中華民國第 63 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第二名

030420

截線多邊形內切圓半徑與面積之研究

學校名稱：國立高雄師範大學附屬高級中學

作者：	指導老師：
國一 陳泓嘉	歐志昌 施羿如

關鍵詞：截線多邊形、內切圓半徑、元貞利三角形

摘　　要

一、新瀉八幡宮算額問題

1. 從由內往外作圖法知，三角形可用三個切線段表示其他線段、三角形與截線多邊形內切圓半徑。並證明：$\boxed{\text{截線多邊形內切圓的半徑和為全圓半徑的 2 倍}}$。
2. 由外往內作圖法是用三截線等長且位置唯一決定，三截角皆等腰三角形原理作圖。
3. 元貞利三角形的垂心為亨圓圓心，外心為全圓圓心。
4. 當正三角形時，截線多邊形內切圓面積和有最小值為全圓面積的 $\dfrac{28}{25}$ 倍。
5. 三角形之截線多邊形內切圓周長和為全圓周長的 2 倍。

二、正 n 邊形算額問題

設亨圓、元圓、全圓半徑為 $a,b,R,\ \theta=\dfrac{180^\circ}{n}$

則 $a:b:R=\cos^2\theta:\sin^2\theta:(\sin^2\theta+\cos\theta)$

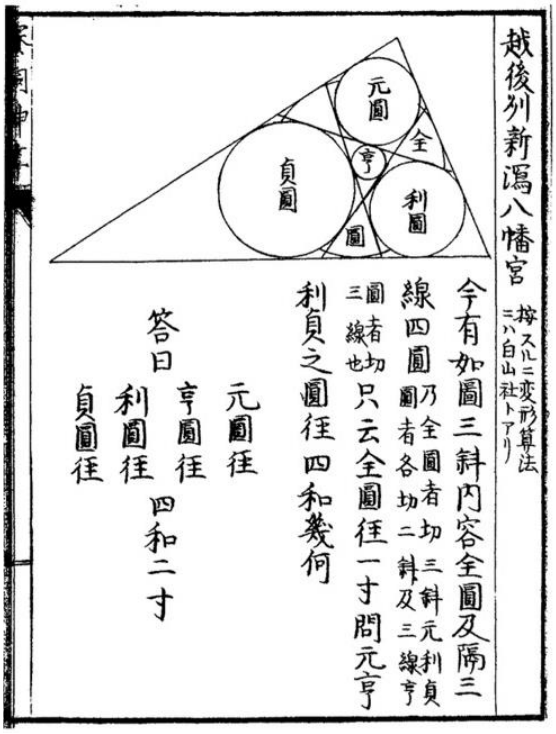
$$\frac{a+nb}{R}=\frac{n\cdot\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos\theta}$$

每邊所截線段比　$(\cos\theta-\cos 2\theta):(1+\cos 2\theta):(\cos\theta-\cos 2\theta)$

三、四邊形算額問題

1. 從由內往外作圖法知，四邊形算額問題無定值。
2. 箏形用二個切線段表示截線多邊形內切圓半徑與全圓半徑間關係。
   而等腰梯形則需三個切線段。

壹、研究動機



江戶時代（1603-1867）的日本人信仰虔誠，他們會設計各種式樣的匾額到鄰近的寺廟或神社酬神，如果是把數學問題和答案用漢字書寫在板上，這種還願的書板就叫做「**算額**」。

右圖為中村時萬於 1830 年編輯「賽祠神算」中的「**新瀉八幡宮**」算額問題：

「如圖，三角形的內切圓稱為『全圓』，及三角形由三條截線所分割區域分別作內切圓，得『亨圓』、『元圓』、『貞圓』、『利圓』。若『全圓』的半徑 1 寸，問『亨圓』、『元圓』、『貞圓』、『利圓』的半徑和為多少？」答案：2 寸

由於此問題只有單純的術文，證明沒有被記載。因此，開啟了我的研究。

貳、研究目的

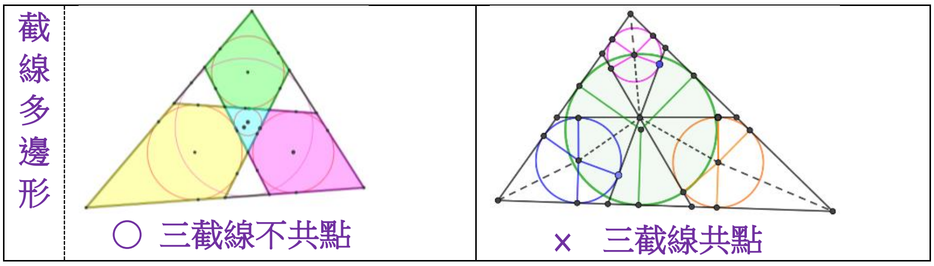
一、探討新瀉八幡宮算額問題的圖形條件與證明。

二、將新瀉八幡宮算額問題延伸至正 n 邊形。

參、名詞定義

一、截線多邊形：

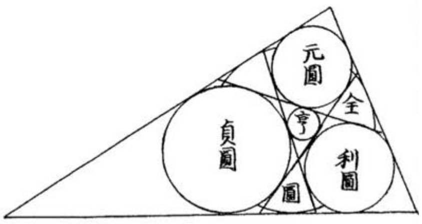
如圖，在三角形上，對每個角分別作通過相鄰兩邊但不經過頂點的截線，且三截線不共點。若由三截線所分割出來的多邊形區域有三邊為截線的一部份，則稱為「截線多邊形」。

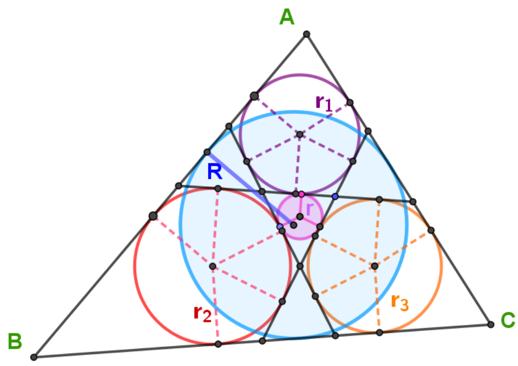


二、截線多邊形內切圓的半徑：

三角形的內切圓，稱為「全圓」，半徑記作 R 。截線多邊形分別作內切圓，得「亨圓」的半徑 r 、「元圓」的半徑 r_1 、「貞圓」的半徑 r_2 、「利圓」的半徑 r_3 。

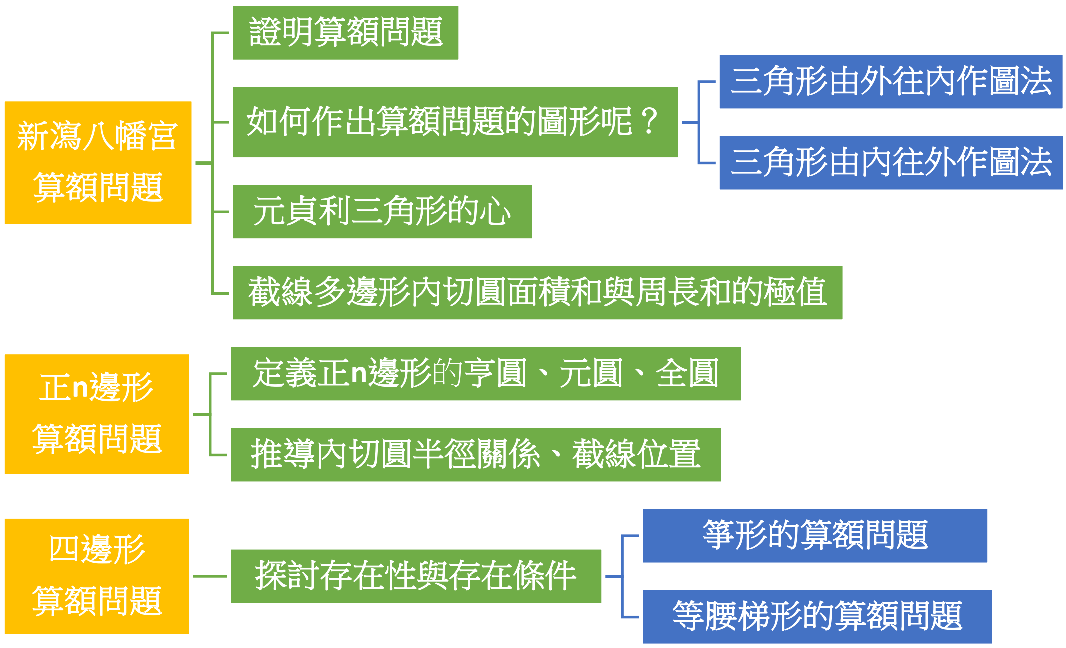
因此，欲證：$r+r_1+r_2+r_3=2R$ 。





肆、研究過程

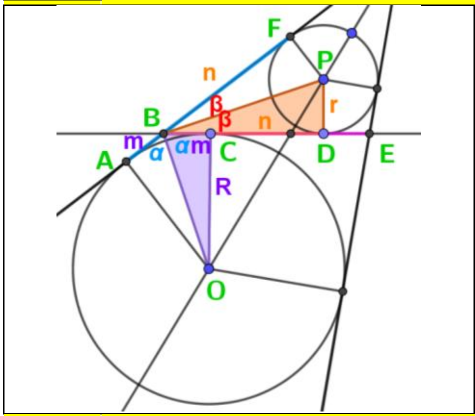
★ 研究架構圖



一、「新瀉八幡宮」算額問題

(一)兩圓內外公切線段長的性質

性質一：設兩圓半徑為 R ,r ，若 $\overline{BC}=m,\ \overline{BD}=n$ ，則 $Rr=mn$ 。



[證明] 在ΔOBC與ΔBPD中

$\because \angle OCB=\angle BDP=90^\circ$

設 $\angle ABO=\angle CBO=\alpha$ 且$\angle FBP=\angle DBP=\beta$

又 $\alpha+\alpha+\beta+\beta=180^\circ$

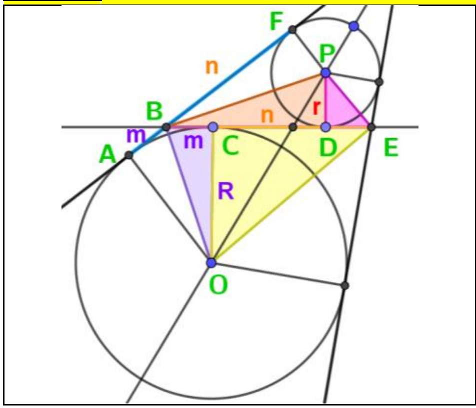
$\therefore \alpha+\beta=90^\circ$ ，即 $\angle OBC+\angle DBP=90^\circ$

又 $\angle BPD+\angle DBP=90^\circ$　　$\therefore \angle OBC=\angle BPD$

$\therefore \Delta OBC\sim\Delta BPD$ (AAA相似)

$\therefore \dfrac{R}{m}=\dfrac{n}{r}$　　$\therefore Rr=mn$

性質二：切線段長 $\overline{BC}=\overline{DE}=m,\ \overline{BD}=\overline{CE}=n$



[證明] 設 $\overline{CE}=x,\ \overline{DE}=y,$ 又 $\overline{BC}=m,\ \overline{BD}=n$

$\therefore m+x=\overline{BE}=n+y$

又 $\Delta OBC\sim\Delta BPD$ (AAA相似)　　$\therefore Rr=mn$

同理 $\Delta OEC\sim\Delta EPD$ (AAA相似)　$\therefore Rr=xy$

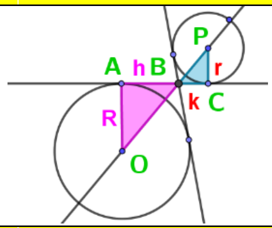
$\therefore\ m:x=\dfrac{Rr}{n}:\dfrac{Rr}{y}=\dfrac{1}{n}:\dfrac{1}{y}=y:n$

又 $m+x=n+y$

$\therefore\ x=n$, $y=m$

性質三：外公切線段長為 $\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{BF}=m+n$ 。

性質四：設兩圓的半徑為 R, r ，若 $\overline{AB}=h,\ \overline{BC}=k$ ，則 $\dfrac{R}{r}=\dfrac{h}{k}$ 。



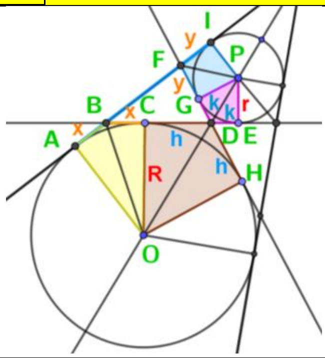
[證明] 在$\Delta OABC$與ΔPCB中

$\because \angle OAB=\angle PCB=90^\circ$ 且 $\angle OBA=\angle PBC$ (對頂角相等)

$\therefore \Delta OABC \sim \Delta PCB$ (AAA相似)

$\therefore \dfrac{R}{h}=\dfrac{r}{k}$ $\quad\quad$ $\therefore \dfrac{R}{r}=\dfrac{h}{k}$

性質五：$\overline{AB}=\overline{IF}=x$ ，$\overline{BF}=h+k$



令 $\overline{AB}=\overline{BC}=x,\ \overline{IF}=\overline{FG}=y,\ \overline{CD}=\overline{DH}=h,\ \overline{DE}=\overline{DG}=k$

由性質一和性質三知，圓半徑的關係和外公切線段長

$Rr=\overline{BC}\cdot\overline{BD}=x\cdot(x+h+k)$

且 $\overline{AI}=\overline{BC}+\overline{BD}=x+(x+h+k)=2x+h+k$

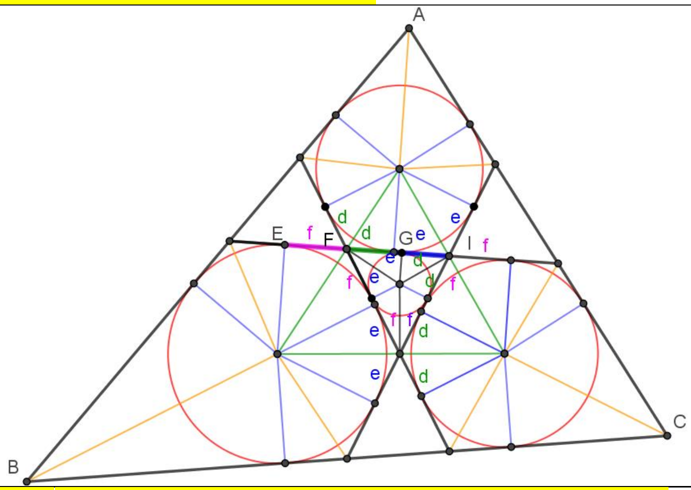
同理 $Rr=\overline{FG}\cdot\overline{FH}=y\cdot(y+k+h)$

且 $\overline{AI}=\overline{FG}+\overline{FH}=y+(y+k+h)=2y+h+k$

$\therefore x=y$ $\quad$ $\therefore \overline{AB}=\overline{IF}=x$ ，$\overline{BF}=h+k$

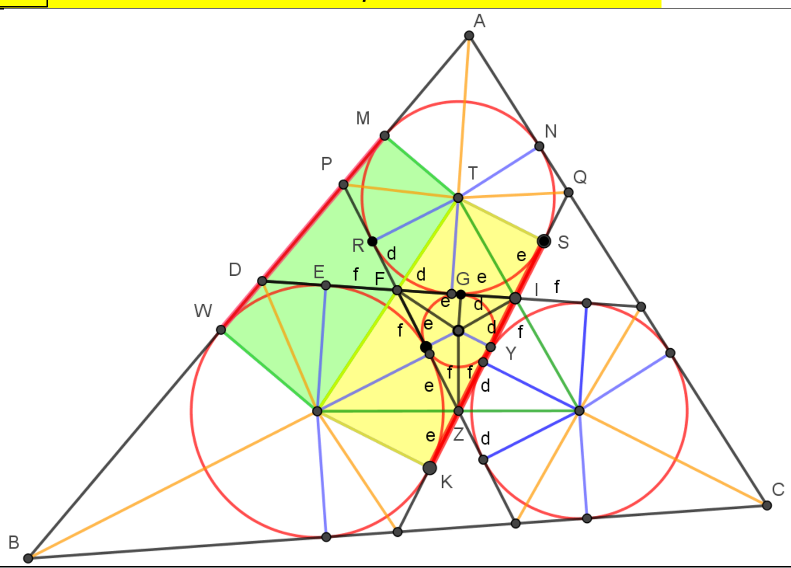
(二)元圓、貞圓、利圓與亨圓的半徑關係

1. 規定 $\overline{FG}=d,\ \overline{GI}=e,\ \overline{EF}=f$



利用「切線的性質」與「性質二」，可推得右圖結果

2.**性質六**：$\overline{MW}=\overline{SK}=d+2e+f$ ，且 $\angle MTF=\angle STF$



利用

「外公切線的性質」

$\overline{MW}$

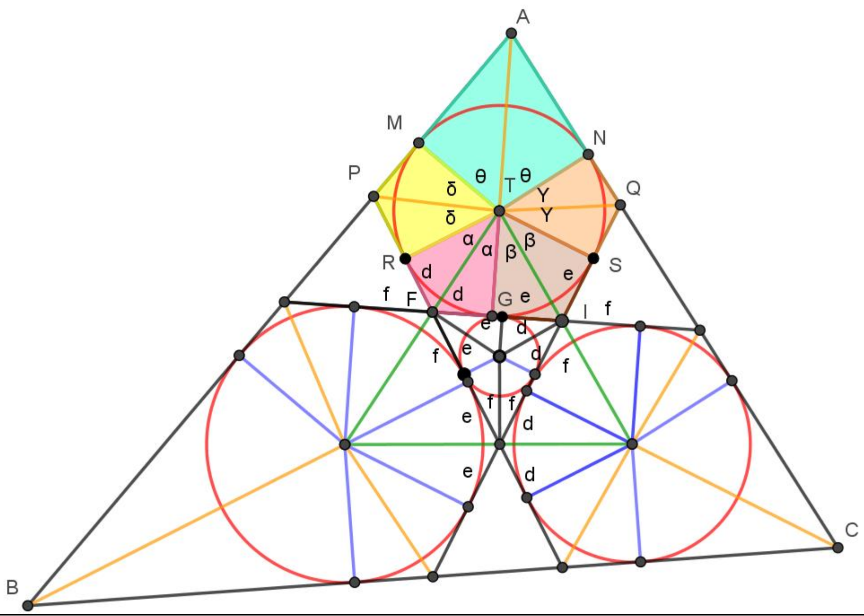
$=\overline{SK}$

$=\overline{SI}+\overline{IY}+\overline{YZ}+\overline{ZK}$

$=e+d+f+e$

$=d+2e+f$

3. $\boxed{\text{性質七}}$：$\overline{PM}=\overline{PR}=e$，$\overline{QN}=\overline{QS}=d$　且 A,T,G 三點共線



[證明] 如圖，

設 $\angle ATM=\angle ATN=\theta,$

$\angle FTR=\angle FTG=\alpha,$

$\angle ITG=\angle ITS=\beta,$

$\angle QTS=\angle QTN=\gamma,$

$\angle PTM=\angle PTR=\delta$

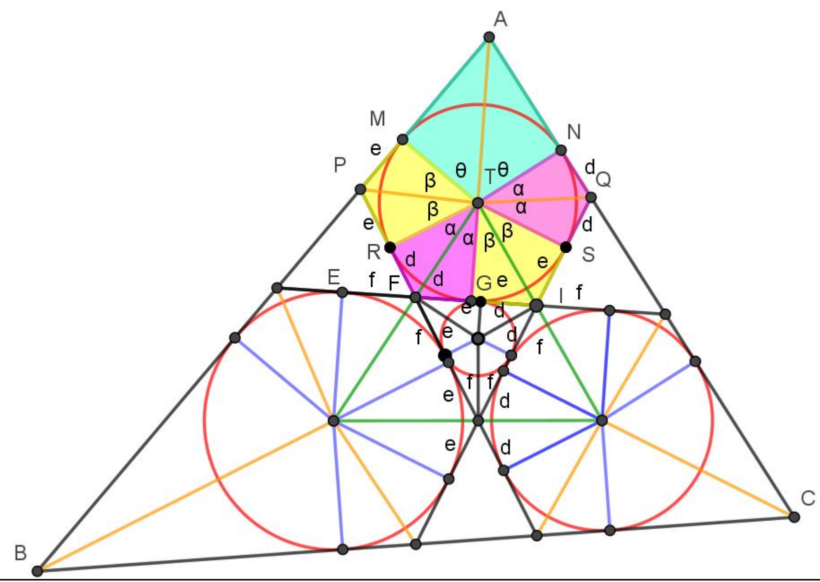
由 $\boxed{\text{性質六}}$ 知

$\angle MTF=\angle STF$

$\therefore \alpha+2\delta=\alpha+2\beta$

$\therefore \delta=\beta$

同理 $\alpha=\gamma$



$\therefore \overline{PM}=\overline{PR}=\overline{IS}=\overline{IG}=e,$

$\overline{QN}=\overline{QS}=\overline{FR}=\overline{FG}=d$

且 A,T,G 三點共線。

4. 將圖中的線段長，

以 d, e, f 表示出來

利用 $\boxed{\text{性質六}}$ 可推得三段

$\boxed{\text{紅色外公切線線段長}}$

分別為

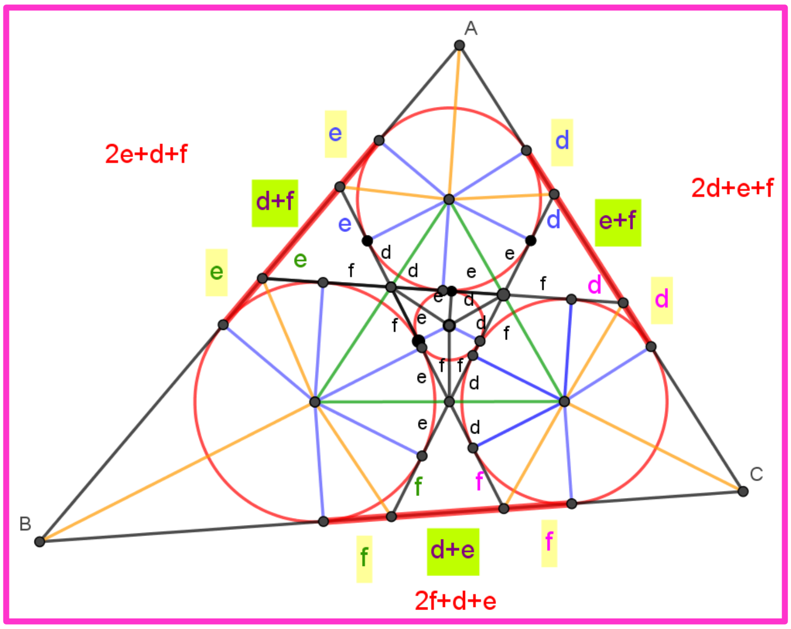
$2e+d+f$，

$2d+e+f$，

$2f+d+e$

再利用 $\boxed{\text{性質七}}$，

可推得右圖結果。



★三截線位置特性

> ΔADK 為等腰三角形且 $\overline{AG}$ 為 ΔADK 的高

[說明]

(1)在 ΔADK 中，

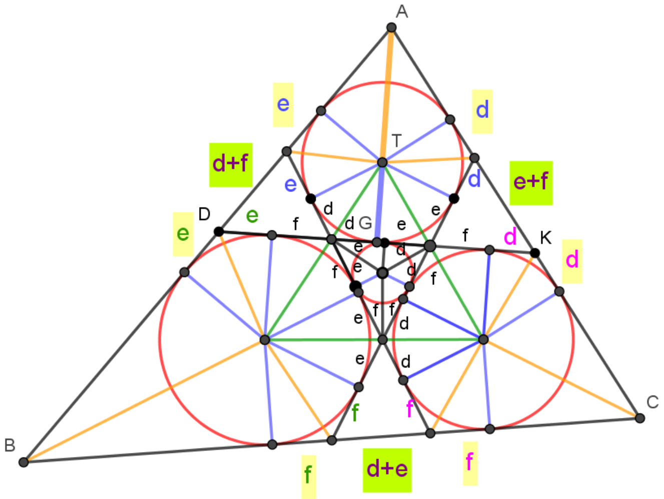
$$\overline{AD}=\overline{AM}+e+(d+f)$$
$$=\overline{AN}+d+(e+f)=\overline{AK}$$

$\therefore \Delta ADK$ 為等腰三角形

(2)由性質七知

A,T,G 三點共線且 $\overline{AG}\perp\overline{DK}$，

$\therefore \overline{AG}$ 為 ΔADK 的高



★心得：三條截線都必須分別將三角形截出等腰三角形

★以 d,e,f 表示 r

> 設**亨圓半徑** r，$\overline{FG}=d,\ \overline{GI}=e,\ \overline{EF}=f$，則 $r=\sqrt{\dfrac{def}{s}}$，其中 $s=d+e+f$。

[證明]

$$\Delta FIZ\text{面積}=\frac{1}{2}(2d+2e+2f)\cdot r$$
$$=s\cdot r,\text{其中}s=d+e+f$$

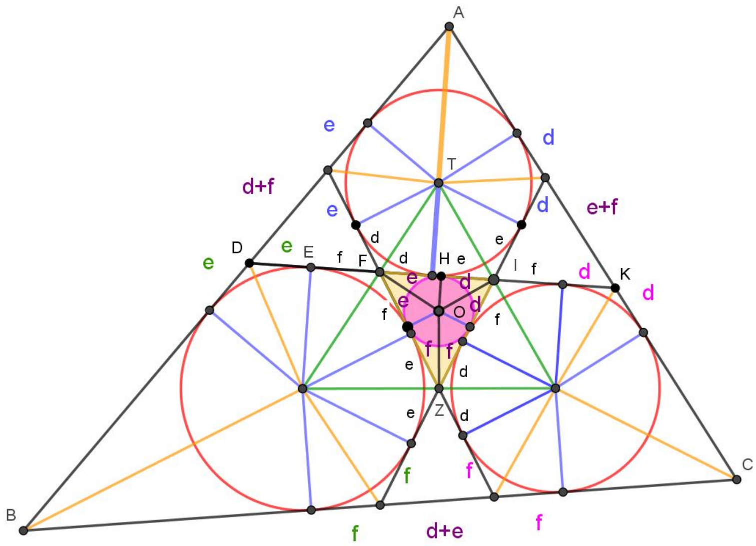
由海龍公式，

ΔFIZ 面積

$$=\sqrt{s[s-(e+f)][s-(d+f)][s-(d+e)]}$$
$$=\sqrt{sdef}$$

$$\therefore s\cdot r=\sqrt{s\cdot d\cdot e\cdot f}$$

$$\therefore r=\frac{\sqrt{s\cdot d\cdot e\cdot f}}{s}=\sqrt{\frac{def}{s}}$$，故得證。



★以 d,e,f 表示 r_1，r_2，r_3

> 設**亨圓半徑** r、**元圓半徑** r_1、**貞圓半徑** r_2、**利圓半徑** r_3，$\overline{FG}=d,\ \overline{GI}=e,\ \overline{EF}=f$
>
> 則 $r_1=\dfrac{de}{r}=\sqrt{\dfrac{des}{f}}$，$r_2=\dfrac{ef}{r}=\sqrt{\dfrac{efs}{d}}$，$r_3=\dfrac{df}{r}=\sqrt{\dfrac{dfs}{e}}$，其中 $s=d+e+f$

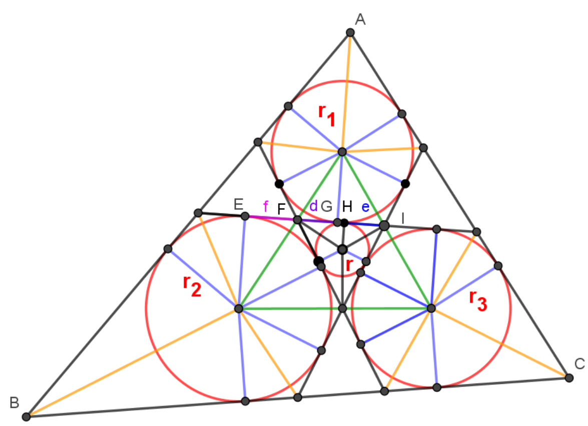
[證明]由性質一知 $r\cdot r_1=d\cdot e$，即 $r_1=\dfrac{de}{r}$

又 $r=\sqrt{\dfrac{def}{s}}$ 代入

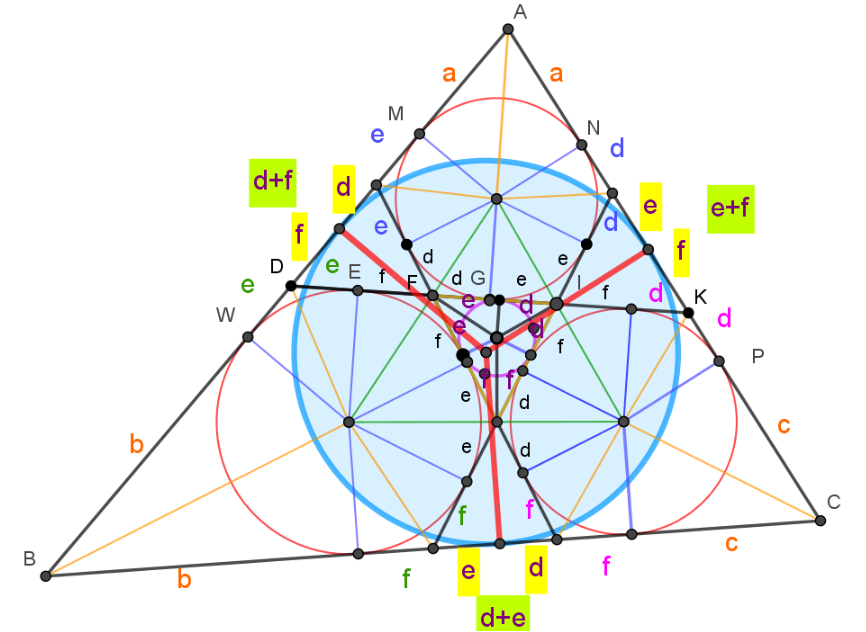
$$\therefore\ r_1=\frac{de}{r}=de\sqrt{\frac{s}{def}}=\sqrt{\frac{des}{f}}$$

同理

$$r_2=\frac{ef}{r}=\sqrt{\frac{efs}{d}}\ ,\quad r_3=\frac{df}{r}=\sqrt{\frac{dfs}{e}}$$



(三)全圓的半徑關係



設全圓半徑 R ，
$\overline{FG}=d,\overline{GI}=e,\overline{EF}=f$ ，
$\overline{AM}=a,\overline{BW}=b,\overline{CP}=c$

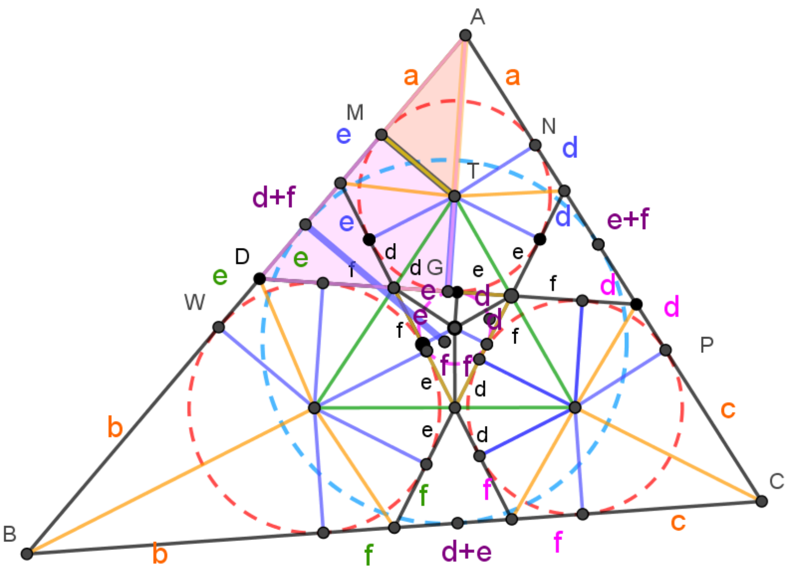
∵全圓為 ΔABC 的內切圓
∴從某一頂點所做的兩切線段必等長。

∴三邊長可再細分出每條小線段的長度。
如圖所示。

★以 d,e,f 表示 a,b,c

設 $\overline{FG}=d,\ \overline{GI}=e,\ \overline{EF}=f$ ， $\overline{AM}=a,\ \overline{BW}=b,\ \overline{CP}=c$ ，
則 $a=\dfrac{2sde}{sf-de}$,$b=\dfrac{2sef}{sd-ef}$,$c=\dfrac{2sdf}{se-df}$ ，其中 $s=d+e+f$ 。

[證明]



$\because\ \Delta ATM\sim\Delta ADG(AA相似)$

又 $\overline{AT}=\sqrt{r_1^2+a^2}$

$\therefore\ \dfrac{\overline{TM}}{\overline{AM}}=\dfrac{\overline{DG}}{\overline{AG}}$ ，

$\dfrac{r_1}{a}=\dfrac{d+e+f}{r_1+\sqrt{r_1^2+a^2}}=\dfrac{s}{r_1+\sqrt{r_1^2+a^2}}$

$\therefore as=r_1^2+r_1\sqrt{r_1^2+a^2}$ ，

$as-r_1^2=r_1\sqrt{r_1^2+a^2}$ ，

$a^2s^2-2asr_1^2+r_1^4=r_1^2\left(r_1^2+a^2\right)$ ，

$a^2s^2-2asr_1^2+r_1^4=r_1^4+r_1^2a^2$ ，

$a^2s^2-2asr_1^2=r_1^2a^2$ ，

$as^2-2sr_1^2=r_1^2a$ ， $a(s^2-r_1^2)=2sr_1^2$ ，

又 $r_1=\sqrt{\dfrac{des}{f}}$ 代入

$\therefore\ a(s^2-\dfrac{des}{f})=2s\dfrac{des}{f}$, $a(\dfrac{s^2f-des}{f})=\dfrac{2des^2}{f}$, $a(s^2f-des)=2des^2$ ， $a(sf-de)=2des$

$\therefore\ a=\dfrac{2sde}{sf-de}$ 　同理 $b=\dfrac{2sef}{sd-ef}$,$c=\dfrac{2sdf}{se-df}$ 。

★以 a,d,e,f 表示 R

設全圓半徑 R，$\overline{FG}=d,\overline{GI}=e,\overline{EF}=f$ 及 $\overline{AM}=a$，則 $R=\dfrac{a+d+e}{a}\sqrt{\dfrac{des}{f}}$，其中 $s=d+e+f$

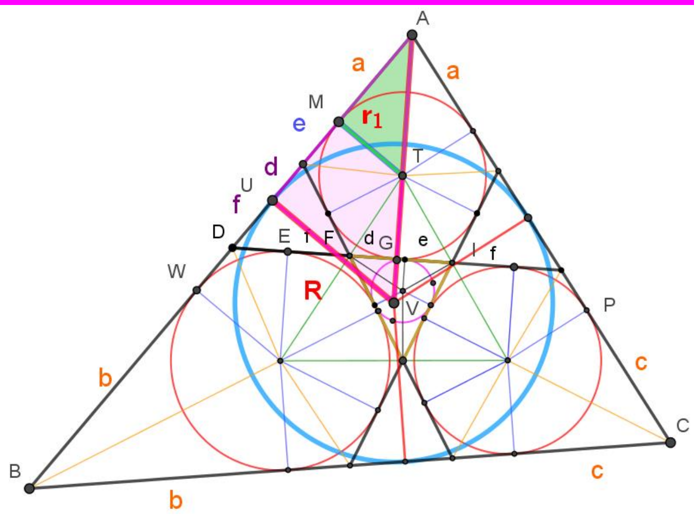
[證明]

$\because \Delta ATM \sim \Delta AVU$ (AAA相似)

$\therefore \dfrac{\overline{TM}}{\overline{AM}}=\dfrac{\overline{VU}}{\overline{AU}}$，即 $\dfrac{r_1}{a}=\dfrac{R}{a+d+e}$

$\therefore R=\dfrac{a+d+e}{a}\cdot r_1$

$=\dfrac{a+d+e}{a}\sqrt{\dfrac{des}{f}}$



(四) 證明算額問題

★以 d,e,f 表示 $r_1+r_2+r_3+r$

設亨圓半徑 r、元圓半徑 r_1、貞圓半徑 r_2、利圓半徑 r_3，$\overline{FG}=d,\ \overline{GI}=e,\ \overline{EF}=f$，
則 $r_1+r_2+r_3+r=\dfrac{des+efs+dfs+def}{\sqrt{defs}}$。

[證明] $\because r_1=\sqrt{\dfrac{des}{f}}$，$r_2=\sqrt{\dfrac{efs}{d}}$，$r_3=\sqrt{\dfrac{dfs}{e}}$，$r=\sqrt{\dfrac{def}{s}}$，其中 $s=d+e+f$

$\therefore r_1+r_2+r_3+r=\sqrt{\dfrac{des}{f}}+\sqrt{\dfrac{efs}{d}}+\sqrt{\dfrac{dfs}{e}}+\sqrt{\dfrac{def}{s}}=\dfrac{des+efs+dfs+def}{\sqrt{defs}}$，故得證。

★證明算額問題：$r_1+r_2+r_3+r=2R$

設全圓半徑 R，亨圓半徑 r、元圓半徑 r_1、貞圓半徑 r_2、利圓半徑 r_3，則
$r_1+r_2+r_3+r=2R$

[證明] $\because R=\dfrac{a+d+e}{a}\sqrt{\dfrac{des}{f}}$，且 $a=\dfrac{2sde}{sf-de}$，其中 $s=d+e+f$

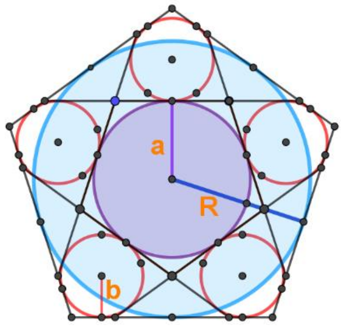
$$\therefore R=\frac{\left(\dfrac{2sde}{sf-de}\right)+d+e}{\left(\dfrac{2sde}{sf-de}\right)}\sqrt{\frac{des}{f}}=\frac{2sde+(d+e)(sf-de)}{2sde}\sqrt{\frac{des}{f}}=\frac{2sde+(d+e)(sf-de)}{2\sqrt{sdef}}$$

$$=\frac{2sde+dsf+esf-de(d+e)}{2\sqrt{sdef}}=\frac{des+dfs+efs+de(s-d-e)}{2\sqrt{defs}}=\frac{des+dfs+efs+def}{2\sqrt{defs}}$$

$\therefore 2R=r_1+r_2+r_3+r$，故得證。

二、正 n 邊形的算額問題

將新瀉八幡宮算額問題延伸至**正 n 邊形**。



(一)$\boxed{\text{定義}}$：正 n 邊形的內切圓，稱為「**全圓**」，半徑為 R 。

正 n 邊形由 n 條**不過頂點**且**等長**的**截線**所分割的**截線多邊形**

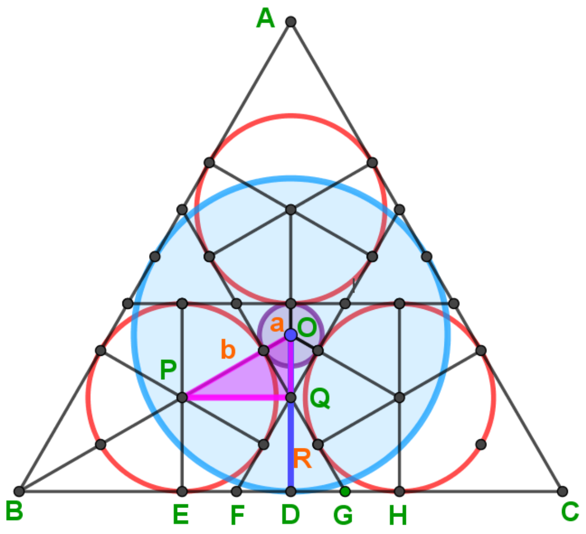
分別作內切圓，中心的內切圓，稱為「**亨圓**」，半徑為 a 。

其餘 n 個區域的內切圓**大小相同**，稱為「**元圓**」，半徑為 b 。

(二)討論正 n 邊形全圓、亨圓、元圓的半徑關係

◎正三角形

●正三角形的全圓、亨圓、元圓半徑比



$\because \Delta ABC$ 的**亨圓、元圓、全圓半徑為** a,b,R

$\because \Delta POQ$ 為 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 直角三角形，

$\therefore \angle OPQ = 30^\circ$

$\because$ 又 $\overline{OP}=a+b$，$\overline{OQ}=b-a$

$\therefore \dfrac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}=\dfrac{a+b}{b-a}=\dfrac{2}{1}$ $\quad \therefore b=3a$

又 $\overline{OP}=a+b$，$\overline{OQ}=R-b$

$\therefore \dfrac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}=\dfrac{a+b}{R-b}=\dfrac{2}{1}$ $\quad \therefore 2R=a+3b$

$\therefore R=\dfrac{a+3b}{2}=\dfrac{a+3\times(3a)}{2}=5a$

$\therefore$ 內切圓半徑比 $a:b:R=1:3:5$

●正三角形的 3 條截線位置

$\because \Delta BPE$ 為 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 直角三角形且 $\overline{PE}=b$ $\therefore \overline{BE}=\sqrt{3}b=3\sqrt{3}a$ $\because \Delta PFE$ 為 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 直角三角形且 $\overline{PE}=b$ $\therefore \overline{EF}=\dfrac{b}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}a$	同理 $\overline{BE}=\overline{CH}=3\sqrt{3}a$ $\overline{EF}=\overline{FD}=\overline{DG}=\overline{GH}=\sqrt{3}a$ $\therefore \overline{BF}:\overline{FG}:\overline{GC}=4\sqrt{3}a:2\sqrt{3}a:4\sqrt{3}a$ $=2:1:2$

●半徑關係

$\because a:b:R=1:3:5 \qquad \therefore a+3b=10a=2R \qquad \therefore \dfrac{a+3b}{R}=2$

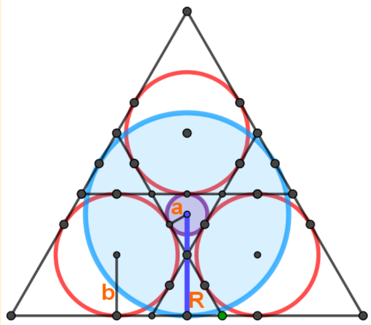
★正三角形算額問題

設**正三角形的亨圓、元圓、全圓半徑分別為** a,b,R ，**則**

半徑比 $a:b:R=1:3:5$ 。

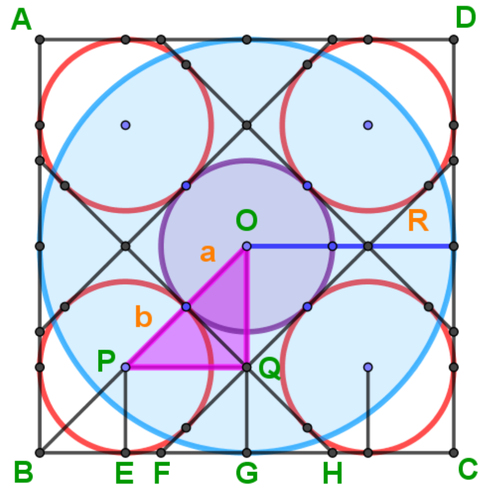
3 條截線將每邊所截成的線段比 $2:1:2$ 。

半徑關係 $\dfrac{a+3b}{R}=2$



◎正方形

●正方形的全圓、亨圓、元圓半徑比



□$ABCD$ 為正方形，

其亨圓、元圓、全圓半徑為 a, b, R，

明顯可知 $a=b$

$\because \Delta POQ$ 為 $45°-45°-90°$ 直角三角形，

$\therefore \angle OPQ = 45°$

又 $\overline{OP}=a+b$，$\overline{OQ}=R-b$

$\therefore \dfrac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}=\dfrac{a+b}{R-b}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}$ 且 $a=b$

$\therefore R=(\sqrt{2}+1)a$

$\therefore$ 內切圓半徑比 $a:b:R=1:1:(\sqrt{2}+1)$

●正方形的 4 條截線位置

$\because \Delta BPE$ 為 $45°-45°-90°$ 直角三角形，

且 $\overline{PE}=b$

$\therefore \overline{BE}=b=a$

$\because \Delta OPQ$ 為 $45°-45°-90°$ 直角三角形，

且 $\overline{OP}=a+b=2a$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{2}a$

即 $\overline{EG}=\sqrt{2}a$

又 $\overline{BE}=\overline{FG}=a$，

$\therefore \overline{EF}=\sqrt{2}a-a=(\sqrt{2}-1)a$

$\therefore \overline{BF}:\overline{FH}:\overline{HC}=\sqrt{2}a:2a:\sqrt{2}a=1:\sqrt{2}:1$

●半徑關係

$\because a:b:R=1:1:(\sqrt{2}+1)$

$\therefore$ 亨圓及其他元圓半徑和 $a+4b=5a$，全圓半徑 $R=(\sqrt{2}+1)\cdot a$

$$\therefore \frac{a+4b}{R}=\frac{5a}{(\sqrt{2}+1)\cdot a}=5\cdot(\sqrt{2}-1)$$

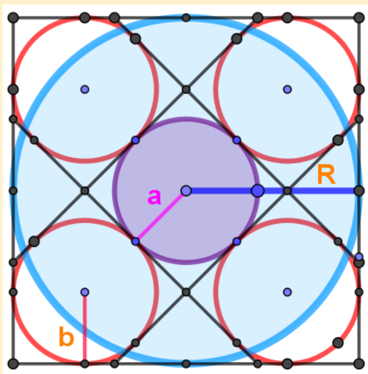
★正方形算額問題

設正方形的亨圓、元圓、全圓半徑分別為 a, b, R，則

半徑比 $a:b:R=1:1:(\sqrt{2}+1)$。

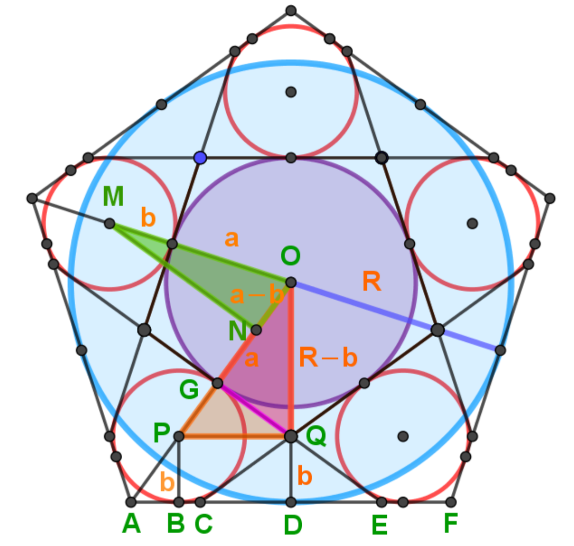
4 條截線將每邊所截成的線段比 $1:\sqrt{2}:1$。

半徑關係 $\dfrac{a+4b}{R}=5\cdot(\sqrt{2}-1)$



◎正五邊形

●正五邊形的全圓、亨圓、元圓半徑比



正五邊形，其**亨圓、元圓、全圓半徑為** a,b,R ，

$\because$ ΔPOQ 與 ΔQOG 為直角三角形且 $\angle POQ=36°$

又 $\overline{OP}=a+b$，$\overline{OQ}=R-b$，$\overline{OG}=a$

$\therefore \cos 36°=\dfrac{R-b}{a+b}=\dfrac{a}{R-b}$

$\therefore R=\sqrt{a(a+b)}+b$

又 ΔOMN 為直角三角形且 $\angle MON=72°$

$\because$ $\overline{OM}=a+b$，$\overline{ON}=a-b$，

$\therefore \cos 72°=\dfrac{a-b}{a+b}$

$\therefore\ a:b=(1+\cos 72°):(1-\cos 72°)$

$=2\cos^2 36°:2\sin^2 36°=\cos^2 36°:\sin^2 36°$

$\therefore$ 內切圓半徑比 $a:b:R=\cos^2 36°:\sin^2 36°:(\sqrt{\cos^2 36°(\cos^2 36°+\sin^2 36°)}+\sin^2 36°)$

$=\cos^2 36°:\sin^2 36°:(\sin^2 36°+\cos 36°)$

●正五邊形的 5 條截線位置

如圖， $\angle POQ=36°$ 且 $\angle QCD=36°$ $\quad\therefore \overline{AD}=R\tan 36°$ ， $\overline{CD}=\dfrac{b}{\tan 36°}$

$$\therefore \overline{AC}=\overline{AD}-\overline{CD}=R\tan 36°-\frac{b}{\tan 36°}=(\frac{\sin^2 36°+\cos 36°}{\sin^2 36°}b)\tan 36°-\frac{b}{\tan 36°}$$

$$=b(\frac{\sin^2 36°+\cos 36°}{\sin^2 36°}\frac{\sin 36°}{\cos 36°}-\frac{\cos 36°}{\sin 36°})=b(\frac{\sin^2 36°+\cos 36°}{\sin 36°\cos 36°}-\frac{\cos^2 36°}{\sin 36°\cos 36°})$$

$$=b(\frac{\sin^2 36°+\cos 36°-\cos^2 36°}{\sin 36°\cos 36°})=b(\frac{1+\cos 36°-2\cos^2 36°}{\sin 36°\cos 36°})$$

$$\therefore \overline{AC}:\overline{CE}=b(\frac{1+\cos 36°-2\cos^2 36°}{\sin 36°\cos 36°}):2\frac{b}{\tan 36°}=\frac{1+\cos 36°-2\cos^2 36°}{\sin 36°\cos 36°}:2\frac{\cos 36°}{\sin 36°}$$

$$=(1+\cos 36°-2\cos^2 36°):2\cos^2 36°=(\cos 36°-\cos 72°):(1+\cos 72°)$$

$\therefore \overline{AC}:\overline{CE}:\overline{EF}=(\cos 36°-\cos 72°):(1+\cos 72°):(\cos 36°-\cos 72°)$

●半徑關係

$\because\ a:b:R=\cos^2 36°:\sin^2 36°:(\sin^2 36°+\cos 36°)$

$$\therefore \frac{a+5b}{R}=\frac{\cos^2 36°+5\sin^2 36°}{\sin^2 36°+\cos 36°}=\frac{5\sin^2 36°+\cos^2 36°}{\sin^2 36°+\cos 36°}$$

★正五邊形算額問題

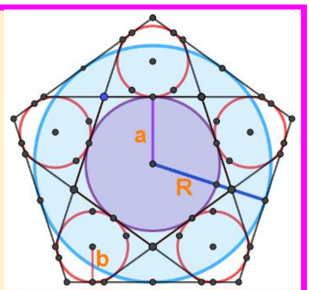
設**正五邊形**的**亨圓、元圓、全圓半徑分別為** a,b,R ，**則**

半徑比 $a:b:R=\cos^2 36°:\sin^2 36°:(\sin^2 36°+\cos 36°)$

5 條截線將每邊所截成的線段比

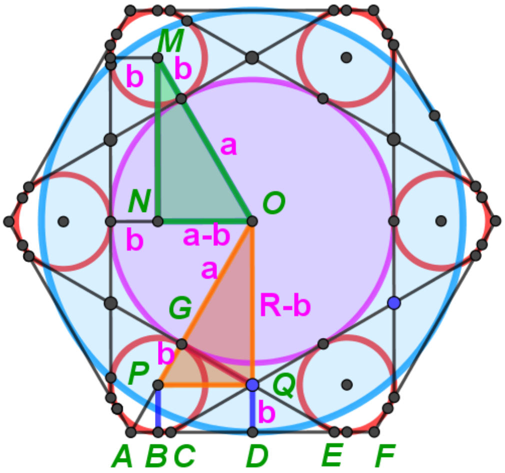
$(\cos 36°-\cos 72°):(1+\cos 72°):(\cos 36°-\cos 72°)$ 。

半徑關係 $\dfrac{a+5b}{R}=\dfrac{5\sin^2 36°+\cos^2 36°}{\sin^2 36°+\cos 36°}$



◎正 n 邊形

●正 n 邊形的全圓、亨圓、元圓半徑比



正 n 邊形，其亨圓、元圓、全圓半徑為 a,b,R，

令 $\theta=\dfrac{180^\circ}{n}$，

$\because$ ΔPOQ 與 ΔQOG 為直角三角形且 $\angle POQ=\theta$

又 $\overline{OP}=a+b$，$\overline{OQ}=R-b$，$\overline{OG}=a$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{R-b}{a+b}=\dfrac{a}{R-b}$ $\qquad\therefore R=\sqrt{a(a+b)}+b$

又 ΔOMN 為直角三角形且 $\angle MON=2\theta$

$\because$ $\overline{OM}=a+b$，$\overline{ON}=a-b$， $\quad\therefore \cos 2\theta=\dfrac{a-b}{a+b}$

$\therefore\ a:b=(1+\cos 2\theta):(1-\cos 2\theta)=2\cos^2\theta:2\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta:\sin^2\theta$

$\therefore a:b:R=\cos^2\theta:\sin^2\theta:(\sqrt{\cos^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}+\sin^2\theta)=\cos^2\theta:\sin^2\theta:(\sin^2\theta+\cos\theta)$

●半徑關係

$\because$亨圓：元圓：全圓的個數比=1：n：1 $\quad\therefore \dfrac{a+nb}{R}=\dfrac{\cos^2\theta+n\cdot\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos\theta}=\dfrac{n\cdot\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos\theta}$

●正 n 邊形的 n 條截線位置

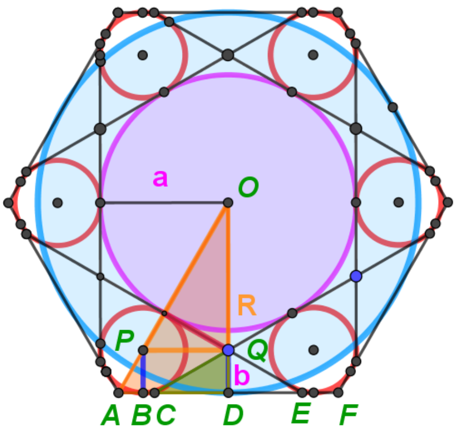
$\because \angle POQ=\theta$ 且 $\angle QCD=\theta\ \therefore \overline{AD}=R\tan\theta$，$\overline{CD}=\dfrac{b}{\tan\theta}$

$\therefore \overline{AC}=\overline{AD}-\overline{CD}=R\tan\theta-\dfrac{b}{\tan\theta}$

$=(\dfrac{\sin^2\theta+\cos\theta}{\sin^2\theta}b)\tan\theta-\dfrac{b}{\tan\theta}$

$=b(\dfrac{\sin^2\theta+\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta})$

$=b(\dfrac{\sin^2\theta+\cos\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta})=b(\dfrac{1+\cos\theta-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta})$



$\therefore \overline{AC}:\overline{CE}=b(\dfrac{1+\cos\theta-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}):2\dfrac{b}{\tan\theta}=\dfrac{1+\cos\theta-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}:2\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=(1+\cos\theta-2\cos^2\theta):2\cos^2\theta\ =(\cos\theta-\cos 2\theta):(1+\cos 2\theta)$

$\therefore \overline{AC}:\overline{CE}:\overline{EF}=(\cos\theta-\cos 2\theta):(1+\cos 2\theta):(\cos\theta-\cos 2\theta)$

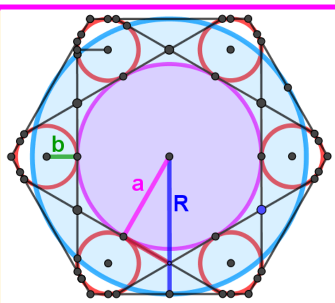
★正 n 邊形算額問題

設正 n 邊形的亨圓、元圓、全圓半徑為 a,b,R，令 $\theta=\dfrac{180^\circ}{n}$，則

內切圓半徑比 $a:b:R=\cos^2\theta:\sin^2\theta:(\sin^2\theta+\cos\theta)$

半徑關係 $\dfrac{a+nb}{R}=\dfrac{n\cdot\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos\theta}$

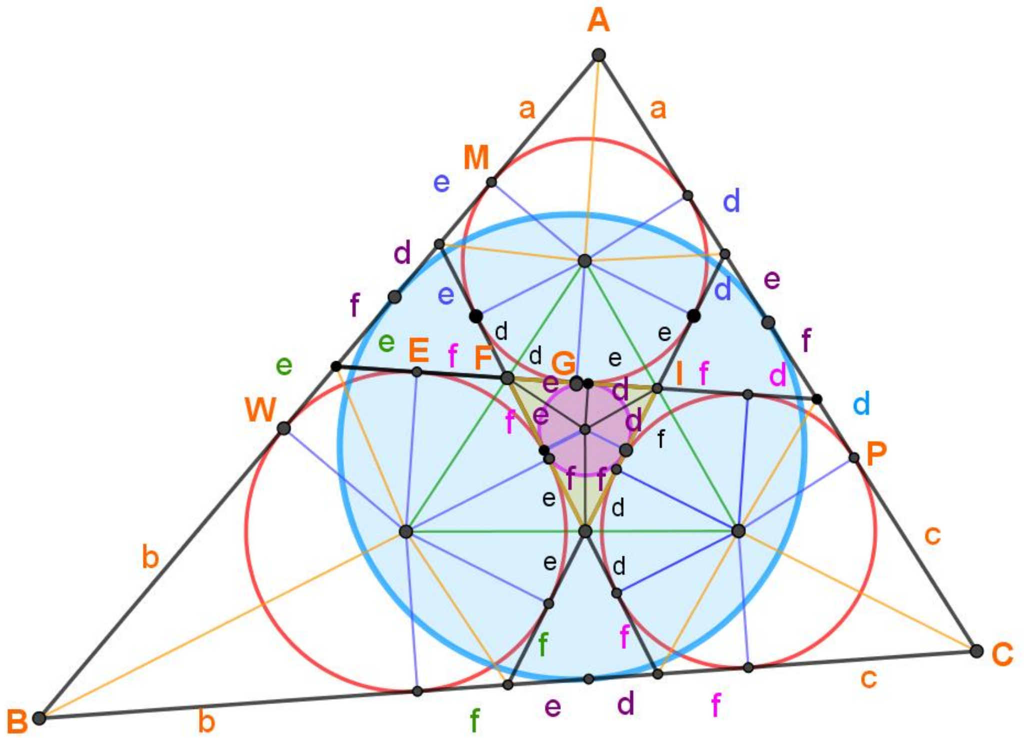
截線每邊所截線段比 $(\cos\theta-\cos 2\theta):(1+\cos 2\theta):(\cos\theta-\cos 2\theta)$



伍、研究結果

一、「新瀉八幡宮」算額問題

1. 規定 $\overline{FG}=d,\ \overline{GI}=e,\ \overline{EF}=f$ ，$\overline{AM}=a,\ \overline{BW}=b,\ \overline{CP}=c$ ，表示出各線段長度。



2. 三角形的三條截線都必須分別將三角形的三個角截出**等腰三角形**。

3. 設**亨圓半徑** r 、**元圓半徑** r_1 、**貞圓半徑** r_2 、**利圓半徑** r_3 ，**全圓半徑** R ，且 $s=d+e+f$ ，

則 $r=\sqrt{\dfrac{def}{s}}$ ，$r_1=\dfrac{de}{r}=\sqrt{\dfrac{des}{f}}$ ，$r_2=\dfrac{ef}{r}=\sqrt{\dfrac{efs}{d}}$ ，$r_3=\dfrac{df}{r}=\sqrt{\dfrac{dfs}{e}}$ ，$R=\dfrac{a+d+e}{a}\sqrt{\dfrac{des}{f}}$ 。

4. $a=\dfrac{2sde}{sf-de}$,$b=\dfrac{2sef}{sd-ef}$,$c=\dfrac{2sdf}{se-df}$ ，其中 $s=d+e+f$ 。

5. 推導出 $r_1+r_2+r_3+r=\dfrac{des+efs+dfs+def}{\sqrt{sdef}}$ ，證明出算額問題：$r_1+r_2+r_3+r=2R$ 。

二、正 n 邊形的算額問題

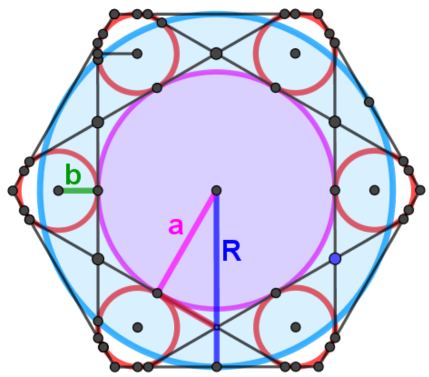
設正 n 邊形的**亨圓**、**元圓**、**全圓**半徑分別為 a,b,R ，

令 $\theta=\dfrac{180^\circ}{n}$ ，則

1. **內切圓半徑比** $a:b:R=\cos^2\theta:\sin^2\theta:(\sin^2\theta+\cos\theta)$

2. **半徑關係** $\dfrac{a+nb}{R}=\dfrac{n\cdot\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos\theta}$

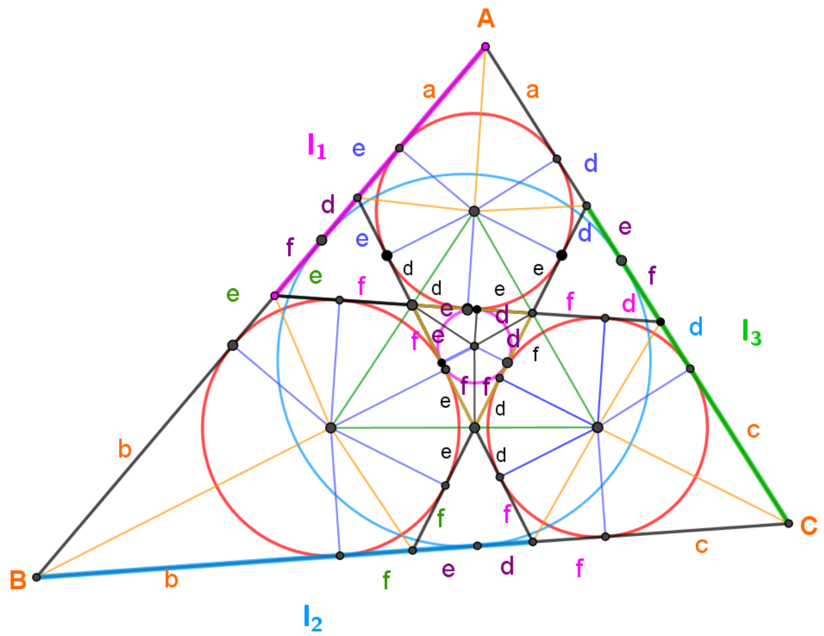
3. n 條截線將每邊所截成的線段比
$(\cos\theta-\cos 2\theta):(1+\cos 2\theta):(\cos\theta-\cos 2\theta)$



陸、討論

一、三角形如何作出截線位置

(一) 三角形的截線位置



觀察圖形知三邊長

$\overline{AB}=a+b+d+2e+f$，

$\overline{BC}=b+c+d+e+2f$，

$\overline{CA}=c+a+2d+e+f$

∴周長

$=2(a+b+c)+4(d+e+f)$

∵三角形的三條截線都必須分別將三角形的三個角截出等腰三角形

∴頂點 A 的截線位置離 A 的截邊長 $l_1=a+d+e+f$

頂點 B 的截線位置離 B 的截邊長 $l_2=b+d+e+f$

頂點 C 的截線位置離 C 的截邊長 $l_3=c+d+e+f$

∴周長 $=2(l_1+l_2+l_3)-2(d+e+f)$

∵ $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{d+e+f}{l_1}$，$\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{d+e+f}{l_2}$，$\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{d+e+f}{l_3}$，

∴截線段長 $=2(d+e+f)=2l_1\sin\dfrac{A}{2}=2l_2\sin\dfrac{B}{2}=2l_3\sin\dfrac{C}{2}$ [★三條截線段等長]

∴ $l_1=\dfrac{d+e+f}{\sin\dfrac{A}{2}}$，$l_2=\dfrac{d+e+f}{\sin\dfrac{B}{2}}$，$l_3=\dfrac{d+e+f}{\sin\dfrac{C}{2}}$

∴周長 $=2\left(\dfrac{d+e+f}{\sin\dfrac{A}{2}}+\dfrac{d+e+f}{\sin\dfrac{B}{2}}+\dfrac{d+e+f}{\sin\dfrac{C}{2}}\right)-2(d+e+f)$

∴半周長 $L=(d+e+f)\left(\dfrac{1}{\sin\dfrac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin\dfrac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin\dfrac{C}{2}}-1\right)$

若已知△三邊長及三內角，則可利用△的半周長 L，求得 $d+e+f$，進而求得 l_1,l_2,l_3

∴ $d+e+f=\dfrac{L}{\dfrac{1}{\sin\dfrac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin\dfrac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin\dfrac{C}{2}}-1}=\dfrac{L}{\csc\dfrac{A}{2}+\csc\dfrac{B}{2}+\csc\dfrac{C}{2}-1}$ 代回

$l_1=\dfrac{d+e+f}{\sin\dfrac{A}{2}}=\dfrac{L}{\sin\dfrac{A}{2}\left(\csc\dfrac{A}{2}+\csc\dfrac{B}{2}+\csc\dfrac{C}{2}-1\right)}$

同理，$l_2=\dfrac{L}{\sin\dfrac{B}{2}\left(\csc\dfrac{A}{2}+\csc\dfrac{B}{2}+\csc\dfrac{C}{2}-1\right)}$，$l_3=\dfrac{L}{\sin\dfrac{C}{2}\left(\csc\dfrac{A}{2}+\csc\dfrac{B}{2}+\csc\dfrac{C}{2}-1\right)}$。

∴三條截線段等長且位置唯一決定。

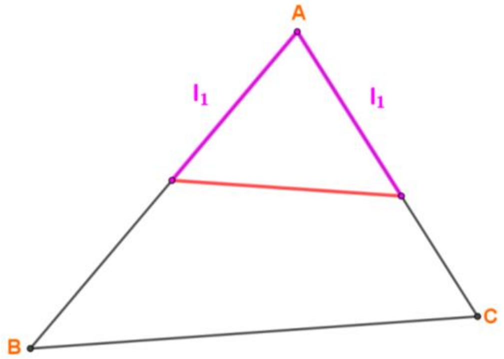
(二) 三角形由外往內作圖法

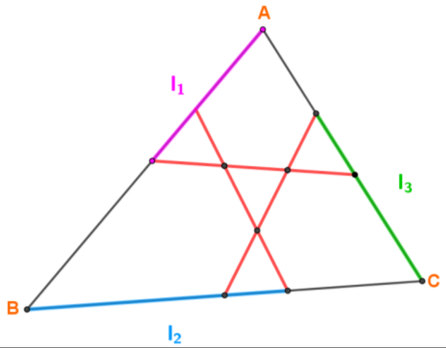
已知三角形，該如何作出符合算額問題的圖形呢？

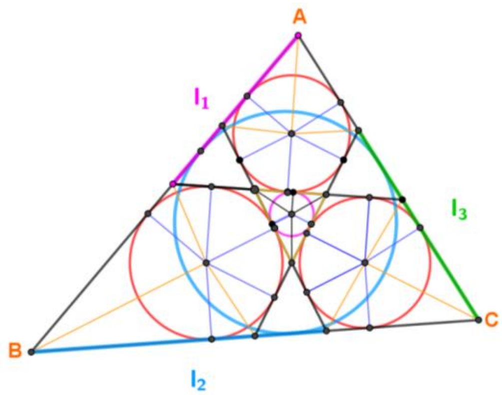
<table>
<tr>
<td>
◆步驟一：
先求出 ΔABC 的三內角及三邊長，
得出半周長 L，進而求得

$$l_1=\frac{L}{\sin\frac{A}{2}(\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}-1)},$$

$$l_2=\frac{L}{\sin\frac{B}{2}(\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}-1)},$$

$$l_3=\frac{L}{\sin\frac{C}{2}(\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}-1)}$$
</td>
<td>
◆步驟二：
在 $\angle A$ 的兩邊，距離 A 長度 l_1 處之兩點相連接，即為一條截線。


</td>
</tr>
<tr>
<td>
◆步驟三：
同理，在 $\angle B$ 的兩邊，距離 B 長度 l_2 處之兩點相連接，即為另一條截線。
在 $\angle C$ 的兩邊，距離 C 長度 l_3 處之兩點相連接，即為第三條截線。


</td>
<td>
◆步驟四：
作 ΔABC 的內切圓，即為全圓。
在截線多邊形分別作內切圓，
即得元圓、貞圓、利圓、亨圓。


</td>
</tr>
</table>

★三角形的**由外往內作圖法**可作出符合**算額問題**的圖形。

(三)三角形的三個截角面積

★三角形的三個截角面積

設 ΔABC 中，設 $s=d+e+f$ ，則

1. 三個截角皆為**等腰三角形，底邊長皆為** $2s$
2. 截角 A 、 B 、 C 的等腰**三角形**的面積分別為 $s^2\cdot\cot\frac{A}{2}$ 、 $s^2\cdot\cot\frac{B}{2}$ 、 $s^2\cdot\cot\frac{C}{2}$ 。

$\because$三個截角三角形的底皆為截線段等長 $=2(d+e+f)=2s$

又截角 A 的等腰三角形的高為 $s\cdot\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}=s\cdot\cot\frac{A}{2}$

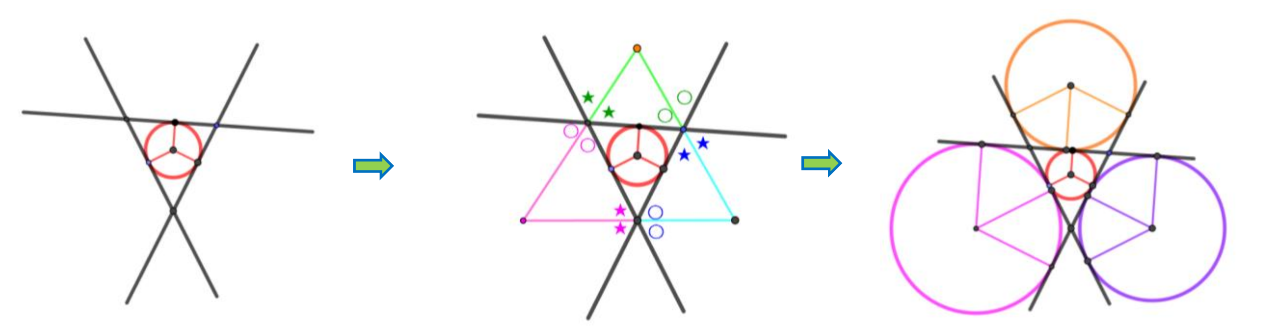
$\therefore$截角 A 的等腰**三角形**的面積為 $\frac{1}{2}\cdot(2s)(s\cdot\cot\frac{A}{2})=s^2\cdot\cot\frac{A}{2}$

同理 截角 B 的等腰**三角形**的面積為 $s^2\cdot\cot\frac{B}{2}$ ，截角 C 的等腰**三角形**的面積為 $s^2\cdot\cot\frac{C}{2}$

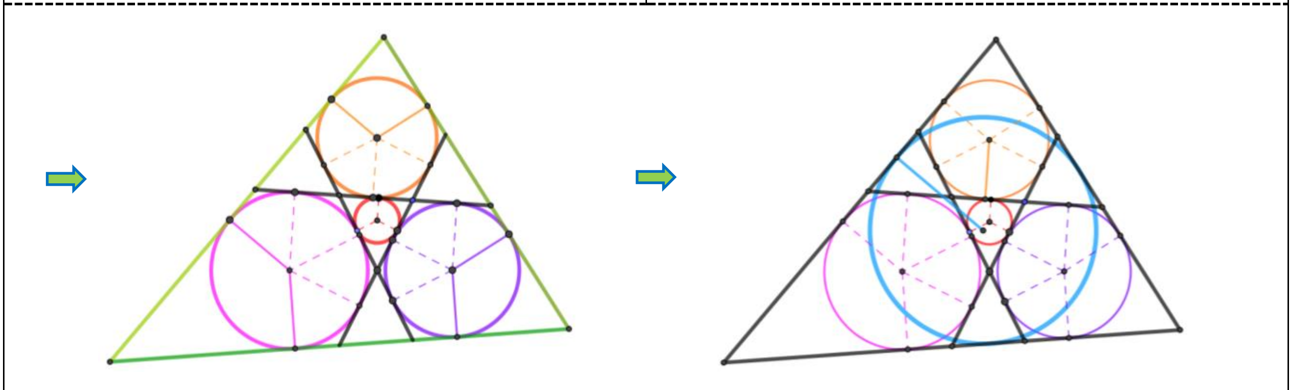
二、三角形的由內往外作圖法

若不知道三角形的三截線位置，該如何作出符合三角形算額問題的圖形呢？

◆步驟一：	◆步驟二：	◆步驟三：
先畫亨圓，再作出亨圓的三條切線，作為三截線，且三切線兩兩相交一點。	在三截線所圍三個外部區域，分別作內角角平分線，每個外部區域各有一個交點，即為元圓、貞圓、利圓的圓心。	從圓心往三截線分別作垂線，找出切點，便可做出三個外部區域的內切圓，即為元圓、貞圓、利圓。



◆步驟四：	◆步驟五：
將元圓、貞圓、利圓兩兩分別作外公切線，即可作出三角形的三邊。	作出三角形的內切圓，即為全圓。（★任意三角形皆可做出內切圓。）



★從三角形的由內往外作圖法得知，當內部的亨圓與三切線位置決定後，外圍的三角形圖形會唯一決定。而任意三角形皆可做出其內切圓（全圓），因此，全圓半徑與亨圓半徑、三截線的切線段長有關。

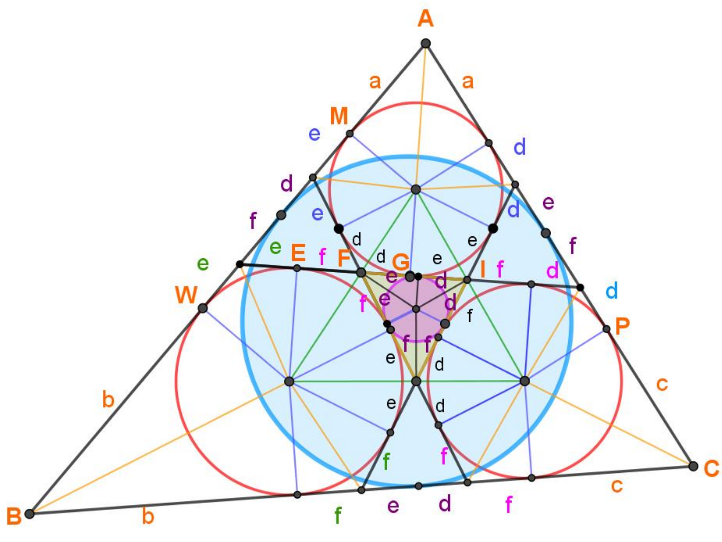
★三角形的算額問題，

藉由假設截線的「三個切線段長」

（即證明內容的 d, e, f ），

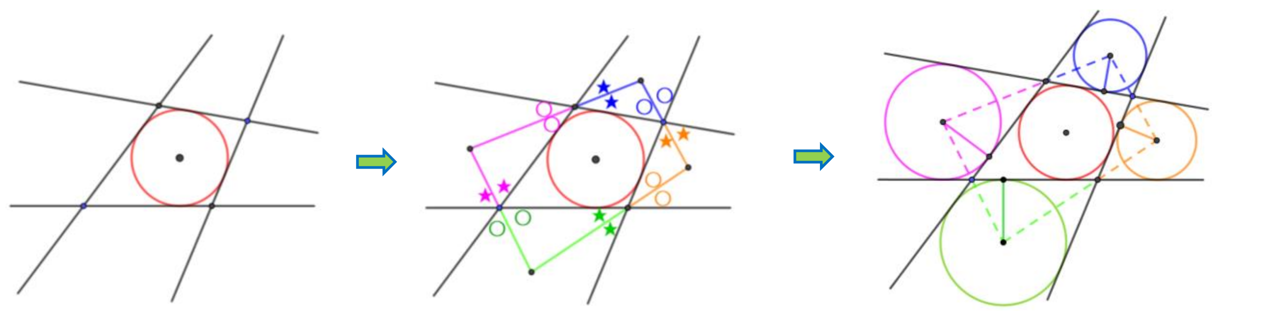
可表示出全圓半徑，

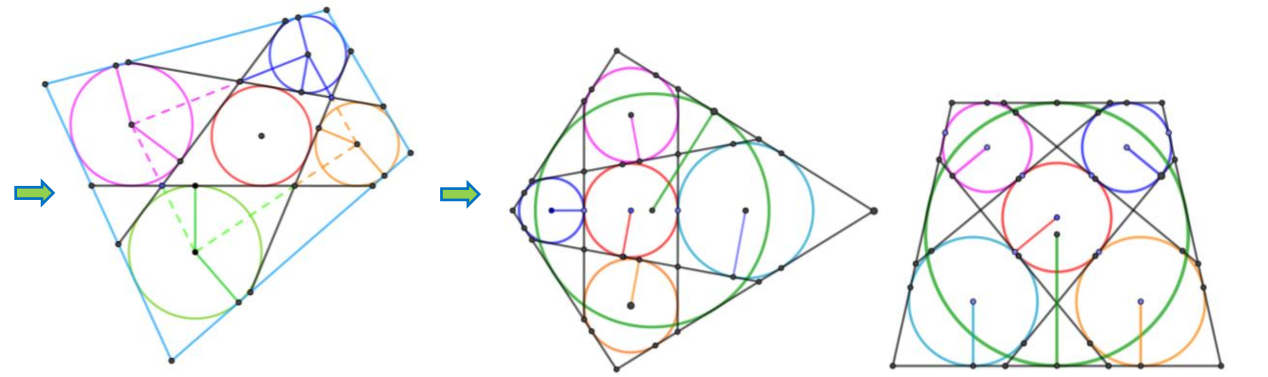
進而可證明此算額問題。



三、四邊形的由內往外作圖法

模仿三角形的由內往外作圖法，探討四邊形的算額問題是否存在？

<table>
<tr><td>◆步驟一：
先作中心的亨圓，再畫出亨圓的四條切線，作為四截線。</td><td>◆步驟二：
在四截線所圍外部區域，分別作內角角平分線，各有一個交點，即為外圍四個圓的圓心。</td><td>◆步驟三：
從圓心往截線作垂線，找出切點，便可做出外圍四個圓。</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>◆步驟四：
外圍四個圓，相鄰兩兩分別作外公切線，即可作出四邊形的四邊。</td><td>◆步驟五：
任意四邊形未必存在內切圓（全圓），必須加上「對邊和相等」的條件。
例如：箏形，對邊和相等的等腰梯形。</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

★從四邊形的由內往外作圖法得知，當內部的亨圓與四切線位置決定後，外圍的四邊形的圖形也會唯一決定。但是任意四邊形未必存在內切圓（全圓）。

因此，若四邊形存在內切圓（全圓）時，則全圓半徑除了與四截線的切線段長有關外，應該有其他影響全圓存在的因素或條件。

所以，四邊形的算額問題無法為一個定值。

◆若四邊形存在內切圓（全圓）時，則必須有「對邊和相等」的條件，

例如：箏形、對邊和相等的等腰梯形。

所以，最後會針對箏形、對邊和相等的等腰梯形的算額問題，做進一步的討論。

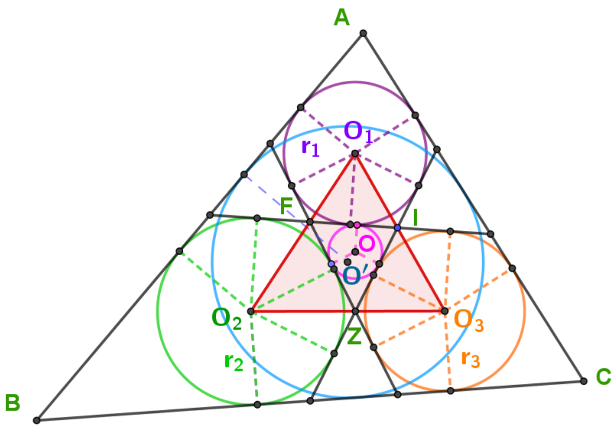
四、元貞利三角形的心

(一) 定義

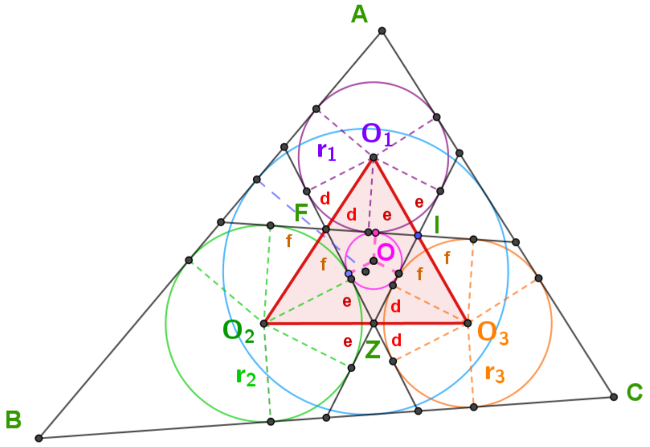
1. 元貞利三角形：

將 ΔABC 的元圓、貞圓、利圓的圓心兩兩相連得 $\Delta O_1O_2O_3$ ，稱為「元貞利三角形」。

2. 設 ΔABC 的亨圓圓心 O ，全圓圓心 O' 。



(二) 元貞利三角形與亨圓圓心的關係



如圖，在 $\Delta O_1O_2O_3$ 中，

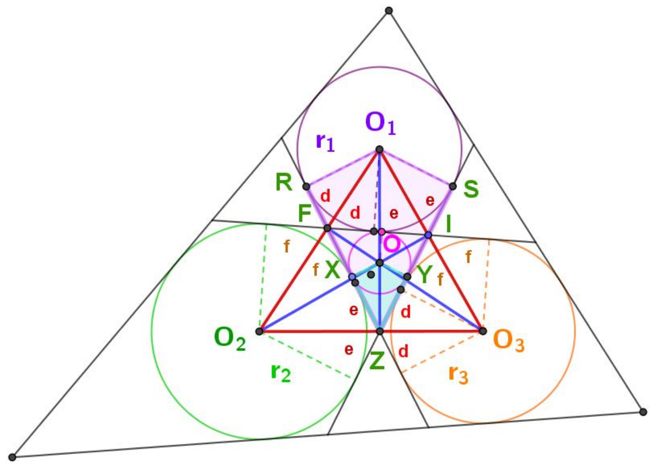
$\overline{O_1F}=\sqrt{r_1^2+d^2}$, $\overline{O_1I}=\sqrt{r_1^2+e^2}$

$\overline{O_2F}=\sqrt{r_2^2+f^2}$, $\overline{O_2Z}=\sqrt{r_2^2+e^2}$

$\overline{O_3Z}=\sqrt{r_3^2+d^2}$, $\overline{O_3I}=\sqrt{r_3^2+f^2}$

★元貞利三角形的三線共點

O_1,O,Z 三點共線， O_2,O,I 三點共線， O_3,O,F 三點共線。 $\overline{O_1Z}$, $\overline{O_2I}$, $\overline{O_3F}$ 三線共點於 O 點



[證明]

$\because \overline{RZ}$, $\overline{SZ}$ 為圓 O_1 的切線

$\therefore \Delta O_1RZ\cong\Delta O_1SZ$ (RHS) $\therefore \angle O_1ZR=\angle O_1ZS$

又 $\overline{XZ}$, $\overline{YZ}$ 為圓 O 的切線

$\therefore \Delta OXZ\cong\Delta OYZ$ (RHS) $\therefore \angle OZX=\angle OZY$

又 R,X,Z 共線， S,Y,Z 共線

$\therefore O_1,O,Z$ 三點共線

同理 O_2,O,I 三點共線， O_3,O,F 三點共線。

$\therefore \overline{O_1Z}$, $\overline{O_2I}$, $\overline{O_3F}$ 三線共點於 O 點。

★元貞利三角形的垂心

元貞利三角形的垂心為亨圓圓心 O

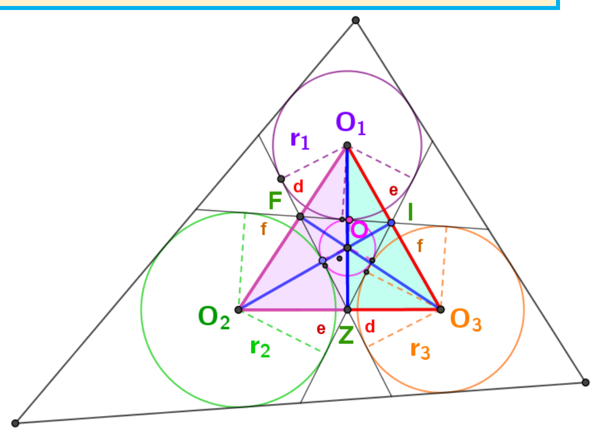
[證明] 在 ΔO_1O_2Z 中

$$\left(\overline{O_1F}+\overline{FO_2}\right)^2-\left(\overline{O_2Z}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{r_1^2+d^2}+\sqrt{r_2^2+f^2}\right)^2-\left(\sqrt{r_2^2+e^2}\right)^2$$

$$=r_1^2+d^2+r_2^2+f^2+2\sqrt{\left(r_1^2+d^2\right)\left(r_2^2+f^2\right)}-\left(r_2^2+e^2\right)$$

$$=r_1^2+d^2+f^2-e^2+2\sqrt{\left(\frac{des}{f}+d^2\right)\left(\frac{efs}{d}+f^2\right)}$$



$$=r_1^2+d^2+f^2-e^2+2\sqrt{\frac{\left(des+d^2f\right)\left(efs+df^2\right)}{df}}$$

$$=r_1^2+d^2+f^2-e^2+2\sqrt{\left(es+df\right)\left(es+df\right)}=r_1^2+d^2+f^2-e^2+2\left(es+df\right)$$

$$=r_1^2+d^2+f^2-e^2+2\left(de+e^2+ef+df\right)=r_1^2+d^2+f^2+e^2+2\left(de+ef+df\right)$$

$\therefore \Delta O_1O_2Z$ 為直角三角形且 $\angle O_1ZO_2=90°$

在 ΔO_1O_3Z 中

$$\left(\overline{O_1I}+\overline{IO_3}\right)^2-\left(\overline{O_3Z}\right)^2=\left(\sqrt{r_1^2+e^2}+\sqrt{r_3^2+f^2}\right)^2-\left(\sqrt{r_3^2+d^2}\right)^2$$

$$=r_1^2+e^2+r_3^2+f^2+2\sqrt{\left(r_1^2+e^2\right)\left(r_3^2+f^2\right)}-\left(r_3^2+d^2\right)=r_1^2+e^2+f^2-d^2+2\sqrt{\left(\frac{des}{f}+e^2\right)\left(\frac{dfs}{e}+f^2\right)}$$

$$=r_1^2+e^2+f^2-d^2+2\sqrt{\frac{\left(des+e^2f\right)\left(dfs+ef^2\right)}{ef}}=r_1^2+e^2+f^2-d^2+2\sqrt{\left(ds+ef\right)\left(ds+ef\right)}$$

$$=r_1^2+e^2+f^2-d^2+2\left(ds+ef\right)=r_1^2+e^2+f^2-d^2+2\left(d^2+de+df+ef\right)$$

$$=r_1^2+d^2+f^2+e^2+2\left(de+ef+df\right)$$

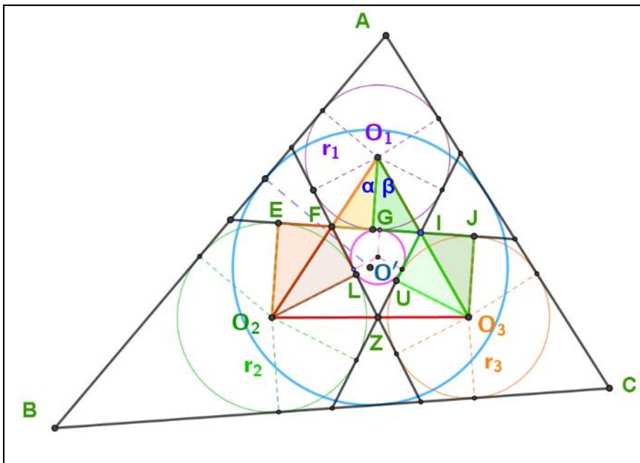
$\therefore \Delta O_1O_3Z$ 為直角三角形且 $\angle O_1ZO_3=90°$

又 O_1,Z,O_3 三點共線 $\therefore \overline{O_1Z}$ 為 $\Delta O_1O_2O_3$ 的高

同理 $\overline{O_2I}$, $\overline{O_3F}$ 亦為 $\Delta O_1O_2O_3$ 的高

又 $\overline{O_1Z}$, $\overline{O_2I}$, $\overline{O_3F}$ 三線共點於 O 點 $\therefore O$ 為 $\Delta O_1O_2O_3$ 的垂心。

(三) 元貞利三角形與全圓圓心的關係

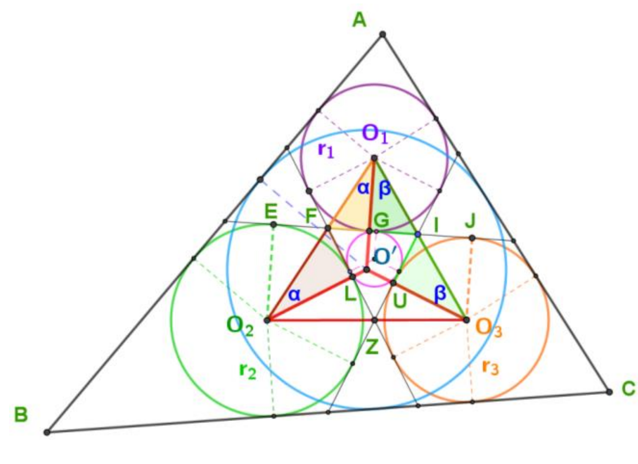


設 $\angle FO_1G=\alpha$, $\angle IO_1G=\beta$

$\because \Delta FO_1G \sim \Delta FO_2L$ (AA)

$\therefore \angle FO_2L=\alpha$

同理 $\angle IO_3U=\beta$



又 O_1,G,O' 三點共線，O_2,L,O' 三點共線

O_3,U,O' 三點共線

$\therefore \Delta O_1O'O_2$ 與 $\Delta O_1O'O_3$ 為等腰三角形

$\therefore \overline{O'O_1}=\overline{O'O_2}=\overline{O'O_3}$

$\therefore O'$ 為 $\Delta O_1O_2O_3$ 的外心。

★元貞利三角形的外心為全圓圓心 O'

五、三角形的截線多邊形內切圓面積和的極值

設 ΔABC 中，全圓半徑 R，亨圓半徑 r、元圓半徑 r_1、貞圓半徑 r_2、利圓半徑 r_3，
已知 $r+r_1+r_2+r_3=2R$，試求**亨圓、元圓、貞圓、利圓面積和**的極值與**全圓面積**的關係？

[證明] $\because r+r_1+r_2+r_3=2R$ (定值)

又 $r_1=\sqrt{\dfrac{des}{f}}$，$r_2=\sqrt{\dfrac{efs}{d}}$，$r_3=\sqrt{\dfrac{dfs}{e}}$，$r=\sqrt{\dfrac{def}{s}}$，其中 $s=d+e+f$

$\therefore r_1^2r_2^2r_3^2=\dfrac{des}{f}\cdot\dfrac{efs}{d}\cdot\dfrac{dfs}{e}=s^3def=s^4r^2$

由算幾不等式

$s=d+e+f\ge 3\sqrt[3]{def}$，$s^3\ge 27def$，$s^2\ge 27\dfrac{def}{s}$，$s^2\ge 27r^2$

等號成立時 $d=e=f$

$\because$ 亨圓、元圓、貞圓、利圓的**面積和** $=\pi r^2+\pi r_1^2+\pi r_2^2+\pi r_3^2=\pi\left(r^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2\right)$

由算幾不等式

$\therefore r_1^2+r_2^2+r_3^2+r^2\ge 3\sqrt[3]{r_1^2r_2^2r_3^2}+r^2=3\sqrt[3]{s^4r^2}+r^2\ge 3\sqrt[3]{(27^2r^4)r^2}+r^2$

$=3\sqrt[3]{3^6r^6}+r^2=3(9r^2)+r^2=28r^2$

等號成立時 $r_1^2=r_2^2=r_3^2$，

即 $r_1=r_2=r_3$，此時 $d=e=f$

$\therefore r_1^2+r_2^2+r_3^2=27r^2\quad \therefore r_1^2=r_2^2=r_3^2=9r^2\quad \therefore r_1=r_2=r_3=3r$

$\therefore r+r_1+r_2+r_3=10r=2R\quad \therefore R=5r\quad \therefore R^2=25r^2\ \therefore 28r^2=\dfrac{28}{25}R^2$

$\therefore \pi\left(r^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2\right)\ge 28\pi r^2=\dfrac{28}{25}\pi R^2$

$\therefore$ **亨圓、元圓、貞圓、利圓面積和的最小值為全圓面積的 $\dfrac{28}{25}$ 倍，**

此時 $r_1=r_2=r_3=3r$ 且 $R=5r$。

即為正三角形時，亨圓、元圓、貞圓、利圓的面積和有最小值。

六、三角形的截線多邊形內切圓周長和的極值

設 ΔABC 中，全圓半徑 R，亨圓半徑 r、元圓半徑 r_1、貞圓半徑 r_2、利圓半徑 r_3，
已知 $r+r_1+r_2+r_3=2R$，試求**亨圓、元圓、貞圓、利圓周長和**與**全圓周長**的關係？

[證明] $\because r+r_1+r_2+r_3=2R$ (定值)

又亨圓、元圓、貞圓、利圓的**周長和** $=2\pi r+2\pi r_1+2\pi r_2+2\pi r_3=2\pi\left(r+r_1+r_2+r_3\right)$

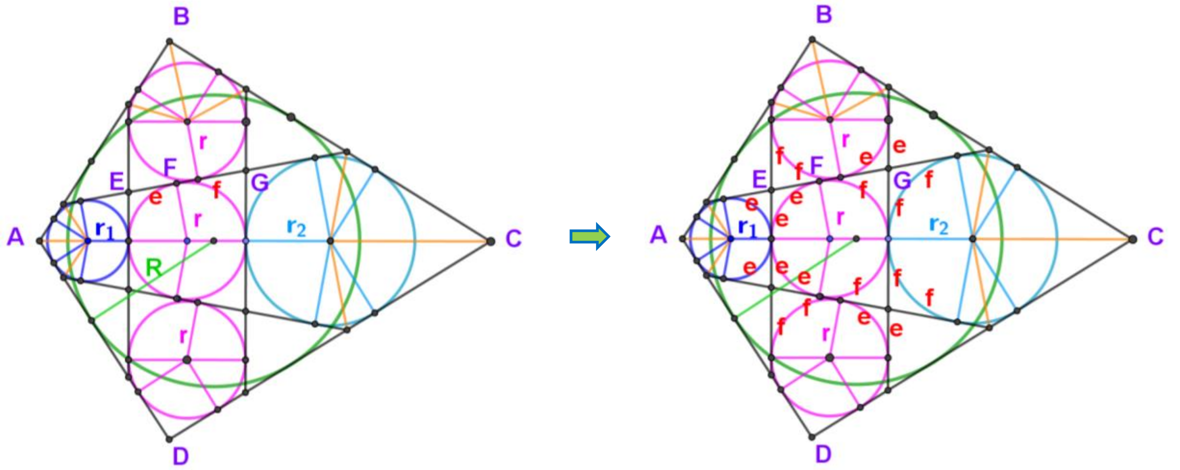
$\therefore 2\pi\left(r+r_1+r_2+r_3\right)=2\pi(2R)=2(2\pi R)$

$\therefore$ **亨圓、元圓、貞圓、利圓的周長和必為全圓周長的 2 倍，**

七、箏形的算額問題

(一)截線多邊形內切圓的半徑關係

1. 如圖，設箏形中間三個內切圓（包含亨圓）半徑 r ，$\angle A$ 側的內切圓半徑 r_1 ，$\angle C$ 側的內切圓半徑 r_2 ，箏形的內切圓（全圓）半徑 R 。
2. 規定 $\overline{EF}=e\ ,\overline{FG}=f$ ，利用「切線的性質」與「性質二」，可推得下圖結果



★以e, f 表示 r，r_1，r_2

設**箏形**中間三個內切圓（含亨圓）半徑 r ，$\angle A$ 側內切圓半徑 r_1 ，$\angle C$ 側內切圓半徑 r_2 ，

則 $r=\sqrt{ef}$ ，$r_1=\dfrac{e^2}{r}=e\sqrt{\dfrac{e}{f}}$ ，$r_2=\dfrac{f^2}{r}=f\sqrt{\dfrac{f}{e}}$

[證明]由$\boxed{\text{性質一}}$知 $r\cdot r=e\cdot f$,即 $r=\sqrt{ef}$

$$r\cdot r_1=e\cdot e\ ,\text{即 } r_1=\frac{e^2}{r}=e\sqrt{\frac{e}{f}}\text{ ，且 } r\cdot r_2=f\cdot f\ ,\text{即 } r_2=\frac{f^2}{r}=f\sqrt{\frac{f}{e}}$$

★以e, f 表示 截線多邊形內切圓半徑和

設**箏形**中間三個內切圓半徑 r ，兩側內切圓半徑 r_1 、 r_2 ，則 $3r+r_1+r_2=\dfrac{3ef+e^2+f^2}{\sqrt{ef}}$ 。

[證明]

$$3r+r_1+r_2\ =3r+\frac{e^2+f^2}{r}=\frac{3ef+e^2+f^2}{\sqrt{ef}}$$

(二)箏形內切圓（全圓）的半徑關係

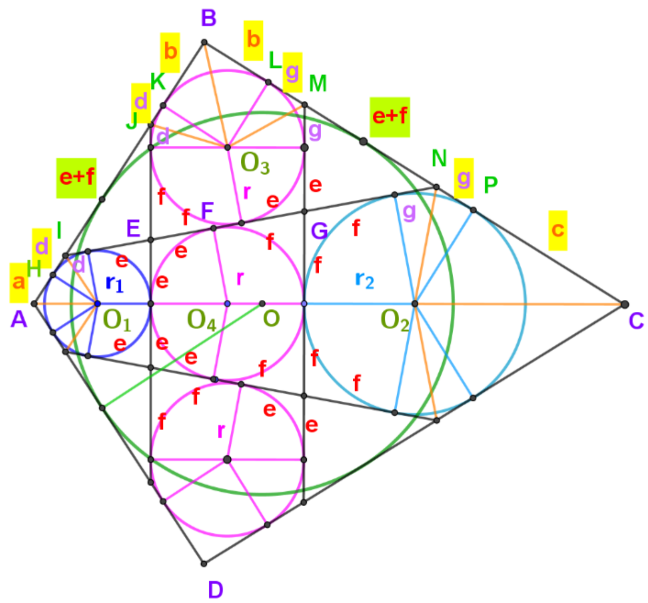
1. 規定 $\overline{EF}=e\ ,\overline{FG}=f$ ，

   設 $\overline{AH}=a,\overline{BK}=b,\overline{CP}=c,$ ，

   $\overline{HI}=d,\overline{PN}=g$

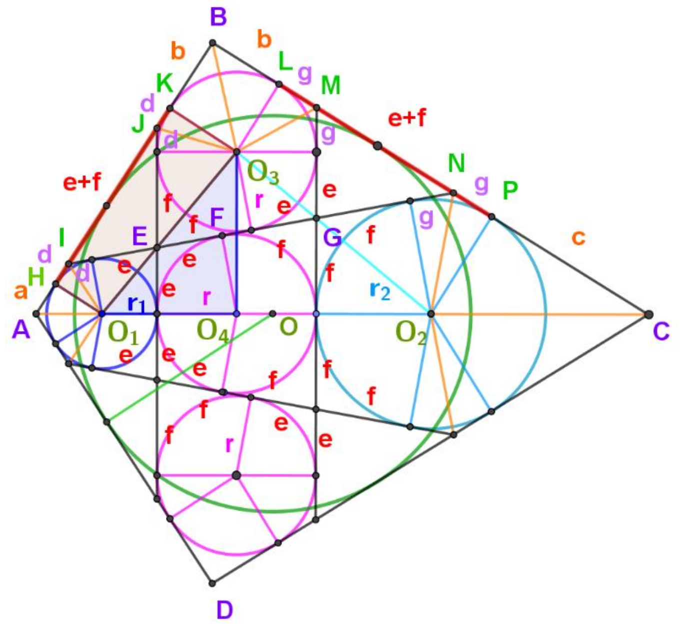
   利用「切線的性質」與「性質五」，

   可推得右圖結果



★以e, f表示外公切線長

> 箏形的左外公切線長 $L_1=\sqrt{(e+f)^2+4e^2}=2d+e+f$。
>
> 箏形的右外公切線長 $L_2=\sqrt{(e+f)^2+4f^2}=2g+e+f$。



[證明]

在 $\Delta O_1O_3O_4$ 中

$\because \overline{O_3O_4}=e+f$，$\overline{O_1O_4}=r+r_1$

$\therefore$連心線長 $\overline{O_1O_3}=\sqrt{(e+f)^2+(r+r_1)^2}$

$\therefore$左外公切線長 $\overline{HK}$

$=\sqrt{\left[(e+f)^2+(r+r_1)^2\right]-(r-r_1)^2}$

$=\sqrt{(e+f)^2+4r\cdot r_1}=\sqrt{(e+f)^2+4e^2}$

(看圖)$=2d+e+f$ (假設)$=L_1$

同理

右外公切線長 $\overline{LP}$

$=\sqrt{(e+f)^2+4f^2}=2g+e+f=L_2$(假設)

★以e, f表示 a,c

> $$a=\frac{4e^3\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]}{\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]^2 f-4e^3}\text{，}c=\frac{4f^3\left[\sqrt{(e+f)^2+4f^2}+(e+f)\right]}{\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]^2 e-4f^3}$$

[證明]在 ΔAJQ 中，

$\because \overline{AJ}=\overline{AQ}=a+d+e+f$，$\overline{JQ}=2(d+e+f)$

$\therefore$半周長 $S=a+2(d+e+f)$

由內切圓面積公式與海龍公式

$r_1\cdot S=\sqrt{S\cdot a\cdot(d+e+f)^2}$

$r_1^2\cdot S^2=S\cdot a\cdot(d+e+f)^2$

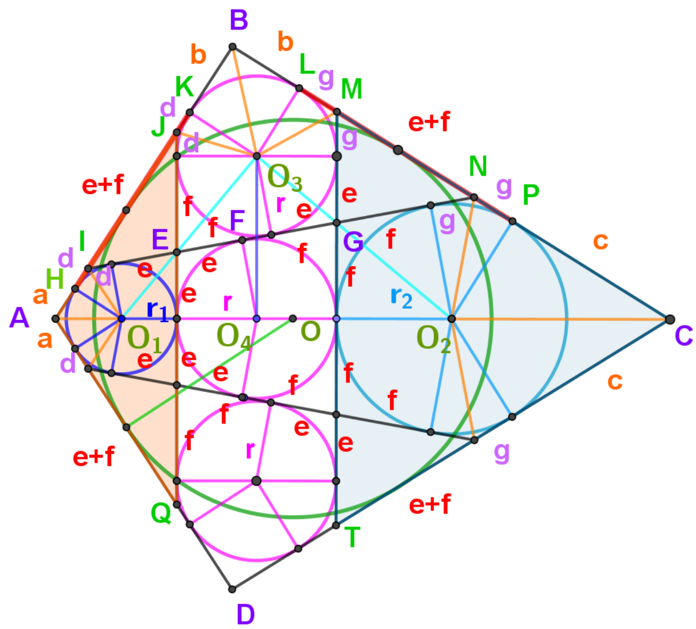
$\left(\dfrac{e^3}{f}\right)\cdot S=a\cdot(d+e+f)^2$

$\left(\dfrac{e^3}{f}\right)\cdot\left(a+2(d+e+f)\right)=a\cdot(d+e+f)^2$

$\therefore a\cdot\left[(d+e+f)^2-\left(\dfrac{e^3}{f}\right)\right]=2\left(\dfrac{e^3}{f}\right)(d+e+f)$

$\therefore a=\dfrac{2e^3(d+e+f)}{(d+e+f)^2 f-e^3}$

又 $d+e+f=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]$代入



$$\therefore a=\frac{e^3\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]}{\frac{1}{4}\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]^2 f-e^3}=\frac{4e^3\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]}{\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]^2 f-4e^3}$$

同理 在ΔCMT中，$c=\dfrac{2f^3(g+e+f)}{(g+e+f)^2e-f^3}$，又$g+e+f=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{(e+f)^2+4f^2}+(e+f)\right]$代入

$$\therefore c=\frac{4f^3\left[\sqrt{(e+f)^2+4f^2}+(e+f)\right]}{\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]^2 e-4f^3}$$

★以e, f表示 b

$$\boxed{b=\frac{2ef\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+\sqrt{(e+f)^2+4f^2}+2(e+f)\right]}{\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]\left[\sqrt{(e+f)^2+4f^2}+(e+f)\right]-4ef}}$$

[證明]

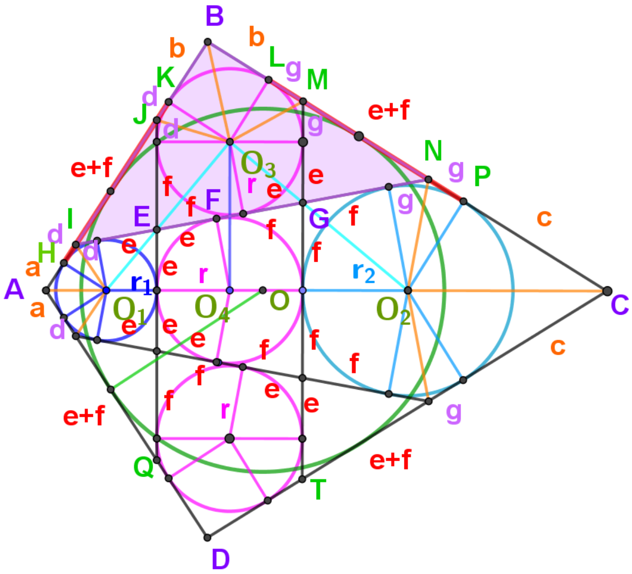
在ΔBIN中，

$\overline{BI}=b+(d+e+f)$,

$\overline{BN}=b+(g+e+f)$,

$\overline{IN}=d+g+2(e+f)=(d+e+f)+(g+e+f)$

$\therefore$半周長$S=b+(d+e+f)+(g+e+f)$



由內切圓面積公式與海龍公式

$r\cdot S=\sqrt{S\cdot b\cdot(d+e+f)(g+e+f)}$

$r^2\cdot S^2=S\cdot b\cdot(d+e+f)(g+e+f)$

$r^2\cdot S=b\cdot(d+e+f)(g+e+f)$

$\therefore ef\cdot[b+(d+e+f)+(g+e+f)]=b\cdot(d+e+f)(g+e+f)$

$\therefore ef\cdot[(d+e+f)+(g+e+f)]=b\cdot[(d+e+f)(g+e+f)-ef]$

$$\therefore b=\frac{ef\left[(d+e+f)+(g+e+f)\right]}{(d+e+f)(g+e+f)-ef}$$

又$d+e+f=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]$，$g+e+f=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{(e+f)^2+4f^2}+(e+f)\right]$代入

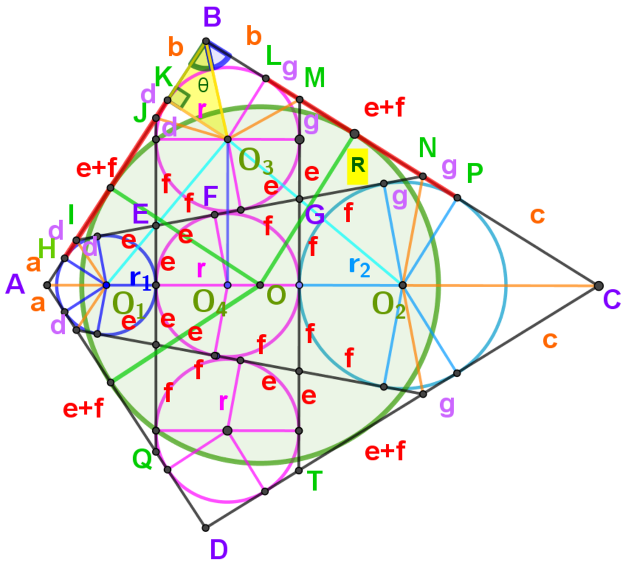
$$\therefore b=\frac{ef\left[\frac{1}{2}\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]+\frac{1}{2}\left[\sqrt{(e+f)^2+4f^2}+(e+f)\right]\right]}{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]\frac{1}{2}\left[\sqrt{(e+f)^2+4f^2}+(e+f)\right]-ef}$$

$$=\frac{2ef\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+\sqrt{(e+f)^2+4f^2}+2(e+f)\right]}{\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]\left[\sqrt{(e+f)^2+4f^2}+(e+f)\right]-4ef}$$

★ 以e, f表示 R

> 設箏形的內切圓（全圓）半徑R，則$R=\left(\dfrac{(a+b+L_1)(b+c+L_2)}{(a+b+L_1)+(b+c+L_2)}\right)\left(\dfrac{2b\sqrt{ef}}{b^2+ef}\right)$
>
> 其中$L_1=\sqrt{(e+f)^2+4e^2}$，$L_2=\sqrt{(e+f)^2+4f^2}$
>
> $a=\dfrac{4e^3(L_1+e+f)}{(L_1+e+f)^2f-4e^3}$，$b=\dfrac{2ef\left[L_1+L_2+2(e+f)\right]}{(L_1+e+f)(L_2+e+f)-4ef}$，$c=\dfrac{4f^3(L_2+e+f)}{(L_2+e+f)^2e-4f^3}$

[證明]



$$箏形面積=(a+b+L_1)(b+c+L_2)\sin 2\theta$$

$$=(a+b+L_1)(b+c+L_2)2\sin\theta\cos\theta$$

$$=(a+b+L_1)(b+c+L_2)2\left(\frac{r}{\sqrt{b^2+r^2}}\right)\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+r^2}}\right)$$

$$=(a+b+L_1)(b+c+L_2)\left(\frac{2br}{b^2+r^2}\right)$$

$$=(a+b+L_1)(b+c+L_2)\left(\frac{2b\sqrt{ef}}{b^2+ef}\right)$$

$$又箏形面積=\left[(a+b+L_1)+(b+c+L_2)\right]R$$

$$\therefore (a+b+L_1)(b+c+L_2)\left(\frac{2b\sqrt{ef}}{b^2+ef}\right)$$

$$=\left[(a+b+L_1)+(b+c+L_2)\right]R$$

$\therefore R=\left(\dfrac{(a+b+L_1)(b+c+L_2)}{(a+b+L_1)+(b+c+L_2)}\right)\left(\dfrac{2b\sqrt{ef}}{b^2+ef}\right)$，其中$L_1=\sqrt{(e+f)^2+4e^2}$，$L_2=\sqrt{(e+f)^2+4f^2}$

$$a=\frac{4e^3\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]}{\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]^2f-4e^3}=\frac{4e^3(L_1+e+f)}{(L_1+e+f)^2f-4e^3},$$

$$c=\frac{4f^3\left[\sqrt{(e+f)^2+4f^2}+(e+f)\right]}{\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]^2e-4f^3}=\frac{4f^3(L_2+e+f)}{(L_2+e+f)^2e-4f^3}$$

$$b=\frac{2ef\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+\sqrt{(e+f)^2+4f^2}+2(e+f)\right]}{\left[\sqrt{(e+f)^2+4e^2}+(e+f)\right]\left[\sqrt{(e+f)^2+4f^2}+(e+f)\right]-4ef}=\frac{2ef\left[L_1+L_2+2(e+f)\right]}{(L_1+e+f)(L_2+e+f)-4ef}$$

★箏形的算額問題

設**箏形**的內切圓（全圓）半徑R，
中間三個內切圓（含亭圓）半徑r，
$\angle A$側內切圓半徑r_1，$\angle C$側內切圓半徑r_2，
規定$\overline{EF}=e$, $\overline{FG}=f$，

則$r=\sqrt{ef}$，$r_1=\dfrac{e^2}{r}=e\sqrt{\dfrac{e}{f}}$，$r_2=\dfrac{f^2}{r}=f\sqrt{\dfrac{f}{e}}$

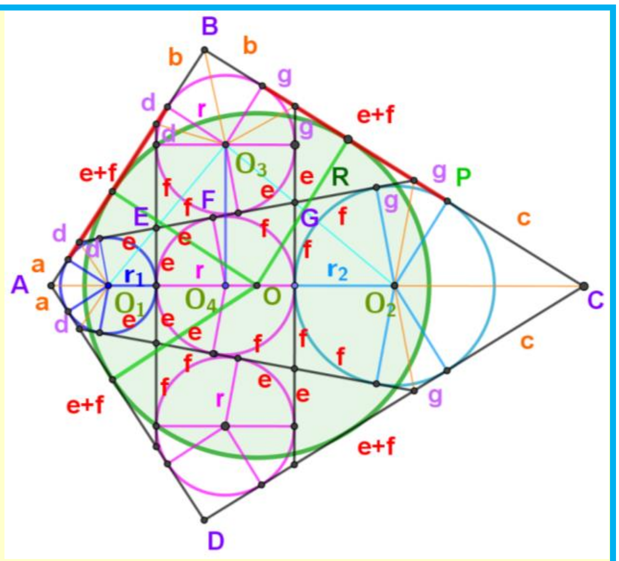
$$3r+r_1+r_2=\frac{3ef+e^2+f^2}{\sqrt{ef}}$$

$$R=\left(\frac{(a+b+L_1)(b+c+L_2)}{(a+b+L_1)+(b+c+L_2)}\right)\left(\frac{2b\sqrt{ef}}{b^2+ef}\right)$$

其中

$L_1=\sqrt{(e+f)^2+4e^2}$，$L_2=\sqrt{(e+f)^2+4f^2}$

$a=\dfrac{4e^3(L_1+e+f)}{(L_1+e+f)^2f-4e^3}$，$b=\dfrac{2ef\left[L_1+L_2+2(e+f)\right]}{(L_1+e+f)(L_2+e+f)-4ef}$，$c=\dfrac{4f^3(L_2+e+f)}{(L_2+e+f)^2e-4f^3}$



2. **檢驗箏形的公式是否合理？**

若箏形的公式中，取$e=f$時，則箏形變成**正方形**。

$$\therefore 3r+r_1+r_2=\frac{3ef+e^2+f^2}{\sqrt{ef}}=\frac{5e^2}{e}=5e$$

$L_1=\sqrt{(e+f)^2+4e^2}=\sqrt{8e^2}=2\sqrt{2}e$，$L_2=\sqrt{(e+f)^2+4f^2}=\sqrt{8e^2}=2\sqrt{2}e$

$$a=\frac{4e^3(L_1+e+f)}{(L_1+e+f)^2f-4e^3}=\frac{4e^3\left(2\sqrt{2}e+e+e\right)}{\left(2\sqrt{2}e+e+e\right)^2e-4e^3}=e\text{，}$$

$$b=\frac{2ef\left[L_1+L_2+2(e+f)\right]}{(L_1+e+f)(L_2+e+f)-4ef}=\frac{2ee\left[2\sqrt{2}e+2\sqrt{2}e+2(e+e)\right]}{\left(2\sqrt{2}e+e+f\right)\left(2\sqrt{2}e+e+e\right)-4ee}=e\text{，}$$

$$c=\frac{4f^3(L_2+e+f)}{(L_2+e+f)^2e-4f^3}=\frac{4e^3\left(2\sqrt{2}e+e+e\right)}{\left(2\sqrt{2}e+e+e\right)^2e-4e^3}=e$$

$$\therefore R=\left(\frac{(a+b+L_1)(b+c+L_2)}{(a+b+L_1)+(b+c+L_2)}\right)\left(\frac{2b\sqrt{ef}}{b^2+ef}\right)=\left(\frac{\left(e+e+2\sqrt{2}e\right)\left(e+e+2\sqrt{2}e\right)}{\left(e+e+2\sqrt{2}e\right)+\left(e+e+2\sqrt{2}e\right)}\right)\left(\frac{2e\sqrt{ee}}{e^2+ee}\right)=\left(\sqrt{2}+1\right)e$$

$$\therefore \frac{3r+r_1+r_2}{R}=\frac{5e}{(\sqrt{2}+1)e}=5\left(\sqrt{2}-1\right)$$

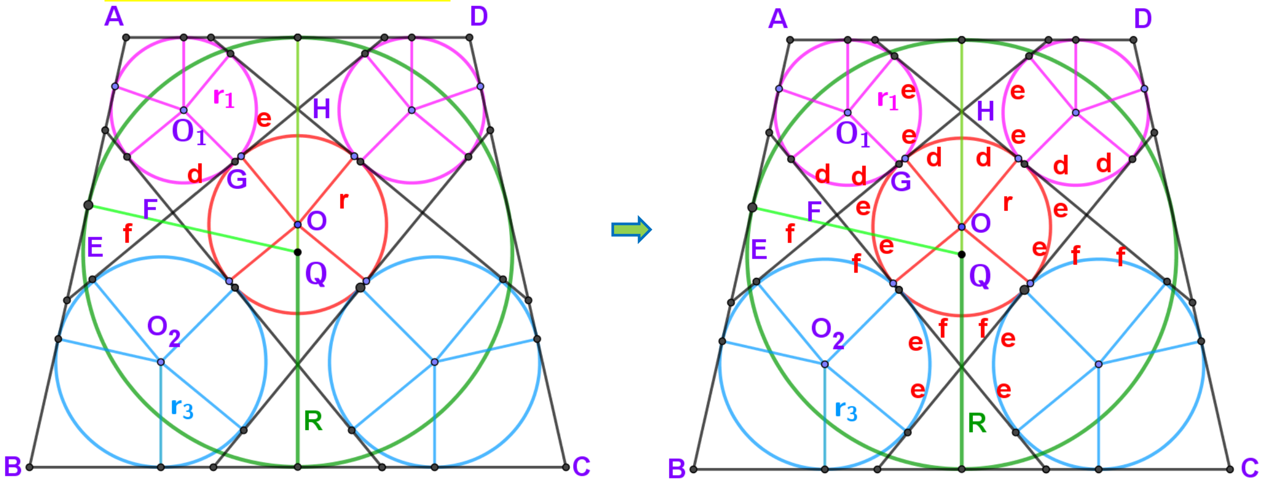
★與正方形算額問題公式推導結果相同！

★箏形的算額問題，藉由假設截線的「**二個切線段長**」（即證明內容的e, f），
可表示出**截線多邊形內切圓半徑與全圓半徑**間的關係。

八、對邊和相等的等腰梯形的算額問題

(一)截線多邊形內切圓的半徑關係

1. 如圖，設**對邊和相等的等腰梯形**中間內切圓（亨圓）半徑 r，上底兩端的內切圓半徑 r_1，下底兩端的內切圓半徑 r_2，等腰梯形的內切圓（全圓）半徑 R。
2. 規定 $\overline{FG}=d$,$\overline{GH}=e$,$\overline{EF}=f$ ，利用「切線的性質」與「性質二」，可推得下圖結果



★以 d,e,f 表示 r_1，r_2

> 設**等腰梯形**上底兩端的內切圓半徑 r_1，下底兩端的內切圓半徑 r_2，則 $r_1=\dfrac{de}{r}$，$r_2=\dfrac{ef}{r}$。

[證明]由$\boxed{\text{性質一}}$知 $r\cdot r_1=d\cdot e$,即 $r_1=\dfrac{de}{r}$，$r\cdot r_2=e\cdot f$,即 $r_2=\dfrac{ef}{r}$

★以 d,e,f 表示 r

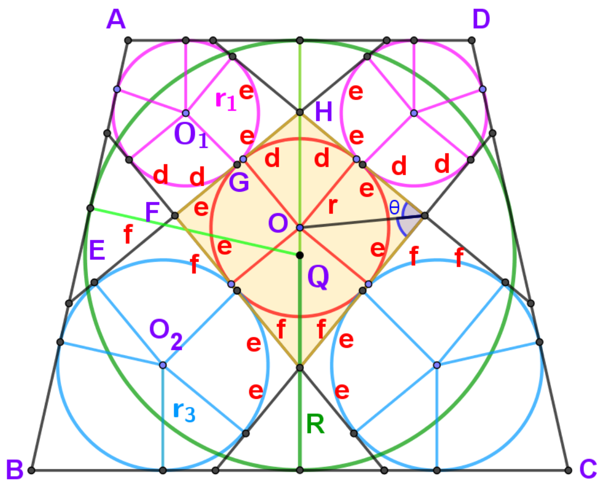
> 設**等腰梯形**中間內切圓（亨圓）半徑 r，則 $r=\sqrt{\dfrac{e\left(de+ef+2df\right)}{d+2e+f}}$。

[證明]中間箏形面積 $=(d+e)(e+f)\sin 2\theta$

$$=(d+e)(e+f)2\sin\theta\cos\theta$$

$$=(d+e)(e+f)2\left(\frac{r}{\sqrt{r^2+e^2}}\right)\left(\frac{e}{\sqrt{r^2+e^2}}\right)$$

$$=(d+e)(e+f)\left(\frac{2re}{r^2+e^2}\right)$$



又中間箏形面積 $=r\cdot(d+2e+f)$

$$\therefore r\cdot(d+2e+f)=(d+e)(e+f)\left(\frac{2re}{r^2+e^2}\right)$$

$$\therefore r^2+e^2=\frac{2e(d+e)(e+f)}{d+2e+f}$$

$$\therefore r^2=\frac{2e(d+e)(e+f)}{d+2e+f}-e^2=\frac{2e(d+e)(e+f)-e^2(d+2e+f)}{d+2e+f}=\frac{e(de+ef+2df)}{d+2e+f}$$

$$\therefore r=\sqrt{\frac{e(de+ef+2df)}{d+2e+f}}$$

★以d, e, f表示截線多邊形內切圓半徑和

設**等腰梯形**中間內切圓(亭圓)半徑r，上底兩端內切圓半徑r_1，下底兩端內切圓半徑r_2，

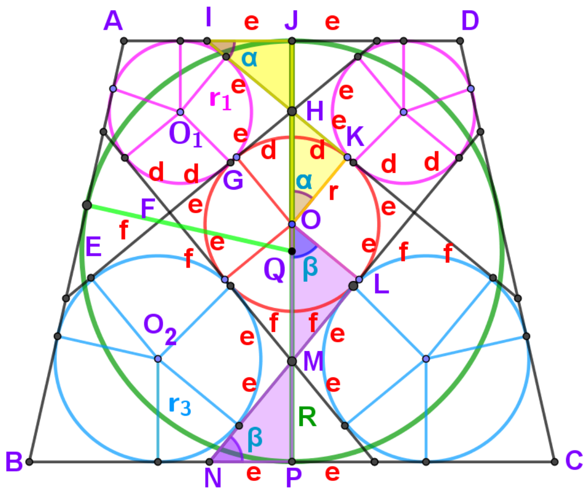
則$2r_1+2r_2+r=2\left(\dfrac{de}{r}+\dfrac{ef}{r}\right)+r$，其中$r=\sqrt{\dfrac{e(de+ef+2df)}{d+2e+f}}$

[證明] $2r_1+2r_2+r=2\left(\dfrac{de}{r}+\dfrac{ef}{r}\right)+r$

(二) 等腰梯形內切圓（全圓）的半徑關係

設**等腰梯形**的內切圓（全圓）半徑R，

則$R=\dfrac{e(d+f)}{2r}+\dfrac{\sqrt{(d+2e+f)(d+f)}}{2}$，其中$r=\sqrt{\dfrac{e(de+ef+2df)}{d+2e+f}}$



[證明]$\because \Delta HIJ \sim \Delta HOK$(AA相似)

且$\Delta MOL = \Delta MNP$(AA相似)

$\therefore \angle HIJ=\angle HOK$且$\angle MOL=\angle MNP$

設$\angle HIJ=\angle HOK=\alpha,\ \angle MOL=\angle MNP=\beta,$

$\therefore \tan\alpha=\dfrac{d}{r}, \tan\beta=\dfrac{f}{r}$

又$r^2+d^2=\dfrac{e(de+ef+2df)}{d+2e+f}+d^2$

$$=\frac{e(de+ef+2df)+d^2(d+2e+f)}{d+2e+f}$$

$$=\frac{e[d(e+f)+f(d+e)]+d^2[(d+e)+(e+f)]}{d+2e+f}$$

$$=\frac{e[d(e+f)+f(d+e)]+d^2[(d+e)+(e+f)]}{d+2e+f}=\frac{de(e+f)+ef(d+e)+d^2(d+e)+d^2(e+f)}{d+2e+f}$$

$$=\frac{(d+e)(d^2+ef)+(e+f)(d^2+de)}{d+2e+f}=\frac{(d+e)(d^2+ef+de+df)}{d+2e+f}=\frac{(d+e)[d(d+e)+f(d+e)]}{d+2e+f}$$

$$=\frac{(d+e)^2(d+f)}{d+2e+f}$$

同理$r^2+f^2=\dfrac{(e+f)^2(d+f)}{d+2e+f}$

$\therefore 2R=\overline{JH}+\overline{HO}+\overline{OM}+\overline{MP}=e\tan\alpha+\sqrt{r^2+d^2}+\sqrt{r^2+f^2}+e\tan\beta$

$$=e\left(\frac{d}{r}\right)+(d+e)\sqrt{\frac{d+f}{d+2e+f}}+(e+f)\sqrt{\frac{d+f}{d+2e+f}}+e\left(\frac{f}{r}\right)$$

$$=e\left(\frac{d}{r}+\frac{f}{r}\right)+(d+2e+f)\sqrt{\frac{d+f}{d+2e+f}}=e\left(\frac{d+f}{r}\right)+\sqrt{(d+2e+f)(d+f)}$$

$\therefore R=\dfrac{e(d+f)}{2r}+\dfrac{\sqrt{(d+2e+f)(d+f)}}{2}$

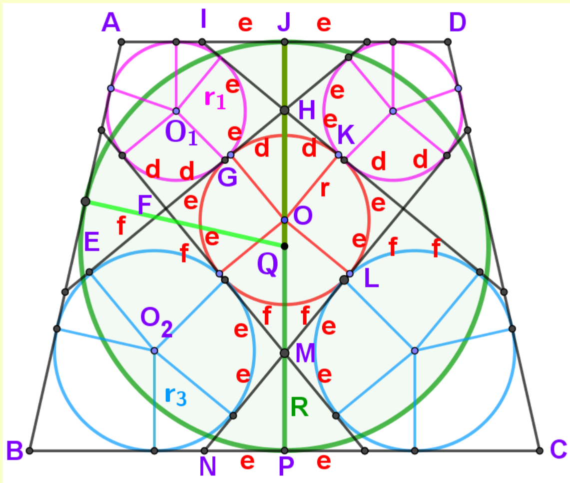
★對邊和相等的等腰梯形的算額問題

設對邊和相等之等腰梯形的全圓半徑 R，
中間內切圓（亭圓）半徑 r，
上底兩端內切圓半徑 r_1，下底兩端內切圓半徑 r_2
規定 $\overline{FG}=d$, $\overline{GH}=e$, $\overline{EF}=f$ ，則

$$r_1=\frac{de}{r}\ ,\ r_2=\frac{ef}{r}\ ,\ r=\sqrt{\frac{e\left(de+ef+2df\right)}{d+2e+f}}$$

$$2r_1+2r_2+r=2\left(\frac{de}{r}+\frac{ef}{r}\right)+r\ ,$$

$$R=\frac{e\left(d+f\right)}{2r}+\frac{\sqrt{\left(d+2e+f\right)\left(d+f\right)}}{2}$$



◆檢驗等腰梯形的公式是否合理？

若等腰梯形的公式中，取 $d=e=f$ 時，則等腰梯形變成正方形。

$$\therefore r=\sqrt{\frac{e\left(de+ef+2df\right)}{d+2e+f}}=\sqrt{\frac{e\left(4e^2\right)}{4e}}=e$$

$$\therefore 2r_1+2r_2+r=2\left(\frac{de}{r}+\frac{ef}{r}\right)+r=2\left(e+e\right)+e=5e$$

$$R=\frac{e\left(d+f\right)}{2r}+\frac{\sqrt{\left(d+2e+f\right)\left(d+f\right)}}{2}=e+\frac{\sqrt{(4e)(2e)}}{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)e$$

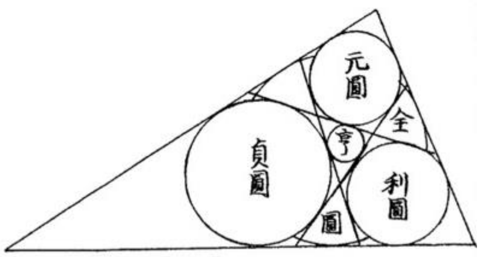
$$\therefore \frac{2r_1+2r_2+r}{R}=\frac{5e}{(\sqrt{2}+1)e}=5\left(\sqrt{2}-1\right)$$

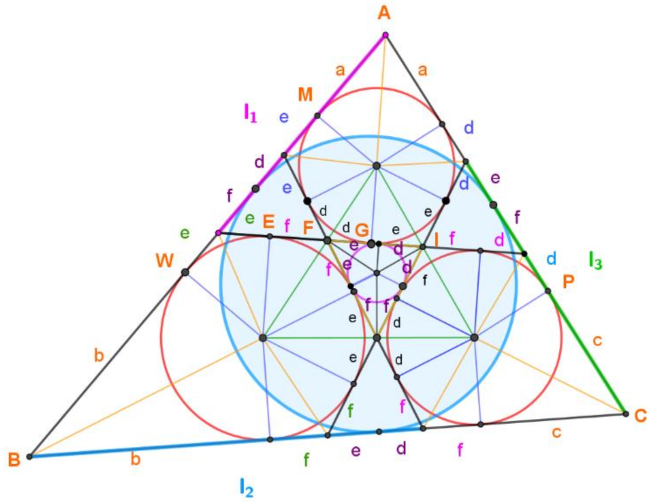
★與正方形算額問題公式推導結果相同 ！

★**對邊和相等的等腰梯形**的算額問題，藉由假設截線的「三個切線段長」(即證明內容的 d,e,f)，可表示出截線多邊形內切圓半徑與全圓半徑間的關係。

柒、結論

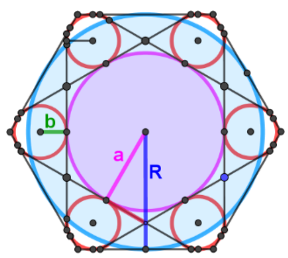
一、「新瀉八幡宮」算額問題





1. 規定 $\overline{FG}=d,\overline{GI}=e,\overline{EF}=f$，
   $\overline{AM}=a,\overline{BW}=b,\overline{CP}=c$ 表示出各線段長。
2. 設**亨圓半徑** r 、**元圓半徑** r_1 、**貞圓半徑** r_2 、**利圓半徑** r_3 ，**全圓半徑** R 且 $s=d+e+f$ ，
   則 $r=\sqrt{\dfrac{def}{s}}$ ，$r_1=\dfrac{de}{r}=\sqrt{\dfrac{des}{f}}$ ， $r_2=\dfrac{ef}{r}=\sqrt{\dfrac{efs}{d}}$ ， $r_3=\dfrac{df}{r}=\sqrt{\dfrac{dfs}{e}}$ ，$R=\dfrac{a+d+e}{a}\sqrt{\dfrac{des}{f}}$ 。
3. $a=\dfrac{2sde}{sf-de}$ ，$b=\dfrac{2sef}{sd-ef}$ ，$c=\dfrac{2sdf}{se-df}$ ，其中 $s=d+e+f$ 。
4. 推導出 $r_1+r_2+r_3+r=\dfrac{des+efs+dfs+def}{\sqrt{sdef}}$ ，證明出算額問題：$r_1+r_2+r_3+r=2R$ 。
5. 任意**三角形**做截線，三截線等長且位置唯一決定。
   三個截角皆等腰三角形，底邊長皆為 $2s$ ，面積分別為 $s^2\cdot\cot\dfrac{A}{2}$ 、 $s^2\cdot\cot\dfrac{B}{2}$ 、 $s^2\cdot\cot\dfrac{C}{2}$ 。
6. 設 ΔABC 中，△的半周長 L，三截線離三頂點位置分別為 l_1 ，l_2 ，l_3 ，
   則 $d+e+f=\dfrac{L}{\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}-1}$ ，且 $l_1=\dfrac{L}{\sin\frac{A}{2}(\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}-1)}$ ，
   $l_2=\dfrac{L}{\sin\frac{B}{2}(\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}-1)}$ ，$l_3=\dfrac{L}{\sin\frac{C}{2}(\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}-1)}$ 。
7. 三角形的「**由外往內作圖法**」可作出符合**算額問題**的圖形。
8. 從三角形的「**由內往外作圖法**」得知，**藉由假設截線的「三個切線段長」**（即 d,e,f ），**可表示出全圓半徑**，進而證明此算額問題。
9. **元貞利三角形的垂心為亨圓圓心，外心為全圓圓心。**
10. 當**正三角形**時，截線多邊形內切圓的**面積和**有 $\boxed{\text{最小值}}$ 為全圓面積的 $\dfrac{28}{25}$ 倍。
11. 任意**三角形**之截線多邊形內切圓的**周長和**必為全圓周長的 2 倍。

二、正 n 邊形的算額問題



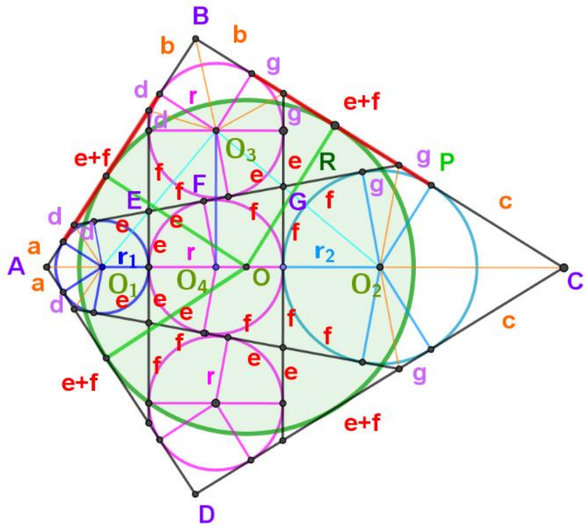
設**正 n 邊形的亨圓、元圓、全圓半徑分別為** a,b,R ，令 $\theta=\dfrac{180°}{n}$ 則

1. **內切圓半徑比** $a:b:R=\cos^2\theta:\sin^2\theta:(\sin^2\theta+\cos\theta)$
2. **半徑關係** $\dfrac{a+nb}{R}=\dfrac{n\cdot\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos\theta}$
3. 截線每邊所截線段比 $(\cos\theta-\cos 2\theta):(1+\cos 2\theta):(\cos\theta-\cos 2\theta)$

三、四邊形的算額問題

1. 從四邊形的「由內往外作圖法」得知，當內部的亨圓與四切線位置決定後，外圍的四邊形的圖形也會唯一決定。但是任意四邊形未必存在內切圓（全圓）。因此，四邊形的算額問題無法為一個定值。

2. 箏形的算額問題



設**箏形**的全圓半徑 R，中間三個內切圓（含亭圓）半徑 r，兩側內切圓半徑 r_1、r_2，規定 $\overline{EF}=e,\overline{FG}=f$，則

$$r=\sqrt{ef}\ ,\ r_1=\frac{e^2}{r}=e\sqrt{\frac{e}{f}}\ ,\ r_2=\frac{f^2}{r}=f\sqrt{\frac{f}{e}}$$

$$3r+r_1+r_2=\frac{3ef+e^2+f^2}{\sqrt{ef}}$$

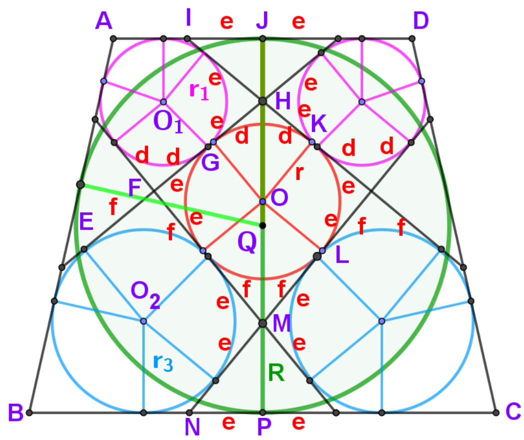
$$R=\left(\frac{(a+b+L_1)(b+c+L_2)}{(a+b+L_1)+(b+c+L_2)}\right)\left(\frac{2b\sqrt{ef}}{b^2+ef}\right)$$

其中 $L_1=\sqrt{(e+f)^2+4e^2}\ ,L_2=\sqrt{(e+f)^2+4f^2}$

$$a=\frac{4e^3(L_1+e+f)}{(L_1+e+f)^2f-4e^3}\ ,\ b=\frac{2ef\left[L_1+L_2+2(e+f)\right]}{(L_1+e+f)(L_2+e+f)-4ef}\ ,\ c=\frac{4f^3(L_2+e+f)}{(L_2+e+f)^2e-4f^3}\ 。$$

3. 箏形的算額問題，藉由假設截線的「二個切線段長」（即證明的 e,f），可表示出截線多邊形內切圓半徑與全圓半徑間的關係。

4. 對邊和相等的等腰梯形的算額問題



設**等腰梯形**的全圓半徑 R，中間亨圓半徑 r，上底兩端內切圓半徑 r_1，下底兩端內切圓半徑 r_2，規定 $\overline{FG}=d\ ,\overline{GH}=e\ ,\overline{EF}=f$，則

$$r_1=\frac{de}{r}\ ,\ r_2=\frac{ef}{r}\ ,\ r=\sqrt{\frac{e(de+ef+2df)}{d+2e+f}}$$

$$2r_1+2r_2+r=2\left(\frac{de}{r}+\frac{ef}{r}\right)+r\ ,$$

$$R=\frac{e(d+f)}{2r}+\frac{\sqrt{(d+2e+f)(d+f)}}{2}$$

5. **對邊和相等的等腰梯形**算額問題，藉由假設截線的「三個切線段長」（即證明的 d,e,f），可表示出截線多邊形內切圓半徑與全圓半徑間的關係。

捌、參考資料

一、Japanese Theorem の起源と歴史。

三重大学教育学部研究紀要，第 52 巻，自然科学(2001)第 29 頁。

二、國中 3 上數學。1.相似形。2. 圓。康軒文教事業。2022。

【評語】030420

給一個三角形和三個截線段，考慮由這些截線段和三角形的邊所圍出的四個區域。如果每個區域都可以找到與此區域邊界的各邊都相切的內切圓，這些內切圓的半徑和會是多少？這是日本的一本古書中提及的一個有趣的問題。本作品的作者藉助簡單的比例概念與切線段等長的性質，導出了當四個內切圓均存在時，截線段上由截點與切點所分割的各線段的長與各圓半徑間的關係，由此得出了四個內切圓的半徑與原始三角形的內切圓半徑的比值會是定值 2 這樣的結論。對於這些圓的圓心所構成的三角形具有哪些特別的性質，以及將原始的問題進一步擴展到正 n 邊形時，小內切圓的半徑和與原本的正 n 邊形的內切圓的半徑的比值又會是多少這樣的問題，也分別做了討論。能夠巧妙的運用基本的性質，得出這麼多有趣的結論，頗為難得，值得鼓勵。本作品以朝向 n 邊形來做推廣，若能考慮立體圖形，可能會更加有挑戰性。

作品海報

截線多邊形內切圓半徑與面積之研究

壹、研究動機

江戶時代的日本人信仰虔誠，他們會設計各種式樣的匾額到鄰近的寺廟或神社酬神，如果是把數學問題和答案用漢字書寫在板上，這種還願的書板就叫做「**算額**」。
右圖為中村時萬於 1830 年編輯「賽祠神算」中的「新瀉八幡宮」算額問題：
「如圖，三角形的內切圓稱為『全圓』，及三角形由三條截線所分割區域分別作內切圓，得『亨圓』、『元圓』、『貞圓』、『利圓』。若『全圓』的半徑 1 寸，問『亨圓』、『元圓』、『貞圓』、『利圓』的半徑和為多少？」答案：2 寸

由於此問題只有單純的術文，證明沒有被記載。因此，開啟了我的研究。

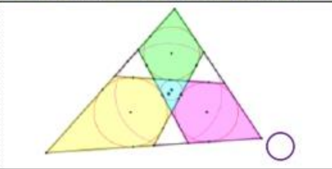
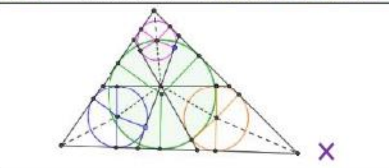

越後刈新潟八幡宮 按スルニ変形算法ニハ白山社トアリ
今有如圖三斜内容全圓及隔三線四圓乃全圓者切三斜元利貞圓者各切二斜及三線亨圓者切三線也只云全圓徑一寸問元亨利貞之圓徑四和幾何
答曰
元圓徑
亨圓徑
利圓徑 四和二寸
貞圓徑

貳、研究目的

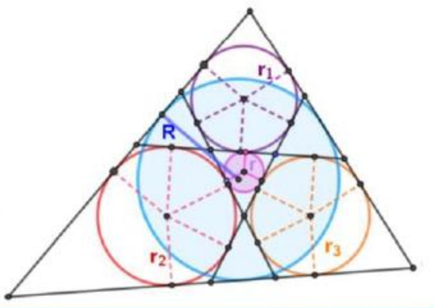
一、探討新瀉八幡宮算額問題的圖形條件與證明。
二、將新瀉八幡宮算額問題延伸至正 n 邊形。

參、名詞定義

一、截線多邊形：在三角形分別對每個角作通過相鄰兩邊但不過頂點的截線，且三截線不共點。若由三截線所分割出來的多邊形區域有三邊為截線的一部份，則稱為「截線多邊形」

截線多邊形	 ○	 ×

二、截線多邊形內切圓半徑：
三角形內切圓稱「全圓」半徑 R
截線多邊形分別作內切圓，得
「亨圓」半徑 r、「元圓」半徑 r_1
「貞圓」半徑 r_2、「利圓」半徑 r_3
欲證：$r+r_1+r_2+r_3=2R$。



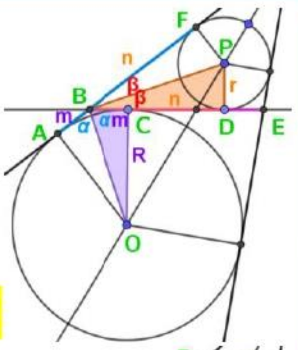
肆、研究過程

一、「新瀉八幡宮」算額問題

(一)兩圓內外公切線段長的性質

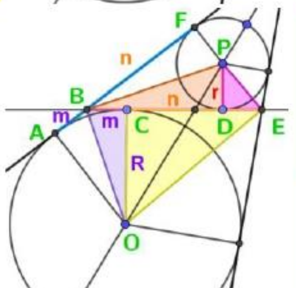
性質一 設兩圓半徑為 R , r，
若 $\overline{BC}=m,\overline{BD}=n$，則 $Rr=mn$

[證] $\because \Delta OBC\sim\Delta BPD(AA)\quad \therefore \frac{R}{m}=\frac{n}{r}$



性質二 切線段 $\overline{BC}=\overline{DE}=m,\ \overline{BD}=\overline{CE}=n$

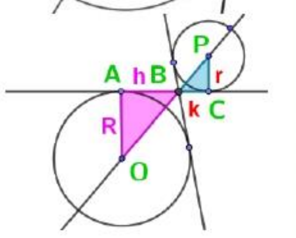
[證]設 $\overline{CE}=x,\overline{DE}=y,\therefore m+x=n+y$
又 $\Delta OBC\sim\Delta BPD(AA)\therefore Rr=mn$
同理 $\Delta OEC\sim\Delta EPD(AA)\therefore Rr=xy$
$\therefore\ m:x=\frac{Rr}{n}:\frac{Rr}{y}=\frac{1}{n}:\frac{1}{y}=y:n$
又 $m+x=n+y\quad \therefore\ x=n\ ,\ y=m$



性質三 外公切線段長為 $m+n$

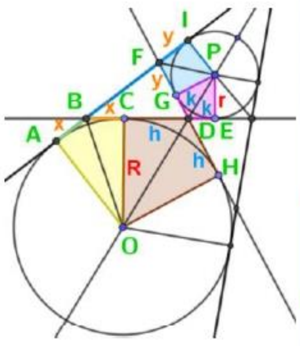
性質四 設兩圓半徑為 R , r，
若 $\overline{AB}=h,\overline{BC}=k$，則 $\frac{R}{r}=\frac{h}{k}$。

[證] $\because \Delta OABC\sim\Delta PCB$ (AA相似)，得證



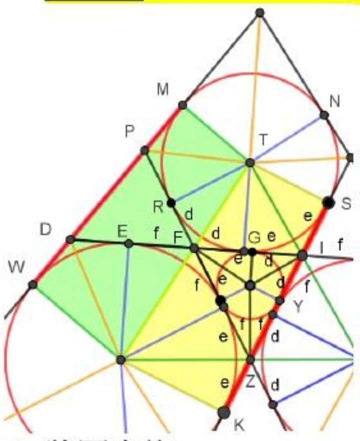
性質五 $\overline{AB}=\overline{IF}=x$，$\overline{BF}=h+k$

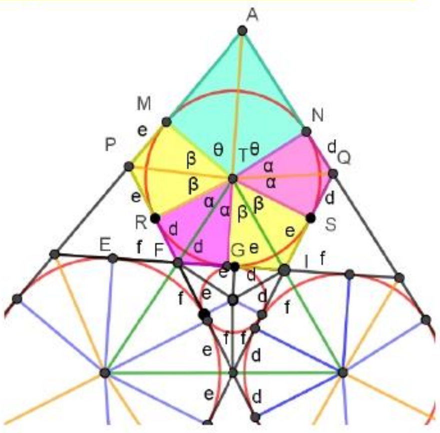
[證]令 $\overline{AB}=\overline{BC}=x,\overline{IF}=\overline{FG}=y,$
$\overline{CD}=\overline{DH}=h,\overline{DE}=\overline{DG}=k$
$\therefore Rr=\overline{BC}\cdot\overline{BE}=x\cdot(x+h+k)$
且 $\overline{AI}=\overline{BC}+\overline{BE}=2x+h+k$
同理 $Rr=\overline{FG}\cdot\overline{FH}=y\cdot(y+k+h)$
且 $\overline{AI}=\overline{FG}+\overline{FH}=2y+h+k$
$\therefore x=y\quad \therefore \overline{AB}=\overline{IF}=x$，$\overline{BF}=h+k$



(二)元圓、貞圓、利圓與亨圓的半徑關係

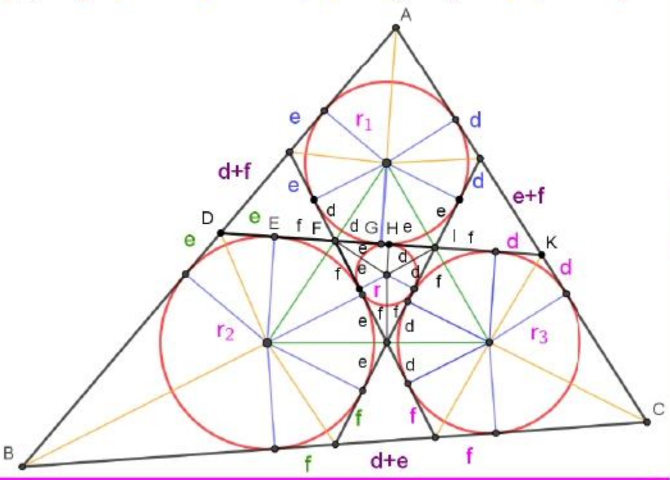
1. 規定 $\overline{FG}=d,\overline{GI}=e,\overline{EF}=f$，利用性質二可推得其他線段。
2. **性質六** $\overline{MW}=\overline{SK}=d+2e+f$ 且 $\angle MTF=\angle STF$。
3. **性質七** $\overline{PM}=\overline{PR}=e$,$\overline{QN}=\overline{QS}=d$ 且 A,T,G 三點共線。





4. 將圖中的線段，以 d, e, f 表示出來

★ΔADK 為等腰三角形
且 $\overline{AG}$ 為 ΔADK 的高



★心得：三截線分別將三個角截出等腰三角形。

設**亨圓半徑** r，則 $r=\sqrt{\frac{def}{s}}$，其中 $s=d+e+f$。

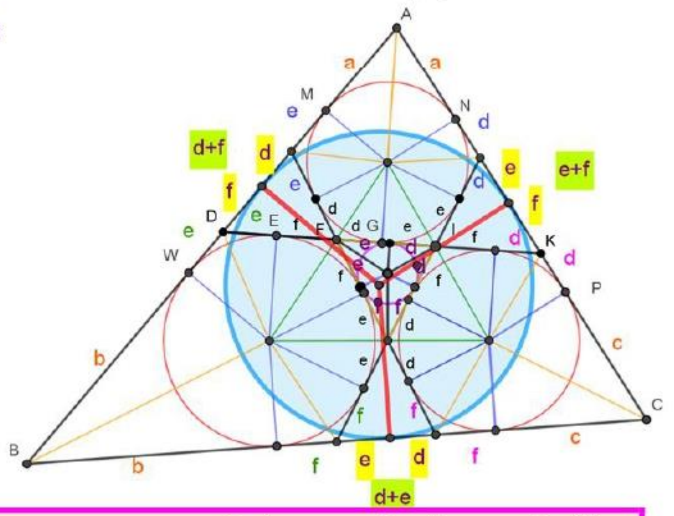
[證] ΔFIZ 面積 $=\frac{1}{2}(2d+2e+2f)\cdot r=s\cdot r,$ 其中 $s=d+e+f$
又 ΔFIZ 面積 $=\sqrt{s[s-(e+f)][s-(d+f)][s-(d+e)]}=\sqrt{sdef}$
$\therefore s\cdot r=\sqrt{sdef}\quad \therefore r=\frac{\sqrt{s\cdot d\cdot e\cdot f}}{s}=\sqrt{\frac{def}{s}}$，故得證。

設**亨圓半徑** r、**元圓半徑** r_1、**貞圓半徑** r_2、**利圓半徑** r_3， 則
$r_1=\frac{de}{r}=\sqrt{\frac{des}{f}},\ r_2=\frac{ef}{r}=\sqrt{\frac{efs}{d}},\ r_3=\frac{df}{r}=\sqrt{\frac{dfs}{e}}$,其中 $s=d+e+f$

[證]由性質一 $rr_1=de$ 代入 $r=\sqrt{\frac{def}{s}}\ \therefore\ r_1=\frac{de}{r}=\sqrt{\frac{des}{f}}$ 其他同理

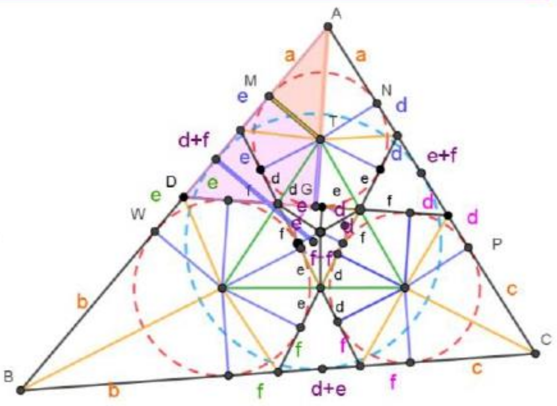
(三)全圓半徑關係

$\because$全圓為 ΔABC 的內切圓
$\therefore$從某頂點所做兩切線段必等長。
$\therefore$三邊可再細分出每條小線段的長度。
如圖所示。



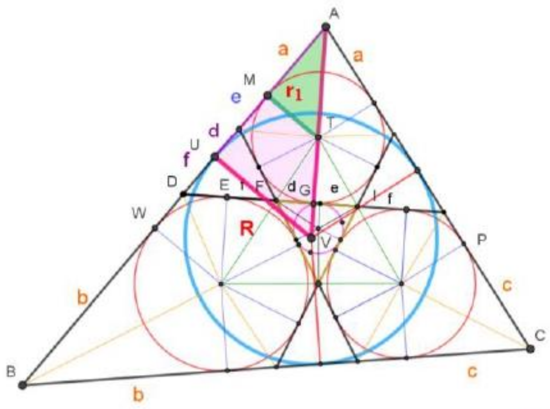
設 $\overline{AM}=a,\overline{BW}=b,\overline{CP}=c$,則 $a=\frac{2sde}{sf-de},b=\frac{2sef}{sd-ef},c=\frac{2sdf}{se-df}$

[證] $\because \Delta ATM\sim\Delta ADG$
$\therefore \frac{r_1}{a}=\frac{s}{r_1+\sqrt{r_1^2+a^2}}$
$\therefore as=r_1^2+r_1\sqrt{r_1^2+a^2}$
整理得 $a(s^2-r_1^2)=2sr_1^2,$
代入 $r_1=\sqrt{\frac{des}{f}}$ 得
$a=\frac{2sde}{sf-de}$,其他同理



$$R=\frac{a+d+e}{a}\sqrt{\frac{des}{f}}$$

[證] $\Delta ATM\sim\Delta AVU(AA)$
$\therefore \frac{r_1}{a}=\frac{R}{a+d+e}$
$\therefore R=\frac{a+d+e}{a}\cdot r_1$
$=\frac{a+d+e}{a}\sqrt{\frac{des}{f}}$



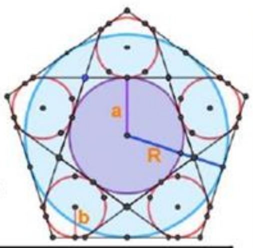
算額問題： $r_1+r_2+r_3+r=2R$

$$r_1+r_2+r_3+r=\sqrt{\frac{des}{f}}+\sqrt{\frac{efs}{d}}+\sqrt{\frac{dfs}{e}}+\sqrt{\frac{def}{s}}=\frac{des+efs+dfs+def}{\sqrt{defs}}$$

$$R=\frac{\left(\frac{2sde}{sf-de}\right)+d+e}{\left(\frac{2sde}{sf-de}\right)}\sqrt{\frac{des}{f}}=\frac{des+dfs+efs+def}{2\sqrt{defs}}$$

二、正 n 邊形的算額問題

(一)定義 正 n 邊形的內切圓稱為全圓，半徑為 R。
正 n 邊形由 n 條不過頂點且等長的截線所分割的截線多邊形分別作內切圓，中心內切圓稱為亨圓，半徑 a。
其餘 n 個區域的內切圓大小相同，稱為元圓，半徑 b。



(二)討論正 n 邊形全圓、亨圓、元圓的半徑關係

●半徑比 令 $\theta=\dfrac{180^\circ}{n}$，$\because \Delta POQ$ 與 ΔQOG 為直角三角形且 $\angle POQ=\theta$

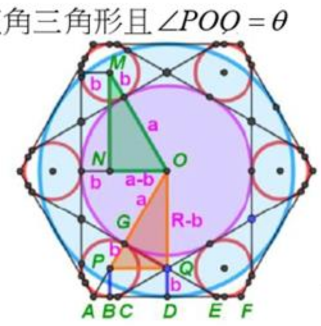
$\therefore \cos\theta=\dfrac{R-b}{a+b}=\dfrac{a}{R-b}$ $\therefore R=\sqrt{a(a+b)}+b$

又 ΔOMN 為直角三角形且 $\angle MON=2\theta$

$\therefore \cos 2\theta=\dfrac{a-b}{a+b}$

$\therefore\ a:b=(1+\cos 2\theta):(1-\cos 2\theta)=\cos^2\theta:\sin^2\theta$

$\therefore a:b:R=\cos^2\theta:\sin^2\theta:(\sin^2\theta+\cos\theta)$



●半徑關係 ∵亨圓：元圓：全圓的個數比=1：n：1

$\therefore \dfrac{a+nb}{R}=\dfrac{\cos^2\theta+n\cdot\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos\theta}=\dfrac{n\cdot\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos\theta}$

●n 條截線位置

$\because \angle POQ=\theta$ 且 $\angle QCD=\theta$

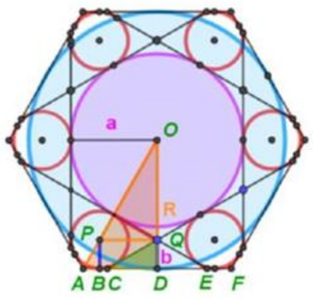
$\therefore \overline{AC}=\overline{AD}-\overline{CD}=R\tan\theta-\dfrac{b}{\tan\theta}$

$=(\dfrac{\sin^2\theta+\cos\theta}{\sin^2\theta}b)\tan\theta-\dfrac{b}{\tan\theta}=b(\dfrac{1+\cos\theta-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta})$

$\therefore \overline{AC}:\overline{CE}=b(\dfrac{1+\cos\theta-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}):2\dfrac{b}{\tan\theta}$

$=\dfrac{1+\cos\theta-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}:2\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=(\cos\theta-\cos 2\theta):(1+\cos 2\theta)$

$\therefore \overline{AC}:\overline{CE}:\overline{EF}=(\cos\theta-\cos 2\theta):(1+\cos 2\theta):(\cos\theta-\cos 2\theta)$

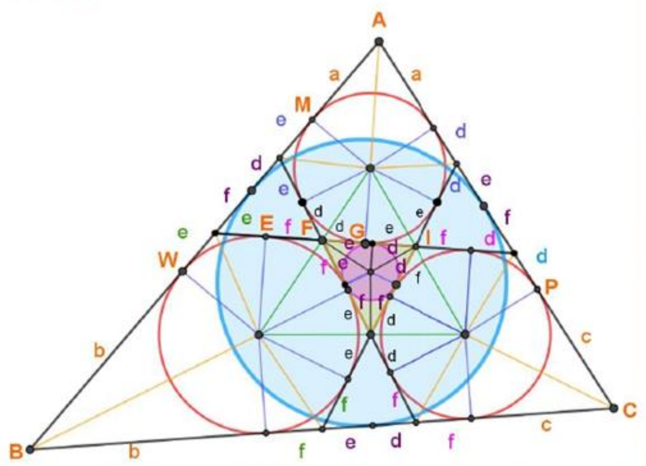


伍、研究結果

一、新潟八幡宮算額問題

1.規定 $\overline{FG}=d$,
$\overline{GI}=e,\overline{EF}=f$,
$\overline{AM}=a,\overline{BW}=b$,
$\overline{CP}=c$,表示
各線段長。

2.三角形的
三截線都將
三個角截出
等腰三角形。



3. $r=\sqrt{\dfrac{def}{s}}$, $r_1=\dfrac{de}{r}=\sqrt{\dfrac{des}{f}}$, $r_2=\dfrac{ef}{r}=\sqrt{\dfrac{efs}{d}}$, $r_3=\dfrac{df}{r}=\sqrt{\dfrac{dfs}{e}}$, $R=\dfrac{a+d+e}{a}\sqrt{\dfrac{des}{f}}$

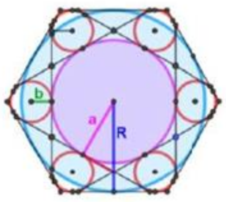
4. $a=\dfrac{2sde}{sf-de}$, $b=\dfrac{2sef}{sd-ef}$, $c=\dfrac{2sdf}{se-df}$，其中 $s=d+e+f$。

5. 證明出算額問題：$r_1+r_2+r_3+r=2R$。

二、正 n 邊形的算額問題

設正 n 邊形的**亨圓**、**元圓**、**全圓**半徑為 a,b,R，令 $\theta=\dfrac{180^\circ}{n}$ 則

1. 半徑比 $a:b:R=\cos^2\theta:\sin^2\theta:(\sin^2\theta+\cos\theta)$
2. 半徑關係 $\dfrac{a+nb}{R}=\dfrac{n\cdot\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos\theta}$
3. 截線每邊所截線段比 $(\cos\theta-\cos 2\theta):(1+\cos 2\theta):(\cos\theta-\cos 2\theta)$



陸、討論

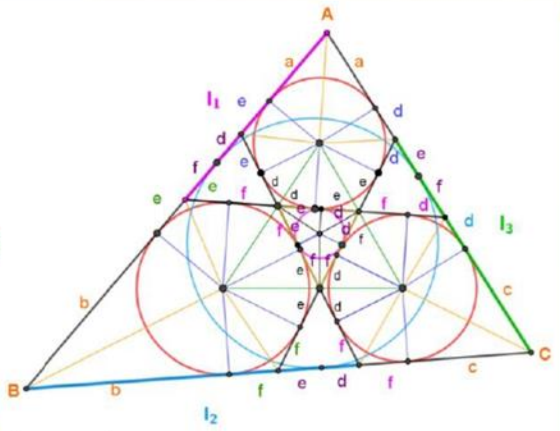
一、三角形如何作出截線

(一) 三角形的截線位置

離 A 截邊長 $l_1=a+d+e+f$
離 B 截邊長 $l_2=b+d+e+f$
離 C 截邊長 $l_3=c+d+e+f$
周長 $=2(l_1+l_2+l_3)-2(d+e+f)$
$\therefore$截線段長 $=2(d+e+f)$

$=2l_1\sin\dfrac{A}{2}=2l_2\sin\dfrac{B}{2}=2l_3\sin\dfrac{C}{2}$

★三截線段等長為 $2(d+e+f)$



$\therefore$半周長 $L=(d+e+f)(\dfrac{1}{\sin\dfrac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin\dfrac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin\dfrac{C}{2}}-1)$

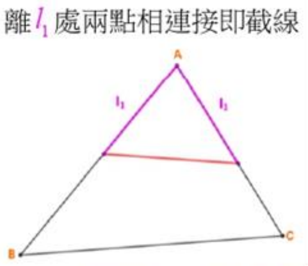
若已知△三邊長及三內角，可利用半周長 L，求得 $d+e+f$，進而求 l_1,l_2,l_3

(二) 三角形由外往內作圖法

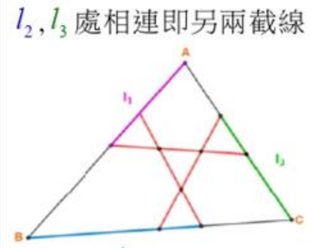
◆步驟一：求△三內角及半周長 L，得 $l_1=\dfrac{L}{\sin\dfrac{A}{2}(\csc\dfrac{A}{2}+\csc\dfrac{B}{2}+\csc\dfrac{C}{2}-1)}$,

$l_2=\dfrac{L}{\sin\dfrac{B}{2}(\csc\dfrac{A}{2}+\csc\dfrac{B}{2}+\csc\dfrac{C}{2}-1)}$, $l_3=\dfrac{L}{\sin\dfrac{C}{2}(\csc\dfrac{A}{2}+\csc\dfrac{B}{2}+\csc\dfrac{C}{2}-1)}$

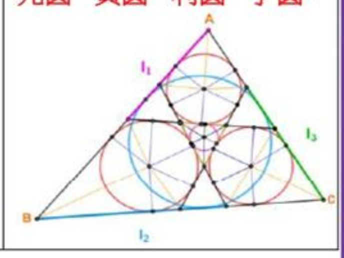
◆步驟二：在 $\angle A$ 兩邊距離 l_1 處兩點相連接即截線



◆步驟三：在 $\angle B,\angle C$ 距 l_2,l_3 處相連即另兩截線



◆步驟四：作△的全圓、元圓、貞圓、利圓、亨圓。



(三)三角形的三個截角面積

設 ΔABC 中，設 $s=d+e+f$，則三截角面積為 $s^2\cdot\cot\dfrac{A}{2},s^2\cdot\cot\dfrac{B}{2},s^2\cdot\cot\dfrac{C}{2}$

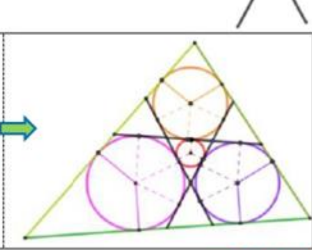
二、三角形的由內往外作圖法（若不知道截線位置，該如何作圖呢？）

◆步驟一：先畫亨圓，再作三條切線為三截線，且三切線兩兩相交一點。

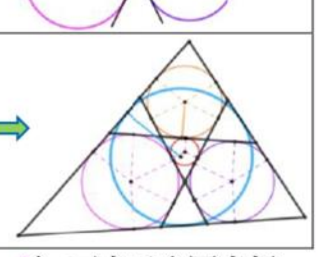
◆步驟二：在三截線所圍外部區域，分別作角平分線，每個區域各有一個交點，即為元圓、貞圓、利圓的圓心。

◆步驟三：從圓心往三截線作垂線，找出切點，便做出元圓、貞圓、利圓。

◆步驟四：將元圓、貞圓、利圓兩兩分別作外公切線，即作出三邊。



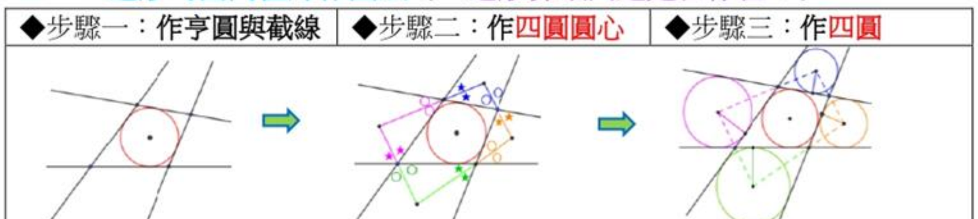
◆步驟五：作出三角形內切圓，即為全圓。



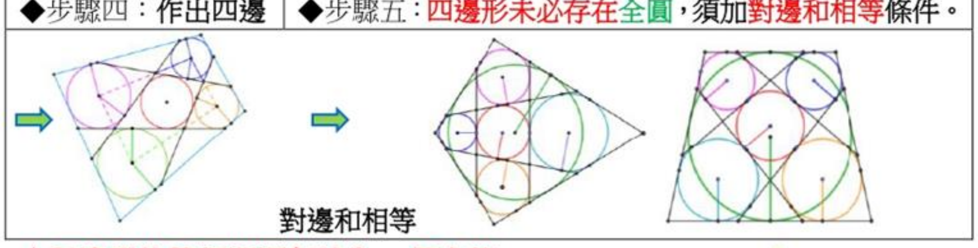
★三角形算額問題藉由假設三個切線段長（即 d,e,f），可表示全圓半徑。

三、四邊形的由內往外作圖法（四邊形算額問題是否存在？）

◆步驟一：作亨圓與截線 ◆步驟二：作四圓圓心 ◆步驟三：作四圓



◆步驟四：作出四邊 ◆步驟五：四邊形未必存在全圓，須加對邊和相等條件。

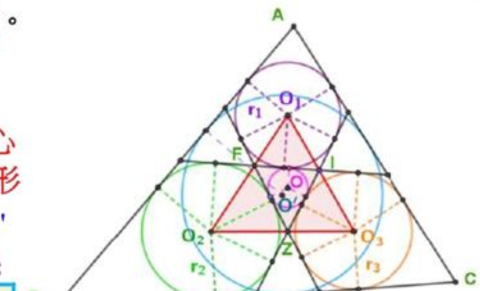


★四邊形的算額問題無法為一個定值。

四、元貞利三角形的心

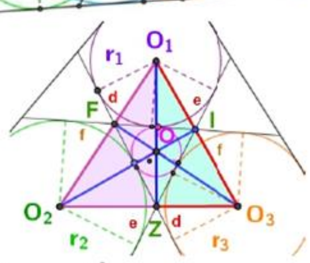
(一) 定義

1.將 ΔABC 的元圓、貞圓、利圓的圓心兩兩相連得 $\Delta O_1O_2O_3$ 稱為元貞利三角形
2. 設 ΔABC 亨圓圓心 O，全圓圓心 O'



(二) 元貞利三角形與亨圓圓心的關係

O_1,O,Z 三點共線，O_2,O,I 三點共線，
O_3,O,F 三點共線。
$\overline{O_1Z},\ \overline{O_2I},\ \overline{O_3F}$ 三線共點於 O 點



元貞利三角形的垂心為亨圓圓心 O

[證]在 ΔO_1O_2Z 與 ΔO_1O_3Z 中

$\left(\overline{O_1F}+\overline{FO_2}\right)^2-\left(\overline{O_2Z}\right)^2=\left(\sqrt{r_1^2+d^2}+\sqrt{r_2^2+f^2}\right)^2-\left(\sqrt{r_2^2+e^2}\right)^2$

整理化簡後 $=r_1^2+d^2+f^2+e^2+2\left(de+ef+df\right)$

同理 $\left(\overline{O_1I}+\overline{IO_3}\right)^2-\left(\overline{O_3Z}\right)^2=r_1^2+d^2+f^2+e^2+2\left(de+ef+df\right)$

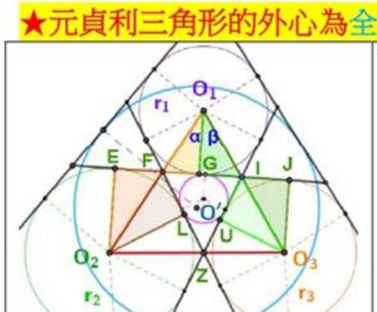
$\therefore \Delta O_1O_2Z$ 與 ΔO_1O_3Z 為直角三角形且 $\angle O_1ZO_2=\angle O_1ZO_3=90^\circ$

$\therefore \overline{O_1Z}$ 為 $\Delta O_1O_2O_3$ 的高。 同理 $\overline{O_2I},\ \overline{O_3F}$ 亦為 $\Delta O_1O_2O_3$ 的高

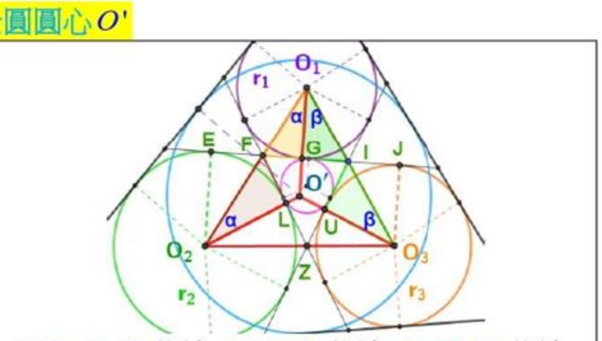
又 $\overline{O_1Z},\ \overline{O_2I},\ \overline{O_3F}$ 三線共點於 O 點 $\therefore O$ 為 $\Delta O_1O_2O_3$ 的垂心。

(三) 元貞利三角形與全圓圓心的關係

★元貞利三角形的外心為全圓圓心 O'



設 $\angle FO_1G=\alpha,\angle IO_1G=\beta$
$\because \Delta FO_1G\sim\Delta FO_2L$ (AA)
$\therefore \angle FO_2L=\alpha$
同理 $\angle IO_3U=\beta$



又 O_1,G,O' 共線, O_2,L,O' 共線, O_3,U,O' 共線
$\therefore \Delta O_1O'O_2$ 與 $\Delta O_1O'O_3$ 為等腰三角形
$\therefore \overline{O'O_1}=\overline{O'O_2}=\overline{O'O_3}$
$\therefore O'$ 為 $\Delta O_1O_2O_3$ 外心

五、三角形的截線多邊形內切圓面積和的極值

$\because r_1^2r_2^2r_3^2=\frac{des}{f}\cdot\frac{efs}{d}\cdot\frac{dfs}{e}=s^3def=s^4r^2$

由算幾不等式 $s=d+e+f\ge 3\sqrt[3]{def}, s^2\ge 27\frac{def}{s}, s^2\ge 27r^2$

$\therefore r_1^2+r_2^2+r_3^2\ge 3\sqrt[3]{r_1^2r_2^2r_3^2}=3\sqrt[3]{s^4r^2}\ge 3\sqrt[3]{(27^2r^4)r^2}=27r^2$

∴四小圓面積和 $\pi\left(r^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2\right)\ge 28\pi r^2=\frac{28}{25}\pi R^2$

∴**亨圓、元圓、貞圓、利圓面積和的最小值為全圓面積的 $\frac{28}{25}$ 倍，此時 $r_1=r_2=r_3=3r$ 且 $R=5r$ 。即為正三角形時有最小值。**

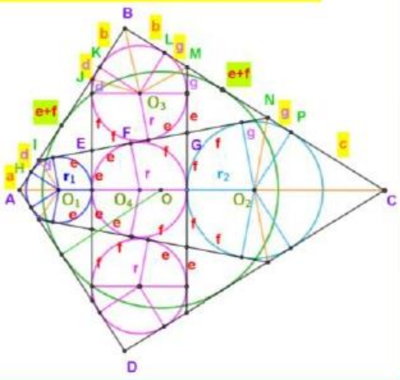
六、三角形的截線多邊形內切圓周長和的極值

∵周長和 $=2\pi(r+r_1+r_2+r_3)=2\pi(2R)=2(2\pi R)$

∴**亨圓、元圓、貞圓、利圓的周長和必為全圓周長的 2 倍。**

七、箏形的算額問題

(一)截線多邊形內切圓的半徑關係



1. 設箏形中間三個內切圓半徑 r，兩側的內切圓半徑 r_1、r_2，全圓半徑 R。
2. 規定 $\overline{EF}=e$,$\overline{FG}=f$，$\overline{AH}=a,\overline{BK}=b,\overline{CP}=c$,，$\overline{HI}=d,\overline{PN}=g$ 可推得右圖

$r=\sqrt{ef}$，$r_1=\frac{e^2}{r}=e\sqrt{\frac{e}{f}}$，$r_2=\frac{f^2}{r}=f\sqrt{\frac{f}{e}}$，$3r+r_1+r_2=\frac{3ef+e^2+f^2}{\sqrt{ef}}$

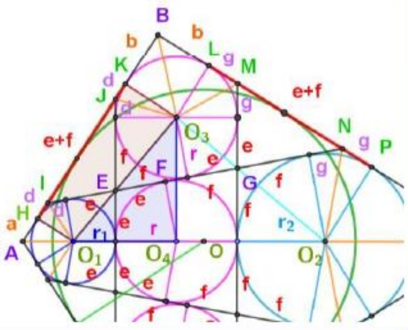
[證]由性質一知 $r\cdot r=e\cdot f$,即 $r=\sqrt{ef}$ ，其他同理

(二)箏形內切圓（全圓）的半徑關係

左外公切線長 $L_1=\sqrt{(e+f)^2+4e^2}=2d+e+f$ 。

右外公切線長 $L_2=\sqrt{(e+f)^2+4f^2}=2g+e+f$ 。

[證] $\Delta O_1O_3O_4$ 中



$\overline{O_1O_3}=\sqrt{(e+f)^2+(r+r_1)^2}$

∴左外公切線 $\overline{HK}$

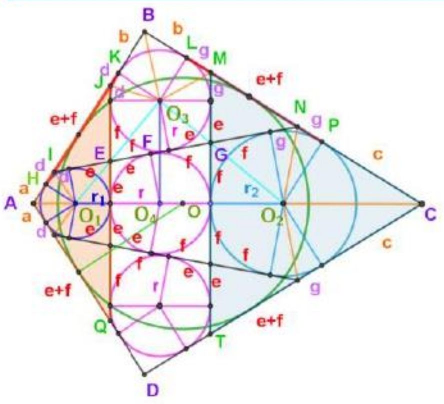
$=\sqrt{\left[(e+f)^2+(r+r_1)^2\right]-(r-r_1)^2}$

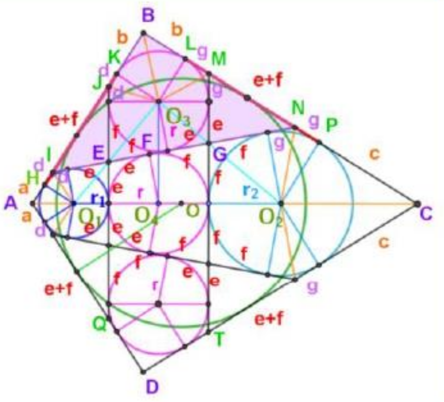
$=\sqrt{(e+f)^2+4r\cdot r_1}=\sqrt{(e+f)^2+4e^2}$

(看圖)$=2d+e+f$ (假設)$=L_1$

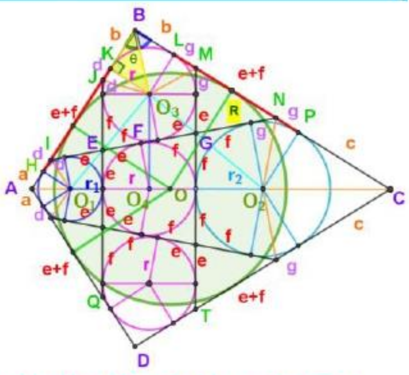
$a=\frac{4e^3\left(L_1+e+f\right)}{\left(L_1+e+f\right)^2f-4e^3}$，$b=\frac{2ef\left[L_1+L_2+2(e+f)\right]}{\left(L_1+e+f\right)\left(L_2+e+f\right)-4ef}$

$c=\frac{4f^3\left(L_2+e+f\right)}{\left(L_2+e+f\right)^2e-4f^3}$ [利用內切圓面積公式與海龍公式證明]





$$R=\left(\frac{\left(a+b+L_1\right)\left(b+c+L_2\right)}{\left(a+b+L_1\right)+\left(b+c+L_2\right)}\right)\left(\frac{2b\sqrt{ef}}{b^2+ef}\right)$$



[證]利用箏形面積

$=\left(a+b+L_1\right)\left(b+c+L_2\right)\sin 2\theta$

$=\left[\left(a+b+L_1\right)+\left(b+c+L_2\right)\right]R$ ，

$\sin 2\theta=\left(\frac{2br}{b^2+r^2}\right)=\left(\frac{2b\sqrt{ef}}{b^2+ef}\right)$

2. 檢驗箏形的公式是否合理？

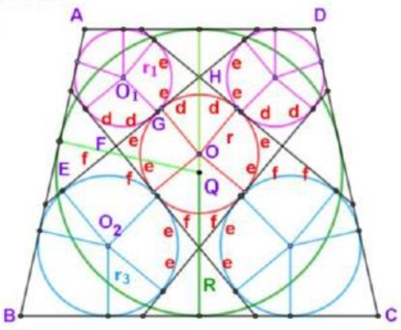
取 $e=f$ 時，則箏形變成正方形。

$\frac{3r+r_1+r_2}{R}=\frac{5e}{(\sqrt{2}+1)e}=5\left(\sqrt{2}-1\right)$ ★與正方形公式結果相同！

★箏形的算額問題，假設截線的「二個切線段長」(即 e, f)，可表示出截線多邊形內切圓半徑與全圓半徑間的關係。

八、對邊和相等的等腰梯形的算額問題

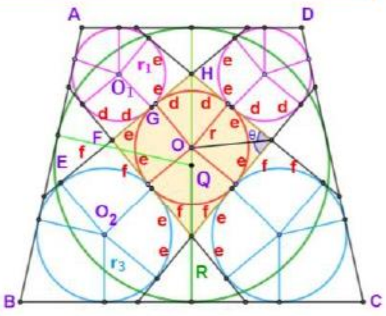
(一)截線多邊形內切圓的半徑關係



1. 設等腰梯形的亨圓半徑 r，上底兩端內切圓半徑 r_1，下底兩端內切圓半徑 r_2，等腰梯形的全圓半徑 R。
2. 規定 $\overline{FG}=d$,$\overline{GH}=e$,$\overline{EF}=f$，可推得右圖結果

$r_1=\frac{de}{r}$，$r_2=\frac{ef}{r}$。亨圓半徑 $r=\sqrt{\frac{e\left(de+ef+2df\right)}{d+2e+f}}$

[證]由性質一 $r\cdot r_1=d\cdot e$,即 $r_1=\frac{de}{r}$



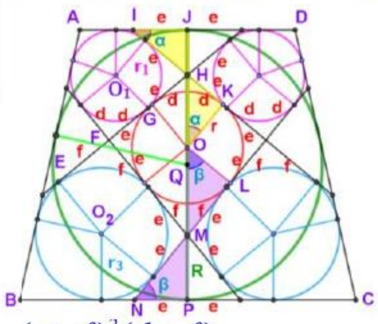
[證]利用中間箏形面積

$=(d+e)(e+f)\sin 2\theta=r\cdot(d+2e+f)$

其中 $\sin 2\theta=\left(\frac{2re}{r^2+e^2}\right)$ 代入得證

(二) 等腰梯形全圓的半徑關係

$R=\frac{e(d+f)}{2r}+\frac{\sqrt{(d+2e+f)(d+f)}}{2}$



[證] $\Delta HIJ\sim\Delta HOK$, $\Delta MOL\sim\Delta MNP$

設 $\angle HIJ=\angle HOK=\alpha$ ∴ $\tan\alpha=\frac{d}{r}$

$\angle MOL=\angle MNP=\beta$ ∴ $\tan\beta=\frac{f}{r}$

又 $r^2+d^2=\frac{(d+e)^2(d+f)}{d+2e+f}$，$r^2+f^2=\frac{(e+f)^2(d+f)}{d+2e+f}$

∴ $2R=\overline{JH}+\overline{HO}+\overline{OM}+\overline{MP}$

$=e\tan\alpha+\sqrt{r^2+d^2}+\sqrt{r^2+f^2}+e\tan\beta$

$=e\left(\frac{d+f}{r}\right)+\sqrt{(d+2e+f)(d+f)}$ 得證

◆檢驗等腰梯形的公式是否合理？

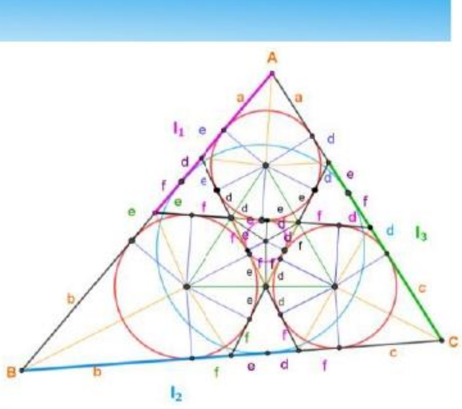
若等腰梯形公式中，取 $d=e=f$ 時，則等腰梯形變成正方形。

$\frac{2r_1+2r_2+r}{R}=\frac{5e}{(\sqrt{2}+1)e}=5\left(\sqrt{2}-1\right)$ ★與正方形公式結果相同！

★等腰梯形算額問題，假設截線「三個切線段長」(即 d,e,f)，可表示出截線多邊形內切圓半徑與全圓半徑間的關係。

柒、結論

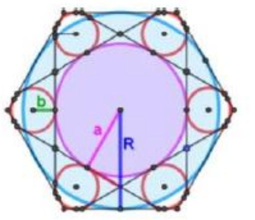
一、新瀉八幡宮的算額問題

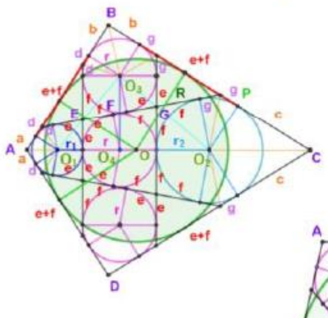


1. 從「由內往外作圖法」知，三角形可以用三個切線段表示其他線段長，並表示出三角形與其截線多邊形的內切圓半徑， 進而證明出：截線多邊形內切圓的半徑和為全圓半徑的 2 倍。
2. 「由外往內作圖法」是利用三截線等長且位置唯一決定，三截角皆等腰三角形的原理作圖。
3. 元貞利三角形的垂心為亨圓圓心，外心為全圓圓心。
4. 當正三角形時，截線多邊形內切圓面積和有最小值為全圓面積的 $\frac{28}{25}$ 倍。
5. 任意三角形之截線多邊形內切圓周長和必為全圓周長的 2 倍。

二、正 n 邊形的算額問題

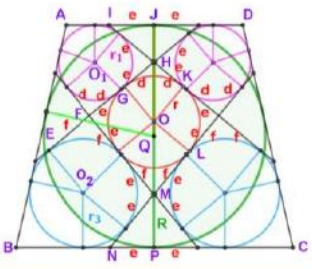
設正 n 邊形的亨圓、元圓、全圓半徑分別為 a,b,R ，令 $\theta=\frac{180^\circ}{n}$ ，則





1. 內切圓半徑比 $a:b:R=\cos^2\theta:\sin^2\theta:(\sin^2\theta+\cos\theta)$
2. 半徑關係 $\frac{a+nb}{R}=\frac{n\cdot\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos\theta}$
3. n 條截線將每邊所截成的線段比 $(\cos\theta-\cos 2\theta):(1+\cos 2\theta):(\cos\theta-\cos 2\theta)$

三、四邊形的算額問題



1. 從「由內往外作圖法」得知，四邊形未必存在全圓，必須有「對邊和相等」的條件。因此，四邊形的算額問題無法為一個定值。
2. 箏形算額問題，藉由假設截線的二個切線段長，可表示出截線多邊形內切圓半徑與全圓半徑間的關係。而對邊和相等的等腰梯形則需要假設三個切線段長。

捌、參考資料

一、Japanese Theorem の起源と歷史。三重大学教育学部研究紀要，第 52 卷，自然科学(2001)第 29 頁。

二、國中 3 上數學。1.相似形。2. 圓。康軒文教事業。2022。