

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 地球科學科

第二名

030505

蓋婭的秘密－測量地球半徑

學校名稱：彰化縣立大同國民中學

作者： 國二 張元瀚 國一 李炫成 國一 巫俊憲	指導老師： 王文明 林惠香
---	-----------------------------

關鍵詞：地球半徑、北極星、太陽

蓋婭的祕密－測量地球半徑

摘要

前人利用太陽在同一經度的南、北兩地點過中天時的仰角差與兩地距離，換算出地球的半徑。因測量儀器的精準度與日期、時間選擇的限制，測量方式有很大改良空間。本研究以測距輪、公路里程碑與 Google[®] Map 尺規工具，選擇同一經線上的南、北二測量點，量測出直線距離，再利用手機高精度陀螺儀，自製北極星仰角測量平台，搭載應用程式 **phyphox[®] APP**，在測量點測量北極星的仰角，換算成地球半徑，量得最接近地球實際平均半徑的距離為 **6366.514507km**，與實際值誤差約**-0.0766%**，準確度更勝前人研究，大幅縮短「利用天體仰角測量地球半徑」所需要的測量距離，且在任何一天，只要月相、天候允許，都可以進行測量。

壹、研究動機

一、研究動機：

西元前 250 年已有人利用太陽仰角測出地球的半徑，歷屆科展中有兩屆得獎作品搭配科技輔助，並且改良了測量方式，以自製儀器進行測量，求出地球的半徑，得到誤差更小的數值，但是兩個研究中存有不合科學邏輯的謬誤（所選時間、日期與儀器）以及測量限制過大（一年中只有兩天可以進行測量）的問題，因此，本研究企圖改良前人的研究限制，設計新的裝置與方法，進行地球半徑的測量。

二、文獻探討：

（一）、艾拉托色尼的測量

西元前 250 年，古埃及亞歷山大城圖書館館長艾拉托色尼在亞歷山大城和塞恩城之間發現了一個有趣的現象：夏至的正午，陽光垂直地照耀在賽恩城人的頭頂上，插在地上的旗杆沒有影子落在地面上。賽恩城南面亞歷山大城的旗杆則在陽光照耀下於地面上留下一條長長的影子。經過仔細測量得出，亞歷山大城的太陽影子同旗杆的交角大約為 7° ，這個角度對應於地面的「弧長」相當於地球周長的 $7/360$ ，近似等於 $1/60$ 。艾拉托

色尼從來往的商賈口中得知，亞歷山大城到塞恩城的距離是 5000 希臘里，因此艾拉托色尼得出，地球周長是 5000×60 希臘里，相當於 39600 公里，他算出地球直徑為 12800 公里。這個數值非常精確，和現在使用的地球赤道直徑數值 12756 公里相差很小。

如圖 1-1 所示，在地球同一經度，不同緯度的南北的 A、B 兩地，在同一天太陽過同一經線的同一時刻（太陽到達中天仰角最大時），設法精確測出太陽的仰角 θ_1 及 θ_2 ，可以求出兩地於地球所夾的角度 θ_x ，若知道 A、B 兩地的距離，則可求出地球的半徑：

因為
$$2\pi R \times \frac{\theta_x}{360} = AB \text{ 兩地距離} \quad R: \text{地球半徑}$$

所以
$$R = \frac{AB \text{ 距離}}{2\pi} \times \frac{360}{\theta_x}$$

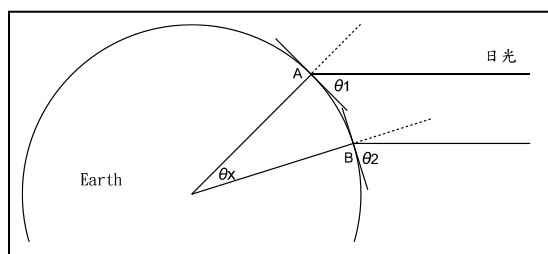
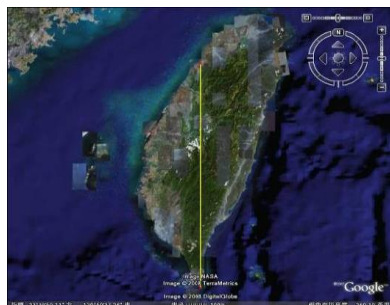


圖 1-1、利用兩地太陽仰角測量地球半徑的原理示意圖

(二)、第 48 屆科展「做一個輕易測得地球半徑的人—利用太陽光求地球半徑」

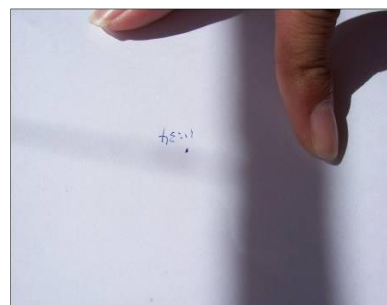
第 48 屆中小學科學展覽國中組地球科學組的研究：「做一個輕易測得地球半徑的人—利用太陽光求地球半徑」作品中，想利用在同一時間、同一經度南、北兩地太陽過子午線時，利用竿影（圖 1-2(b)）測量並求出太陽的高度角，輔以 GPS 定位兩地距離（圖 1-2(a)），算出地球的半徑。



(a) 利用Google® Earth 軟體找出測量地點



(b) 利用影長測量太陽角度



(c) 測量器具產生半影，無法精確定點

圖 1-2、第 48 屆科展：「做一個輕易測得地球半徑的人—利用太陽光求地球半徑」截圖

(三)、第 50 屆科展「天地之間－測量地球半徑」

第 50 屆中小學科學展覽國中組地球科學組的研究：「天地之間－測量地球半徑」，指出第 48 屆科展實驗中有三點不符合科學標準：

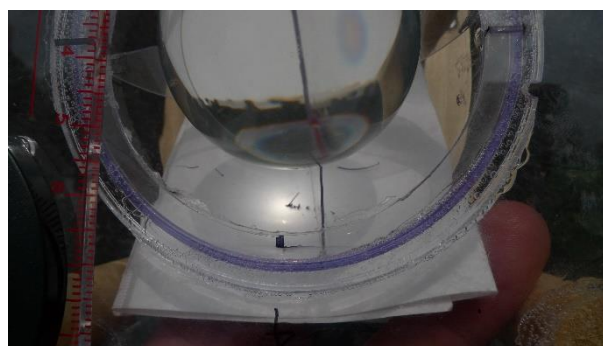
1. 光源所形成的半影現象，使實際利用影子測量太陽高度角時，因半影現象而出現測量誤差（圖 1-2(c)）。
2. 依照中央氣象局各測候站發佈太陽過中天的時間為基準時，但該團隊測量地點與參考的測候站不是處於同一經度，其所選擇太陽過中天的時間必然有誤差。
3. 該測量時間為 1 月下旬，因地球自轉軸傾斜及公轉關係，該日正午時太陽照射同一經度南、北兩處的時間必然不同，一年當中僅有夏至與冬至兩天，太陽正午時同時照射同一經度的南、北兩處。

並且第 50 屆研究中，針對第 48 屆科展作品作出修正設計：

1. 使用水晶球測量太陽高度角（圖 1-3(a)、(b)），減少竿影測量時，半影造成的誤差。
2. 測量時，以太陽近中天時最高仰角做為過中天時間基準。
3. 僅夏至、冬至兩天，同一經度南北兩處太陽會同時間經過中天最高點，測量時間選此二日進行。



(a) 利用水晶球測量太陽仰角



(b) 太陽聚光後產生一個明確測量點，沒有半影的問題

圖 1-3、第 50 屆中科展：「天地之間－測量地球半徑」利用水晶球測量太陽仰角，避免半影造成的誤差。

三、待解決的問題

儘管歷屆兩組科展研究進行了地球半徑的測量（表 1-1），在測量太陽仰角的儀器上，已經獲得了十分精采的改良與成果，但仔細審視兩組報告，在同一經度南、北兩地點的選擇上，都需要足夠的距離，必須仰賴 GPS 定位系統與 Google® Map 科技輔助，但是如果已經使用 GPS 定位系統進行同一經度南、北測量點的選擇，已然獲得兩地距離與緯度資訊，不需測量，已可直接進行地球半徑換算；在時間上，因受到地球自轉軸傾斜的影響，一年當中，大部分的日期會出現同一時間，在同一經線上的南、北兩地，太陽過中天時間不同，太陽同時間過中天的日子僅有夏至、冬至兩天，在測量上受到極大的限制。

表 1-1、歷屆科展測量地球半徑研究方法比較

	48 屆	50 屆
裝置	利用鉛錘線上的標記進行太陽仰角測量，換算兩地間的仰角差。	以水晶球聚光進行太陽仰角換算。
日期	一月下旬	夏、冬至
時間	以中央氣象局公告太陽過中天時間	太陽行至最高點（中天）的時間
測量地點	利用 GOOGLE® Map 找同一經線上的墾丁鵝鑾鼻、苗栗竹南鎮	利用 GOOGLE® Map 找同一經線上的苗栗縣後龍鎮中和國小附近、墾丁水泉國小前
測量對象	太陽	太陽
優點	使用器材簡單，可以輕鬆獲得。	1. 使用水晶球，解決半影問題 2. 選在夏、冬至兩天測量。
缺點	1. 陽光形成的半影。 2. 選擇中央氣象局測候站公布太陽過中天時間為據 3. 測量日期選在一月下旬。 4. 使用 GPS 等科技系統得知兩地經、緯度，不需測量就可得知地球半徑。 5. 測量所需距離過長。	1. 實驗時間被限制在夏、冬至兩天測量。 2. 使用 GPS 等科技系統得知兩地經、緯度，不需測量就可得知地球半徑。 3. 測量所需距離過長。

貳、研究目的

本研究預計解決前人研究的缺點，研發合理便利的測量方式與儀器：

- 一、改良測量儀器，取代既有的太陽仰角測量儀器，提高測量精密度。
- 二、縮短測量距離，使測量不需藉由 GPS 定位系統等已知資訊。
- 三、以北極星取代太陽作為測量依準，解決測量日期的限制。

參、研究材料與器材

一、手機 APP：

phyphox[®] APP、Star Walk[®] 2 APP

二、PC APP：

TINKERCAD[®]、Microsoft[®] Office Excel[®]

三、器材：

iPHONE[®] 12、綠光雷射筆、萬象雲台（Manfrotto[®] 486RC2）、三向齒輪雲台（Manfrotto[®] MHXPRO-3WG）、腳架（Manfrotto[®] MT055XPRO 3 Tripod）、測距輪、極軸望遠鏡（尋星鏡）、水平儀、3D 列印機、自製「北極星仰角測量平台」

肆、研究過程與方法

一、測量儀器的精度提升：

隨著科技進步，傳統測量角度的陀螺儀也跟著進化，利用角速度變化量進行光感測的晶片，已是手機的標準配備之一。本研究以 iPhone® 12 為載具，利用手機的感測晶片進行角度測量，phyphox® APP (physical phone experiments) 是一個能夠調用手機傳感器的應用軟體 (圖 4-1、4-2)，其輸出測量值可達小數點後八位 (圖 4-3)。以地球赤道直徑數值 12756 公里為基準，若以同經線上南北兩地實測太陽仰角差為 0.0001° ，換算兩地距離約為 4 公里，換句話說，若以此 APP 進行仰角測量，在測量地點的選擇上，直線距離可以小於 5 公里，即可不依靠 GPS 系統完成測量。



圖 4-1、phyphox® APP

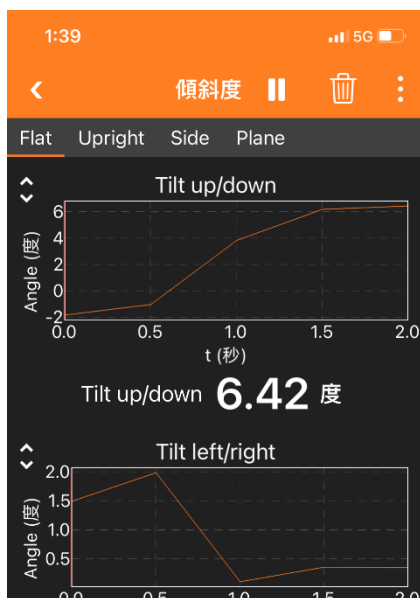
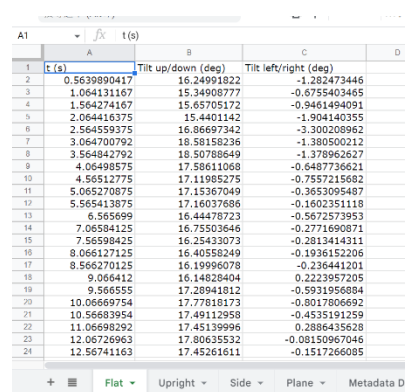


圖 4-2、phyphox® APP 測量手機傾角



t (s)	Tilt up/down (deg)	Tilt left/right (deg)
0.5639890417	16.24991922	-1.282473446
1.064213167	15.34908777	-0.875403465
1.564274167	15.65705172	-0.946149491
2.064416375	15.4401142	-1.904140355
2.564559375	16.86697342	-3.300208962
3.064700792	18.59158336	-1.380500212
3.564842792	18.50788649	-1.378962627
4.06498575	17.58611068	-0.648773621
4.56512775	17.11985275	-0.7557215682
5.065270875	17.15367049	-0.3653095487
5.565413875	17.16037686	-0.1602351118
6.065556875	16.44478723	-0.5672573953
6.565700875	16.75503646	-0.2771690871
7.065843875	16.25433073	-0.2813414311
7.565986875	16.40558249	-0.1936152206
8.066129875	16.19996078	-0.236441201
8.566272875	16.14828404	0.2223957205
9.066415875	17.28941812	-0.5931956684
9.566558875	17.77818173	-0.9017806692
10.066701875	17.49112958	-0.4535191259
10.566844875	17.45139996	0.2886435628
11.066987875	17.80635532	-0.08150967046
11.567130875	17.45261611	-0.1517266085

圖 4-3、phyphox® APP 實測輸出數據

二、測量時間與日期的改良：

傳統的測量方式，受限於太陽同時過同一經線南、北兩地的日期，必須在自轉軸傾斜平面與太陽光照平面重疊的限制，因此一年當中只有夏至與冬至兩天可以進行測量，加上太陽光線強烈，直接測量角度困難，需透過間接測量，增加了誤差的可能。

本研究改良既有測量方式，以夜晚無窮遠處北極星作為基準，因為相對於地球觀察者而

言，北極星是唯一一顆幾乎不會產生相對視運動的恆星，因此無論是否在冬至、夏至，以無窮遠的北極星做為參考點，任何日期與時間，只要是看見北極星的夜晚，在同一經線上的南、北兩地，都可以進行北極星的仰角測量。而北極星仰角測量所得的差異，可以換算成所在位置的緯度差異，取代太陽的觀測困難。

三、測量北極星仰角的裝置：

一般在天文觀測上，常使用綠光雷射筆（指星筆），加上極軸望遠鏡（尋星鏡），讓天文望遠鏡的赤道儀可以對準北極星。而測量北極星的仰角，則需要精準的測量系統（本研究使用手機 **phyphox**[®] APP），但是如何讓手機與極軸望遠鏡在空間上處於同一平面呢？本研究需要製作一個裝置，讓搭載測量角度 APP 的手機、可以指向夜空的雷射筆（指星筆）與尋星鏡固定在平台上，讓它們在空間上處於同一平面。

以游標尺測量雷射筆的直徑、尋星鏡的燕尾板以及固定手機架的螺孔，再以自由軟體 **TINKERCAD**[®]，根據搭載手機、雷射筆、尋星鏡的尺寸，繪製一個平台，讓三種裝置可以在固定同一平面上（如圖 4-4），再轉換成 3D 建模（圖 4-5），到鐵工廠以 CNC 技術製作平台，將手機、雷射筆、尋星鏡固定在自製平台上（圖 4-6），將平台固定在相機腳架的雲台上（圖 4-7）。以此自製「北極星仰角測量平台」搭配利用手機 **phyphox**[®] APP 進行北極星的仰角測量。

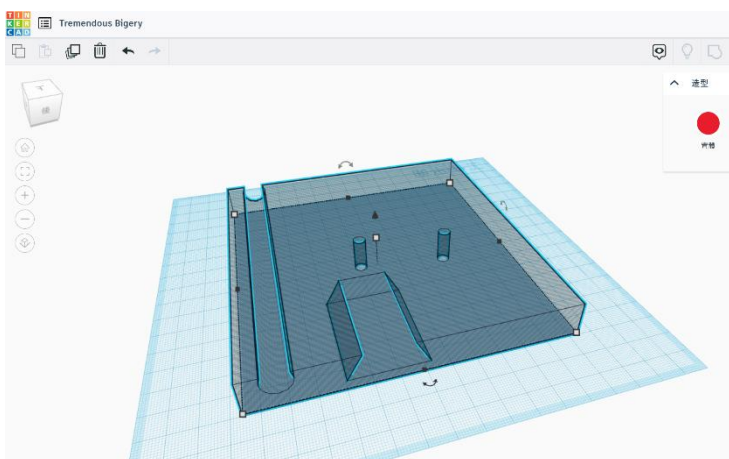


圖 4-4、以 TINKERCAD[®]進行 3D 建模

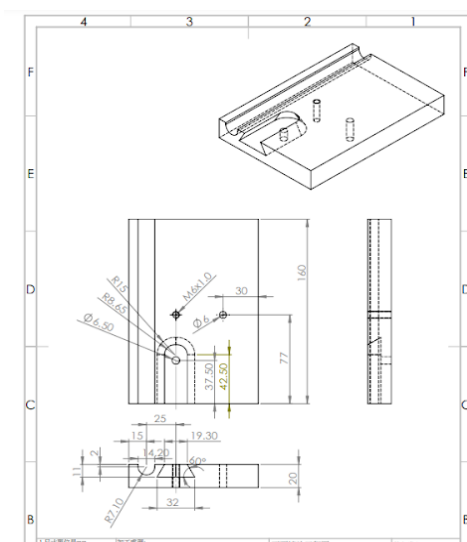


圖 4-5、轉換 3D 建模成 CNC

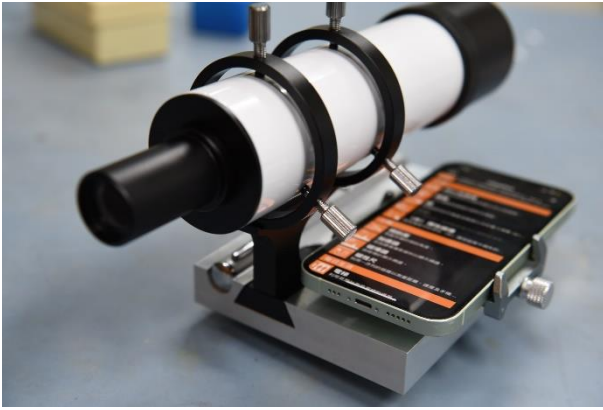


圖 4-6、手機、雷射筆、尋星鏡固定在自製平台上



圖 4-7、平台固定在相機腳架的雲台上

四、測量地點選定：

本研究預計選擇短 (<10 km)、中 (≈ 10 km)、長 (≈ 100 km) 三段同樣經度南北走向的地點，分別測量測量地點直線距離與測量點的北極星仰角。

從地圖上選擇正南北走向道路作為測量地段，選擇地點必須可以靠步行，以測距輪實測直線距離為佳；其次中距離，可利用 Google[®] Map 選擇現有南、北向道路，以現有道路旁經過工務單位測量所設立的里程碑作為依據；再其次的長距離，選擇 Google[®] Map 尺規工具，拉出同經度南、北兩地約 100K，北端測量點與路線二北端測量點相同，並挑選合適地點作為南端測量點。

路線一：選擇雲林縣麥寮鄉豐安路地段（圖 4-8），本地段南、北兩端點作為夜晚測量北極星仰角的地點（圖 4-8 標示處）。

路線二：選台 61 線快速道路，彰化縣大城鄉附近為北端起點（與路線三北端地點共用），終點在雲縣麥寮鄉附近（圖 4-9）。

路線三：以路線二北端測量點為準，使用 Google[®] Map 尺規工具，拉出同經度南、北兩地約 100K，挑選台南市歸仁區二甲果園附近（圖 4-10），作為南端測量點（距離為 100.38K）。

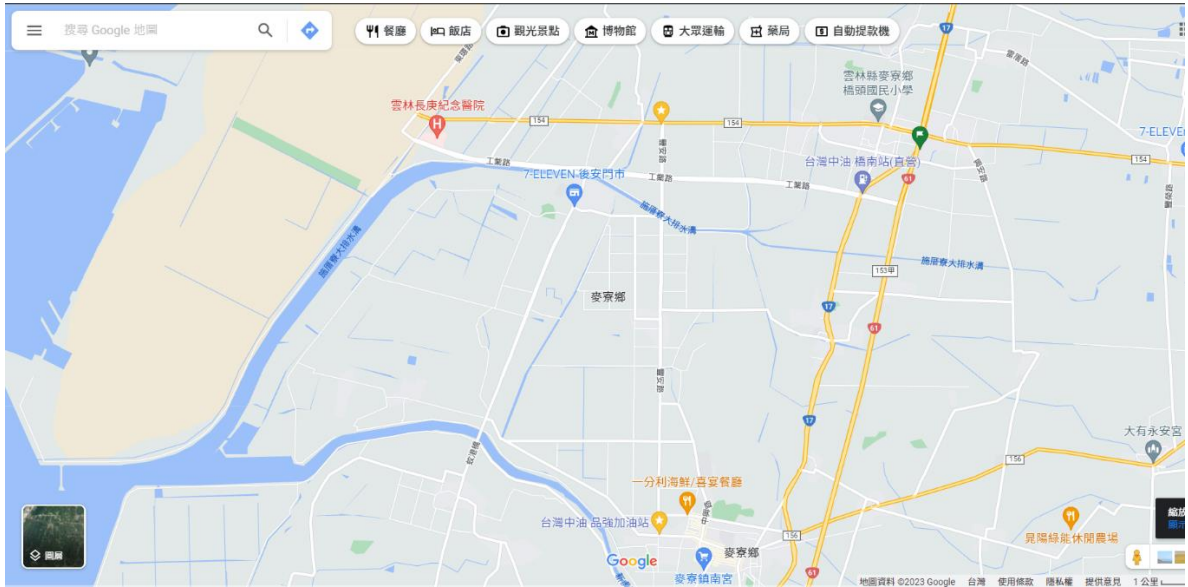


圖 4-8、使用 Google[®] Map 找尋接近正南北走向的直線道路，且可徒步走完路程的兩地點

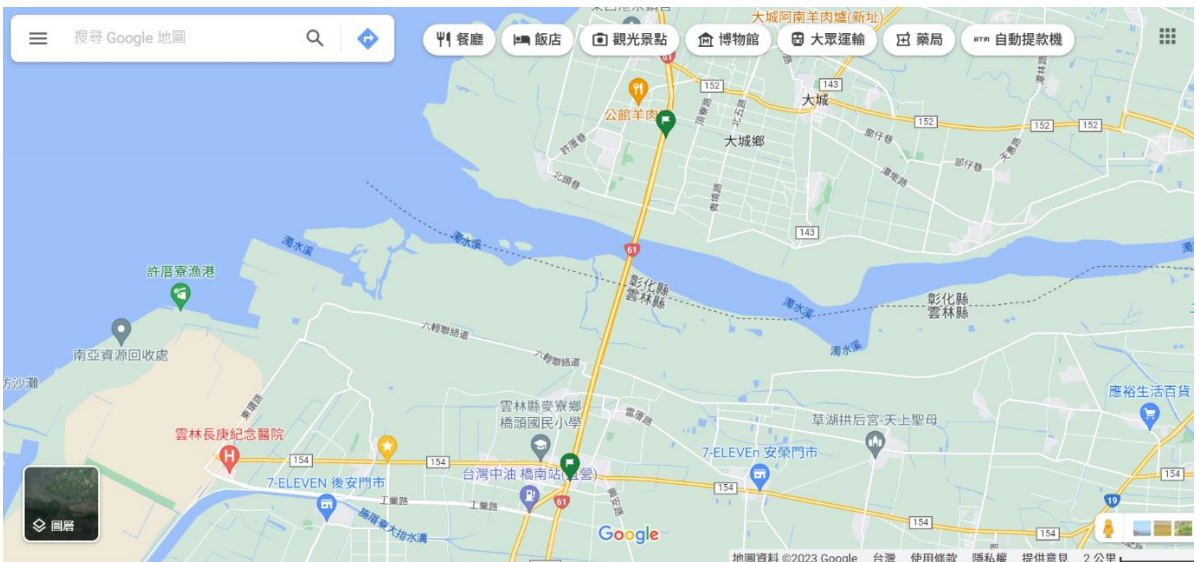


圖 4-9、使用 Google[®] Map 找尋台 61 線南、北兩測量點

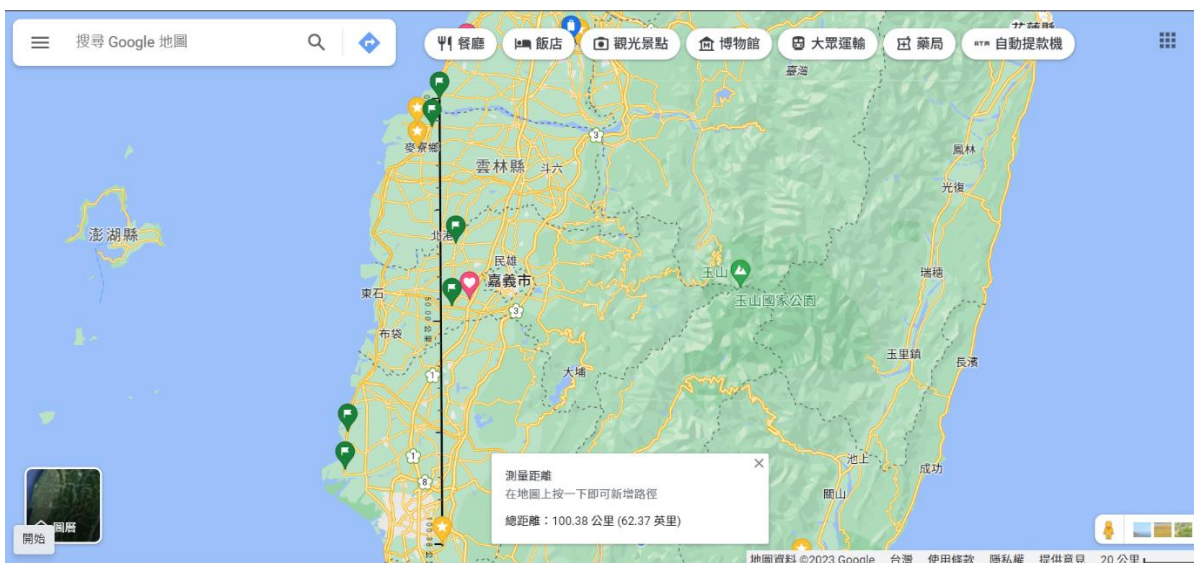


圖 4-10、使用 Google[®] Map 找尋同經度南、北兩地約 100K

五、實測：

(一)、道路距離：

路線一：以測距輪測量（圖 4-11）選定正南北走向路段距離：雲林縣麥寮鄉豐安路地段。實測兩個測量點的直線距離為 **5161m**（圖 4-12）。

路線二：台 61 線快速道路上，彰化縣大城鄉附近為北端起點，道路里程指示牌為：**208.4K**（圖 4-13），終點雲林縣麥寮鄉附近 **221K**（圖 4-14），兩地直線距離為 **12.6K**。

路線三：自台 61 線快速道路北端起點，至台南市歸仁區二甲果園附近南端測量點，以 **Google® Map** 尺規工具測出距離為 **100.38K**（圖 4-15）。



圖 4-11、利用測距輪測量道路的距離



圖 4-12、測量路段道路長度 5161 公尺



圖 4-13、台 61 線大城鄉

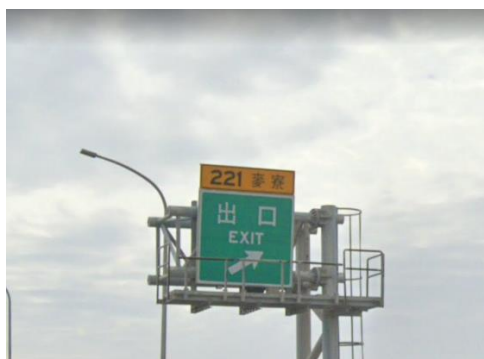


圖 4-14、台 61 線麥寮鄉



圖 4-15、台南市歸仁區二甲果園

(二)、北極星的仰角：

1. 在本研究選定地段的南、北兩端測量點，待夜晚時測量北極星的仰角，使用自製「北極星仰角測量平台」，固定在腳架後，以水平儀調整腳架，讓平台與地面平行。
2. 以手機 APP：Star Walk[®] 2 約略尋找北極星的方位，啟動平台上固定的綠光雷射筆，調整雲台，使平台傾斜至雷射光束指向北極星（圖 4-11）。
3. 以尋星鏡的視野微調平台，使北極星落於尋星鏡內的十字準心中央（圖 4-12），固定雲台，此時平台的傾斜角與當地北極星的仰角一致，啟動手機的 **phyphox[®]** APP 進行角度測量（圖 4-13），持續測量一分鐘，匯出數據至雲端。



圖 4-11、雷射光束輔助尋星

圖 4-12、尋星鏡校準微調仰角

圖 4-13、啟動角度測量 APP

(三)、精進測量

1. 本研究第一次實測在 2023 年 1 月 16 日及 19 日，測得第一組數據，縣決賽後，於 5 月 16 日及 5 月 17 日分別進行三組數據測量（圖 4-14、圖 4-15），以期能夠確認測量裝置是否有足夠的**精密度與準確度**。
2. 精進改良測量裝置，以可微調三軸雲台（圖 4-16）取代舊有萬向雲台，在操作上可以更細微，減少手動的誤差產生。



圖 4-14、精進測量

圖 4-15、增加穩定

圖 4-16、可微調三軸雲台

伍、研究結果

一、實測結果：

三條路線分別以測距輪、公路里程碑與 Google[®] Map 尺規工具測出距離 (L_x) 分別為 L_1 : 5.161 km、 L_2 : 12.6 km、 L_3 : 100.38 km，三條路線的南北兩端點北極星仰角差透過自製「北極星仰角測量平台」，搭載指星筆、尋星鏡與手機（裝載 phyphox[®] APP），測量北極星仰角，從 phyphox[®] APP 匯出數據到雲端，取其中 30sec.~40sec.間的 20 筆數據平均（表 5-3），作為仰角測量值，本研究縣賽時在一月中旬測量，縣賽後為確認本研究的精準度，並且更改調校儀器（三軸微調式雲台），在五月中時進行了三次測量（表 5-1、表 5-2）。

表 5-1、測量南、北走向直線路段距離與北極星仰角差

路 線	結果	測量裝置	
		Jan. 16、19, 2023,	May. 16、17, 2023
路線一：雲林縣麥寮鄉豐安路段	L_1 5.161 km θ_1 0.045738022°	5.161 km 0.045707966°	測距輪
路線二：台 61 線大城鄉→麥寮鄉	L_2 12.6 km θ_2 0.114428119°	12.6 km 0.111857706°	公路里程碑
路線三：台 61 線大城鄉→歸仁二甲果園	L_3 100.38 km θ_3 0.9026888632°	100.38 km 0.89730746°	Google [®] Map 尺規工具

註：測量使用：iPHONE[®] 12、phyphox[®] APP、Star Walk[®] 2 APP、指星筆、萬向雲台、三軸雲台、腳架、極軸望遠鏡（尋星鏡）、水平儀、自「北極星仰角測量平台」

註：南、北兩地點直線距離為 L_x ，測量地點地仰角差為 θ_x

表 5-2、南、北走向直線路段北極星仰角多次重複測量數據平均

	麥寮豐安路 N	麥寮豐安路 S	台 61 線大城 N	台 61 線麥寮 S	台南 S
Jan. 19	23.35115145°	23.30541343°	23.88677404°	23.70645588°	22.98278234°
May.16	23.85334509°	23.80797793°	23.95905479°	23.84239889°	23.05135032°
	23.85337531°	23.80794346°	23.95577929°	23.84013219°	23.05596289°
May. 17	23.85236451°	23.80665655°	23.96082886°	23.84897116°	23.06352140°
平均(May.)	23.85302831°	23.80752598°	23.95855432°	23.84383408°	23.05694487°

註：平均計算僅使用五月調校儀器(三軸雲台)後的測量值

表 5-3：南、北走向直線路段北極星仰角測量原始數據節錄 (Jan. 19)

路線一：麥寮鄉豐安路段			路線二：台 61 線大城→麥寮			路線三：台 61 線大城→台南	
Time	(N) Deg.	(S) Deg.	Time	(N) Deg.	(S) Deg.	Time	(S) Deg.
30.516	23.23112086	23.30226498	30.022	23.86157516	23.73788112	30.019	22.98489789
31.016	23.2068096	23.29447937	30.522	23.88266438	23.71226915	30.519	22.9848197
31.516	23.23687215	23.31269584	31.022	23.86920881	23.74239361	31.019	22.98758889
32.016	23.2580964	23.3045142	31.522	23.84706353	23.73386877	31.519	22.98511703
32.516	23.25311477	23.30392173	32.022	23.87518556	23.70867702	32.019	22.98202721
33.016	23.29810541	23.29911435	32.522	23.86347866	23.7161247	32.519	22.98383657
33.516	23.35494397	23.2928204	33.022	23.8595015	23.7100112	33.019	22.98848042
34.016	23.46000168	23.33261305	33.522	23.8696464	23.70629253	33.519	22.98781218
34.516	23.43855378	23.28708542	34.022	23.8880286	23.69388738	34.019	22.98596201
35.016	23.34441409	23.27152965	34.522	23.86212689	23.71753569	34.519	22.98660667
35.516	23.50976833	23.28205157	35.522	23.87021611	23.72803811	35.019	22.95696816
36.516	23.53567797	23.28830556	36.022	23.86967549	23.73943389	35.519	22.97269233
37.016	23.5854266	23.33539628	36.522	23.91353107	23.72208133	36.019	22.98270849
37.516	23.52979604	23.3482692	37.022	23.895532	23.71192375	37.019	22.98904102
38.016	23.35769017	23.33720592	37.522	23.9115045	23.69500854	37.519	22.98155239
38.516	23.39223692	23.31441988	38.022	23.9003486	23.69593972	38.019	22.9803364
39.016	23.22080653	23.34069293	38.522	23.88059277	23.70187967	38.519	22.98843339
39.516	23.22050653	23.25699297	39.022	23.88909861	23.68147105	39.019	22.98009187
40.016	23.23793577	23.48832274	39.522	23.86078333	23.70700651	39.519	22.98009187
平均	23.35115145	23.30541343		23.88677404	23.70645588		22.98278234

註：Time 表示 phyphox® APP 輸出數據測量時間點；(N) Deg.表示北方測量點仰角，單位是度；(S) Deg.表示南方測量點仰角，單位是度。

二、儀器的精確度

根據五月的三次測量值的原始數據，取 30sec.~40sec.的 20 比讀數，以 Microsoft[®] Office Excel[®]製作盒鬚圖，檢視三次測量值的集中程度（精密度）與數值分布（準確度），如下圖 5-1-(a)~(c)、圖 5-2 所示：

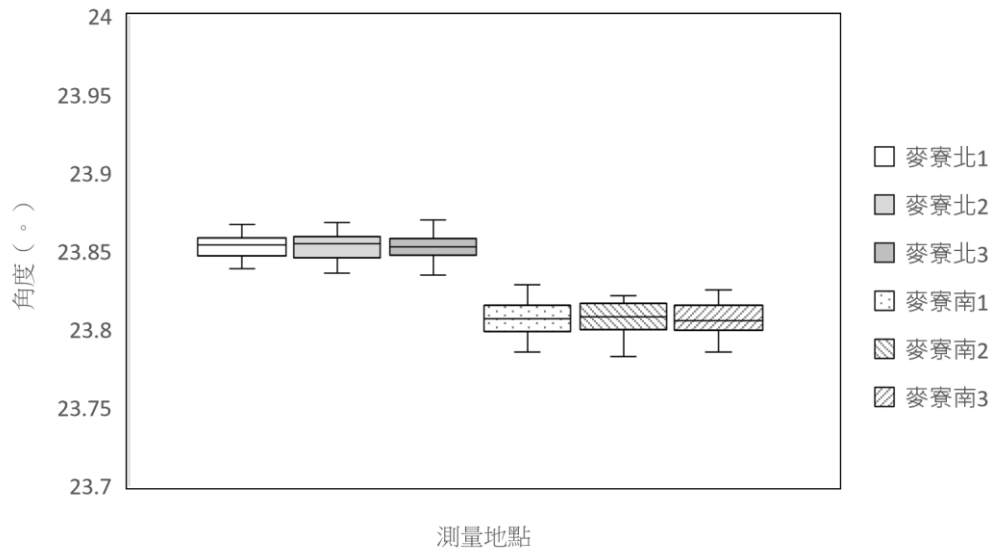


圖 5-1-(a)、路線一（5.161K）測量值盒鬚圖

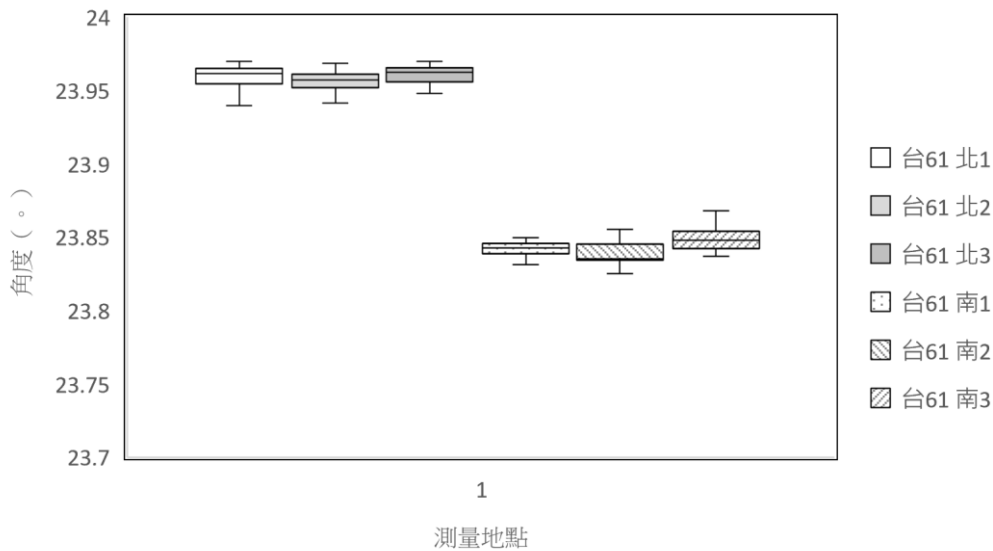


圖 5-1-(b)、路線二（12.6K）測量值盒鬚圖

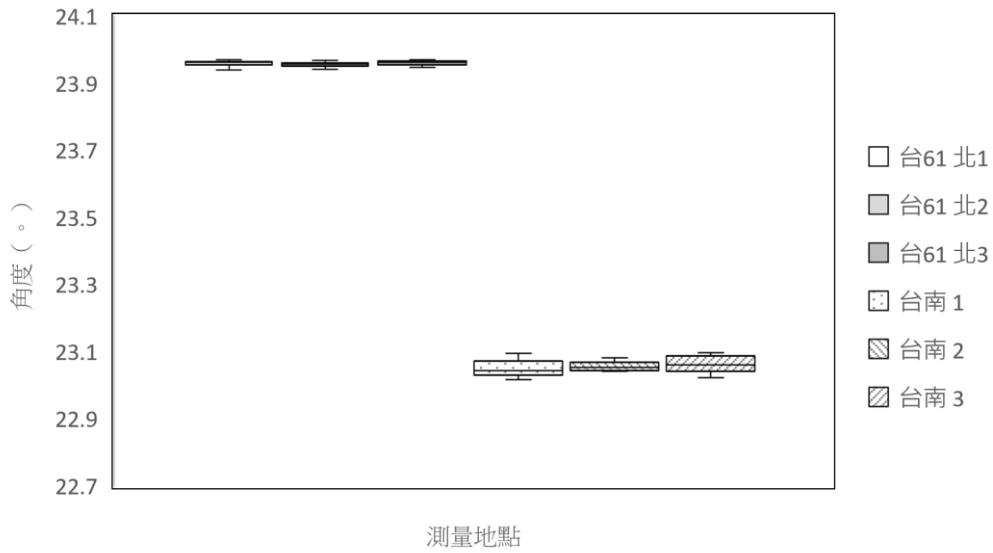


圖 5-1-(c)、路線三 (100.38K) 測量值盒鬚圖

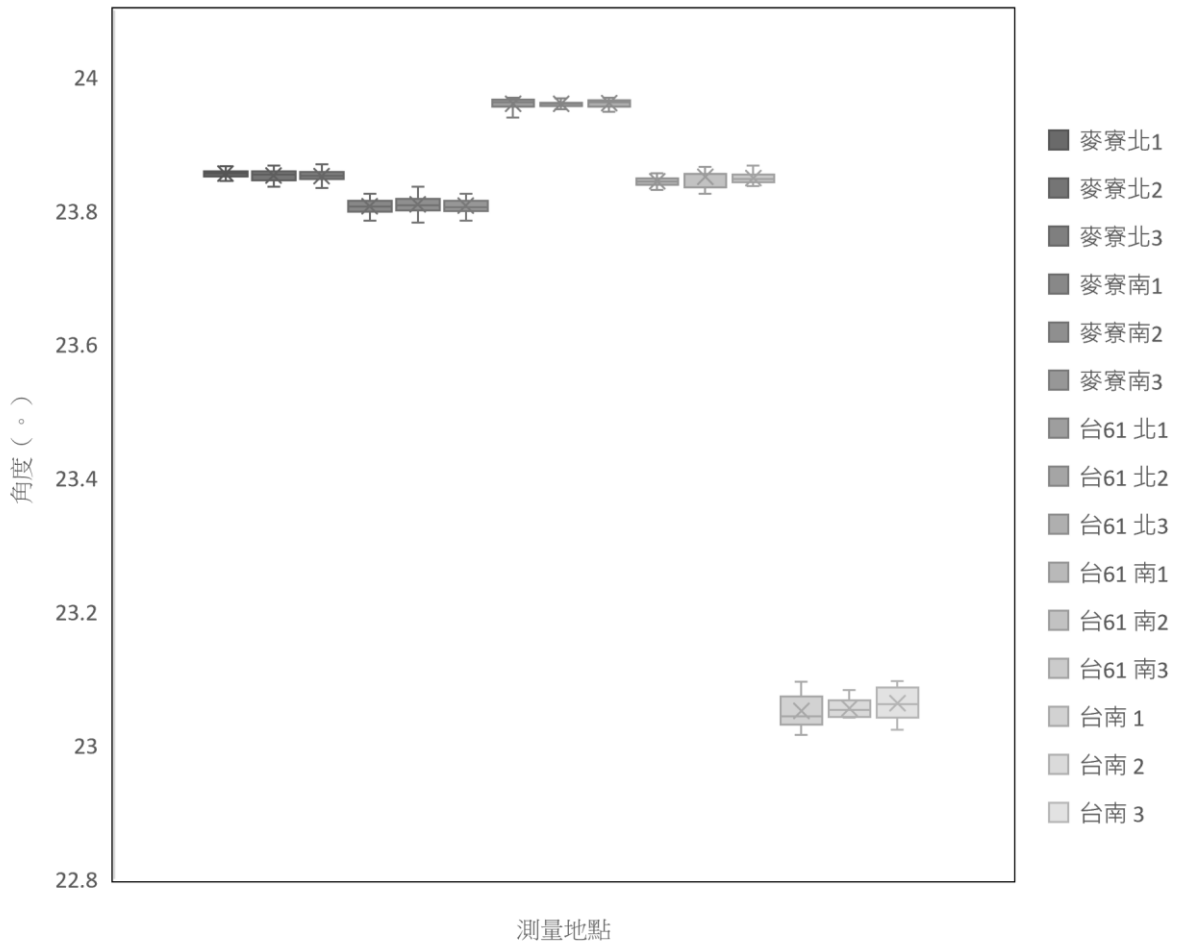


圖 5-2、三條路線測量值盒鬚圖

三、地球半徑換算：

根據測量所得數據，已知南、北 A、B 兩地點直線距離為 L_x ，兩地的北極星仰角差為 θ_x ，

地球半徑為 R_x ，因此：

$$2\pi R_x \times \frac{\theta_x}{360} = L_x$$

$$R_x = \frac{L_x}{2\pi} \times \frac{360}{\theta_x} \text{，以此可以求得：}$$

路線一：

$$R_1 = \frac{5.161km}{2\pi} \times \frac{360^\circ}{(23.35115145 - 23.30541343)^\circ}$$

$$R_1 = 6465.157656 \text{ km}$$

路線二：

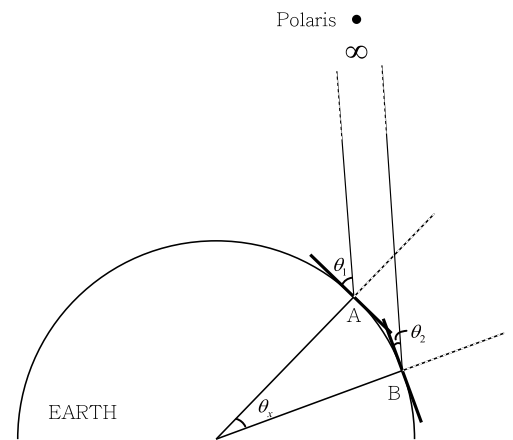
$$R_2 = \frac{12.6km}{2\pi} \times \frac{360^\circ}{(23.88677404 - 23.70645588)^\circ}$$

$$R_2 = 6308.998421 \text{ km}$$

路線三：

$$R_3 = \frac{100.38km}{2\pi} \times \frac{360^\circ}{(23.88677404 - 22.98278234)^\circ}$$

$$R_3 = 6371.354054 \text{ km}$$



根據表 5-2 測量仰角數值，透過上述計算，可將四次測量值換算出地球半徑（表 5-4）。

表 5-4、四次測量換算地球半徑（單位：km）

	路線一	路線二	路線三
Jan. 19	6465.157829	6308.998419	6371.354054
	6518.00872	6188.514972	6336.148499
May.16、17	6508.72713	6242.498127	6391.693148
	6469.408754	6453.974864	6409.56483
平均	6500.738342	6410.65301	6366.514507

四、與實際值誤差 (error)：

根據文獻，地球半徑落在最小的約為 6,357 km 的極半徑，以及最大的約為 6,378 km 的赤道半徑之間。因此科學上使用地球平均半徑：大約 3959 英里=6371.393 km（資料來源：NASA）。這個數字是地心到地球表面所有各點距離的平均值。

平均半徑=(赤道半徑×2+極半徑)/3=6371.393 km

則測量所得半徑誤差 (%) = $\frac{\text{測量值}-\text{實際值}}{\text{實際值}} \times 100\%$ ($R_x e$)

則：

$$R_1 e = \frac{6465.157656 - 6371.393}{6371.393} \times 100\% \approx 1.47165\%$$

$$R_2 e = \frac{6308.998421 - 6371.393}{6371.393} \times 100\% \approx -0.97929\%$$

$$R_3 e = \frac{6371.354054 - 6371.393}{6371.393} \times 100\% \approx -0.00061\%$$

根據表 5-4 所計算出的地球半徑，與實際值相較，如表 5-5 所示，本研究利用測距輪測量出 5.161 km 的距離，以自製儀器測量北極星，第一次所得地球半徑與實際地球平均半徑誤差約為 1.47 %；改良精進測量裝置後所得三次測量值換算出地球半徑與實際地球平均半徑誤差約為 1.53%~2.30%之間（圖 5-3）。

使用道路既設里程碑，得到南北直線距離 12.6km，以此量得第一次地球半徑與實際地球平均半徑誤差約為-0.98 %；後三次測量值平均換算地球半徑，與實際地球平均半徑誤差約為-2.87%~1.29 %之間（圖 5-3）。

若使用 Google[®] Map 尺規工具量出測量地點直線距離為 **100.38 km**，求得球半徑與實際地球平均半徑誤差約為-0.55%~0.59 %之間（圖 5-3）。

表 5-5、四次測量換算地球半徑與實際值誤差（單位：%）

	路線一	路線二	路線三
Jan. 19	1.471653511	-0.97929261	-0.000611264
May.16、17	2.301156438	-2.870298971	-0.553167901
	2.155480438	-2.023024998	0.31861396
	1.538372435	1.296135152	0.599112792
平均	2.03009518	0.616191942	-0.076568704

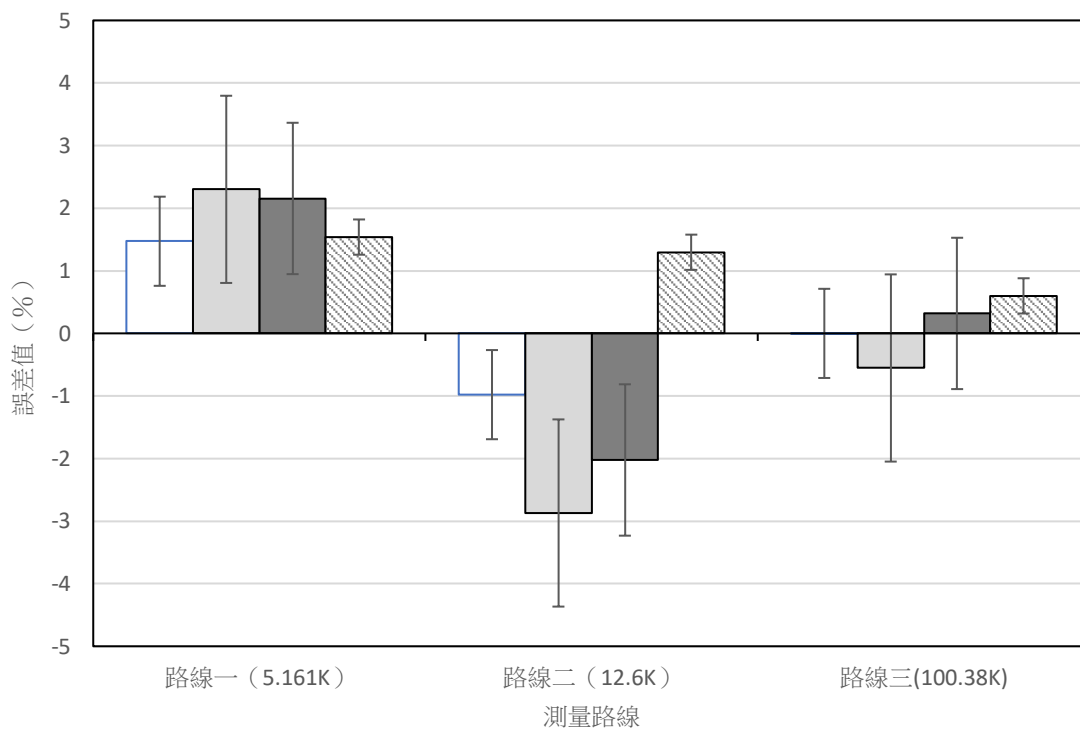


圖 5-3、三條路線測量所得與地球平均半徑誤差值示意圖

陸、討論

一、科技進步，提升測量精準度，縮減測量所需距離

隨著科技日新月異，手機內搭載的陀螺儀，其測量原理不再是機械式的重力，而是利用雷射光，透過測量順時針和逆時針的光程差，計算出旋轉的角速度；另一類型的微機電陀螺儀，則是利用電容板加上震盪電壓，藉由電容的變化量換算成位移角。因此由以上二例可知，現在高階手機內所搭載的陀螺儀，輕易地可以達到小數點後八位數的角度測量。雖然讀出的數據有小數點八位，很容易受到輕微震動影響，從圖 5-2 關於儀器精準度的測試，經過多次測量，本研究所使用的裝置與手機晶片，測得的數字具有相當高的再現性。

本研究利用手機的高精密度陀螺儀（晶片），搭載應用程式 **phyphox[®] APP**，測量天體的仰角，因測量裝置的精密高，因此可以大幅縮短測量所需要的直線距離。

本組研究以南、北直線距離 5.161km，取四次測量的平均值換算地球半徑，與實際值誤差僅約 2.03%（1.47%~2.30%），大幅縮短「利用天體仰角測量地球半徑」所需要的長距離，相較前人研究中 300km 以上的測量距離，縮減至 5km 左右，大幅提升測量的便利性。隨著測量距離需求的大幅縮減，在地點選定上，不需要科技輔助，以測距輪即可完成測量。若以與前人研究相同方式，使用 Google[®] Map 尺規工具量出測量地點直線距離為 **100.38 km**，則求得地球半徑為 6366.514507 km，誤差約-0.0766%。

二、改變測量恆星，達到測量日期與時間的自由度

在測量仰角的天體上，若是選擇最靠近地球的恆星：太陽，則因地球自轉軸沒有與黃道面垂直，而是夾角約 23.5°，因此僅冬至、夏至兩天可以進行測量。若是選擇無窮遠處的恆星：北極星，則任何一天，只要月相、天候允許，都可以進行測量，並且不需要在同一時間，在同一經度上的南、北兩地點同時測量（表 6-1）。

本研究克服了如何使搭載高精密度陀螺儀（晶片）的高階手機，能夠準確地指向北極星，透過自製「北極星仰角測量平台」，搭載指星筆、尋星鏡與手機（裝載 **phyphox[®] APP**）在同一平台，可以精準測量北極星仰角。

本組研究所測得**最精準的地球半徑 6366.514507 km**，若以地球實際平均半徑 6371.393 km 為基準換算，本研究測得地球半徑誤差約為**-0.0766%**，遠勝過前人的研究，而且僅需在短短的距離中測得（表 6-1）。

三、誤差的來源與改善

凡是測量，必定有誤差，本研究使用的手機陀螺儀晶片，其測量值輸出的數值，達小數點後八位，雖無從得知實際準確測量的位數有多少位？而且高靈敏度的測量裝置伴隨的是易受環境的影響，然而本研究經過重複多次測量，證實**測得數值具有再現性（圖 5-2）**，因此本研究的裝置與設備是可以信任的。

本研究為了降低誤差值，以**可微調的三軸雲台為基座**，降低人為操作的不確定性；取 **phyphox® APP 輸出測量值的中段數值（30sec.~40sec.）**平均，並且分不同時間重複進行測量，控制可能造成的誤差。

天候與大氣擾動是本研究不可控的因子，這一部分仍有改良的空間，然基本上**本研究所設計的北極行仰角觀測裝置是實用且具有可行性的**。

表 6-1、本組研究與前人研究之比較

	第 48 屆團隊作品	第 50 屆團隊作品	本組研究
使用原理	利用垂直地面細繩產生的影子，依照三角函數表換算太陽仰角	利用水晶球 360°聚焦太陽光，在記錄球殼上出現太陽光的焦點，再以外嵌式量角器直接讀出太陽仰角	利用自製測量平台，以手機搭載 APP 內建陀螺儀晶片，測量北極星仰角
主要誤差來源	利用影子判讀仰角，會因陽光產生半影現象，無法精確判讀；測量日期非冬至、夏至，太陽過中天的時間不同	記錄時需標記太陽光形成的焦點，球殼屏幕越小，誤差會越大	測量角度的解析度過高，反而易受輕微震動影響
記錄儀器	容易受到風的影響而產生晃動	穩定不受風影響	穩定不受風影響
記錄日期	一月下旬，但同經度南北兩地，太陽過中天的時間不同	選擇冬至、夏至當天測量，當天同一經度南北兩地太陽過中天的時間相同	任一無月光影響的晴朗夜晚，不需限定
記錄時間	需同一時間測量	需同一時間測量	不需同時間測量
裝置最小角度	0.01°	0.2°	0.00000001°
最短測量距離	306.17 km	293.05 km	L ₁ : 5.161 km L ₂ : 12.6 km L ₃ : 100.38 km
測量結果	6367.9km	6457.8947km(冬至) ; 6336.0477 km(夏至)	R ₁ : 6500.738342 km R ₂ : 6410.65301 km R ₃ : 6366.514507 km
結果誤差	0.16%	1.25%(冬至) 0.66%(夏至)	R _{1e} : 2.0301% (1.47% ~ 2.30%) R _{2e} : 0.6162% (-2.87% ~ 1.29%) R _{3e} : -0.0766% (-0.55% ~ 0.59%)

柒、結論

本研究利用手機的高精密度陀螺儀（晶片），搭載應用程式 **phyphox[®] APP**，自製「北極星仰角測量平台」，搭載指星筆、尋星鏡與手機（裝載 **phyphox[®] APP**），測量北極星仰角，

以測距輪量測同一經線上，南、北直線距離 5.161km，以此路段的南、北端點，測量得到北極星仰角差為 0.045561248° ，換算成地球半徑 6500.738342 公里，與實際值誤差約 2.0301%。

以公路里程碑量得南、北直線道路距離 12.6 km，測得北極星仰角差為 0.114647208° ，換算成地球半徑 6410.65301 公里，與實際值誤差約 0.6162%。

以 Google[®] Map 尺規工具量出測量地點直線距離為 **100.38 km**，測得北極星仰角差為 **0.901879301°** ，求得地球半徑為 **6366.514507 km**，誤差約**-0.0766%**。

本組所測得地球半徑，不但準確度更勝前人研究，因為研究裝置的高精密度，大幅縮短「利用天體仰角測量地球半徑」所需要的測量距離，且在任何一天，只要月相、天候允許，都可以進行測量，不需要在同一時間，在同一經度上的南、北兩地點同時測量，大幅提升測量的便利性。

捌、參考資料

一、古希臘科學家艾拉托色尼，資料來源：

<http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1005022305575>

二、詳解手機里的陀螺儀是怎樣工作的？資料來源：

<https://kknews.cc/tech/vm34xgl.html>

三、張廷安、劉彥辰、吳尚儒（民97年）。做一個能輕易測得地球半徑的人－利用太陽光求地球半徑，第48屆全國中小學科學展覽作品集，科教館：台北

四、康軒文教事業編輯部（民98年）。自然與生活科技教科書第三冊：第四章，康軒文教事業編輯部：台北

五、歐耘秀、賴品菁、黃裕紘（民99）。天地之間－測量地球的半徑，第50屆全國中小學科學展覽作品集，科教館：台北

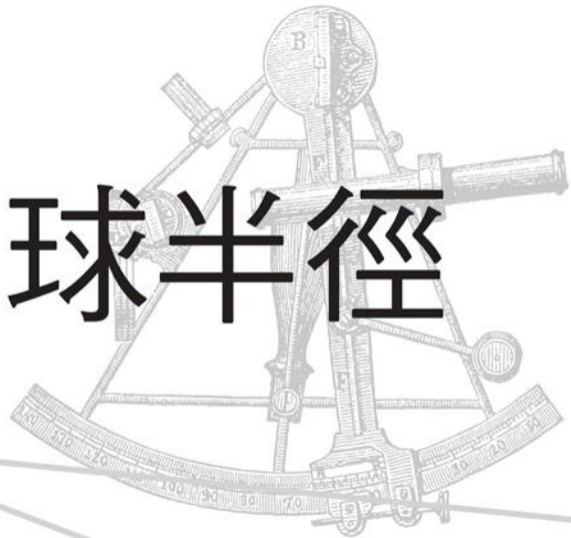
六、Earth Radius，資料來源 NASA：<https://solarsystem.nasa.gov/planets/earth/in-depth/>

【評語】 030505

本研究具有原創性，方法可行。對於實驗數據適當地應用數學及統計方法，數據足以證實結論。此研究結果可再深入研究到利用在測距上，而對於誤差分析可以再精細且清楚一些。

作品海報

蓋婭的祕密 — 測量地球半徑



摘要

前人利用太陽在同一經度的南、北兩地點過中天時的仰角差與兩地距離，換算出地球的半徑。因測量儀器的精準度與日期、時間選擇的限制，測量方式有很大改良空間。本研究以測距輪、公路里程碑與 Google[®] Map 尺規工具，選擇同一經線上的南、北二測量點，量測出直線距離，再利用手機高精度陀螺儀，自製北極星仰角測量平台，搭載應用程式 phyphox[®] APP，在測量點測量北極星的仰角，換算成地球半徑，量得最接近地球實際平均半徑的距離為 6366.514507km，與實際值誤差約 -0.0766%，準確度更勝前人研究，大幅縮短「利用天體仰角測量地球半徑」所需要的測量距離，且在任何一天，只要月相、天候允許，都可以進行測量。

壹、研究動機

一、研究動機：

西元前 250 年已有人利用太陽仰角測出地球的半徑，歷屆科展中有兩屆得獎作品搭配科技輔助，並且改良了測量方式，以自製儀器進行測量，求出地球的半徑，得到誤差更小的數值，但是兩個研究中存有不合科學邏輯的謬誤（所選時間、日期與儀器）以及測量限制過大（一年中只有兩天可以進行測量）的問題，因此，本研究企圖改良前人的研究限制，設計新的裝置與方法，進行地球半徑的測量。

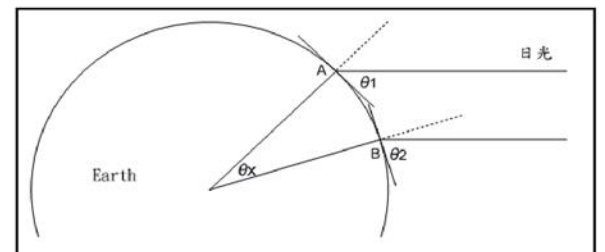


圖 1-1、利用兩地太陽仰角測量地球半徑的原理示意圖

二、文獻探討：

（一）、艾拉托色尼的測量

西元前 250 年，古埃及亞歷山大城圖書館館長艾拉托色尼發現了一個有趣的現象：夏至的正午，陽光垂直地照耀在賽恩城人的頭頂上，賽恩城南面亞歷山大城的旗杆則在陽光照耀下於地面上留下一條長長的影子。經過仔細測量得出，亞歷山大城的太陽影子同旗杆的交角大約為 7 度，這個角度對應於地面的「弧長」相當於地球周長的 7/360。艾拉托色尼從來往的商賈口中得知，亞歷山大城到塞恩城的距離是 5000 希臘里，因此艾拉托色尼得出，地球周長是 5000 x 60 希臘里，相當於 39600 公里，他算出地球直徑為 12800 公里和現在使用的地球赤道直徑數值 12756 公里相差很小（圖 1-1）。

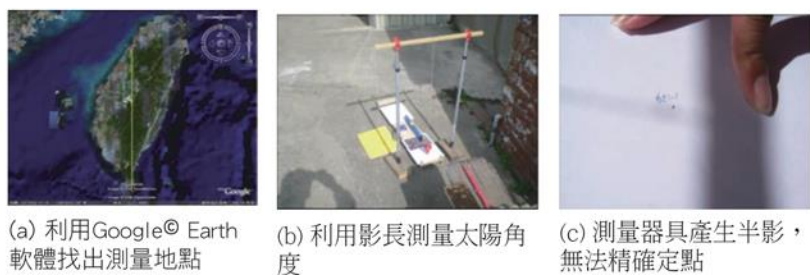


圖 1-2、第 48 屆科展：「做一個輕易測得地球半徑的人—利用太陽光求地球半徑」截圖

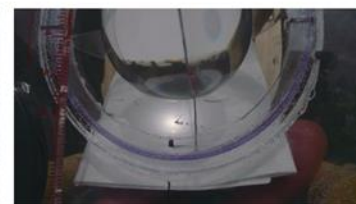
（二）、歷屆科展文獻探討

表 1-1、歷屆科展測量地球半徑研究方法比較

	48 屆	50 屆
裝置	利用鉛錘線上的標記進行太陽仰角測量，換算兩地間的仰角差。	以水晶球聚光進行太陽仰角換算。
日期	一月下旬	夏、冬至
時間	以中央氣象局公告太陽過中天時間	太陽行至最高點（中天）的時間
測量地點	利用 GOOGLE [®] Map 找同一經線上的墾丁鵝鑾鼻、苗栗竹南鎮	利用 GOOGLE [®] Map 找同一經線上的苗栗縣後龍鎮中和國小附近、墾丁水泉國小前
測量對象	太陽	太陽
優點	使用器材簡單，可以輕鬆獲得。	1. 使用水晶球，解決半影問題 2. 選在夏、冬至兩天測量。
缺點	1. 陽光形成的半影。 2. 選擇中央氣象局測候站公布太陽過中天時間為據 3. 測量日期選在一月下旬。 4. 使用 GPS 等科技系統得知兩地經、緯度，不需測量就可得知地球半徑。 5. 測量所需距離過長。	1. 實驗時間被限制在夏、冬至兩天測量。 2. 使用 GPS 等科技系統得知兩地經、緯度，不需測量就可得知地球半徑。 3. 測量所需距離過長。



(a) 利用水晶球測量太陽仰角



(b) 太陽聚光後產生一個明確測量點，沒有半影的問題

圖 1-3、第 50 屆科展：「天地之間—測量地球半徑」利用水晶球測量太陽仰角，避免半影造成的誤差。

三、待解決的問題

儘管歷屆兩組科展研究進行了地球半徑的測量（表 1-1），在測量太陽仰角的儀器上，已經獲得了十分精采的改良與成果，但仔細審視兩組報告，在同一經度南、北兩地點的選擇上，都需要足夠的距離，必須仰賴 GPS 定位系統與 Google[®] Map 科技輔助，但是如果已經使用 GPS 定位系統與 Google[®] Map 進行同一經度南、北測量點的選擇，已然獲得兩地距離與緯度資訊，不需測量，已可直接進行地球半徑換算；在時間上，因受到地球自轉軸傾斜的影響，一年當中，大部分的日期會出現同一時間，在同一經線上的南、北兩地，太陽過中天時間不同的，太陽同時間過中天的日子僅有夏至、冬至兩天，在測量上受到極大的限制。

貳、研究目的

本研究預計解決前人研究的缺點，研發合理便利的測量方式與儀器：

- 一、改良測量儀器，取代既有的太陽仰角測量儀器，提高測量精密度。
- 二、縮短測量距離，使測量不需藉由 GPS 定位系統等已知資訊。
- 三、以北極星取代太陽作為測量依準，解決測量日期的限制。

參、研究器材

一、手機 APP：

phyphox[®] APP、Star Walk[®] 2 APP

二、PC APP：

TINKERCAD[®]、Microsoft[®] Office Excel[®]

三、器材：

iPHONE[®] 12、綠光雷射筆、萬象雲台（Manfrotto[®] 486RC2）、三向齒輪雲台（Manfrotto[®] MHX-PRO-3WG）、腳架（Manfrotto[®] MT055XPRO 3 Tripod）、測距輪、極軸望遠鏡（尋星鏡）、水平儀、3D 列印機、自製「北極星仰角測量平台」



圖 4-1、phyphox[®] APP

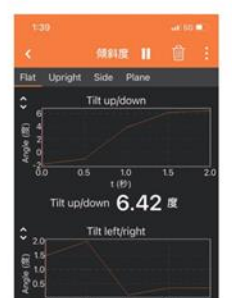


圖 4-2、phyphox[®] APP 測量手機傾角

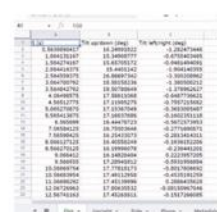


圖 4-3、phyphox[®] APP 實測輸出數據

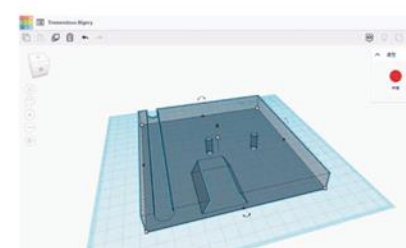


圖 4-4、以 TINKERCAD[®] 進行 3D 建模

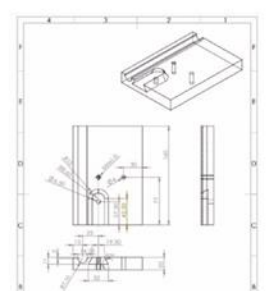


圖 4-5、轉換 3D 建模

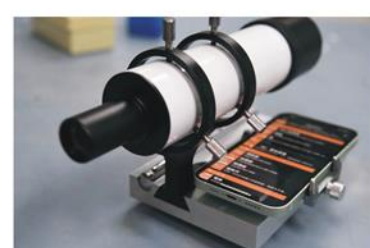


圖 4-6、手機、雷射筆、尋星鏡固定在自製平台上



圖 4-7、平台固定在相機腳架的雲台上

肆、研究過程

一、測量儀器的精密度提升：

本研究以iPhone® 12為載具，利用手機的感測晶片進行角度測量，phyphox® APP (physical phone experiments) 是一個能夠調用手機傳感器的應用軟體 (圖4-1、4-2)，其輸出測量值可達小數點後八位 (圖4-3)。

二、測量時間與日期的改良：

傳統的太陽測量，受限於必須在自轉軸傾斜平面與太陽光照平面重疊，一年當中只有夏至與冬至兩天可以進行測量；本研究改良既有測量方式，以夜晚無窮遠處北極星作為基準，因為相對於地球觀察者而言，北極星是唯一一顆幾乎不會產生相對視運動的恆星，因此只要是可看見北極星的夜晚，在同一經線上的兩地，都可以進行北極星的仰角測量。

三、測量北極星仰角的裝置：

本研究需要製作一個裝置，讓搭載測量角度APP的手機、可以指向夜空的雷射筆 (指星筆) 與尋星鏡固定在平台上，讓它們在空間上處於同一平面。

以游標尺測量雷射筆的直徑、尋星鏡的燕尾板以及固定手機架的螺孔，再以自由軟體TINKERCAD®，根據搭載手機、雷射筆、尋星鏡的尺寸，繪製一個平台，讓三種裝置可以在固定同一平面上 (如圖4-4)，轉換成3D建模 (圖4-5)，到鐵工廠以CNC製作平台，將手機、雷射筆、尋星鏡固定在自製平台上 (圖4-6)，將平台固定在相機腳架的雲台上 (圖4-7)。以此自製「北極星仰角測量平台」搭配利用手機phyphox® APP進行北極星的仰角測量。

四、測量地點選定：

本研究預計選擇短 (<10 km)、中 (≒10 km)、長 (≒100 km) 三段同樣經度南北走向的地點，分別測量測量點直線距離與夜晚北極星的仰角 (圖4-8、4-9、4-10)。

路線一：選擇雲林縣麥寮鄉豐安路地段，本地段南、北兩端點作為夜晚測量北極星仰角的地點 (圖4-8標示處)，以測距輪實測直線距離 (圖4-11)。

路線二：選台61線快速道路，彰化縣大城鄉附近為北端起點 (與路線三北端地點共用)，終點在雲縣麥寮鄉附近，以道路旁工務單位測量所設立的里程碑作為依據 (圖4-12)。

路線三：以路線二北端測量點為準，使用Google® Map尺規工具，拉出同經度南、北兩地約100K，挑選台南市歸仁區二甲果園附近，作為南端測量點 (距離為100.38K)，以Google® Map尺規工具選擇地點 (圖4-13)。

五、實測與精進測量：

本研究第一次實測在2023年1月16日及19日，測得第一組數據，於5月16日及5月17日分別進行三組數據測量，以期能夠確認測量裝置是否有足夠的精密度與準確度。精進改良測量裝置，以可微調三軸雲台 (圖4-14) 取代舊有萬向雲台，在操作上可以更細微，減少手動的誤差產生。



圖4-8、正南北走向的直線道路，且可徒步走完路程的兩地點

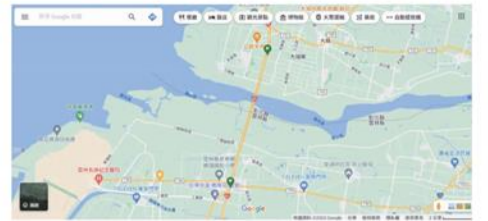


圖4-9、使用Google® Map找尋台61線南、北兩測量點



圖4-10、使用Google® Map找尋同經度南、北兩地約100K



圖4-11、利用測距輪測量道路的距離



圖4-12、台61線大城鄉、麥寮鄉

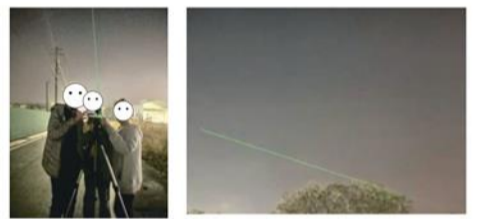


圖4-13、台南市歸仁區二甲果園



圖4-14、重複測量與精進設備

伍、研究結果

一、實測結果：

三條路線分別以測距輪、公路里程碑與Google® Map尺規工具測出距離 (L_x) 分別為L1: 5.161 km、L2: 12.6 km、L3: 100.38 km；透過自製「北極星仰角測量平台」，搭載指星筆、尋星鏡與手機 (裝載phyphox® APP)，測量北極星仰角 (θ_x)，從phyphox® APP匯出數據到雲端，取其中30sec.~40sec.間的20筆數據平均，作為仰角測量值，為確認本研究的精準度，並且更改調校儀器 (三軸微調式雲台)，在五月中時進行了三次重複測量 (表5-1)。

二、儀器的精準度

根據五月的三次測量值的原始數據，取30sec.~40sec.的20筆讀數，以Microsoft® Office Excel®製作盒鬚圖，檢視三次測量值的集中程度 (精密度) 與數值分布 (準確度)，如下圖5-1-(a)~(c)、圖5-2所示：

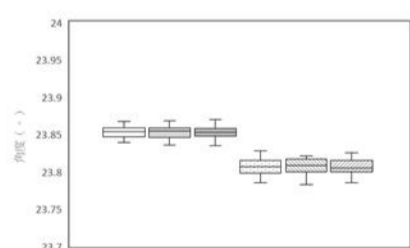


圖5-1-(a)、路線一 (5.161K) 測量值盒鬚圖

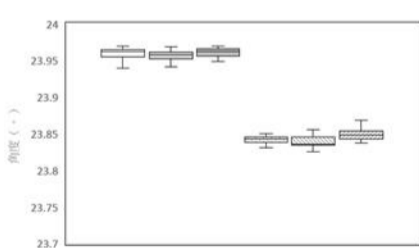


圖5-1-(b)、路線二 (12.6K) 測量值盒鬚圖

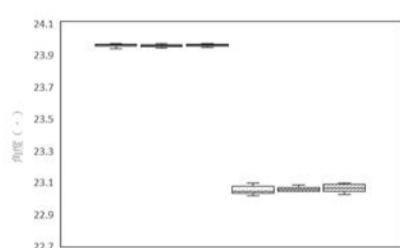


圖5-1-(c)、路線三 (100.38K) 測量值盒鬚圖



圖5-2、三條路線測量值盒鬚圖

路線	結果	測量裝置	Jan. 16、19, 2023,		May. 16、17, 2023	
			L_x	θ_x	L_x	θ_x
路線一：雲林縣麥寮鄉豐安路段	5.161 km	測距輪	5.161 km	0.045738022°	5.161 km	0.045707966°
路線二：台61線大城鄉→麥寮鄉	12.6 km	公路里程碑	12.6 km	0.114428119°	12.6 km	0.111857706°
路線三：台61線大城鄉→歸仁二甲果園	100.38 km	Google® Map 尺規工具	100.38 km	0.9026888632°	100.38 km	0.89730746°

三、地球半徑換算：

根據測量所得數據，已知南、北A、B兩地點直線距離為 L_x ，兩地的北極星仰角差為 θ_x ，地球半徑為 R_x ，則：

$$2\pi R_x \times \frac{\theta_x}{360} = L_x \rightarrow R_x = \frac{L_x}{2\pi} \times \frac{360}{\theta_x}$$

根據表5-1測量仰角數值，透過上述計算，可將四次測量值換算出地球半徑 (表5-2)。

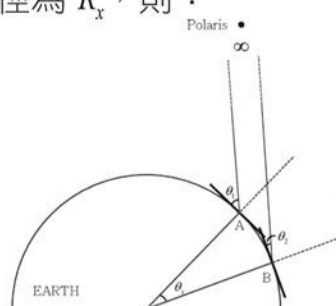


表5-2、四次測量換算地球半徑 (單位: km)

	路線一	路線二	路線三
Jan. 19	6465.157829	6308.998419	6371.354054
	6518.00872	6188.514972	6336.148499
May.16、17	6508.72713	6242.498127	6391.693148
	6469.408754	6453.974864	6409.56483
平均	6500.738342	6410.65301	6366.514507

四、與實際值誤差 (error)：

根據文獻，地球半徑落在最小的約為6,357 km的極半徑，以及最大的約為6,378 km的赤道半徑之間。因此科學上使用地球平均半徑：大約6371.393 km。這個數字是地心到地球表面所有各點距離的平均值。平均半徑=(赤道半徑×2+極半徑)/3=6371.393 km 則測量所得：

$$\text{誤差}(\%) = \frac{\text{實際值} - \text{測量值}}{\text{實際值}} \times 100\% \quad (\text{Rxe})$$

根據表5- 2 所計算出的地球半徑，與實際值相較，如表5- 3 所示，求得最佳地球半徑與實際地球平均半徑誤差約為-0.55%~0.59 %之間 (圖5-3)。

表5-3、實測三條路線所得換算地球半徑與誤差

	路線一	路線二	路線三
Jan. 19	1.471653511	-0.97929261	-0.000611264
	2.301156438	-2.870298971	-0.553167901
May.16、17	2.155480438	-2.023024998	0.31861396
	1.538372435	1.296135152	0.599112792
平均	2.03009518	0.616191942	-0.076568704

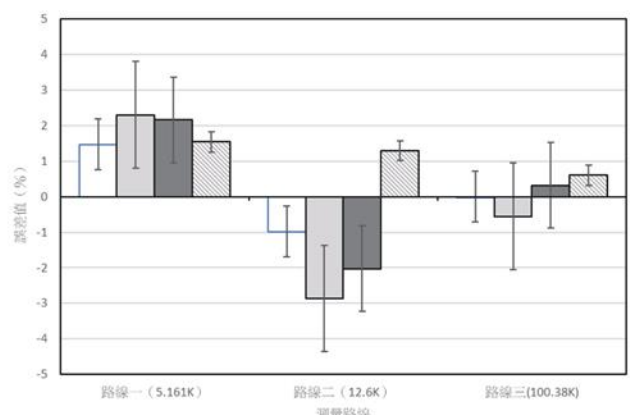


圖5-3、三條路線測量所得與地球平均半徑誤差值示意圖

陸、討論

一、科技進步，提升測量精準度，縮減測量所需距離

隨著科技日新月異，現在高階手機內所搭載的陀螺儀，輕易地可以達到小數點後八位數的角度測量。雖然讀出的數據有小數點八位，很容易受到輕微震動影響，從圖5-2關於儀器精準度的測試，經過多次測量，本研究所使用的裝置與手機晶片，測得的數字具有相當高的再現性。

本研究利用手機的高精密度陀螺儀 (晶片)，搭載應用程式phyphox® APP，測量天體的仰角，因測量裝置的精密度高，因此可以大幅縮短測量所需要的直線距離。本組研究以南、北直線距離5.161km，取四次測量的平均值，與實際值誤差僅約2.03% (1.47%~2.30%)，大幅縮短「利用天體仰角測量地球半徑」所需要的長距離，提升測量的便利性。隨著測量距離需求的大幅縮減，在地點選定上，不需要科技輔助，以測距輪即可完成測量。若以與前人研究相似方式，量出測量地點直線距離為100.38 km，則可求得地球半徑為6366.514507 km，誤差約-0.0766%。

二、改變測量恆星，達到測量日期與時間的自由度

在測量仰角的天體上，若是選擇最靠近地球的恆星：太陽，則因地球自轉軸沒有與黃道面垂直，而是夾角約23.5°，因此僅冬至、夏至兩天可以進行測量。若是選擇無窮遠處的恆星：北極星，則任何一天，只要月相、天候允許，都可以進行測量。

本研究克服了如何使搭載高精密度陀螺儀 (晶片) 的高階手機，能夠準確地指向北極星，透過自製「北極星仰角測量平台」，搭載指星筆、尋星鏡與手機 (裝載phyphox® APP) 在同一平台，可以精準測量北極星仰角。

三、誤差的來源與改善

凡是測量，必定有誤差，本研究使用的手機陀螺儀晶片，其測量值輸出的數值，達小數點後八位，雖無從得知實際準確測量的位數有多少位？而且高靈敏度的測量裝置伴隨的是易受環境的影響，然而本研究經過重複多次測量，證實測得數值具有再現性 (圖5-2)，因此本研究的裝置與設備是可以信任的。取phyphox® APP輸出測量值的中段數值 (30sec.~40sec.) 平均，並且分不同時間重複進行測量，控制可能造成的誤差。

表6-1、本組研究與前人研究之比較

	第48屆團隊作品	第50屆團隊作品	本組研究
使用原理	利用垂直地面細繩產生的影子，依照三角函數表換算太陽仰角	利用水晶球 360° 聚焦太陽光，在記錄球殼上出現太陽光的焦點，再以外嵌式量角器直接讀出太陽仰角	利用自製測量平台，以手機搭載 APP 內建陀螺儀晶片，測量北極星仰角
主要誤差來源	利用影子判讀仰角，會因陽光產生半影現象，無法精確判讀；測量日期非冬至、夏至，太陽過中天的時間不同	記錄時需標記太陽光形成的焦點，球殼屏幕太小，誤差會越大	測量角度的解析度過高，反而易受輕微震動影響
記錄儀器	容易受到風的影響而產生晃動	穩定不受風影響	穩定不受風影響
記錄日期	一月下旬，但同經度南北兩地，太陽過中天的時間不同	選擇冬至、夏至當天測量，當天同一經度南北兩地太陽過中天的時間相同	任一無月光影響的晴朗夜晚，不需限定
記錄時間	需同一時間測量	需同一時間測量	不需同時測量
裝置最小角度	0.01°	0.2°	0.00000001°
最短測量距離	306.17 km	293.05 km	L ₁ : 5.161 km L ₂ : 12.6 km L ₃ : 100.38 km
測量結果	6367.9km	6457.8947km(冬至)； 6336.0477 km(夏至)	R ₁ : 6500.738342 km R ₂ : 6410.65301 km R ₃ : 6366.514507 km
結果誤差	0.16%	1.25%(冬至) 0.66%(夏至)	R _e : 2.0301% (1.47%~2.30%) R _e : 0.6162% (-2.87%~1.29%) R _e : -0.0766% (-0.55%~0.59%)

柒、結論

本研究利用手機的高精密度陀螺儀 (晶片)，搭載應用程式phyphox® APP，自製「北極星仰角測量平台」，搭載指星筆、尋星鏡與手機 (裝載phyphox® APP)，測量北極星仰角，以測距輪量測同一經線上，南、北直線距離5.161km，以此路段的南、北端點，測量得到北極星仰角差為0.045561248°，換算成地球半徑6500.738342公里，與實際值誤差約2.0301%。

以公路里程碑量得南、北直線道路距離12.6 km，測得北極星仰角差為0.114647208°，換算成地球半徑6410.65301公里，與實際值誤差約0.6162%。

以Google® Map尺規工具量出測量地點直線距離為100.38 km，測得北極星仰角差為0.901879301°，求得地球半徑為6366.514507 km，誤差約-0.0766%。

本組所測得地球半徑，不但準確度更勝前人研究，因為研究裝置的高精密度，大幅縮短「利用天體仰角測量地球半徑」所需要的測量距離，且在任何一天，只要月相、天候允許，都可以進行測量，不需要在同一時間，在同一經度上的南、北兩地點同時測量，大幅提升測量的便利性。

捌、參考資料

- 一、古希臘科學家艾拉托色尼，資料來源：<http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1005022305575>
- 二、詳解手機里的陀螺儀是怎樣工作的？資料來源：<https://kknews.cc/tech/vm34xgl.html>
- 三、張廷安、劉彥辰、吳尚儒 (民97年)。做一個能輕易測得地球半徑的人—利用太陽光求地球半徑，第48屆全國中小學科學展覽作品集，科教館：台北
- 四、康軒文教事業編輯部 (民98年)。自然與生活科技教科書第三冊：第四章，康軒文教事業編輯部：台北
- 五、歐耘秀、賴品菁、黃裕紘 (民99)。天地之間—測量地球的半徑，第50屆全國中小學科學展覽作品集，科教館：台北
- 六、Earth Radius，資料來源NASA：<https://solarsystem.nasa.gov/planets/earth/in-depth/>