

$$M \cdot v_k = v_{k+1}$$

而這也是我們設計生成矩陣的目的，藉由矩陣和矩陣的運算表達各步數的移動情形並計算接續會出現的可能，由此便能得到另一種計算期望值的方法。

（二）正多面體

1. 正四面體

對於猜想一，我們也能使用生成矩陣，以數學歸納法證明。

在定義時我們已經講述了正四面體的生成矩陣和移動機率向量是如何產生，此處直接採用。藉由矩陣計算機觀察 M 的乘冪，發現以下結果：

$$M^{3n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+1}} & \frac{1}{2^{3n+1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+1}} & \frac{1}{2^{3n+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+1}} & \frac{1}{2^{3n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+1}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{3n+2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+2}} & 0 & \frac{1}{2^{3n+2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+2}} & 0 & \frac{1}{2^{3n+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2^{3n+2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{3n+3}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0\\0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}\\0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}\end{bmatrix}\quad \forall\, n\geq 0, n\in\mathbb{Z}$$

用數學歸納法能夠證明 M^{3n+1} 的情況為真。當 $n=0$ 時，有

$$M=\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{1}{2^1}&\frac{1}{2^1}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2^1}&\frac{1}{2^1}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^1}&\frac{1}{2^1}\\0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^1}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^1}\\0&0&0&0&\frac{1}{2^1}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^1}&0\\0&0&0&\frac{1}{2^1}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2^1}&0&0&0\end{bmatrix}$$

當 $n=k$ 時，令

$$M^{3k+1}=\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}&\frac{1}{2^{3k+1}}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}&\frac{1}{2^{3k+1}}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}&\frac{1}{2^{3k+1}}\\0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}\\0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}&0\\0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}&0&0&0\end{bmatrix}$$

則當 $n=k+1$ 時，會有

$$M^{3k+4}=M^{3k+1}\cdot M^3=\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{1}{2^{3k+4}}&\frac{1}{2^{3k+4}}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+4}}&\frac{1}{2^{3k+4}}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+4}}&\frac{1}{2^{3k+4}}\\0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+4}}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+4}}\\0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+4}}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+4}}&0\\0&0&0&\frac{1}{2^{3k+4}}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+4}}&0&0&0\end{bmatrix}$$

由數學歸納法，此規律對於所有整數 $n\geq 0$ 皆成立。由此我們可以推出：

$$M^{3n+2}=M^{3n+1}\cdot M\ =\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+2}}&0&\frac{1}{2^{3n+2}}\\0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+2}}&0&0&\frac{1}{2^{3n+2}}&0\\0&0&0&\frac{1}{2^{3n+2}}&0&\frac{1}{2^{3n+2}}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+2}}&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+2}}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+2}}\\0&0&0&\frac{1}{2^{3n+2}}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+2}}&0&0\\0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+2}}&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M^{3n+3}=M^{3n+1}\cdot M^{2}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0\\0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}\\0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3n+3}}\end{bmatrix}$$

由此可知前述規律為真。有了 M 的乘冪規律後，我們便能以此算出 v_n。同樣分三種情況，由上述規律，我們能計算出

$$v_{3k+3}=M^{3k+1}v_2=\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}&\frac{1}{2^{3k+1}}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}&\frac{1}{2^{3k+1}}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}&\frac{1}{2^{3k+1}}\\0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}\\0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}&0\\0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+1}}&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2^{3k+2}}&\frac{1}{2^{3k+2}}&0&0&0&\frac{1}{2^{3k+2}}&0&\frac{1}{2^{3k+2}}\end{bmatrix}^{T}$$

由排列順序找出相對應的機率相加後有 $P_1^{3k+3}=0+\frac{1}{2^{3k+2}}+\frac{1}{2^{3k+2}}=\frac{1}{2^{3k+1}}$ 。

再以 $M^{3k+2}\cdot v_2$ 計算 v_{3k+4} 及 $M^{3k+3}\cdot v_2$ 計算 v_{3k+5}

$\Rightarrow P_1^{3k+4} = \frac{1}{2^{3k+2}}, P_1^{3k+5} = \frac{1}{2^{3k+3}} \Rightarrow P_1^n = \frac{1}{2^{n-2}} \quad \forall\, n \geq 3, n \in \mathbb{N}$

由此可證，猜想一正確。

但並非所有 M 的冪次都容易找到規律，因此我們想從其他面向著手。

考慮點機率 P_1^n ，注意到

$$P_1^n = \sum_{i=1}^4 P_{(i,2,1)}^n + \sum_{i=1}^4 P_{(i,3,1)}^n + \sum_{i=1}^4 P_{(i,4,1)}^n$$

再考慮移動機率向量 v_n，我們會有

$$[1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0] \cdot v_n = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 P_{(i,2,1)}^n \\ \sum_{i=1}^4 P_{(i,3,1)}^n \\ \sum_{i=1}^4 P_{(i,4,1)}^n \\ \sum_{i=1}^4 P_{(i,3,2)}^n \\ \sum_{i=1}^4 P_{(i,4,2)}^n \\ \sum_{i=1}^4 P_{(i,2,3)}^n \\ \sum_{i=1}^4 P_{(i,4,3)}^n \\ \sum_{i=1}^4 P_{(i,2,4)}^n \\ \sum_{i=1}^4 P_{(i,3,4)}^n \end{bmatrix} = P_1^n$$

$\Rightarrow$ 所求$= \sum_{i=1}^{\infty} i \times P_1^i = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0] \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \left(i \times M^{i-2} v_2 \right)$

$\sum_{i=2}^{\infty} \left(i \times M^{i-2} v_2 \right) = 2 \times v_2 + 3 \times M v_2 + 4 \times M^2 v_2 + 5 \times M^3 v_2 + \cdots$

$M \sum_{i=2}^{\infty} \left(i \times M^{i-2} v_2 \right) = \qquad 2 \times M v_2 + 3 \times M^2 v_2 + 4 \times M^3 v_2 + \cdots$

$\Rightarrow (I - M) \sum_{i=2}^{\infty} \left(i \times M^{i-2} v_2 \right) = 2 \times v_2 + M v_2 + M^2 v_2 + M^3 v_2 + \cdots$

$\qquad = v_2 + \sum_{i=0}^{\infty} M^i v_2 = \left(I + \sum_{i=0}^{\infty} M^i \right) v_2$

$\sum_{i=0}^{\infty} M^i - M \sum_{i=0}^{\infty} M^i = (I + M + M^2 + M^3 + \cdots) - (M + M^2 + M^3 + \cdots) = I$

$(I - M) \sum_{i=0}^{\infty} M^i = I \ \Rightarrow\ \sum_{i=0}^{\infty} M^i = (I - M)^{-1}$

$\Rightarrow \sum_{i=3}^{\infty} \left(i \times M^{i-2} v_2 \right) = (I - M)^{-1} (I + (I - M)^{-1}) v_2$

$\Rightarrow$ 所求 $= [1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0] \cdot (I - M)^{-1} (I + (I - M)^{-1}) v_2$

$\qquad = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0] \cdot ((I - M)^{-1} + (I - M)^{-2}) v_2$

代入正四面體的狀況，便能求出螞蟻在正四面體上移動的期望值結果為 4。

綜上所述，我們能歸納出定理一：

定理一、給定圖形、原點、第一步指向移動，我們能用

$$\mathbf{[1\ \ \ldots\ \ 1\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0] \cdot ((\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-2}) \boldsymbol{v}_2}$$

求出此情況下，螞蟻數次移動後回到原點時所經邊數之期望值。

有了定理一，我們只需要寫出生成矩陣並以相同的排列順序寫出 v_2，

便能藉由矩陣的運算得出螞蟻移動次數的期望值。

2. 正六面體

考慮正六面體的生成矩陣與移動機率向量 v_2，其中，正六面體的生成矩陣是一個 21 $\times$21 的方陣，因以文字顯示會佔太多空間，故以圖片的方式顯現，如圖四；我們也以圖片的方式展現其 v_2 ，如圖五。

$$\begin{bmatrix}
0&0&0&\frac12&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\frac12&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\frac12&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&\frac12&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&0&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&\frac12\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&0&\frac12&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&0&\frac12\\
0&0&0&0&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&\frac12&0&0&0\\
0&0&0&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&0&\frac12&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&\frac12&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&\frac12&0\\
0&0&0&0&0&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&\frac12&0&0&0&0
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\\frac12\\0\\0\\\frac12\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0
\end{bmatrix}$$

圖四　　　　　　圖五

已知在正六面體中，$P_1^n=\sum_{i=1}^{8}P_{(\,i,2,1\,)}^n+\sum_{i=1}^{8}P_{(\,i,3,1\,)}^n+\sum_{i=1}^{8}P_{(\,i,4,1\,)}^n$，由此可得：

所求 $=[1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0\ \ 0]\cdot(\,(\,I-M\,)^{-1}+(\,I-M\,)^{-2}\,)v_2$

其中，$[1\ 1\ 1\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ 0]$ 由 3 個 1 和 18 個 0 組成。計算後可得所求 $=8$。

3. 其他正多面體

除了上述兩個正多面體，我們也計算了正八面體、正十二面體、正二十面體的狀況，其結果如下表所示。有關其編號和生成矩陣將放在附錄展示。

正多面體	正八面體	正十二面體	正二十面體
期望值	8	12	20

（三）角錐和角柱

1. 加權

計算正多面體時，不論第一步的指向移動為何，計算出的結果都相同，但在其他圖形則多需要考慮第一步的影響，因此我們會對各種情況給予加權。

定義七、若螞蟻的第一步為 $(\,i,j\,)$，則在經過數次移動後回到 i 號點時，其所經邊數的期望值定為 e_{ij}。

需要注意的是，e_{ij} 討論的是以 i 號點為起點和終點的情況，而非 1 號點。

考慮到第一步的不同會有不一樣的結果，因此我們給定對於螞蟻在一張圖 $G=(V,E)$ 上移動時，期望值的加權方法為：

$$\text{所求}=\frac{\sum_{(i,j)\in E(G)} e_{ij}}{\sum_{v\in V(G)} deg(v)}=\frac{1}{2|E(G)|}\sum_{(i,j)\in E(G)} e_{ij}$$

定理二、給定圖 $\boldsymbol{G=(V,E)}$，我們能用

$$[\mathbf{1}\ \ \dots\ \ \mathbf{1}\ \ \mathbf{0}\ \ \dots\ \ \mathbf{0}]\cdot((\boldsymbol{I-M})^{-1}+(\boldsymbol{I-M})^{-2})\boldsymbol{v_2}\ \text{求出}\ \boldsymbol{e_{ij}}$$

並以 $\frac{1}{2|E(G)|}\sum_{(i,j)\in E(G)} e_{ij}$ 作加權求出螞蟻在此圖上移動時，經過數次移動後回到原點之所經邊數期望值。

有了定理二後，我們便能求出螞蟻任何情況下的移動步數之期望值。

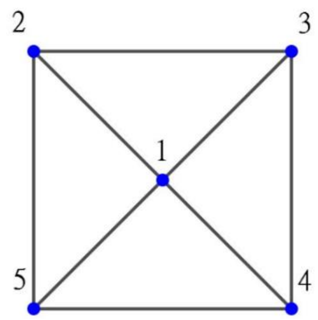
2. n 角錐

我們接著研究螞蟻在角錐上移動的情況。注意到三角錐也就是正四面體，由前面所算出的結果可知期望值為 4 。

$n\geq 4$ 時，先討論螞蟻在 n 角錐的第一步移動。觀察圖六，會有以下發現：

$e_{12}=e_{13}=e_{14}=e_{15}$、$e_{21}=e_{31}=e_{41}=e_{51}$、

$e_{23}=e_{25}=e_{32}=e_{34}=e_{43}=e_{45}=e_{52}=e_{54}$。



圖六

因此，螞蟻在四角錐上移動時，期望值的公式為：

$$\text{所求}=\frac{1}{2|E(G)|}\sum_{(i,j)\in E(G)} e_{ij}$$

$$=\frac{4\times e_{12}+4\times e_{21}+8\times e_{23}}{16}=\frac{e_{12}+e_{21}+2e_{23}}{4}$$

此公式可推廣至 n 角錐的情況。在 n 角錐中，有 1 個度為 $n-1$ 的點，以及 $n-1$ 個度為 3 的點。我們將度為 $n-1$ 的點定為 1 號點，由此可得

$e_{12}=e_{13}=\cdots=e_{1n}=e_{1(n+1)}$、$e_{21}=e_{31}=\cdots=e_{n1}=e_{(n+1)1}$、

$e_{23}=e_{2(n+1)}=e_{32}=e_{34}=\cdots=e_{n(n-1)}=e_{n(n+1)}=e_{(n+1)n}=e_{(n+1)2}$。

因此，螞蟻在 n 角錐上移動時，期望值的公式為：

$$\text{所求}=\frac{1}{2|E(G)|}\sum_{(i,j)\in E(G)} e_{ij}=\frac{n\times e_{12}+n\times e_{21}+2n\times e_{23}}{4n}=\frac{e_{12}+e_{21}+2e_{23}}{4}$$

當螞蟻在 n 角錐上移動時，我們將 e_{12} 定為狀況一的期望值、e_{21} 定為狀況二的期望值、e_{23} 定為狀況三的期望值。藉由觀察能得到以下兩個事實：

事實一、在狀況一中，發現除了第一次移動抵達的點外，螞蟻不管在哪個點上，下一步都有可能回到原點，且因除了原點外，各點的度為 3，在不能往回走的條件限制下，螞蟻不管在哪個點上都有 $\frac{1}{2}$ 的機率回到原點。繪製出下表表示移動情形。

第 n 步	第 n 步回到原點的機率	n 步後未回到原點的機率
3	$\frac{1}{2}$	$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$
5	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$	$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$
6	$\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$
…	…	…

由此可得 $P_1^n=\frac{1}{2^{n-2}}\ \ \forall n\geq 3, n\in\mathbb{N}$。用數學歸納法可證明之：

當 $n=3$ 時，$P_1^3=\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{3-2}}$，符合。

當 $n=k$ 時，令 $P_1^k=\frac{1}{2^{k-2}}$，符合。

則當 $n=k+1$ 時，$P_1^{k+1}=\frac{1}{2}\left(1-\sum_{i=1}^{k-2}\frac{1}{2^i}\right)=\frac{1}{2^{k-1}}$，符合。

由數學歸納法，可知 $P_1^n=\frac{1}{2^{n-2}}\ \ \forall n\geq 3, n\in\mathbb{N}$ 皆成立。

此情況和正四面體相同，因此得出狀況一之期望值結果也為 4。

我們也能由矩陣得到一樣的結果，以 $n=4$ 為例，我們有

$$M=\begin{bmatrix}0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

觀察 M 的乘冪發現

$$M^{4k+1}=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&\frac{1}{2^{4k+1}}&\frac{1}{2^{4k+1}}&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{4k+1}}&\frac{1}{2^{4k+1}}&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{4k+1}}&\frac{1}{2^{4k+1}}&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{4k+1}}&\frac{1}{2^{4k+1}}\\ 0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{4k+1}}&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{4k+1}}\\ 0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{4k+1}}&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{4k+1}}&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{4k+1}}&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{4k+1}}&0\\ 0&0&0&0&\frac{1}{2^{4k+1}}&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2^{4k+1}}&0&0&0 \end{bmatrix}$$

可以用數學歸納法證明之，方法和正四面體的證明相同。有了此規律便可求出 $M^{4k+2},M^{4k+3},M^{4k+4}$，最後能得出 $P_1^n=\frac{1}{2^{n-2}}$。

事實二、狀況一的 M 會和狀況二與狀況三求出的 M 不同，而狀況二與狀況三的 M 可使用同個生成矩陣，但 v_2 不同。

同樣使用圖六的編號，但此時因原點為 2 號點，故我們將生成矩陣的行列和移動機率向量之排列順序定為：

(1,2) (3,2) (5,2) (3,1) (4,1) (5,1) (1,3) (4,3) (1,4) (3,4) (5,4) (1,5) (4,5)

以四角錐為例，由狀況二和狀況三的 M 與兩種狀況的 v_2如下。其中，狀況二和狀況三的第二步移動機率分別為 v_2 和 v_2'，如下：

$$M=\begin{bmatrix} 0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ 0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}\\ 0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0\\ 0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0 \end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\\frac{1}{3}\\0\\\frac{1}{3}\\0\\0\\\frac{1}{3}\\0\end{bmatrix},v_2'=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{2}\\0\\0\\0\\0\\0\\\frac{1}{2}\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

有了這兩個發現，我們會有：

$$
\begin{aligned}
\text{所求} &= \frac{e_{12}+e_{21}+2e_{23}}{4} \\
&= \frac{1}{4}\times \text{狀況一之期望值} + \frac{1}{4}\times \text{狀況二之期望值} + \frac{1}{2}\times \text{狀況三之期望值} \\
&= \frac{1}{4}\times 4 + \frac{1}{4}\times [1 \ \ \dots \ \ 1 \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0]\cdot\left(\left(I-M\right)^{-1}+\left(I-M\right)^{-2}\right)v_2 \\
&\qquad + \frac{1}{2}\times [1 \ \ \dots \ \ 1 \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0]\cdot\left(\left(I-M\right)^{-1}+\left(I-M\right)^{-2}\right)v_2' \\
&= 1 + [1 \ \ \dots \ \ 1 \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0]\cdot\left(\left(I-M\right)^{-1}+\left(I-M\right)^{-2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}v_2+\frac{1}{2}v_2'\right) = 5
\end{aligned}
$$

用同樣的解法，我們也算出了 $n=5$ 和 $n=6$ 時的期望值為 6 和 7。觀察螞蟻在角錐上移動時的期望值結果之規律，我們能給出以下猜想：

猜想三、當螞蟻在 n 角錐上移動時，走回原點的移動次數的期望值為 $n+1$。

3. n 角柱

我們接著研究螞蟻在角柱上移動的情況。注意到四角柱也就是正六面體，由前面所算出的結果可知期望值為 8，在此我們由 $n=3$ 開始研究。將 n 角柱看為上下兩個 n 邊形組成，先以逆時針方向其中一個 n 邊形填入 1 到 n 做為編號，再將 $n+1$ 到 $2n$ 同樣以逆時針方向填入另一個 n 邊形，如圖七。

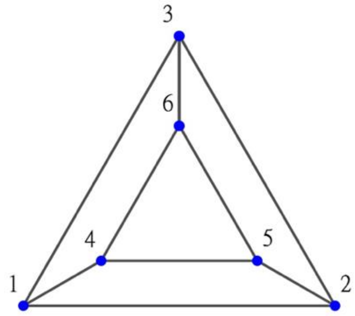
觀察圖七，可以發現：

$e_{12}=e_{13}=e_{21}=e_{23}=e_{31}=e_{32}=e_{45}=e_{46}=e_{54}=e_{56}=e_{64}=e_{65}$、

$e_{14}=e_{25}=e_{36}=e_{41}=e_{52}=e_{63}$。

因此，螞蟻在三角柱上移動時，期望值的公式為：

$$
\begin{aligned}
\text{所求} &= \frac{1}{2|E(G)|}\sum_{(i,j)\in E(G)} e_{ij} \\
&= \frac{12\times e_{12}+6\times e_{14}}{18} = \frac{2e_{12}+e_{14}}{3}
\end{aligned}
$$



圖七

此公式可推廣至 n 角柱的情況。以圖七為例，e_{12} 的情況代表螞蟻第一步指向移動是在同一層 n 邊形移動，e_{14} 的情況代表螞蟻第一步指向移動會移動到另一層 n 邊形。

注意兩者的差別，可以發現第一步若為 (1,4)，則螞蟻需移動至少四步才能回到原點；而第一步若為 (1,2)，則螞蟻最快僅需移動三步便能回到原點。

因此我們在研究角柱時要考慮兩種不同的情況。

綜上所述，我們可以得到當螞蟻在 n 角柱上移動時，期望值的公式為：

$$所求=\frac{1}{2|E(G)|}\sum_{(i,j)\in E(G)} e_{ij}=\frac{4n\times e_{12}+2n\times e_{1(n+1)}}{6n}=\frac{2e_{12}+e_{1(n+1)}}{3}$$

當螞蟻在 n 角柱上移動時，將 e_{12} 定為狀況一的期望值、$e_{1(n+1)}$ 定為狀況二的期望值。

考慮兩種情況因第一步指向移動不同，故會有兩種第二步的移動機率向量。三角柱的 M 如下圖八，其編號如圖七所示。情況一第二步的移動機率向量為 v_2，如圖九；情況二第二步的移動機率向量為 v_2'，如圖十。由此可得：

$$所求=\frac{2e_{12}+e_{14}}{3}=\frac{2}{3}\times 狀況一之期望值+\frac{1}{3}\times 狀況二之期望值$$

$$=[1\ \ \ldots\ \ 1\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0]\left((I-M)^{-1}+(I-M)^{-2}\right)\left(\frac{2}{3}\times v_2+\frac{1}{3}\times v_2'\right)=6$$

$$\begin{bmatrix}
0&0&0&\frac12&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\frac12&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\frac12&\frac12&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&\frac12&0&0&0\\
0&0&0&0&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&\frac12\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&0&\frac12&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&0&\frac12\\
0&0&0&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&\frac12&0\\
0&0&0&0&0&\frac12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\frac12&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac12&\frac12&0&0&0&0
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\\frac12\\0\\0\\0\\\frac12\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\\frac12\\0\\0\\\frac12\\0\end{bmatrix}$$

圖八　　　　圖九　　圖十

我們能用同樣的方式得出 $n=5$ 和 $n=6$ 的情況。當螞蟻在五角柱上移動，走回原點時移動次數的期望值為 10 ，在六角柱移動時期望值則為 12。觀察求出的期望值，我們有以下猜想：

猜想四、當螞蟻在 n 角柱上移動時，走回原點的移動次數的期望值為 $2n$。

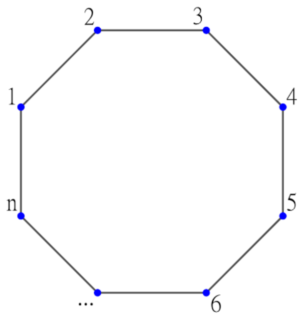
三、分析各點的連接關係

（一）n 點圖形

我們接著想計算 n 點圖形的情況，因圖形複雜度很高，我們先從 n 邊循環圖和 n 階完全圖開始研究。

1. n 邊循環圖

先從 n 邊循環圖開始計算，如圖十一。不難發現：



圖十一

$e_{12}=e_{1n}=e_{21}=e_{23}=\cdots=e_{(n-1)(n-2)}=e_{(n-1)n}=e_{n(n-1)}=e_{n1}$。因此有：

$$所求=e_{12}$$

接著計算 e_{12}。因各點的度皆為 2，且螞蟻不能往回走，故決定第一步後，其後每一步都是確定的。令螞蟻第一步為 (1,2)，則第二步必為 (2,3)，第三步必為 (3,4)，以此類推，最後可以得到第 n 步必為 ($n-1,n$)。因此有

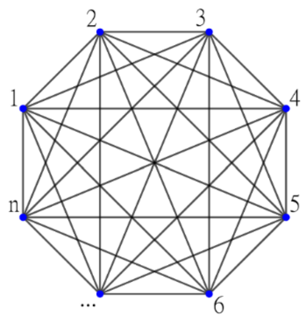
$$所求 = 1 \times n = n$$

2. n 階完全圖

接著討論 n 階完全圖，如圖十二所示。能發現到：

$e_{12} = e_{13} = \cdots = e_{1n} = \cdots = e_{n1} = e_{n2} = \cdots = e_{n(n-1)}$。故同樣有：

$$所求 = e_{12}$$



圖十二

接著計算 e_{12}。因各點的度皆為 $n-1$ 且螞蟻不能往回走，也就是說除了原點外，螞蟻抵達任一點後皆有 $n-2$ 個方向可以作為下一次移動的選擇。故除了第二步因不能往回走之外，螞蟻在任一點上都有 $\frac{1}{n-2}$ 的機率會在下一步回到原點，繪製出下表表示其移動情形。

第 k 步	第 k 步回到原點的機率	k 步後未回到原點的機率
3	$\frac{1}{n-2}$	$1-\frac{1}{n-2}=\frac{n-3}{n-2}$
4	$\frac{n-3}{n-2}\times\frac{1}{n-2}=\frac{n-3}{(n-2)^2}$	$\frac{n-3}{n-2}-\frac{n-3}{(n-2)^2}=\frac{(n-3)^2}{(n-2)^2}$
5	$\frac{(n-3)^2}{(n-2)^2}\times\frac{1}{n-2}=\frac{(n-3)^2}{(n-2)^3}$	$\frac{(n-3)^2}{(n-2)^2}-\frac{(n-3)^2}{(n-2)^3}=\frac{(n-3)^3}{(n-2)^3}$
⋯	⋯	⋯

由此觀察出 $P_1^k = \frac{(n-3)^{k-3}}{(n-2)^{k-2}}$ ，且 k 步後未回到原點的機率為 $\frac{(n-3)^{k-2}}{(n-2)^{k-2}}$ 。此規律對於$k \geq 3, k \in \mathbb{N}$ 皆正確。我們可以用數學歸納法證明之，如下：

當 $k=3$ 時， $P_1^3 = \frac{1}{n-2} = \frac{(n-3)^{3-3}}{(n-2)^{3-2}}$ ，

3 步後未回到原點的機率為 $\frac{n-3}{n-2} = \frac{(n-3)^{3-2}}{(n-2)^{3-2}}$ ，符合。

當 $k=m$ 時，令 $P_1^m = \frac{(n-3)^{m-3}}{(n-2)^{m-2}}$ ，

m 步後未回到原點的機率為 $\frac{(n-3)^{m-2}}{(n-2)^{m-2}}$ ，符合。

則當 $k=m+1$ 時，$P_1^{m+1} = \frac{(n-3)^{m-2}}{(n-2)^{m-2}} \times \frac{1}{n-2} = \frac{(n-3)^{m-2}}{(n-2)^{m-1}}$ ，

$m+1$ 步後未回到原點的機率為 $\frac{(n-3)^{m-2}}{(n-2)^{m-2}} - \frac{(n-3)^{m-2}}{(n-2)^{m-1}} = \frac{(n-3)^{m-1}}{(n-2)^{m-1}}$，符合。

由數學歸納法可知 $P_1^k = \frac{(n-3)^{k-3}}{(n-2)^{k-2}}$，且第 k 步未回到原點的機率為 $\frac{(n-3)^{k-2}}{(n-2)^{k-2}}$，對於 $k \geq 3, k \in \mathbb{N}$ 皆正確。

有了此規律，我們便能算出 n 階完全圖的期望值，如下：

$$\text{所求} = \sum_{i=3}^{\infty} iP_1^i = \sum_{i=3}^{\infty} i \times \frac{(n-3)^{i-3}}{(n-2)^{i-2}} = \frac{3}{n-2} + \frac{4(n-3)}{(n-2)^2} + \cdots + \frac{k(n-3)^{k-3}}{(n-2)^{k-2}} + \cdots$$

$$\frac{n-3}{n-2}\sum_{i=3}^{\infty} i \times \frac{(n-3)^{i-3}}{(n-2)^{i-2}} = \qquad \frac{3(n-3)}{(n-2)^2} + \cdots + \frac{(k-1)(n-3)^{k-3}}{(n-2)^{k-2}} + \cdots$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{n-3}{n-2}\right)\sum_{i=3}^{\infty} i \times \frac{(n-3)^{i-3}}{(n-2)^{i-2}} = \frac{3}{n-2} + \left(\frac{n-3}{(n-2)^2} + \frac{(n-3)^2}{(n-2)^3} + \cdots + \frac{(n-3)^{k-3}}{(n-2)^{k-2}} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n-2}\sum_{i=3}^{\infty} i \times \frac{(n-3)^{i-3}}{(n-2)^{i-2}} = \frac{3}{n-2} + \sum_{i=4}^{\infty} \frac{(n-3)^{i-3}}{(n-2)^{i-2}} = \frac{3}{n-2} + \frac{\frac{n-3}{(n-2)^2}}{1-\frac{n-3}{n-2}} = \frac{n}{n-2} \Rightarrow \text{所求} = n$$

四、P_1^n 之間的關聯

（一）計算方法

考慮一個以 P_1^n 為係數的生成函數 $f(x) = \sum_{i=2}^{\infty} P_1^i x^i$，可以發現 $f'(1) = \sum_{i=2}^{\infty} iP_1^i$ 即為期望值，我們可以由此求出 P_1^n 之間的關聯。

$$f(x) = \sum_{i=2}^{\infty} P_1^i x^i = \sum_{i=2}^{\infty} [1 \ \ \ldots \ \ 1 \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0] v_i x^i = [1 \ \ \ldots \ \ 1 \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0] \sum_{i=2}^{\infty} M^{i-2} v_2 x^i$$
$$= [1 \ \ \ldots \ \ 1 \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0] \sum_{i=2}^{\infty} (xM)^{i-2} v_2 x^2 = [1 \ \ \ldots \ \ 1 \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0] \left(\sum_{i=0}^{\infty} (xM)^i\right) v_2 x^2$$
$$= [1 \ \ \ldots \ \ 1 \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0] (I - xM)^{-1} v_2 x^2$$

我們能用矩陣計算機求出 $f(x)$。以正四面體為例，此情況的函數值為：

$$f(x) = \frac{-x^3}{x-2}$$

由生成函數的性質，我們能推出正四面體的 P_1^i 會有以下規律：

$$P_1^3 = \frac{1}{2}, P_1^i = \frac{1}{2} P_1^{i-1}$$

綜上所述，我們能得到以下定理：

定理三、給定圖 $G = (V, E)$，我們能用

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{i=2}^{\infty} P_1^i x^i = [1 \ \ \ldots \ \ 1 \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0](I - xM)^{-1} v_2 x^2}$$

求出 $f(x)$，並以生成函數的特性推出 P_1^i 之間的關係。

（二）計算結果

我們計算了幾個不同的圖形。$f(x)$ 的函數值如下所示

圖形	$f(x)$
正四面體	$\dfrac{-x^3}{x-2}$
正六面體	$\dfrac{-x^6-x^4}{x^4+x^2-4}$
四角錐	$\dfrac{-5x^8-4x^7+4x^6+44x^5+54x^4+48x^3}{8x^6-12x^4-96x^3+288}$
五角錐	$\dfrac{-7x^9-11x^8+16x^7+64x^6+152x^5+96x^4+128x^3}{12x^7+12x^6-16x^5-128x^4-320x^3+1024}$
三角柱	$\dfrac{-3x^7+x^6-10x^5-12x^3}{3x^5-3x^4+12x^3-12x^2+24x-48}$
五角柱	$\dfrac{-3x^{11}-13x^9-5x^8-16x^7-32x^6+8x^5-32x^4}{3x^9+15x^7+3x^6+30x^5+48x^3-96x^2+96x-192}$

由上表可推得其 P_1^i 之間的關係，如下所示

圖形	P_1^i 的規律
正四面體	$P_1^i=\dfrac{1}{2}P_1^{i-1}$
正六面體	$P_1^{2i}=\dfrac{1}{4}P_1^{2i-2}+\dfrac{1}{4}P_1^{2i-4}$
四角錐	$P_1^n=-\dfrac{1}{3}P_1^{n-3}-\dfrac{1}{24}P_1^{n-4}+\dfrac{1}{36}P_1^{n-6}$
五角錐	$P_1^n=-\dfrac{5}{16}P_1^{n-3}-\dfrac{1}{8}P_1^{n-4}-\dfrac{1}{64}P_1^{n-5}+\dfrac{3}{256}P_1^{n-6}+\dfrac{3}{256}P_1^{n-7}$
三角柱	$P_1^n=\dfrac{1}{2}P_1^{n-1}-\dfrac{1}{4}P_1^{n-2}+\dfrac{1}{4}P_1^{n-3}-\dfrac{1}{16}P_1^{n-4}+\dfrac{1}{16}P_1^{n-5}$
五角柱	$P_1^n=\dfrac{1}{2}P_1^{n-1}-\dfrac{1}{2}P_1^{n-2}+\dfrac{1}{4}P_1^{n-3}+\dfrac{4}{25}P_1^{n-5}+\dfrac{1}{64}P_1^{n-6}+\dfrac{5}{64}P_1^{n-7}+\dfrac{1}{64}P_1^{n-9}$

肆、研究結果

我們求出了當螞蟻在某些圖上移動，走回原點時所經邊數的期望值，統整如下表所示。

圖形	正四面體	正六面體	正八面體	正十二面體	正二十面體	四角錐
期望值	4	8	6	20	12	5

圖形	五角錐	三角柱	五角柱	n 邊循環圖	n 階完全圖
期望值	6	6	10	n	n

也能藉由生成矩陣和生成函數的特性，求出螞蟻在圖上移動時，P_1^i 的規律，如下表。

正四面體	$P_1^i=\frac{1}{2}P_1^{i-1}$
正六面體	$P_1^{2i}=\frac{1}{4}P_1^{2i-2}+\frac{1}{4}P_1^{2i-4}$
四角錐	$P_1^n=-\frac{1}{3}P_1^{n-3}-\frac{1}{24}P_1^{n-4}+\frac{1}{36}P_1^{n-6}$
五角錐	$P_1^n=-\frac{5}{16}P_1^{n-3}-\frac{1}{8}P_1^{n-4}-\frac{1}{64}P_1^{n-5}+\frac{3}{256}P_1^{n-6}+\frac{3}{256}P_1^{n-7}$
三角柱	$P_1^n=\frac{1}{2}P_1^{n-1}-\frac{1}{4}P_1^{n-2}+\frac{1}{4}P_1^{n-3}-\frac{1}{16}P_1^{n-4}+\frac{1}{16}P_1^{n-5}$
五角柱	$P_1^n=\frac{1}{2}P_1^{n-1}-\frac{1}{2}P_1^{n-2}+\frac{1}{4}P_1^{n-3}+\frac{4}{25}P_1^{n-5}+\frac{1}{64}P_1^{n-6}+\frac{5}{64}P_1^{n-7}+\frac{1}{64}P_1^{n-9}$

伍、討論

一、加權的特性

前面提到，我們會以 $\frac{1}{2|E(G)|}\sum_{(i,j)\in E(G)} e_{ij}$ 對期望值做加權，對此有一個有趣的發現。

定義八、給定一張圖 $G=(V,E)$，選定一個點 i，螞蟻由 i 號點出發後經過數次移動回到 i 號點時，所經邊數的期望值定為 e_i。

對於定義八，由於並沒有考慮第一步的指向移動為何，故需考慮加權。假設和 i 號點相鄰的點為 $n_1,n_2,\dots,n_{deg(i)}$，我們會有以下的計算方式：

$$e_i=\frac{\sum_{j=1}^{deg(i)} e_{in_j}}{\sum_{v\in V(G)} deg(v)}=\frac{1}{2|E(G)|}\sum_{j=1}^{deg(i)} e_{in_j}$$

以四角錐為例，編號如圖六，我們會有

$$e_1=\frac{1}{2|E(G)|}\sum_{j=1}^{deg(1)} e_{1n_j}=\frac{e_{12}+e_{13}+e_{14}+e_{15}}{16}=\frac{4+4+4+4}{16}=1$$

$$e_2=e_3=e_4=e_5=\frac{1}{2|E(G)|}\sum_{j=1}^{deg(2)} e_{2n_j}=\frac{e_{21}+e_{23}+e_{25}}{16}=\frac{\frac{1}{4}e_{21}+\frac{2}{4}e_{23}}{4}=\frac{4}{4}=1$$

發現到，$e_1=e_2=e_3=e_4=e_5=1$。由此可得：

$$\text{所求}=e_1+e_2+e_3+e_4+e_5=5$$

我們在計算了許多例子後，給出以下猜想：

猜想五、對於任意一張圖 $G=(V,E)$，我們會有 $e_1=e_2=\cdots=e_{|E(G)|}=1$。

二、生成矩陣的特性

（一）$[\,1\ \ldots\ 1\,0\ \ldots\ 0\,]\cdot(\,I-M\,)^{-1}$

原先在研究時，我們並沒有刻意左乘 $[\,1\ \ldots 1\ 0\ \ldots\ 0\,]$ 直接得出期望值，而是算出了 $(\,(\,I-M\,)^{-1}+(\,I-M\,)^{-2}\,)v_2$ 後，再去找期望值的結果會被向量中哪些元素影響。而後我們在整理研究成果的過程中，有了以下發現：

$$[\,1\ \ldots\ 1\,0\ \ldots\ 0\,]\cdot(\,I-M\,)^{-1}=[1\ \ldots\ 1]$$

我們可以證明這個性質，首先考慮一個有關生成矩陣的無窮級數：

$$\sum_{i=0}^{\infty}M^i=I+M+M^2+\cdots$$

思考生成矩陣意義，每一次以移動機率向量左成生成矩陣，代表螞蟻在圖上的一次移動。且因回到原點後螞蟻就不再移動，也就是說移動的次數越多，螞蟻尚未回到原點的機率就越低。故當 i 趨近無窮大時，M^i 會趨近於零矩陣。

有了這個結果後，我們可以得出 $\sum_{i=0}^{\infty}M^i$ 計算後得到結果中的每個元素都會收斂。因此我們能算出此級數的值。

$$\sum_{i=0}^{\infty}M^i=(I-M)^{-1}(I-M)\sum_{i=0}^{\infty}M^i=(I-M)^{-1}(I-M)(I+M+M^2+\cdots)$$
$$=(I-M)^{-1}\big((I+M+M^2+\cdots)-(M+M^2+\cdots)\big)=(I-M)^{-1}\cdot I=(I-M)^{-1}$$

將此結果帶回左式，我們會有

$$[1\ldots 1\,0\ldots 0](\,I-M\,)^{-1}=[1\ldots 1\,0\ldots 0]\sum_{i=0}^{\infty}M^i=[1\ldots 1\,0\ldots 0](I+M+M^2+\cdots)$$

為方便，以 $\left(M^i\right)_{j,k}$ 表示矩陣 M^i 第 j 列第 k 行的元素，且公式中 $[1\ldots 1\,0\ldots 0]$ 由左側共 p 個 1 及右側共 q 個 0 組成，是一個 $1\times(p+q)$ 的矩陣，而 M^i 是一個 $(p+q)\times(p+q)$ 矩陣，且當 i 不等於零時， M^i 的左側 p 行所有元素皆為 0。

觀察 $[1\,1\,1\ldots 1\,0\,0\ldots 0]\cdot(\,I+M+M^2+\cdots\,)$ ，不難發現，對於所有不大於 q 的正整數 r,s，$\left(M^i\right)_{p+r,p+s}$ 是和 $[1\,1\,1\ldots 1\,0\,0\ldots 0]$ 中的 0 相乘，故不會影響結果。又 $i\geq 1$ 時， M^i 的左側 p 行所有元素皆為 0 ，故此時對於不大於 p 的正整數 t 及不大於 $p+q$ 的正整數 u ， $\left(M^i\right)_{t,u}=0$ 不會影響公式的結果。綜上所述，會有：

$$[1\ldots 1\,0\ldots 0]\cdot(\,I+M+M^2+\cdots\,)$$
$$=[1\ldots 1\,0\ldots 0]\cdot I+[1\ldots 1\,0\ldots 0]\cdot M+[1\ldots 1\,0\ldots 0]\cdot M^2+\cdots$$
$$=[1\ldots 1\,0\ldots 0]+\left[0\ldots 0\ \sum_{k=1}^{p}(M)_{k,p+1}\ \ldots\ \sum_{k=1}^{p}(M)_{k,p+q}\right]+\cdots$$
$$+\left[0\ldots 0\ \sum_{k=1}^{p}\left(M^i\right)_{k,p+1}\ \ldots\ \sum_{k=1}^{p}\left(M^i\right)_{k,p+q}\right]+\cdots$$
$$=[1\ldots 1\,0\ldots 0]+\left[0\ldots 0\ \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+1}\ \ldots\ \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+q}\right]$$

若 M 第 $p+1$ 行代表的指向移動為 (a,b)，結合我們對生成矩陣的定義和公式，

可以知道 $\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+1}$ 代表的意義為：

「在出現指向移動 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 後，螞蟻經過 i 次或少於 i 次移動回到原點的機率。」

而當 i 值越大時，螞蟻經過 i 次或少於 i 次移動回到原點的機率就越大。故有：

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+1}=1$$

同理，我們也會有：

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+l}=1 \qquad\qquad for\ \ l\le q\,,l\in\mathbb{N}$$

將此結果帶回前式後，便能得到以下結果

$$[1\ldots1\ 0\ldots0]\cdot(I-M)^{-1}=[1\ldots1\ 0\ldots0]\cdot(I+M+M^2+\cdots)$$
$$=[1\ldots1\ 0\ldots0]+\left[0\ldots0\ \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+1}\ldots\ \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+q}\right]$$
$$=[1\ldots1\ 0\ldots0]+[0\ldots0\ 1\ldots1]$$
$$=[1\ldots1]$$

（二）$[1\ \ldots\ 1\ 0\ \ldots\ 0]\cdot(I-M)^{-2}$

找出了 $[1\ \ldots\ 1\ 0\ \ldots\ 0]\cdot(I-M)^{-1}$ 的特性後，我們可以將定理一的式子表示為

$$[1\ldots1\ 0\ldots0]((I-M)^{-1}+(I-M)^{-2})v_2=([1\ldots1]+[1\ldots1\ 0\ldots0](I-M)^{-2})v_2$$

因此我們接著想研究 $[1\ldots1\ 0\ldots0](I-M)^{-2}$ 的性質。

已知 $(I-M)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}M^i$，故

$$(I-M)^{-2}=\left(\sum_{i=0}^{\infty}M^i\right)^2=(I+M+M^2+\cdots)^2$$
$$=I(I+M+M^2+\cdots)+M(I+M+M^2+\cdots)+M^2(I+M+M^2+\cdots)+\cdots$$
$$=(I+M+M^2+\cdots)+(M+M^2+M^3+\cdots)+(M^2+M^3+M^4+\cdots)+\cdots$$
$$=I+2M+3M^2+4M^3+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)M^i$$
$$\Rightarrow[1\ \ldots\ 1\ 0\ \ldots\ 0]\cdot(I-M)^{-2}=[1\ \ldots\ 1\ 0\ \ldots\ 0](I+2M+3M^2+4M^3+\cdots)$$
$$=[1\ \ldots\ 1\ 0\ \ldots\ 0]+[1\ \ldots\ 1\ 0\ \ldots\ 0](2M+3M^2+4M^3+\cdots)$$
$$=\left[1\ldots1\ \sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+1}\ldots\ \sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+q}\right]$$

若 M 第 $p+1$ 行代表的指向移動為 (a,b)，結合我們對生成矩陣的定義和公式，

可以知道 $(j+1)\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+1}$ 代表的意義為：

「給定第一步為 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，螞蟻再經過 j 次移動後回到 1 號點時所經邊數的期望值。」

因此我們可以知道，$\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+1}$ 代表的意義為：

「給定第一步為 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，螞蟻經過數次移動後回到 1 號點時所經邊數的期望值。」

此意義和定義七的 e_{ab} 不同之處在於終點。此處是給定第一步為 (a,b)，終點為 1 號點；e_{ab} 的情況則是給定第一步為 (a,b)，而終點為 a 號點。

為方便敘述，在此以 $(e_1)_{ab}$ 表示由 a 號點出發，第一步指向移動為 (a,b)，且終點為 1 號點的情況下，螞蟻數次移動後回到原點時，所經邊數的期望值。

計算正四面體的情況，我們有：

$$[\,1\ \dots\ 1\ 0\ \dots\ 0\,]\cdot(\,I-M\,)^{-2}=[\,1\ \ 1\ \ 1\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3]$$

$$=[(e_1)_{21}\ \ (e_1)_{31}\ \ (e_1)_{41}\ \ (e_1)_{32}\ \ (e_1)_{42}\ \ (e_1)_{23}\ \ (e_1)_{43}\ \ (e_1)_{24}\ \ (e_1)_{34}]$$

另外，也可以用期望值的線性關係來反推 $(e_1)_{ab}$ 。對於 $G=(\,V,E\,)$，假設有一點編號為 i，與其相鄰的點為 $n_1,n_2,\dots,n_{deg(i)}$，我們會有：

$$(e_1)_{n_j i}=1+\frac{1}{deg(i)-1}\left(\left(\sum_{k=1}^{deg(i)}(e_1)_{in_k}\right)-(e_1)_{in_j}\right)$$

其中，右式加一是因為考慮螞蟻走 (n_j,i) 的那一次移動。

以正四面體的情況為例，方法如下：

由期望值的線性關係，在正四面體的情況中會有

$$(e_1)_{23}=1+\frac{1}{2}\times((e_1)_{31}+(e_1)_{34})\,,(e_1)_{24}=1+\frac{1}{2}\times((e_1)_{41}+(e_1)_{43})$$

$$(e_1)_{32}=1+\frac{1}{2}\times((e_1)_{21}+(e_1)_{24})\,,(e_1)_{34}=1+\frac{1}{2}\times((e_1)_{41}+(e_1)_{42})$$

$$(e_1)_{42}=1+\frac{1}{2}\times((e_1)_{21}+(e_1)_{23})\,,(e_1)_{43}=1+\frac{1}{2}\times((e_1)_{31}+(e_1)_{32})$$

注意到，$(e_1)_{a1}=1$。故我們有

所求 $=1+(e_1)_{12}=1+\left(1+\frac{1}{2}((e_1)_{23}+(e_1)_{24})\right)$

$$(e_1)_{23}=1+\frac{1}{2}\times((e_1)_{31}+(e_1)_{34})=1+\frac{1}{2}\times(1+(e_1)_{34})$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\times((e_1)_{41}+(e_1)_{42})\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\times(1+(e_1)_{42})\right)$$

$$=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}\times\left(1+\frac{1}{2}\times((e_1)_{21}+(e_1)_{23})\right)=\frac{(e_1)_{23}+27}{8}$$

$\Rightarrow (e_1)_{23}=3$，同理可推得 $(e_1)_{24}=3$

$\Rightarrow$ 所求 $=1+\left(1+\frac{1}{2}((e_1)_{23}+(e_1)_{24})\right)=4$

三、期望值的探討

觀察計算出的期望值結果，發螞蟻在正多面體、n 角錐、n 角柱、n 邊循環圖和 n 階完全圖上移動時，其期望值結果皆和點數相同。另外，由猜想五出發，也能求出：

$$所求 = \sum_{i=1}^{|E(G)|} e_i = |E(G)|$$

由此給出以下猜想：

猜想六、螞蟻在一有 n 個點的圖上移動時，走回原點的移動次數的期望值為 n。

原題的第二小題是關於螞蟻在足球上移動的提問，而以我們目前提出的解法都不好算出此時的期望值。而足球的生成矩陣為 177×177 的方陣，我們雖然能用程式快速求出生成矩陣，但在做矩陣計算時因計算量過大，矩陣計算機無法跑出計算結果。我們希望將來能優化以生成矩陣求期望值的解法，算出足球和其他圖的期望值；或藉由證明猜想六正確，便可得知螞蟻在足球上移動時，走回原點的移動次數的期望值為 60。

顯然若猜想五成立，也可推出猜想六成立。而目前我們對於猜想六的證明還有另外兩種思考方向：

第一種方向：兩點之間在不重複且每個點的度大於等於 2 的情況下，n 邊循環圖和 n 階完全圖分別為最小度與最大度的圖，兩者的期望值皆為 n 。因此我們想證明在點數相同的情況下，增加或減少任意一條邊不會影響期望值的大小。

第二種方向：由討論一得出有關生成矩陣的特性，我們想從生成矩陣導出的公式著手。已知 $[1 \ \dots 1\ 0 \dots 0] \cdot (I - M)^{-1} = [1 \dots 1]$ ，因此原本的公式也能表示成：

$所求= [1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0] \cdot ((I - M)^{-1} + (I - M)^{-2})v_2$

$= [1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0] \cdot (I - M)^{-1} \cdot \left((I + (I - M)^{-1})\right)v_2$

$= [1 \dots 1] \cdot (I + (I - M)^{-1})v_2 = [1 \dots 1] \cdot (I - M)^{-1}v_2 + [1 \dots 1] \cdot v_2$

因為螞蟻不能往回走，故不論圖為何，螞蟻不可能在兩步以內回到原點。而從移動機率向量 v_i 中，能看出 P_1^i 及 i 步移動後螞蟻未回到原點的機率，因此會有

$[1 \dots 1] \cdot v_i = 1 - \sum_{k=1}^{i-1} P_1^k \Rightarrow [1 \dots 1] \cdot v_2 = 1 - \sum_{k=1}^{1} P_1^k = 1 - 0 = 1$

$\Rightarrow 所求= [1 \dots 1] \cdot (I - M)^{-1}v_2 + [1 \dots 1] \cdot v_2 = [1 \dots 1] \cdot (I - M)^{-1}v_2 + 1$

因此，若我們能找到更多 $[1 \dots 1] \cdot (I - M)^{-1}$ 的性質，便能以此出發求出期望值。

四、不能往回走的限制

原題敘述中，限制螞蟻在移動時不能往回走，而我們有試著計算了幾個可以往回走的例子，發現不論有沒有此限制，螞蟻在圖形上移動時回到原點所經邊數的期望值並不會受影響。以正四面體為例，同樣使用圖二的編號，我們能將其 M 和 v_2 改寫為

$$M=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\0\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

利用定理一，我們會有

$$[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]\cdot((I-M)^{-1}+(I-M)^{-2})v_2=4$$

我們也計算了其它圖形的情況，計算出的期望值結果同樣也沒有改變。希望之後我們能將猜想六推廣到可以回頭的情況也正確。

陸、結論

一、結論

（一）給定圖形和第一步指向移動，藉由定理一，我們能求出螞蟻以任意指向移動出發後，經數次移動後回到原點時所經邊數的期望值。

（二）給定圖形和原點，藉由定理二，我們能求出螞蟻以任一點出發後，經數次移動後回到原點時所經邊數的期望值；也能由此推出螞蟻在任一圖形上移動，回到原點時所經邊數的期望值。

（三）透過分析各點的連接關係，我們能求出螞蟻在 n 邊循環圖和 n 階完全圖上移動時，走回原點的移動次數的期望值。

（四）給定圖形和第一步指向移動，藉由定理三，我們能求出螞蟻以任意指向移動出發後，其 P_1^i 之間的關係。

二、未來展望

（一）證明螞蟻在 n 角錐上移動時，走回原點的移動次數的期望值為 $n+1$。

（二）證明螞蟻在 n 角柱上移動時，走回原點的移動次數的期望值為 $2n$。

（三）證明猜想五提到的各點之加權結果正確。

（四）證明螞蟻在一有 n 個點的圖上移動時，走回原點的移動次數的期望值為 n 。

我們將各種圖形分別做了計算與分析，求出了部分的圖形的期望值結果，但也有部分的圖形較難計算。我們目前著手於將完全圖中一些點的度值減小，但仍維持各點的度皆大於等於 2，研究此變化後期望值的結果，希望證明期望值與圖的點數相等。除了前述提到的一些想法外，我們目前也猜想能用生成函數解決，希望之後能找到適當的方法證明我們的猜想。

柒、參考文獻資料

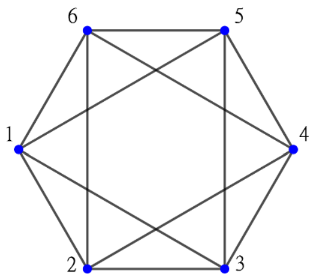
一、游森棚（2021 年 8 月）。森棚教官的數學題——向左轉向右轉。臺灣網路科教館。https://www.ntsec.edu.tw/LiveSupply-Content.aspx?cat=6842&a=6829&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&lsid=19529

二、矩陣計算器，https://matrixcalc.org/zh/

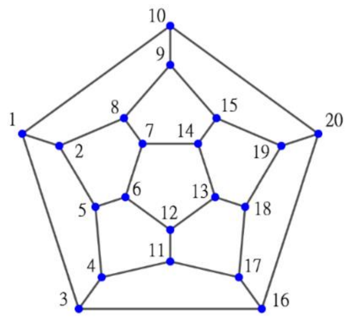
附錄

一、正多面體的生成矩陣和其圖形的編號

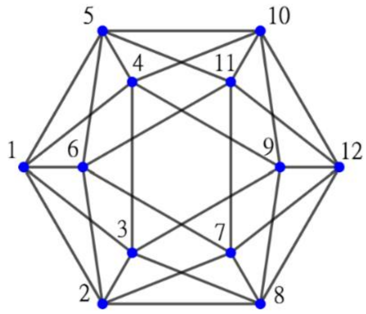
正八面體的圖形如圖十三所示，其生成矩陣如圖十六；正十二面體的圖形如圖十四所示，其生成矩陣如圖十七；正二十面體的圖形如圖十五所示，其生成矩陣如圖十八。



圖十三



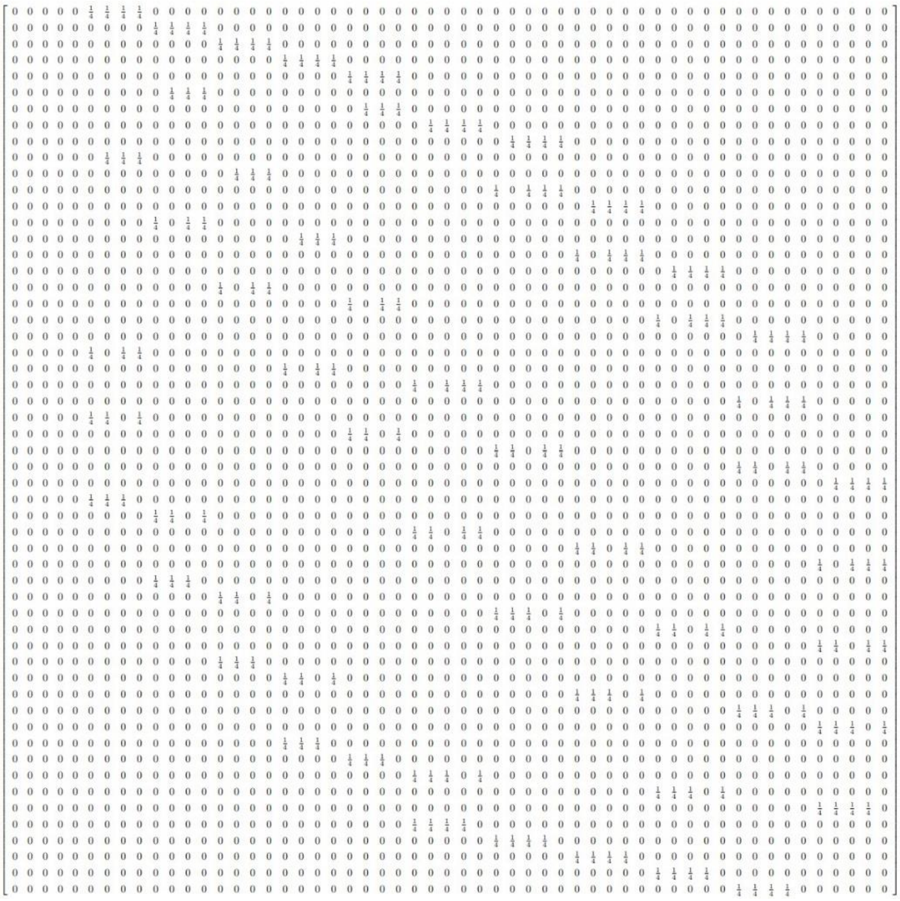
圖十四



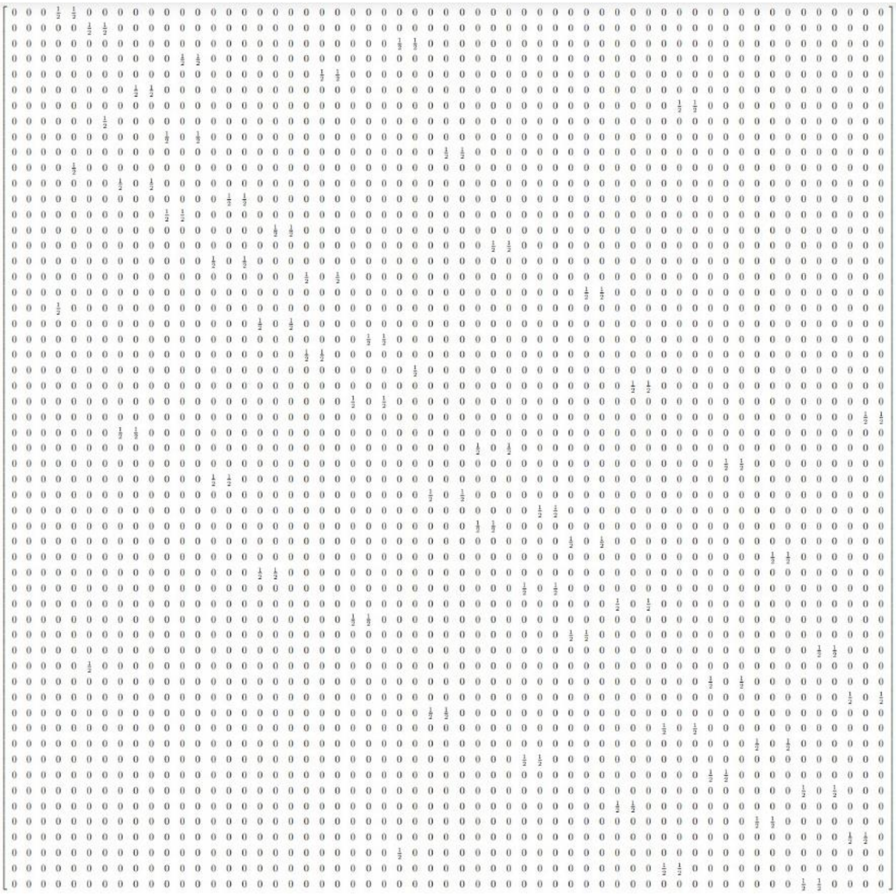
圖十五

$$
\begin{bmatrix}
0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\
0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&0\\
0&0&0&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\
0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\
0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0&0&0
\end{bmatrix}
$$

圖十六



圖十七



圖十八

【評語】050401

本文探討一螞蟻在正多面體、多角柱、多角錐、完全圖上隨機漫步，首次回到起始點的步數期望值。作者在頂點個數較少的圖形上將所有可能性列出、較複雜的圖形則用生成矩陣法及形式冪級數(formal power series)法做出的計算。討論完整，並且比較不同方法的計算結果。但本作品所研究的圖形都是困難度不大的特殊圖形，且各頂點 degree 均相等(或至多一個頂點 degree 不同)，較缺一般性。建議嘗試在正則圖、完全多分圖等例子證明猜想五及猜想六。

作品海報

繞遠路的螞蟻

前言

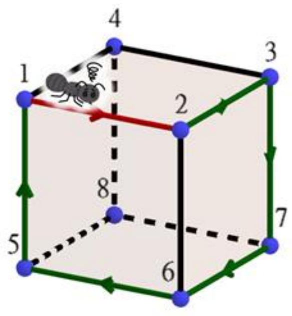
研究主題

原題　在立方體的一條邊上有一隻螞蟻，沿著這條邊向前走。

每次碰到點後，這隻螞蟻就以 $\frac{1}{2}$ 的機率選擇左邊的路，$\frac{1}{2}$ 的機率選擇右邊的路，然後繼續往前走。

一、請問螞蟻回到原點時，移動次數的期望值是多少？

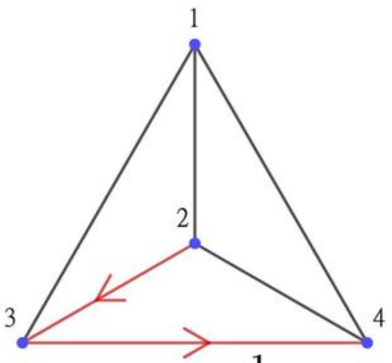
二、足球是由一堆五邊形與六邊形拼接起來的，如果螞蟻在足球的邊上走，答案又是如何？



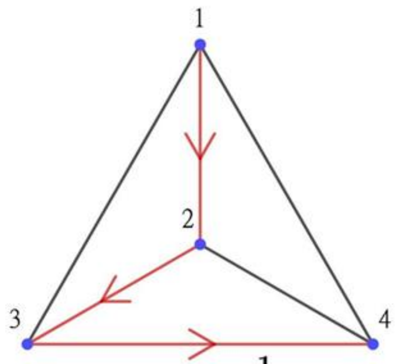
說明　原題敘述中，描述的是螞蟻在立體圖形上的移動情況。但我們在分析題目後，發現到螞蟻移動的機率僅和點與邊的集合有關，與圖形的面並沒有關聯，於是將我們的核心研究轉為每個點的度皆大於等於 2 的簡單圖。

定義

- (i,j)：螞蟻由 i 號點走到 j 號點，稱為指向移動。
- P_i^n　：螞蟻移動 n 次後位於 i 號點的機率，稱為點機率。
- $P_{(i,j,k)}$：螞蟻進行指向移動 (i,j) 後，下一步發生 (j,k) 的機率，稱為定向機率。
- $P_{(i,j,k)}^n$：螞蟻第 $n-1$ 步移動為 (i,j) 且第 n 步為 (j,k) 的機率，稱為移動機率。



$P_{(2,3,4)} = \frac{1}{2}$



$P_{(2,3,4)}^3 = \frac{1}{4}$

研究目的

利用不同方法，找出當螞蟻在各種圖上移動，回到原點時所經邊數的期望值。

研究過程與方法

利用 P_1^n 的規律求期望值

正四面體與正六面體

觀察螞蟻在正四面體和正六面體上移動時 P_1^n 的規律，並證明之，我們能給出以下結果：

- 正四面體有 $P_1^n = \frac{1}{2^{n-2}}\ \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$。可得：$\sum_{i=3}^{\infty} i \cdot P_1^i = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{i}{2^{n-2}} = 4$。
- 正六面體有 $P_1^{2(n+2)} = \frac{1}{4}\left(P_1^{2(n+1)} + P_1^{2n}\right), P_1^{2n+1} = 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$。考慮以 P_1^i 為係數的生成函數 $f(x)$，有：

$$f(x) = \sum_{i=2}^{\infty} P_1^{2i} x^{2i} \longrightarrow f'(1) = \sum_{i=2}^{\infty}\left(2i \times P_1^{2i}\right)$$

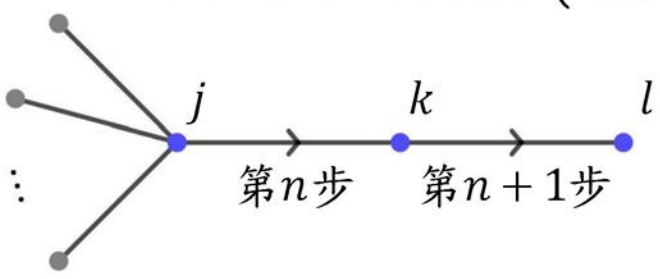
可以發現，將 $x=1$ 帶入 f 的導數，其結果即為我們要求的期望值。將正六面體的情況帶入，可得：

$$f(x) = \frac{x^4 + x^6}{4 - x^2 - x^4} \longrightarrow f'(1) = 8$$

生成矩陣和移動機率向量

由定向機率和移動機率的定義，我們能整理出以下關係式：

- $\forall n,i,j,k,l \in \mathbb{N}$，假設螞蟻在一個有 m 個點的圖上移動，我們會有 $\left(\sum_{i=1}^{m} P_{(i,j,k)}^n\right) \times P_{(j,k,l)} = P_{(j,k,l)}^{n+1}$，如下圖。



再由上述的關係式，可以得到：

$$\sum_{j=1}^{m} P_{(j,k,l)}^{n+1} = \sum_{j=1}^{m}\left(\left(\sum_{i=1}^{m} P_{(i,j,k)}^n\right) \times P_{(j,k,l)}\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} P_{(i,1,k)}^n\right) \times P_{(1,k,l)} + \left(\sum_{i=1}^{m} P_{(i,2,k)}^n\right) \times P_{(2,k,l)} + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{m} P_{(i,m,k)}^n\right) \times P_{(m,k,l)}$$

也就是說，第 $n+1$ 次的移動機率能寫成第 n 次的移動機率和定向機率的內積。我們能將其轉為矩陣的表達式，先給出以下定義：

- M：代表螞蟻第 n 次和第 $n+1$ 次移動間的生成關係之矩陣，稱為生成矩陣。
- v_n：將螞蟻移動 n 步時，各指向移動的發生機率依照和生成矩陣相同的排序寫成的向量，稱為移動機率向量。

由此定義和前述的性質，對於所有正整數 k，我們會有：

$$M \cdot v_k = v_{k+1}$$

正多面體

先由正四面體開始著手，其生成矩陣如右圖所示。

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因 $P_1^n = \sum_{i=1}^{4} P_{(i,2,1)}^n + \sum_{i=1}^{4} P_{(i,3,1)}^n + \sum_{i=1}^{4} P_{(i,4,1)}^n \longrightarrow [1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0] \cdot v_n = P_1^n$。

再藉由此算式可得：

$$\sum_{i=2}^{\infty}\left(i \times P_1^i\right) = \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot [1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0] \cdot v_i = [1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0] \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty}(i+2) \cdot M^i\right) \cdot v_2$$

$$= [1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0] \cdot \left((I-M)^{-1} + (I-M)^{-2}\right) \cdot v_2$$

將正四面體的生成矩陣及移動機率向量帶入，得到以下結果：

- **螞蟻在正四面體上移動時，回到原點所經邊數的期望值為 4。**

用相似的方法，我們可以求得以下結果：

- **螞蟻在正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體上移動時，其期望值結果分別為 8、6、20、12。**

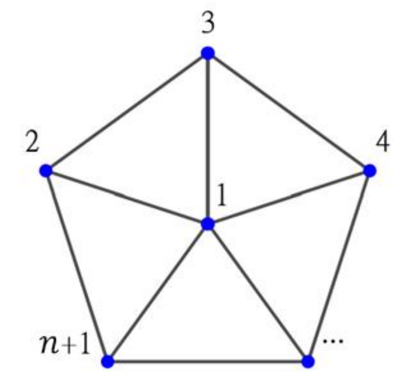
綜合前述，我們能歸納出以下定理：

定理一　**給定原點、第一步指向移動，我們以下式求出此情況下，螞蟻數次移動後回到原點時所經邊數之期望值。**

$$[\mathbf{1}\ \ \dots\ \ \mathbf{1}\ \mathbf{0}\ \ \dots\ \ \mathbf{0}]\cdot\left((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})^{-1}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})^{-2}\right)\boldsymbol{v}_2$$

其中，$[\mathbf{1}\ \dots\ \mathbf{1}\ \mathbf{0}\ \dots\ \mathbf{0}]$ 中 1 的數量和原點的度數相同。

角錐



接著計算螞蟻在角錐上移動時的情況。不難發現，不同的第一步指向移動會求出不同的結果，故此時須依照不同的移動分開計算期望值。我們首先先定義：

- $e_{(i,j)}$：螞蟻的第一步定為 (i,j)，在經過數次移動後回到 i 號點時，其所經邊數的期望值。

討論螞蟻在 n 角錐的第一步移動，觀察右圖，有以下發現：

- $e_{(1,2)}=e_{(1,3)}=\cdots=e_{(1,n+1)}$
- $e_{(2,1)}=e_{(3,1)}=\cdots=e_{(n+1,1)}$
- $e_{(2,3)}=e_{(3,4)}=\cdots=e_{(n+1,2)}=e_{(2,n+1)}=e_{(n+1,n)}=\cdots=e_{(3,2)}$

故我們可以將角錐分為上述三類情況計算期望值。利用定理一，將求出的結果如右表所示。已知在 n 角錐中所有的 $e_{(i,j)}$，和 $e_{(1,2)}$ 等價的共有 n 種，和 $e_{(2,1)}$ 等價的共有 n 種，和 $e_{(2,3)}$ 等價的共有 $2n$ 種。由此我們能給出以下的式子作為加權方法，並以五角錐的情況為例：

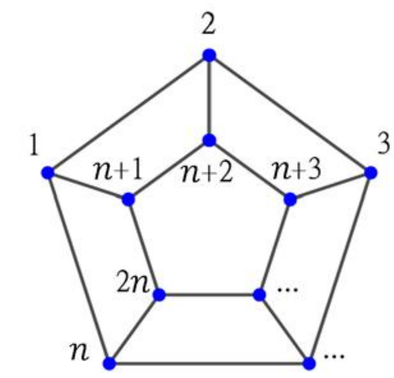
圖形	$e_{(1,2)}$	$e_{(2,1)}$	$e_{(2,3)}$
三角錐	4	4	4
四角錐	4	$\frac{240}{47}$	$\frac{256}{47}$
五角錐	4	$\frac{459}{73}$	$\frac{1001}{146}$

$$\frac{n\times e_{(1,2)}+n\times e_{(2,1)}+2n\times e_{(2,3)}}{n+n+2n}=\frac{e_{(1,2)}+e_{(2,1)}+2e_{(2,3)}}{4}=\frac{1}{4}\left(4+\frac{459}{73}+2\times\frac{1001}{146}\right)=6$$

將其他角錐的情況帶入後，我們有以下發現：

- **螞蟻在 $\boldsymbol{n}$ 角錐上移動時，回到原點所經邊數的期望值為 $\boldsymbol{n+1}$。**

角柱



同樣先討論螞蟻在 n 角柱的第一步移動，觀察右圖，有以下發現：

- $e_{(1,2)}=\cdots=e_{(n-1,n)}=e_{(1,n)}=\cdots=e_{(2,1)}=e_{(n+1,n+2)}=\cdots=e_{(2n-1,2n)}=e_{(n+1,2n)}=\cdots=e_{(n+2,n+1)}$
- $e_{(1,n+1)}=e_{(2,n+2)}=\cdots=e_{(n,2n)}=e_{(n+1,1)}=e_{(n+2,2)}=\cdots=e_{(2n,n)}$

故我們可以將角柱分為上述兩類情況計算期望值。利用定理一，將求出的結果如右下表所示。已知在 n 角柱中所有的 $e_{(i,j)}$，和 $e_{(1,2)}$ 等價的有 $4n$ 種，和 $e_{(1,n+1)}$ 等價的有 $2n$ 種。故能給出下式作為加權方法，並以五角柱的情況為例：

圖形	$e_{(1,2)}$	$e_{(1,n+1)}$
三角柱	$\frac{47}{8}$	$\frac{25}{4}$
四角柱	8	8
五角柱	$\frac{313}{31}$	$\frac{304}{31}$

$$\frac{4n\times e_{(1,2)}+2n\times e_{(1,n+1)}}{4n+2n}=\frac{2e_{(1,2)}+e_{(1,n+1)}}{3}=\frac{1}{3}\left(2\times\frac{313}{31}+\frac{304}{31}\right)=10$$

將其他角柱的情況帶入後，我們有以下發現：

- **螞蟻在 $\boldsymbol{n}$ 角柱上移動時，回到原點所經邊數的期望值為 $\boldsymbol{2n}$。**

加權

考慮到分類的原因是因為第一步指向移動的不同，且每種指向移動皆是沿著邊前進。故對於一張圖 $G=(V,E)$，最多會有 $2|E(G)|$ 種期望值的結果，因此以下式對期望值結果做加權，計算了幾個不同的例子後，我們也統整出猜想一。

猜想一

對於一個圖 $\boldsymbol{G=(V,E)}$，螞蟻在此圖上移動時，走回原點時移動次數的期望值加權後會有以下關係：

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}|\boldsymbol{E(G)}|}\sum_{(i,j)\in E(G)}\boldsymbol{e}_{(i,j)}=|\boldsymbol{V(G)}|$$

P_1^n 遞迴關係的討論

考慮一個以 P_1^n 為係數的生成函數 $f(x)=\sum_{i=2}^{\infty}P_1^ix^i$，我們可以求出 $f(x)$ 的值，並由此求出 P_1^n 之間的關聯。

$$f(x)=\sum_{i=2}^{\infty}P_1^ix^i=\sum_{i=2}^{\infty}\left([1\dots1\ \ 0\dots0]\cdot M^{i-2}v_2x^i\right)=[1\dots1\ \ 0\dots0]\left(\sum_{i=2}^{\infty}(xM)^{i-2}\right)v_2x^2=[1\dots1\ \ 0\dots0](I-xM)^{-1}v_2x^2$$

定理二　**給定圖 $\boldsymbol{G=(V,E)}$，我們能用以下式求出 $\boldsymbol{f(x)}$，並以生成函數的特性推出 $\boldsymbol{P_1^n}$ 之間的關係。**

$$\boldsymbol{f(x)}=\sum_{i=2}^{\infty}\boldsymbol{P_1^ix^i}=[\mathbf{1}\ \ \dots\ \ \mathbf{1}\ \mathbf{0}\ \ \dots\ \ \mathbf{0}](\boldsymbol{I}-\boldsymbol{xM})^{-1}\boldsymbol{v_2x^2}$$

其中，$[\mathbf{1}\ \dots\ \mathbf{1}\ \mathbf{0}\ \dots\ \mathbf{0}]$ 中 1 的數量和原點的度數相同。

利用矩陣計算機，我們算出了幾個不同圖形的 $f(x)$ 的值，如左表。再藉由生成函數的特性，可以反推出 P_1^n 之間的關聯，如右表。

正四面體	$\frac{-x^3}{x-2}$
正六面體	$\frac{-x^6-x^4}{x^4+x^2-4}$
四角錐	$\frac{-5x^8-4x^7+4x^6+44x^5+54x^4+48x^3}{8x^6-12x^4-96x^3+288}$
三角柱	$\frac{-3x^7+x^6-10x^5-12x^3}{3x^5-3x^4+12x^3-12x^2+24x-48}$

正四面體	$P_1^n=\frac{1}{2}P_1^{n-1}$
正六面體	$P_1^{2n}=\frac{1}{4}P_1^{2n-2}+\frac{1}{4}P_1^{2n-4}$
四角錐	$P_1^n=\frac{1}{3}P_1^{n-3}+\frac{1}{24}P_1^{n-4}-\frac{1}{36}P_1^{n-6}$
三角柱	$P_1^n=\frac{1}{2}P_1^{n-1}-\frac{1}{4}P_1^{n-2}+\frac{1}{4}P_1^{n-3}-\frac{1}{16}P_1^{n-4}+\frac{1}{16}P_1^{n-5}$

討論

加權的特性

給定圖 $G=(V,E)$，$i\in V(G)$，螞蟻由 i 出發後經過數次移動回到 i 時，所經邊數的期望值定義為 e_i。

令和 i 相鄰的點編號為 $v_1,v_2,\dots,v_{deg(i)}$，此時第一步共有 $deg(i)$ 種選擇，故 e_i 和前述的加權方式可以寫為：

$$e_i=\frac{1}{deg(i)}\sum_{j=1}^{deg(i)} e_{(i,v_j)} \longrightarrow \frac{1}{2|E(G)|}\sum_{(i,j)\in E(G)} e_{(i,j)}=\frac{1}{2|E(G)|}\sum_{i=1}^{|V(G)|} e_i\times deg(i)$$

計算了幾個不同圖形的情況後，我們有找到 e_i 的規律，並歸納出猜想二：

猜想二

對於任意一張圖 $G=(V,E)$，$i\in V(G)$，我們會有 $\frac{e_i\times deg(i)}{2|E(G)|}=1$，也就有 $e_i=\frac{2|E(G)|}{deg(i)}$。

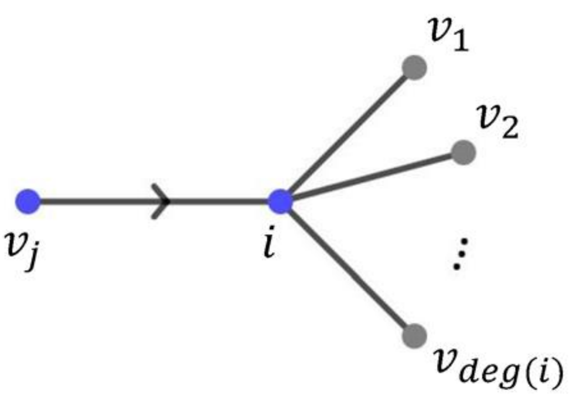
生成矩陣的特性

在計算時發現：$[1\dots 1\,0\dots 0]\cdot(I-M)^{-1}=[1\dots 1]$。我們試著證明此關係，深入研究後，得出有左下的關係：

$$[1\dots 1\,0\dots 0]\cdot(I-M)^{-1}=[1\dots 1\,0\dots 0]\cdot\sum_{i=0}^{\infty}M^i$$

$$=[\overbrace{1\ \dots\ 1}^{p}\ \ \overbrace{0\ \dots\ 0}^{q}]\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overbrace{\qquad\qquad}^{p} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{q}\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & (M^i)_{1,p+1} & \cdots & (M^i)_{1,p+q}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \vdots & (M^i)_{p,p+1} & \cdots & (M^i)_{p,p+q}\\ \vdots & \ddots & \vdots & (M^i)_{p+1,p+1} & \cdots & (M^i)_{p+1,p+q}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & (M^i)_{p+q,p+1} & \cdots & (M^i)_{p+q,p+q}\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\}p\\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\}q\end{array}$$

$$=\left[1\dots 1\ \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+1}\cdots\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+q}\right]$$



令 M 第 $p+l$ 行代表的指向移動為 (a,b) ，結合生成矩陣的意義，可知 $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+l}$ 代表的意義為：

「在出現指向移動 (a,b) 後，在經數次移動後，螞蟻回到原點的機率」

移動次數越多時，未回到原點的機率越低，故 $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+l}=1\longrightarrow[1\dots 1\,0\dots 0]\cdot(I-M)^{-1}=[1\dots 1]$。

因此我們能將定理一簡化為：

$$[1\dots 1\,0\dots 0]\cdot\left((I-M)^{-1}+(I-M)^{-2}\right)v_2=[1\dots 1](1+(I-M)^{-1})v_2=1+[1\dots 1](I-M)^{-1}v_2$$

另外，因 $(I-M)^{-2}=\left(I+M+M^2+M^3+\cdots\right)^2=I+2M+3M^2+4M^3+\cdots$，故有：

$$[1\dots 1](I-M)^{-1}=[1\dots 1\,0\dots 0]\cdot(I-M)^{-2}=\left[1\dots 1\ \sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+1}\cdots\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+q}\right]$$

由此也能引出我們發現的期望值之線性關係，如下：

首先，將 $E_{(i,j)}$ 定義為「給定第一步為(i,j)，將螞蟻經過數次移動後回到 1 號點時所經邊數的期望值」。

注意到，若在 M 中第 $p+l$ 行代表的移動為 (i,j) ，結合生成矩陣的意義會有：$\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\sum_{k=1}^{p}\left(M^j\right)_{k,p+l}=E_{(i,j)}$。

假設和 i 相鄰的點為 $v_1,v_2,\dots,v_{deg(i)}$，如右上圖，可得：

$$E_{(v_j,i)}=1+\frac{1}{deg(i)-1}\left(\left(\sum_{k=1}^{deg(i)}E_{(i,v_k)}\right)-E_{(i,v_j)}\right)$$

利用此關係，也能給我們另一種求期望值的思路。

期望值的探討

我們發現，期望值結果的數值皆和圖形的點數相同。同時，若猜想二正確，會有下式的結果。

$$\frac{1}{2|E(G)|}\sum_{i=1}^{|V(G)|}e_i\times deg(i)=\sum_{i=1}^{|V(G)|}e_i\times\frac{deg(i)}{2|E(G)|}=\sum_{i=1}^{|V(G)|}1=|V(G)|$$

也就是說，若能證明猜想二正確，就能證明猜想一正確。

往回走限制的探討

原題限制螞蟻在移動時不能往回走，而我們有試著計算幾個可以往回走的例子，發現期望值的結果並不會受影響。

以正四面體為例，將其 M 和 v_2 改寫為右圖所示。利用定理一可得：

$$[1\ 0\ 0\ 0]\cdot\left((I-M)^{-1}+(I-M)^{-2}\right)\cdot v_2=4$$

$$M=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}\quad v_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\0\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

我們也發現，對於加權的特性之猜想也不受此限制影響。故我們猜測，猜想一和猜想二不論有沒有受到不能往回走的限制，對於所有的圖形皆成立。

如果能證明螞蟻不論能不能往回走，期望值結果都不會改變，便能大幅縮小生成矩陣的大小。目前已經有計算出可以往回走時，螞蟻在足球上移動的期望值結果為 60。

研究結果與結論

結論

一、利用定理一，我們能求出螞蟻在某圖形上移動，回到原點時所經邊數的期望值。

二、利用定理二，我們能求出螞蟻以任意指向移動出發後，其 P_1^n 的遞迴關係。

未來展望

證明我們對於期望值提出的猜想正確，並證明在螞蟻可以往回走的情況下猜想仍成立。

參考資料

一、游森棚（2021年8月）。森棚教官的數學題——向左轉向右轉。臺灣網路科教館。

二、矩陣計算器