中華民國第63屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030419

分割移動瞥見矩形

學校名稱：桃園市立龍潭國民中學

作者：	指導老師：
國二 左丞翔	章寧靜
國二 廖宏偉	張君怡

關鍵詞：幾何剪拼、階梯狀分割、畢氏數

摘要

此研究主要探討一個任意的矩形將其挖去設定的缺格形狀，接著將矩形分割成數個區塊，以因式分解法、逆推法、階梯狀切割技術、座標位置移動法等研究方法，透過平移、旋轉、翻轉，重組成另一個較小的矩形，探討能否有最少片解，並尋找其中與矩形長寬的關係。研究發現，十種缺格類型能運用特定分割策略，可有最少片數二片或三片解完成重組，進而將圖形逐步擴大尋找出一般化規律。此外將缺格為方型、P 字型的矩形，探討階梯狀切割技術進階探究以最少切割片數，嘗試分析多種滿足$a^2+b^2=c^2$的畢氏三元數組及滿足$a^2+b^2+c^2=d^2$的四元數組，歸納出能以不同的切割策略，用分割移動圖解方式得重組成正方形，並探討其一般化規律。

壹、前言

一、研究動機：

數學課中討論到關於「證明畢氏定理」，其中有不少數學家使用圖形剪拼的方法來證明，例如：Perigal 提出他的證法[1](圖 1.1)。因此，我們對於「兩個等面積的平面幾何圖形，能透過剪拼的方式，將一個圖形剪成數個碎片，且能重組拼成另一個完整的矩形」，覺得相當有趣。某次上課，老師分享了《多方塊的數學問題、拼圖謎題與遊戲》這一本書，引發我們好奇與挑戰。其中提到某種五方連塊的變形拼圖謎題(圖 1.2)：「每次增加 1 片五方連塊，拼成逐漸加大的矩形。先由 3 片開始，拼成 5×3 的矩形，再加入 1 片新的五方連塊，盡可能減少移動之前已排好的格子，拼成 5×4 的矩形，以此類推」。[2]

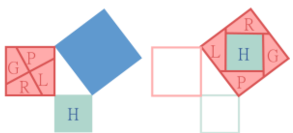


圖 1.1：畢氏定理證明之一:Perigal 的證法

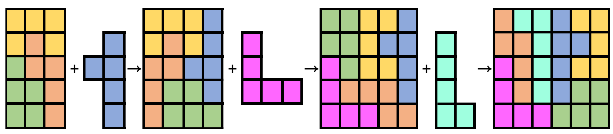


圖 1.2：《多方塊的數學問題、拼圖謎題與遊戲》

二、研究目的：

我們將「多方塊」與「幾何剪拼」結合起來，進行「逆向思考」而產生了新的想法，想探究「在一個 m×n 的矩形中，挖去某幾個方連塊的空格，並沿著方格線剪拼的方式，盡可能以最少分割數的情況下，重組成一個面積較小的矩形。」並進行策略探討。如圖 1.3：

- 沿著方格線剪拼
- 使用最少分割片數
- 透過平移、旋轉、翻轉

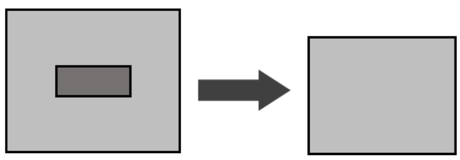


圖 1.3：研究目的示意圖

三、文獻探討：

一個古老的幾何解剖謎題「Disscetion Puzzle」(圖 1.4)正好引起我們的共鳴—Loyd’s A&P Baking Powder Puzzle。這個謎題出現在 1885 年的一張廣告卡上，給定一個(15×23)矩形，中間有一個(3×7)矩形的孔，原來的拼圖卡片只提供了矩形的輪廓和洞，而難題是必須將圖形切成兩塊，重新組合成一個正方形[3][4]。

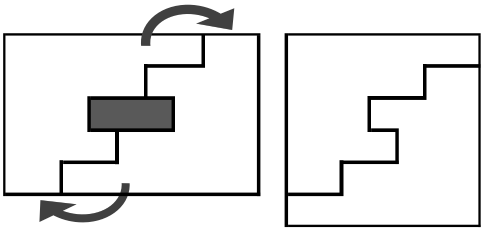


圖 1.4：幾何解剖謎題「Disscetion Puzzle」

這個難題的解法，除了運用了一個階梯解剖技術—Step Dissection(圖 1.5)，以某個長度的水平切割與另一個長度的垂直切割交替進行(Cardano,1663)，這樣的解剖技術能將一個$(3a \times 4b)$的矩形，切割重組成一個$(4a \times 3b)$的矩形(Dudeney,1926)。

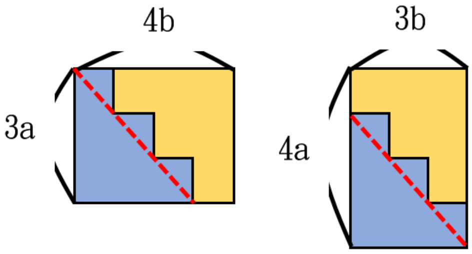


圖 1.5：運用 Step Dissection 重組矩形

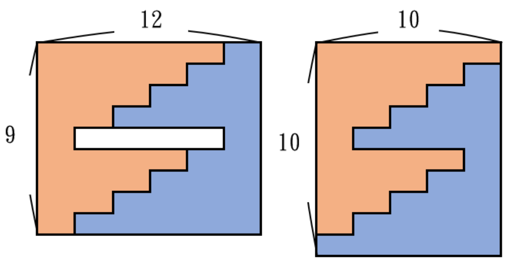


圖 1.6：運用 stutter-step 重組矩形

Loyd’s A&P Baking Powder Puzzle 同時也運用到另一種複合切割技術—stutter-step(圖 1.6)。當原來的矩形中給定一個矩形孔，先以階梯狀切割，然後是反向切割，接著是另一個階梯狀切割，最後形成一個適當尺寸的矩形填補缺口。將切割後的兩個塊圖形彼此經過滑步移動，形成了一個不同的矩形。而切割時必須精準確定水平與垂直格數，才能解決這個問題。這些階梯解剖的技術後來也運用在解決「畢達格拉斯夫人謎題」，以最少三片解且發現有不同的解法(圖 1.7、圖 1.8)。(Loyd,*Inquirer*,1899 & Dudeney,*London*,1902)。

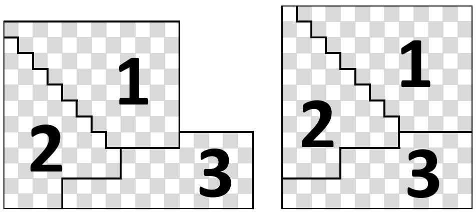


圖 1.7：Loyd’ squares for$5^2 + 12^2 = 13^2$

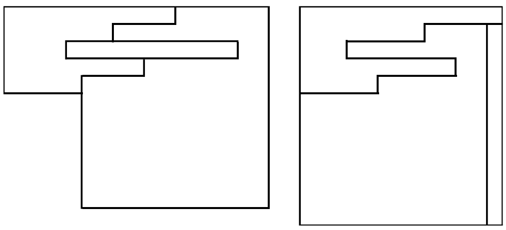


圖 1.8：Dudeney 切割技術運用於$5^2 + 12^2 = 13^2$

貳、研究問題

研究方向朝向將任意大小的矩形內部挖去的方格空洞，擺放的位置可隨意放置，我們定義下列十種缺格類型，如圖 2.1：

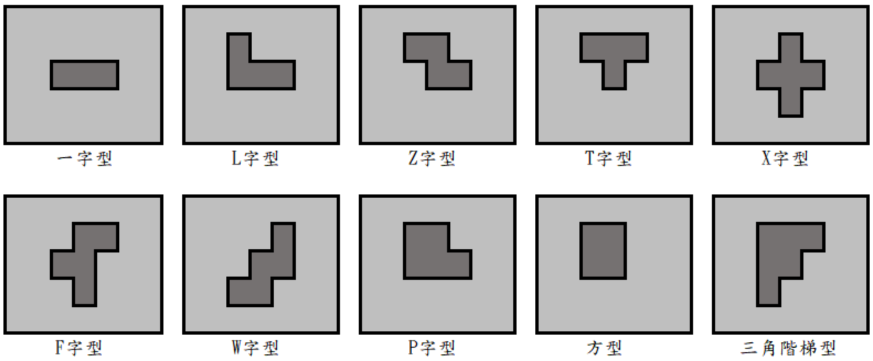


圖 2.1：十種缺格類型

我們的研究問題如下：

一、　這十種缺格類型，有哪些分割策略，能以最少的區塊，透過平移、旋轉重組成矩形？

二、　將矩形逐步擴大，能否依其規律推導出重組前後長寬變化的一般式？

三、　探討是否有無法兩片解之情形？

四、　能否由原字型擴大變形，依其規律而導出重組前後長寬變化一般式？

五、　是否能用階梯解剖技術剪拼分割畢氏定理的圖形，以最少片解說明畢氏三元數、畢氏四元數的圖形解法？

參、研究設備及器材

USL 立體方塊、方格紙、筆、Excel、Scratch 積木程式

肆、研究方法

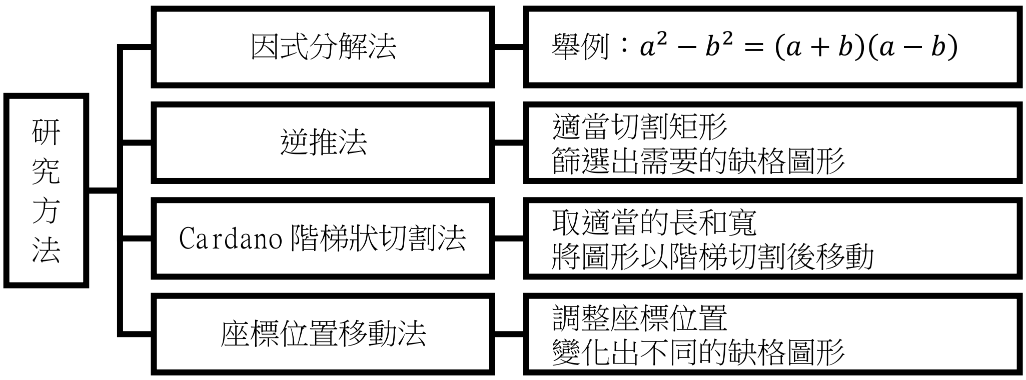


圖 4.1:研究架構圖

一、因式分解法：

（一）如圖 4.2，以正方形挖去正方形為例：

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$將藍色矩形切割，順時針旋轉 90°拼成一個矩形。

（二）如圖 4.3，以正方形挖去長方形為例：

$(4x)^2 - 2xy = 16x^2 - 2xy = 2x(8x-y)$將藍色切割後，向右翻轉後拼成一個矩形。

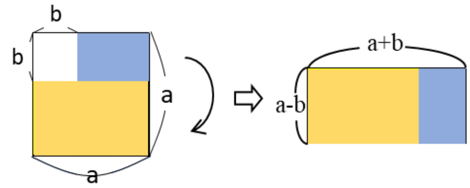


圖 4.2：$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

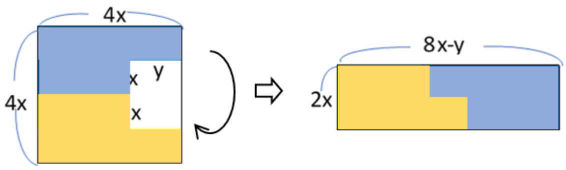


圖 4.3：$(4x)^2 - 2xy = 16x^2 - 2xy = 2x(8x-y)$

二、逆推法：

嘗試切割矩形，再篩選出我們需要的缺格圖形。以 6×3 矩形為例，經過適當的切割，發現可得到一個正方形挖去 P 字型 5×5-7=6×3 的解法，如圖 4.4。

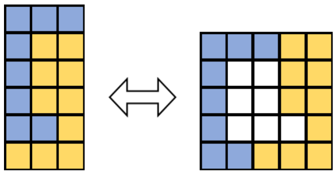


圖 4.4：使用逆推法

三、Cardano 階梯狀切割法：

以 6×10 的矩形說明：

（一）若想將 6×10 矩形重組為 3×20 矩形，切割時分別取長寬為 gcd(6,3)=3、gcd(10,20)=10 的矩形，階梯切割後平移(圖 4.5)。

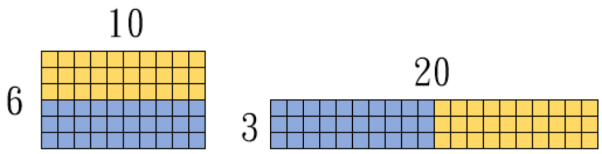


圖 4.5：6x10 的矩形重組為 3x20 的矩形

（二）若想將 6×10 矩形重組為 4×15 矩形，切割時分別取長寬為 gcd(6,4)=2、gcd(10,15)=5 的矩形，階梯切割後平移(圖 4.6)。

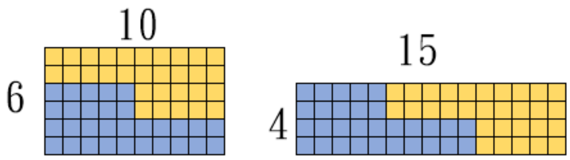


圖 4.6：6x10 的矩形重組為 4x15 的矩形

（三）若想將 6×10 矩形重組為 5×12 矩形，切割時分別取長寬為 gcd(6,5)=1、gcd(10,12)=2 的矩形，階梯切割後平移(圖 4.7)。

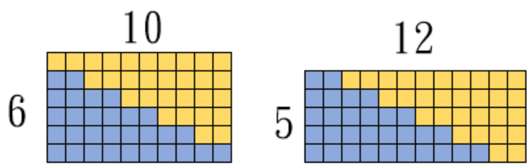


圖 4.7：6x10 的矩形重組為 5x12 的矩形

四、座標位置移動法：

以座標位置調整，在圖 4.8 中，座標移動向右移 2 格、向上移動 1 格，變化出不同缺格的圖形，研究問題四、原字型擴大變形時就使用不少此方法。

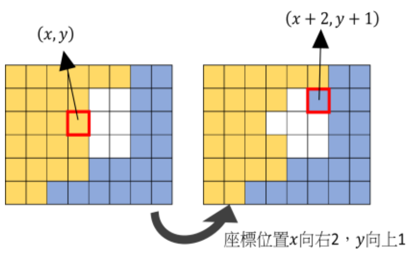


圖 4.8：使用座標位置移動法

伍、研究過程與結果

一、十種缺格類型分割重組策略分析：

（一）一字型：以 6×9-5=7×7 為例(圖 5.1)，以階梯狀切割策略思考。

step1：設定一字型位置。

step2：運用 stutter-step 階梯切割技術，從 A 點出發以(1×2)階梯狀往左下方切割到 B 點折回，接著向右 3 格到 C 點，再繼續以(1×2)階梯狀向左下方到達 D 點。

step3：分割成①②兩片，並紀錄每一行切割後的格數。

step4：確認左側格數經過往上移 1 格，與右側格數相加正好均為 7。

step5：將①往上平移 1 格、向右平移 2 格，成功完成 6×9-5=7×7 二片解剪拼。

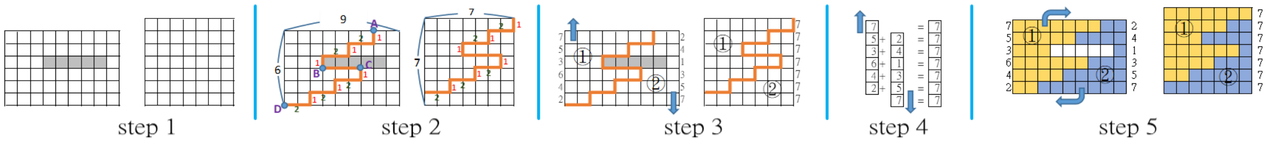


圖 5.1：一字型切割策略探討

（二）L 字型:以 5×5-4=7×3 為例(圖 5.2)，以平移、翻轉策略思考。

step1：設定 L 字型位置在中間。

step2：先將①逆時針旋轉 90 度並往右上方平移。

step3：最後把②補上。

step4：成功完成 5×5-4=7×3 兩片解剪拼。

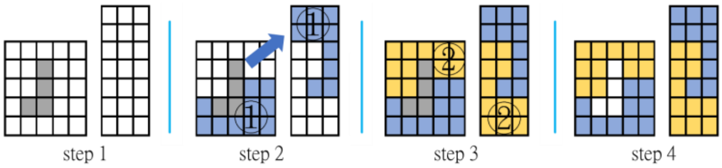


圖 5.2：L 字型切割策略探討

（三）Z 字型:以 5×5-5=4×5 為例(圖 5.3)，以平移、翻轉策略思考。

step1：設定 Z 字型位置在右下方。

step2：先將①往右平移。

step3：最後把②補上。

step4：成功完成 5×5-5=4×5 兩片解剪拼。

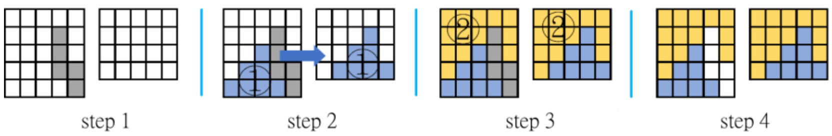


圖 5.3：Z 字型切割策略探討

（四）T 字型：以 5×5-5=4×5 為例(圖 5.4)，以平移、翻轉策略思考。

step1：設定 T 字型位置在中間。

step2：先將①往右方平移。

step3：利用翻轉策略，將②貼齊①。

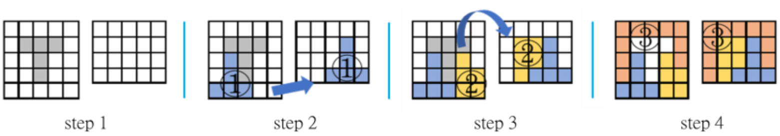


圖 5.4：T 字型切割策略探討

step4：最後把③補上，成功完成 5×5-5=4×5 三片解剪拼。

（五）**X 字型: 以 5×7-5=6×5 為例(圖 5.5)，以平移、翻轉策略思考。**

step1：設定 X 字型位置在中間。

step2：可發現為點對稱圖形。

step3：先將①往右方平移，再平移②部分。

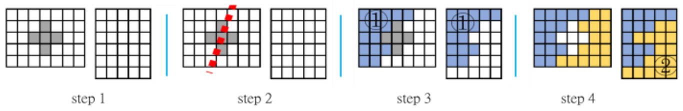


圖 5.5：X 字型切割策略探討

step4：成功完成 5×7-5=6×5 兩片解剪拼。

（六）**F 字型：以 5×5-5=4×5 為例(圖 5.6)，以平移、翻轉、旋轉策略思考。**

step1：設定 F 字型位置在正中央

step2：先將①翻轉並往右上平移。

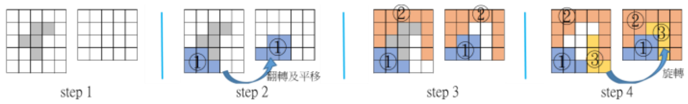


圖 5.6：F 字型切割策略探討

step3：再將 F 字型由左至由包圍，如同②，發現整體僅剩 L 字型缺格。

step4：最後把③L 字型經過翻轉，成功完成 5×5-5=4×5 三片解剪拼。

（七）**W 字型：以 5×4-5=5×3 為例(圖 5.7)，用 W 字型變化為 L 字型策略思考。**

step1：設定 W 字型位置在左上角。

step2：以 W 字型基本型 組合策略框出 3×3。

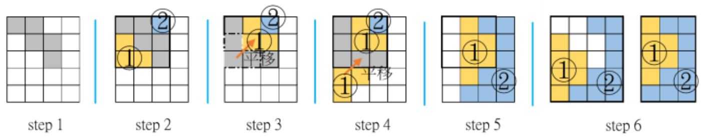


圖 5.7：W 字型切割策略探討

step3：先將 先向右上移動組成 2×2 矩形，發現整體形成 L 字型缺格。

step4：再以 L 字型二片角策略，將左下角 向右上移動和 Step3 組合起來。

step5：確認剩餘方格形狀無誤。

step6：成功完成 5×4-5=5×3 二片解剪拼。

（八）**P 字型：以 6×8-6=7×6 為例(圖 5.8)，以階梯狀切割策略思考。**

step1：設定 P 字型位置在正中央。

step2：因 gcd(6,7)=1、gcd(8,6)=2，運用 stutter-step 階梯切割技術，從 A 點出發以(1×2)階梯狀往左下方切割到 B 點折回，接著向右 2 格、向下 1 格到 C 點，繼續以(1×2)階梯狀向左下方經過 D 點到達 E 點。

step3：分割成①②兩片，並紀錄每一行切割後的格數。

step4：確認左側格數經過往上移 1 格，與右側格數相加正好均為 6。step5：將①往上平移 1 格、向右平移 2 格，成功完成 6×8-6=7×6 二片解剪拼。

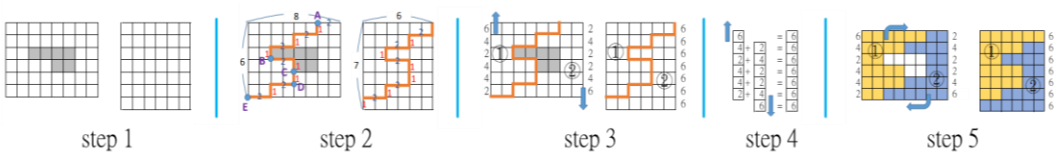


圖 5.8：P 字型切割策略探討

（九）方型：以 5×8-4=6×6 為例(圖 5.9)，以階梯狀切割策略思考。

step1：設定方型位置。

step2：因 gcd(8,6)=2，gcd(5,6)=1，運用階梯切割技術，從 A 點出發以(1×2)階梯狀往左下方切割到 B 點折回，接著向下 3 格到 C 點，最後左 2 格到 D 點。

step3：分割成①②兩片，並紀錄每一行切割後的格數。

step4：確認左側格數經過往上移 1 格，與右側格數相加正好均為 6。

step5：將①往上平移 1 格、向右平移 2 格，成功完成 5×8-4=6×6 二片解剪拼。

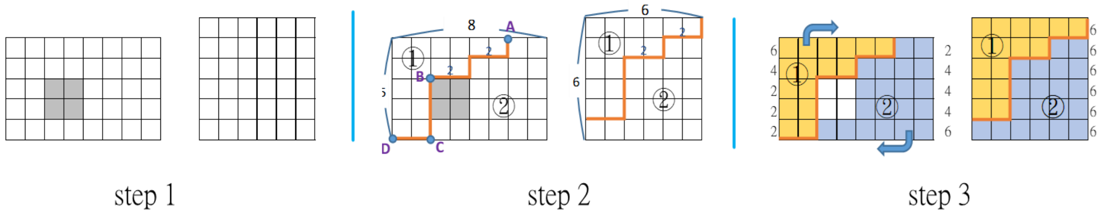
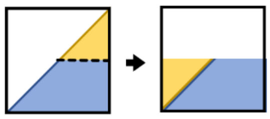


圖 5.9：方型切割策略探討

（十）三角階梯型(圖 5.10)



若將一個正方形挖去左上角三角階梯狀方塊，策略如同等腰直角三角形，通過正方形對角線的中點進行水平切割，分割成二片三角形，再將上半部三角形旋轉 180 度與下半部三角形重組成矩形。

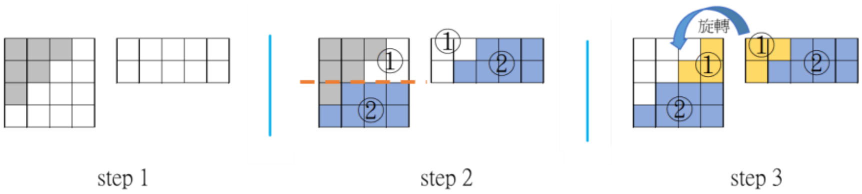
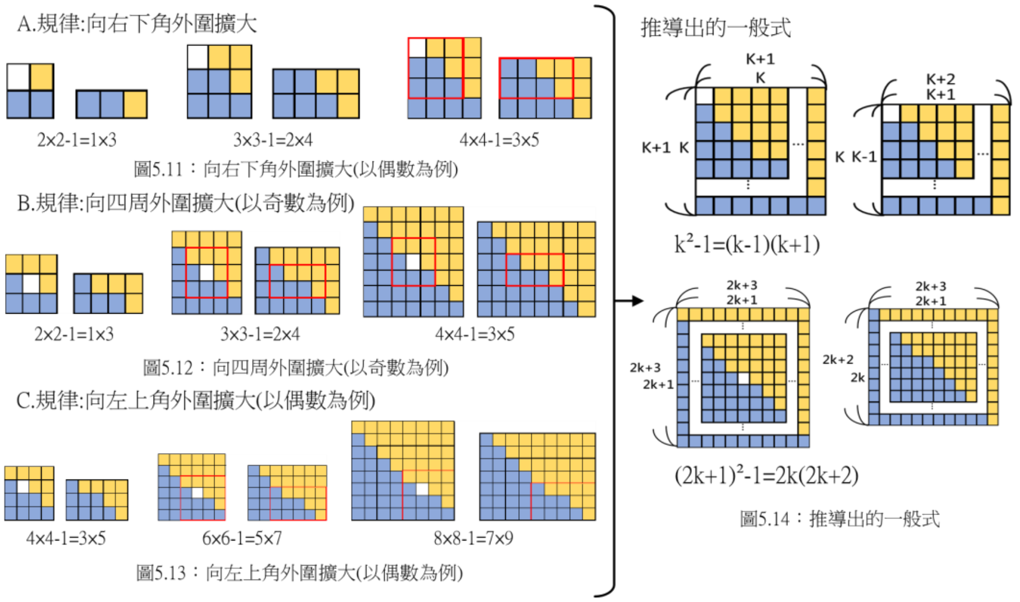


圖 5.10：三角階梯切割策略探討

二、推導分割重組長寬的一般式：

（一）以基本型$\boxed{\text{向外擴大}}$之規律：

1.以正方形挖單一空格為例，推導向外擴大之一般式：$n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$



2.以正方形挖 L 字型空格為例，當 n=2k+1 為奇數時，推導向外擴大之一般式：

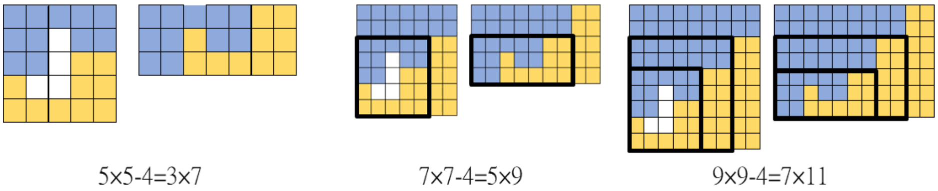


圖 5.15： $n^2 - 4 = (n-2)(n+2)$

3.以矩形挖方型空格為例，推導向外擴大之一般式：

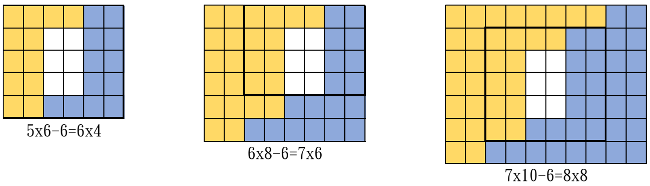


圖 5.16： $(n+4)(2n+4) - 6 = (n+5)(2n+2)$

4.以矩形挖去十字型空白為例(圖 5.17)，推導向外擴大之一般式：

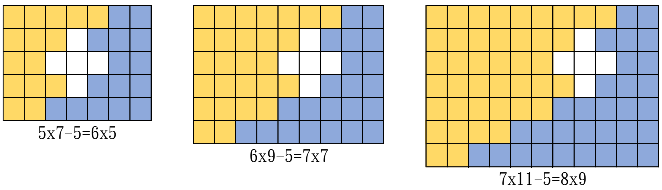


圖 5.17： $(n+4)(2n+5) - 5 = (n+5)(2n+3)$

5.以正方形挖去左上角三角階梯狀空格為例，推導向外擴大之一般式：

本研究方法是沿著方塊邊線切割，所以我們需要將邊長分為奇偶數討論：

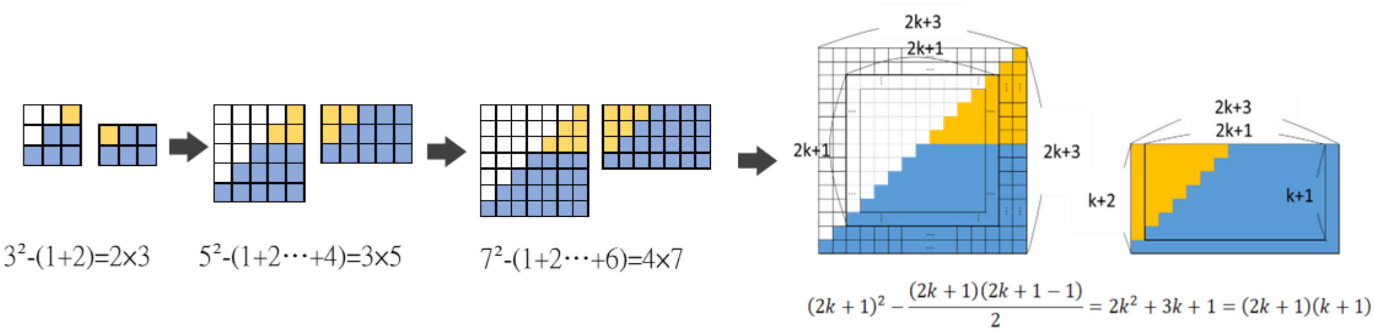


圖 5.18：推導出一般式(2k+1)(k+1)

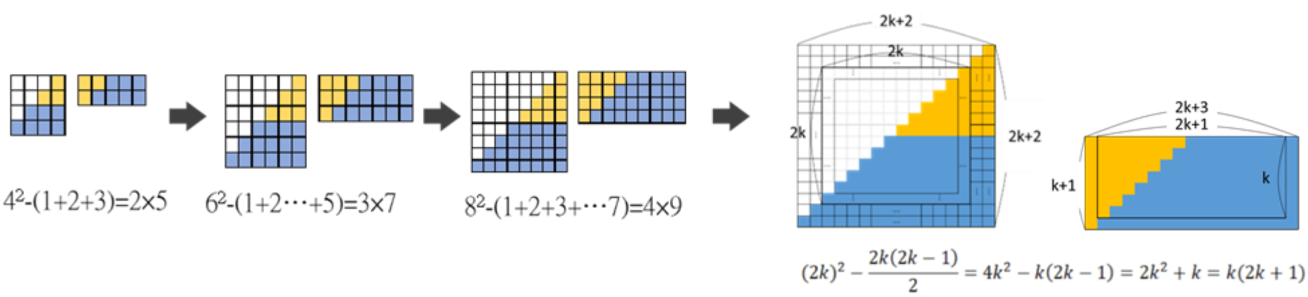


圖 5.19：推導出一般式 k(2k+1)

（二）以基本型中心點左右偏移由內部擴大之規律：

1.一字型其變形，重組成邊長為奇數正方形：推導一般式$n(n+3)-(n-1)=(n+1)^2$

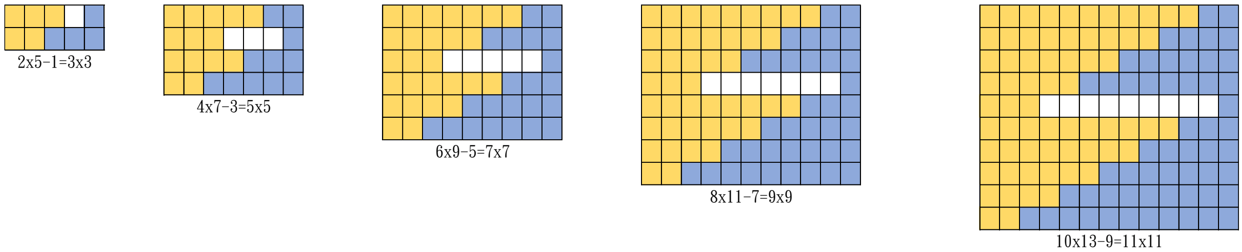


圖 5.20：重組成邊長為奇數正方形

2.一字型其變形，重組成邊長為偶數正方形：推導一般式$n(n+3)-(n-1)=(n+1)^2$

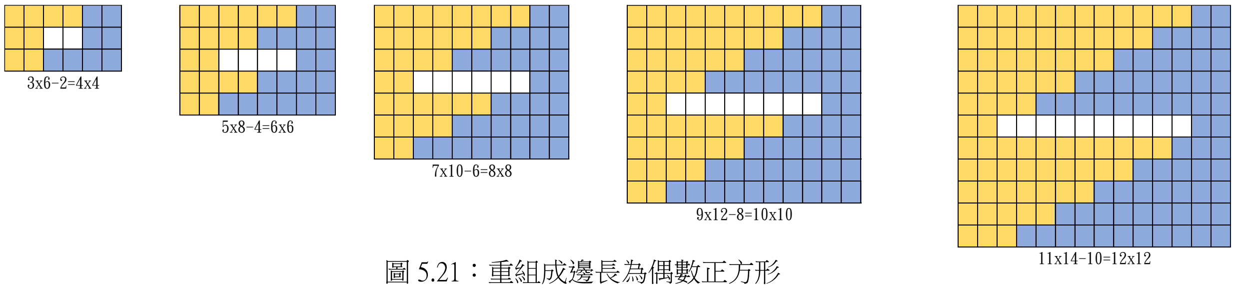


圖 5.21：重組成邊長為偶數正方形

3.以矩形挖方型空格為例，推導由內部擴大之一般式：$7\times(6n)-(10n)=8\times(4n)$

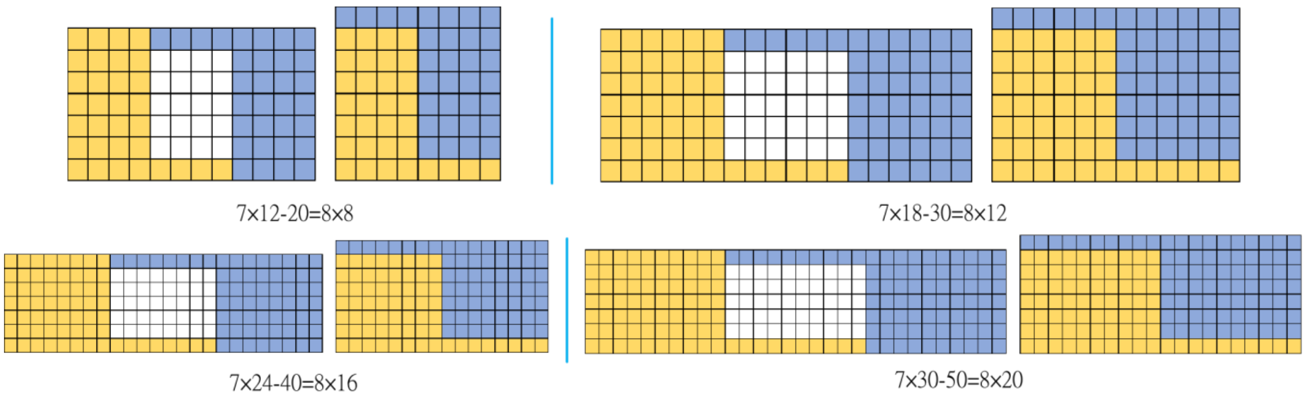


圖 5.22：由內部擴大

4.以矩形挖 X 字型空格為例，推導由內部擴大之一般式：$n(n+2)-n=n(n+1)$

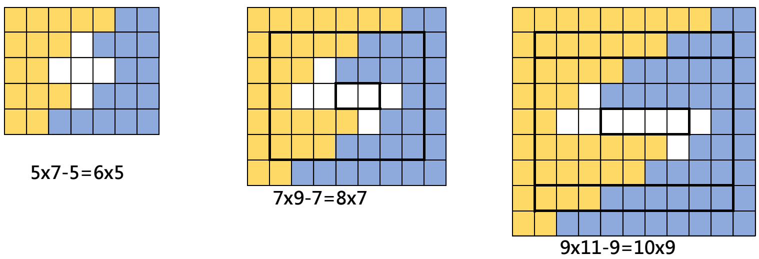


圖 5.23：以矩形挖 X 字型空格為例

（三）以基本型複合式擴大(包含向外圍擴大、中心點左右偏移由內部擴大)之規律：

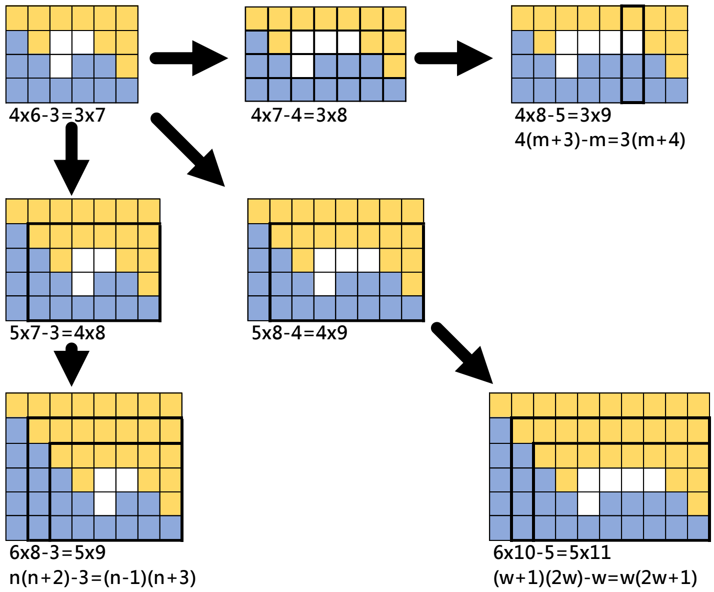


圖 5.24：以基本型複合式擴大

三、無法分割為二片圖形之探討：

從不同矩形的切割中，我們發現有些矩形無法直接用兩片解成功，因此我們覺得可能跟切割矩形長寬及切割位置有關。

（一）矩形長寬：

1.矩形邊長切割前最大邊長為切割後最大邊長的 2 倍大(圖 5.25)

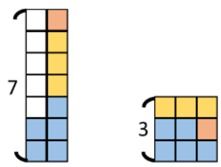


圖 5.25：邊長$\frac{7}{3} > 2$

2.所餘面積為質數情形：

（1）切割前矩形最短邊為 2，且缺格為兩側(圖 5.26)：

最短邊為 2 因此分成 2 行，但同 1 行未被分成兩半，因此可兩片解。

（2）切割前矩形最短邊為 2，且缺格不為兩側(圖 5.27)：

最短邊為 2 因此分成 2 行，但同 1 行被分成兩半，因此不能兩片解。

（3）切割前矩形最短邊大於 3(圖 5.28)：

最短邊只要大於三，均會被分成三行以上，因此不能兩片解。

圖 5.26：最短邊 2，缺格為兩側

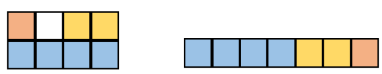


圖 5.27：最短邊 2，缺格不為兩側

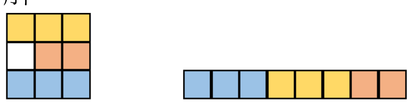


圖 5.28：最短邊大於 3

（二）切割位置：n^2中間挖n個方塊無兩片解的證明($n \geq 4$)：

1.n^2圖形中間挖掉任意n方塊，會變成$n(n-1)$的矩形，因為是挖掉中間，因此正方形最外圈均被保留，且四邊長皆為n塊構成。(如圖 5.29)

2.我們可以知道n^2的最外圈為$4n-4$塊構成，$n(n-1)$的最外圈為$4n-6$塊構成，如果要兩片解，最外圈的方塊終究還在最外圈，也就是說我們要拿原來$4n-4$塊去拼成$4n-6$的切割後外圈，但$4n-4>4n-6$，顯然是不可能的，因此無法兩片解。(如圖 5.30)

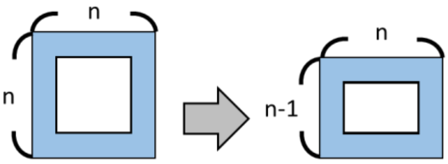


圖 5.29：切割前後最外圈均被保留

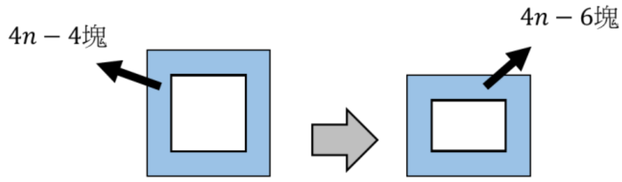


圖 5.30：切割前後最外圈塊數

3. $n^2-n=n(n-1)$僅能以三片解切割重組矩形，如圖 5.31 幾種樣式：

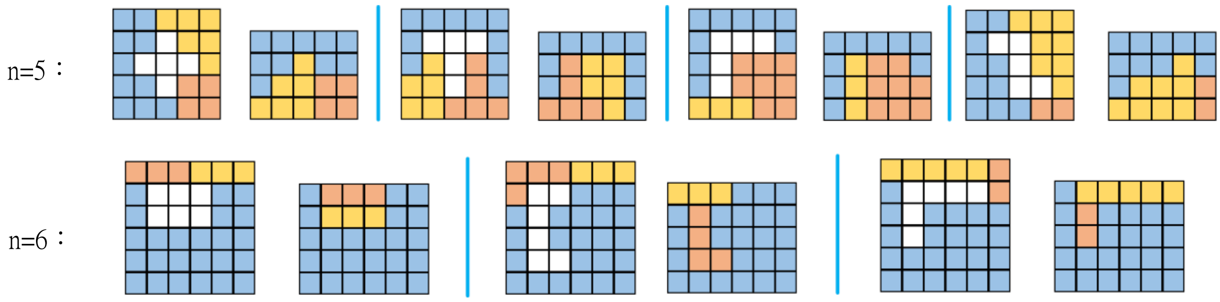


圖 5.31：n=5 和 6 的三片解例圖

四、逐步變形推導一般式：

（一）L 字型→T 字型變形，重組成邊長為奇數正方形：

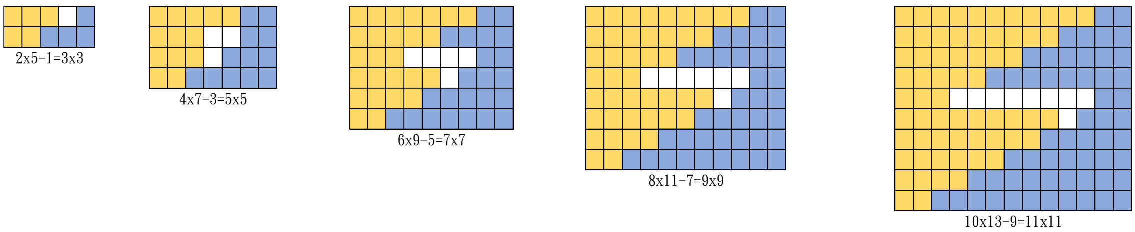


圖 5.32：L 字型→T 字型變形 $n(n+3)-(n-1)=(n+1)^2$

（二）一字型→T 字型變形，重組成邊長為偶數正方形：

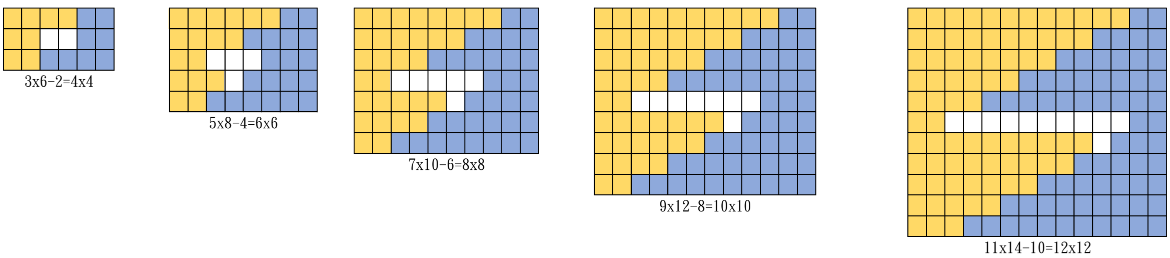


圖 5.33：一字型→T 字型變形 $n(n+3)-(n-1)=(n+1)^2$

（三）L 字型→P 字型變形，重組成邊長為奇數正方形：

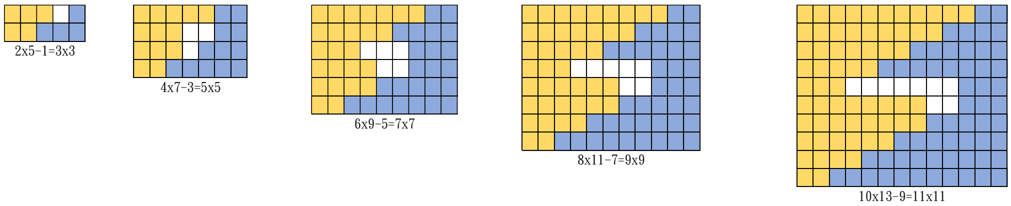


圖 5.34：L 字型→P 字型變形 $n(n+3)-(n-1)=(n+1)^2$

（四）方型→P 字型變形，重組成邊長為偶數正方形：

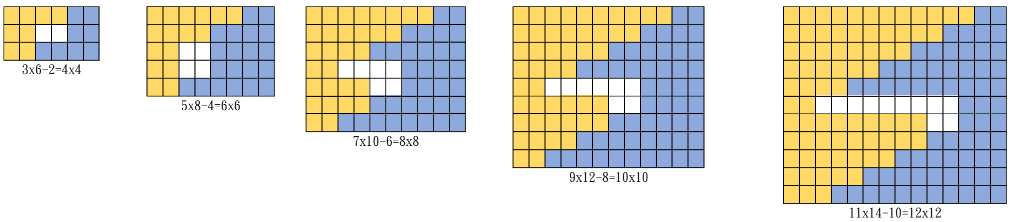


圖 5.35：方型→P 字型變形$n(n+3)-(n-1)=(n+1)^2$

（五）L 字型→P 字型變形，重組成邊長為奇數正方形：

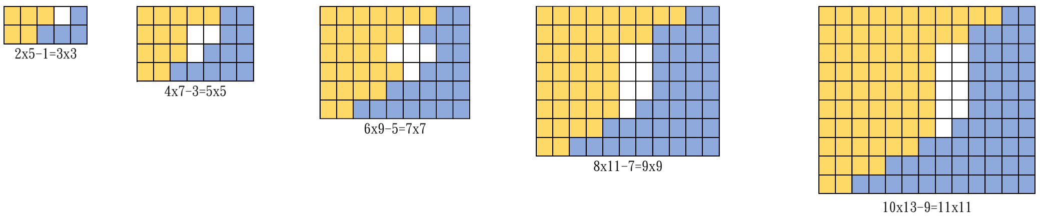


圖 5.36：L 字型→P 字型變形$n(n+3)-(n-1)=(n+1)^2$

（六）一字型→方型變形，重組成邊長為偶數正方形：

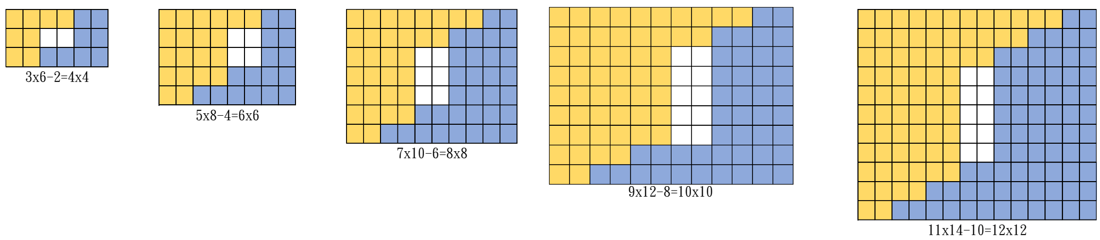


圖 5.37：一字型→方型變形 $n(n+3)-(n-1)=(n+1)^2$

（七）一字型→L 字型→T 字型變形：

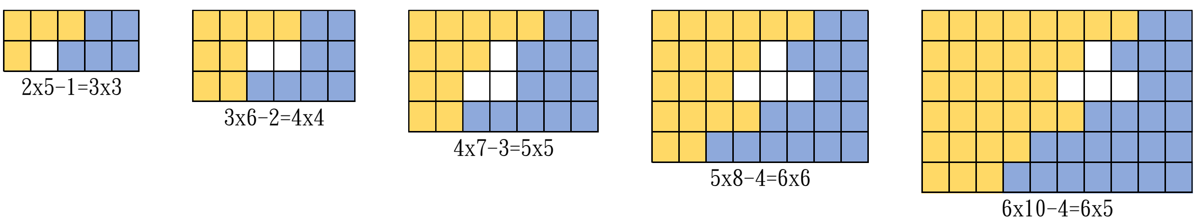


圖 5.38：一字型→L 字型→T 字型變形 $n(n+3)-(n-1)=(n+1)^2$

五、延伸應用於畢氏定理幾何分割之探討：

在研究過程中，我們同時也發現由矩形挖去「方型」空格，以 17×12-5×7=13×13 為例，觀察到的形狀就如同文獻探討中提到的$5^2+12^2=13^2$以三片解之幾何分割[5](Loyd, sam/ Sloan, sam,1914)。

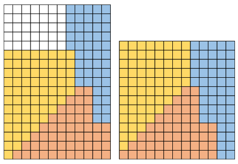


圖 5.39：本研究切割策略

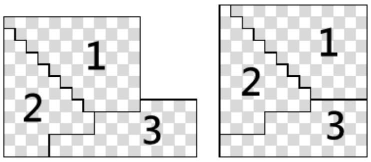


圖 5.40：Loyd'squares for $5^2+12^2=13^2$

此外，由矩形挖去「P 字型」空格，以 11×6-17=7×7 為例，則觀察到的形狀就如同文獻探討中提到的$2^2+3^2+6^2=7^2$以三片解之幾何分割。可見無論是三元數或四元數均有不同的切割策略。

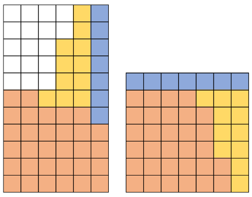


圖 5.41-1：切法一

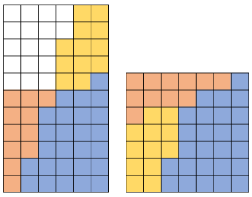


圖 5.41-2：切法二

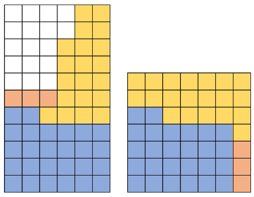


圖 5.41-2：切法三

參考過去文獻[6]，與文獻不同的是，我們研究各種畢氏三元數、四元數，並以階梯分割技術用最少片數證明$a^2+b^2=c^2$及$a^2+b^2+c^2=d^2$，探究圖解策略並進行填色實驗，發現有多種解法，並嘗試推導畢氏三元數、四元數的一般式。

（一）畢氏三元數的研究結果：

符號定義T_A為邊長最小的正方形，T_B為邊長次小的正方形，T_C為邊長最大的正方形。以邊長關係分為 A、B、C_1、C_2四大類。

A 類：T_A為奇數，T_B為偶數，且$T_C-T_B=1$

研究一：$\mathbf{3^2+4^2=5^2}$切割策略：

1. 先將T_A畫在T_C的右上方，因為T_B和T_C的邊長相差 1，因此藍色第二層少一個邊。
2. 接著將T_B畫一條紅線，因為T_B為偶數，所以取中心點，中心點到左下角為黃色，剩下為橘色，完成切割。

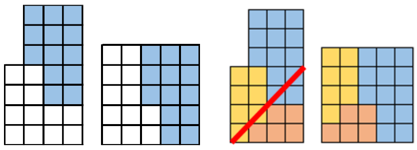


圖 5.42：$3^2+4^2=5^2$

研究二：$5^2+12^2=13^2$切割策略：

1. 先將T_A畫在T_C的右上方，因為邊長為 13，而正方形已經用了 5 格，因此 13-5=8，接著因為T_B和T_C的邊長相差 1，因此藍色第二層少一個邊。
2. 接著每降一層少兩個邊，因此紅色框線框起來的地方將用階梯切法，12x4=8x6，gcd(12,8)=4,gcd(4,6)=2，因此階梯切法為 4、2。
3. 接著將T_B畫一條紅線，因為T_B為偶數，所以取圖形的中心點，中心點到左下角為為黃色，剩下為橘色，最後即可完成切割。

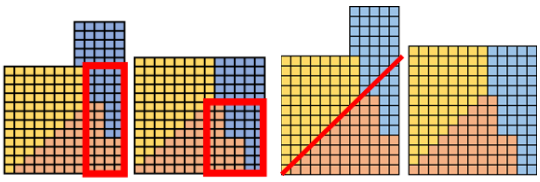


圖 5.43：$5^2+12^2=13^2$

研究三：$7^2+24^2=25^2$切割策略：

1. 先將T_A畫在T_C的右上方，那因為邊長要為 25，而正方形已經用了 7 格，因此 25-7=18，接著因為T_B和T_C的邊長相差 1，因此藍色第二層少一個邊。
2. 接著每降一層少兩個邊，因此階梯切法為 gcd(24,18)=6、gcd(6,8)=2，因此階梯切法為 6、2。
3. 接著將T_B畫一條紅線，因為T_B為偶數，所以取中心點，中心點到左下角為左上那片，剩下為底下那片，最後完成切割。

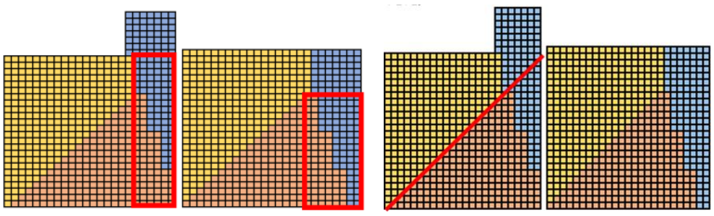


圖 5.44：$7^2+24^2=25^2$

研究四：$9^2+40^2=41^2$切割策略：

1. 先將T_A畫在T_C的右上方，那因為邊長要為 41，而正方形已經用了 9，因此 41-9=32，接著因為T_B和T_C的邊長相差 1，因此藍色第二層少一個邊。
2. 接著每降一層少兩個邊， gcd(40,32)=8、gcd(8,10)=2，因此階梯切法為 8、2。
3. 接著將T_B畫一條紅線，因為T_B為偶數，所以取中心點，中心點到左下角為左上那片，剩下為底下那片，最後完成切割。

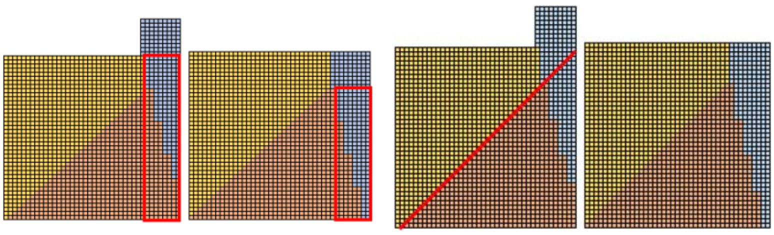


圖 5.45：$9^2+40^2=41^2$

以圖解方式，兩塊連接在一起的正方形，可運用階梯分割技術重組成較大的正方形。(如圖 5.46-1、2)。本研究使用了不同分割策略，能驗證$a^2+b^2=c^2$畢氏定理(如圖 5.46-3)，在圖 5.47 中，此切割技術亦可與「正方形分撕秀」作品中探討畢氏三元數(a,b,c)的三個正方形剪拼策略比較。

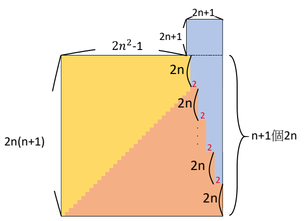


圖 5.46-1

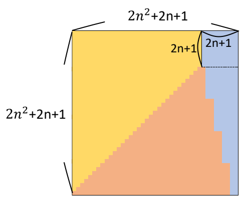


圖 5.46-2

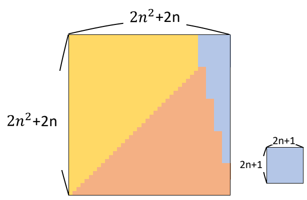


圖 5.46-3

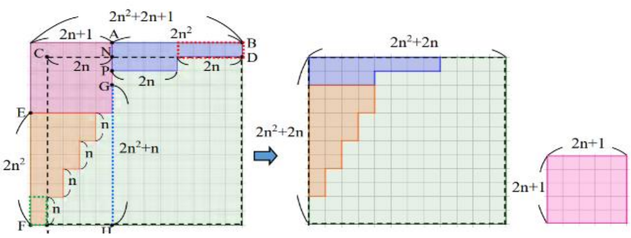


圖 5.47「正方形分撕秀」作品中探討畢氏三元數之

我們發現可將A類畢氏三元數(a,b,c)數據整理如表 5.1，且將其以一般式表達：

n	$a=2n+1$	$b=2n(n+1)$	$c=2n(n+1)$
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41

表 5.1：畢氏三元數$(a,b,c)A$類數據整理表

B 類：T_A為偶數，T_B為奇數，且$T_C-T_B=2$

研究一：$8^2+15^2=17^2$切割策略：

1. 先將T_A的藍色部分固定，接著利用階梯切法，每$\frac{8-2}{2}=3$格為一個單位。
2. 接著把剩餘的黃色區塊補到左上方即完成切割。

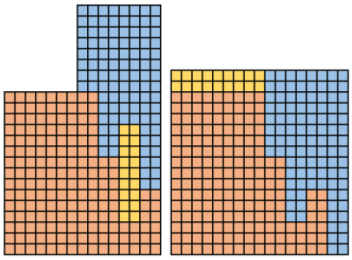


圖 5.48：$8^2+15^2=17^2$

研究二：$12^2+35^2=37^2$切割策略：

1. 先將T_A的藍色部分固定，接著利用階梯切法，每$\frac{12-2}{2}=5$格為一個單位。
2. 接著把剩餘的黃色區塊補到左上方即完成切割。

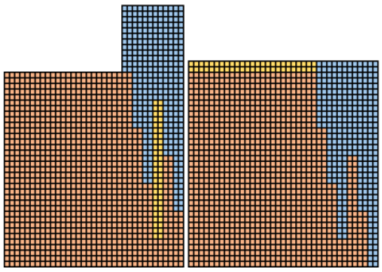


圖 5.49：$12^2+35^2=37^2$

我們發現可將B類畢氏三元數(a,b,c)數據整理如表 5.2，且將其以一般式表達。

k	$n=2k$	$a=n^2-1$	$b=2n$	$c=n^2+1$
2	4	15	8	17
3	6	35	12	37
4	8	63	16	65
5	10	99	20	101

表 5.2：畢氏三元數$(a,b,c)B$類數據整理表

C_1類：T_A為偶數，T_B為奇數，且$T_C-T_B\neq 1or2$

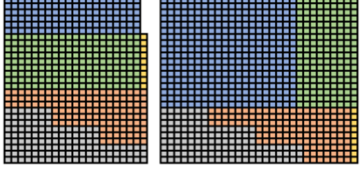


圖 5.50：研究一 $20^2+21^2=29^2$

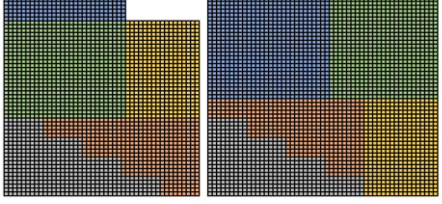


圖 5.51：研究二$28^2+45^2=53^2$

切割策略：

1. 藍色區塊為T_A，因此先切下藍色區塊並且放在T_C的左上角作為一塊。
2. 接著在T_B的中間切一條線(不一定為正中間)，分割為上下兩塊。
3. 接著在T_B上面切一綠色區塊順時針旋轉 90 度把它補到 Tc 的右上角。
4. 再接著將T_B剩下的黃色區塊移至T_C的右下方。
5. 最後把T_B下面用階梯切法將$4(n-2)\times 5(n+2)\rightarrow [4(n-2)+(n-2)]\times[5(n+2)-(n+2)]$ 縱向邊長$4(n-2)$與$(n-2)^2$最大公因數為$n-2$,橫向邊長$5(n+2)$與$4(n+2)$最大公因數為$n+2$，因此階梯切法以縱$n-2$、橫$n+2$的方式切割。

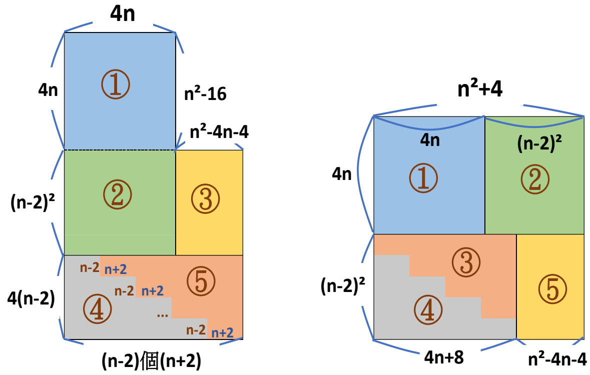


圖 5.52：C_1類五片解一般式圖

我們發現可將C_1類畢氏三元數(a,b,c)數據整理如表 5.3，且將其以一般式表達：

k	$n=2k+3$	$a=4n$	$b=n^2-4=(n-2)(n+2)$	$c=n^2+4$
1	5	20	21	29
2	7	28	45	53
3	9	36	77	85
4	11	44	117	125

表 5.3：畢氏三元數$(a,b,c)C_1$類數據整理表

C₂類：T_A為奇數，T_B為偶數，且$T_C-T_B\neq 1or2$

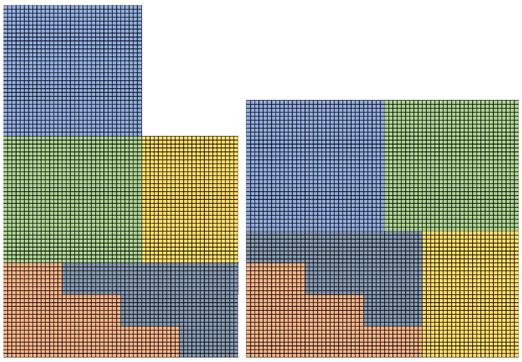


圖 5.53：研究一$33^2+56^2=65^2$

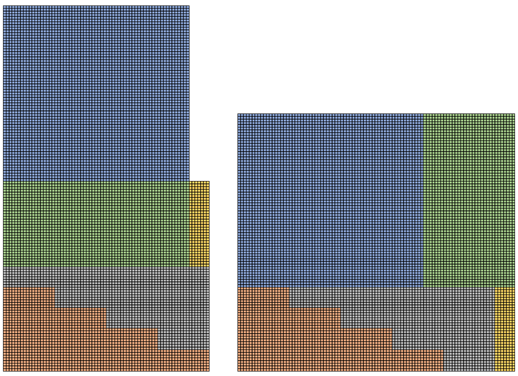


圖 5.54：研究二$65^2+72^2=97^2$

切割策略：

1. 藍色區塊為T_A，因此先切下藍色區塊並且放在T_C的左上角作為一塊。
2. 接著在T_B的中間切一條線(不一定要正中間)，分割為上下兩塊。
3. 接著在T_B上面切一綠色區塊順時針旋轉 90 度把它補到T_C的右上角。

4. 再接著將T_B剩下的黃色區塊移至T_C的右下方。

5. 最後把 T_B 下面用階梯切割法將$(8n-32)\times 8n \rightarrow (8n-24)\times(2n^2-8n)$ 縱向邊長$(8n-32)$與$(8n-24)$的最大公因數為 8,橫向邊長$8n=2n\times 4$與$2n^2-8n=2n(n-4)$最大公因數為$2n$，因此階梯切法以縱 8、橫$2n$的方式切割。

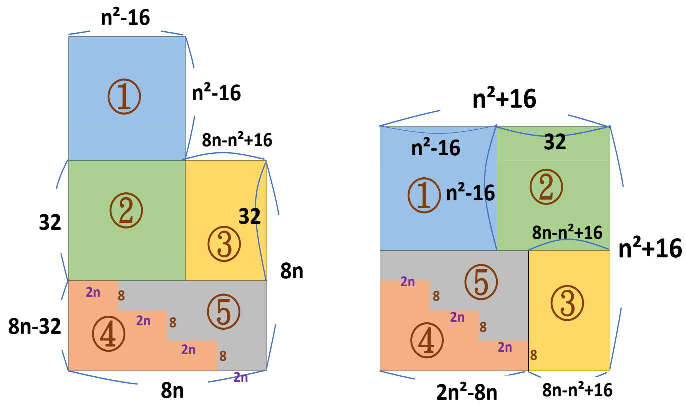


圖 5.55：C_2類五片解一般式

我們發現可將C_2類畢氏三元數(a,b,c)數據整理如表 5.4，且將其以一般式表達：

k	$n=2k+5$	$a=n^2-16$	$b=8n$	$c=n^2+16$
1	7	33	56	65
2	9	65	72	97
3	11	105	88	137
4	13	153	104	185

表 5.4：畢氏三元數$(a,b,c)C_2$類數據整理表

由上述C_1、C_2切割策略分析，我們發現(20,21,29)、(28,45,53)、(33,56,65)、(65,72,97)等這類的畢氏三元組其實可以僅以五片解切割方式來驗證，這也讓我們突破在「正方形分撕秀」科展作品中的提到六片解限制，並比較兩者之差異。

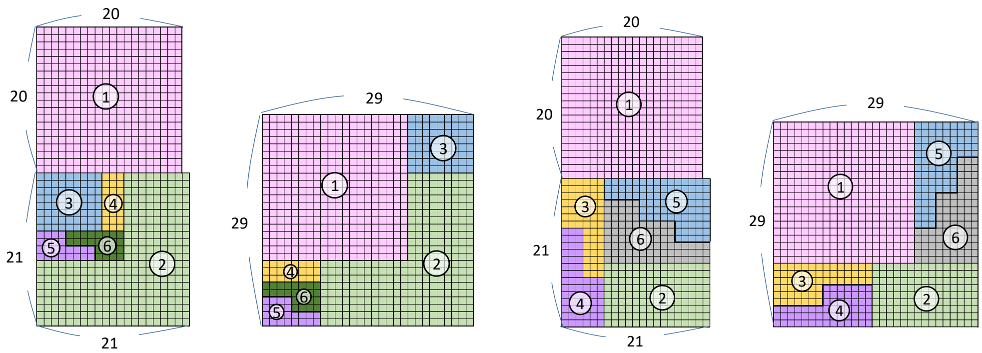


圖 5.56：「正方形分撕秀」作品探討$20^2+21^2=29^2$之切割策略(以六片解完成)

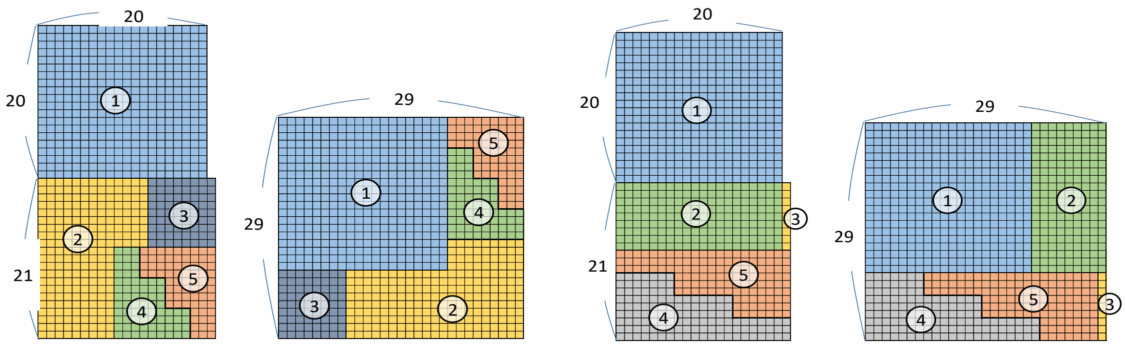


圖 5.57：本研究探討$20^2+21^2=29^2$之切割策略(僅以五片解完成)

此表探討本作品與「正方形分撕秀」切割上片數解不同的原因：

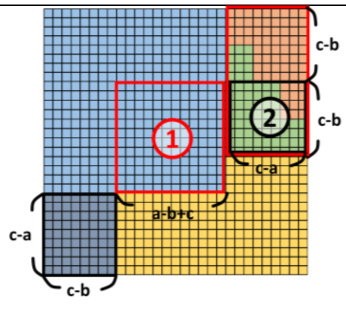
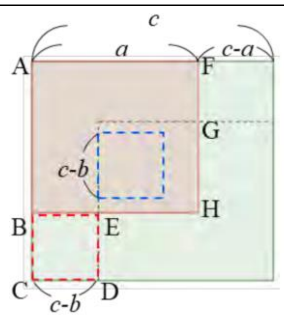
作品	相似處	關鍵處	圖示
本作品 (五片解)	皆固定$\boldsymbol{T_A}$ 進行切割	未限制左下方以及右上方的長、寬，分別為$(\boldsymbol{c-a})$、$(\boldsymbol{c-b})$，在原來的$(\boldsymbol{c-b})$加上$(\boldsymbol{c-b})$，使它能以階梯狀切割，接著將矩形$\boldsymbol{2(c-b)(c-a)}$重組成$(\boldsymbol{a-b+c})^{\boldsymbol{2}}$移至①的位置，再將矩形$(\boldsymbol{c-b})\times(\boldsymbol{c-a})$移至②的位置，即可得五片解。	 圖 5.58：本作品
正方形 分撕秀 (六片解)		保留$\boldsymbol{T_B}$的左下以及右上方區域，使$\overline{\boldsymbol{CD}}(\boldsymbol{c-b})$不為$\overline{\boldsymbol{GH}}(\boldsymbol{a+b-c})$的因數，也就是$\boldsymbol{c-b}$不為$\boldsymbol{a}$的因數。因此無法得出五片解	 圖 5.59：正方形分撕秀

表 5.5：本作品與「正方形分撕秀」作品比較表

(二)畢氏四元數的研究結果：

接下來我們有興趣於探討畢氏四元數，首先找到幾組畢氏四元數，(1,2,2,3)、(2,3,6,7)、(1,4,8,9)、(4,4,7,9)、(2,6,9,11)、(6,6,7,11)、(3,4,12,13)、(2,5,14,15)、(2,10,11,15)、(1,12,12,17)、(8,9,12,17)，並且嘗試能否以三元數相同策略進行分割，也發現同一個等式有不同的分割方式。

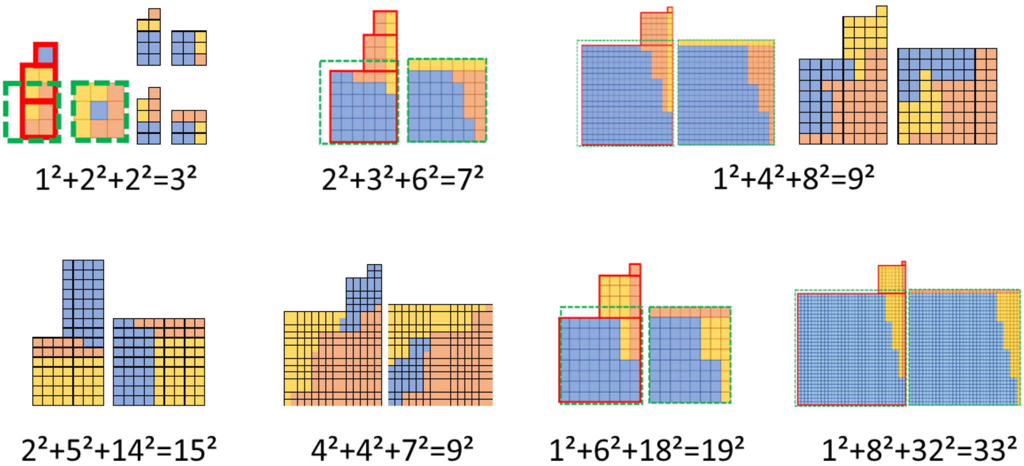


圖 5.60：畢氏四元數不同的切割方式

根據 Chandrahas Halai 於 2012 分享畢氏四元數a、b、c、d，以一般式表達四個正方形邊長[7](Chandrahas Halai, 2012)，其中$c=\frac{a^2+b^2-p^2}{2p}, d=\frac{a^2+b^2+p^2}{2p}$。我們則假設$a$為$m-n$，$b$為$n$，並以$n$的奇偶性質以及$m-n$的關係來分成$A_1$、$A_2$、$B_1$、$B_2$、$C_1$、$C_2$六大類，符號定義

四個正方邊形的邊長分別為S_A、S_B、S_C、S_D，因此本研究畢氏四元數的表示方法為：S_A為$m-n$，S_B為n，S_C為$\frac{[(m-n)^2+n^2-p^2]}{2p}$，$S_D$為$\frac{[(m-n)^2+n^2+p^2]}{2p}$。

A_1類$(n+1=m)$通式：

S_A：$m-n=n+1-n=1$　　　**S_B：n(偶數)**

S_C：$\frac{[(m-n)^2+n^2-p^2]}{2p}=\frac{1+n^2-1}{2}=\frac{n^2}{2}$　　　**S_D：$\frac{[(m-n)^2+n^2+p^2]}{2p}=\frac{1+n^2+1}{2}=\frac{n^2+2}{2}$**

研究一：$1^2+2^2+2^2=3^2$ $(n=2,m=3)$ 切割策略：

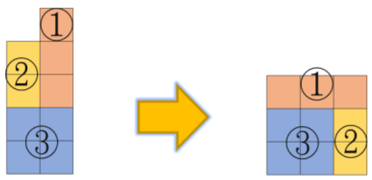


圖 5.61：$1^2+2^2+2^2=3^2$

1. 先將S_A的部分向下切縱 3 橫 1 到S_B最底下，切完後順時鐘旋轉 90 度並且把它放在S_D上方，使S_D變成(3-1)x3，完成第一步切割。
2. 再將黃色區塊縱 2 橫 1 切到S_D的右下角。最後再把藍色方型移至S_D左下角完成三片解的切割。

研究二：$1^2+4^2+8^2=9^2$ $(n=4,m=5)$ 切割策略

1. 先將S_A的部分向下切縱 9 橫 1 到S_C向下剩下 n，因為$(1+n+\frac{n^2}{2}-\frac{n^2+2}{2}=\frac{2+2n+n^2-n^2-2}{2}=n)$且 n 為偶數，切完後順時鐘旋轉 90 度並且把它放在S_D上方，使S_D變成(9-1)x9，完成第一步切割。
2. 再將紅色區塊(實線)框起來做 Cardano 階梯狀切割法，黑色區塊(虛線)是為了使切方格前的圖為矩形，且不影響原來切割。
3. 接著透過階梯切割法將$(8+4)\times 4\rightarrow 8\times(5+1)$，切割時，切割前和切割後的同一邊長必須為兩者的最大公因數，且切完的縱橫邊數塊相差不得大於 1，因此縱$(12,8)=4$，橫(4,6)=2，因此以縱 4 橫 2 的方式切割，且縱邊塊數為$\frac{12}{4}=3$，橫邊塊數為$\frac{4}{2}=2$，3-2=1，符合 Cardano 階梯狀切割法。
4. 最後把用階梯狀切割法切完的藍色圖形(左)和左邊的 8×4 矩形連在一起，完成三片解的切割。

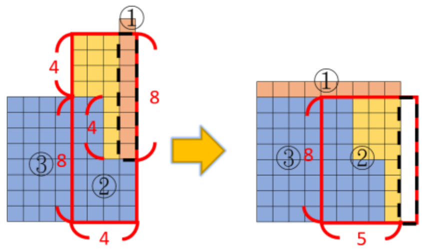


圖 5.62：$1^2+4^2+8^2=9^2$

研究三：$1^2+6^2+18^2=19^2(n=6,m=7)$切割策略

1. 先將S_A的部分向下切縱 19 橫 1 到S_C向下剩下 n，切完後順時鐘旋轉 90 度並且把它放在S_D上方，使S_D變成(19-1)×19，完成第一步切割。
2. 再將紅色區塊(實線)框起來做 Cardano 階梯狀切割法，黑色區塊(虛線)是為了使切方格前的圖為矩形，且不影響原來切割，接著透過階梯切法將$24\times 6\rightarrow 18\times 8$，做階梯切

法時，切前和切後的同一邊常必須為兩者的最大公因數，且切玩的縱橫邊數塊相差不得大於 1，因此縱$(24,18)=6$，橫(6,8)=2，因此以縱 6 橫 2 的方式切下來，且縱邊塊數為$\frac{24}{6}=4$，橫邊塊數為$\frac{6}{2}$ =3，4-3=1，符合 Cardano 階梯狀切割法。

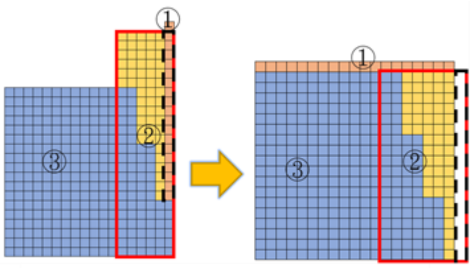


圖 5.63：$1^2+6^2+18^2=19^2$

3. 最後把用階梯狀切割法切完的藍色圖形(左)和左邊的 18× 12矩形連在一起，完成三片解的切割。

A_1類研究結果：$\langle 1,n,\frac{n^2}{2},\frac{n^2+2}{2}\rangle$的切割策略

1. 先從S_A沿直線縱向切割把紅色區域$1\times\frac{n^2+2}{2}$順時鐘旋轉 90 度到S_D上方
2. 接著以階梯切法將$5n\times n\rightarrow 4n\times(n+2)$，取兩者最大公因數且$n$必為偶數，因此$(5n,4n)=n$，$(n,n+2)=2$，以縱$n$橫 2 的方式切下來。

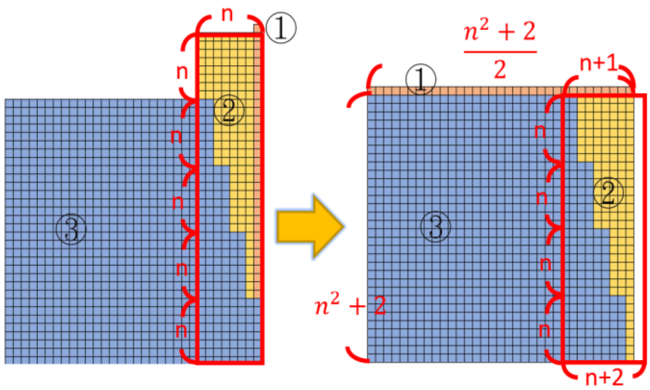


圖 5.64：探討$\langle 1,n,\frac{n^2}{2},\frac{n^2+2}{2}\rangle$的分解通解

3. 最後把剩餘的塊數$(n^2+2)\times\left[\left(\frac{n^2+2}{2}\right)-(n+1)\right]=(n^2+2)\times\frac{n^2-2n}{2}$與剛前一步切下來的左下角圖形彼此相連，完成三片解。

我們發現可將A_1類畢氏四元數(a,b,c,d)數據整理如表 5.6，且將其以一般式表達：

m	n	$a=m-n$	$b=n$	$c=\frac{n^2}{2}$	$d=\frac{n^2+2}{2}$
3	2	1	2	2	3
5	4	1	4	8	9
7	6	1	6	18	19
9	8	1	8	32	33

表 5.6：畢氏四元數$(a,b,c,d)A_1$類數據整理表

A_2類(2n-1=m)通式：

$\boldsymbol{S_A}$：$\boldsymbol{(2n-1)-n=n-1}$　　　　$\boldsymbol{S_B}$：$\boldsymbol{n}$**(偶數)**

$$S_C：\frac{[(m-n)^2+n^2-p^2]}{2p}=\frac{n^2-2n+1+n^2-1}{2}=\frac{2n^2-2n}{2}=n^2-n$$

$$S_D：\frac{[(m-n)^2+n^2+p^2]}{2p}=\frac{n^2-2n+1+n^2+1}{2}=\frac{2n^2-2n+2}{2}=n^2-n+1$$

研究一：$3^2+4^2+12^2=13^2(n=4,m=7)$的切割策略：

1. 先將紅色區塊$4(m-n)\times(n-2)\rightarrow 2(m-n)\times n$因此縱少$2(m=n)$，橫多 2，使 $(n-2)+2=n$ 。
2. 接著藍色框起來的區塊以階梯切法將 $12\times 10-3$(黑色區塊) $\rightarrow 13\times 9$，因此找兩邊的最大公因數，縱(12,13)=1,(10,9)=1，以縱 1 橫 1 的切法切，而中間那條對角線是為了使圖黃色的區塊不移動，被劃過的黃色塗色區域，保持著不移動，紅色圖色區域移動使藍色框起來的區域的縱邊 12 變成 12+1=13，橫邊 10 變成 10-1=9。

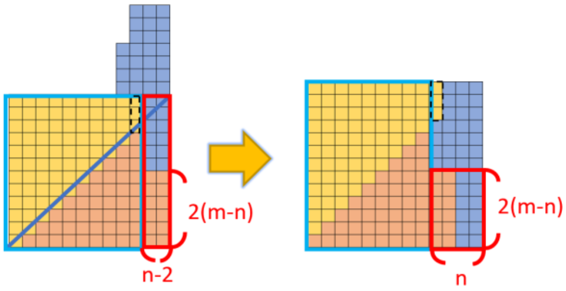


圖 5.65：$3^2+4^2+12^2=13^2$的通解

3. 最後只要把S_A以及S_B整個連接到S_D的右上角，即完成三片解的切割。

研究二：$5^2+6^2+30^2=31^2(n=6,m=11)$的切割策略：

1. 先將紅色區塊$6(m-n)\times(n-2)\rightarrow 4(m-n)\times n$因此縱少$2(m-n)$，橫多 2，使 $(n-2)+n=2$。
2. 接著藍色框起來的區塊以階梯切法將$20\times 16-5$(*黑色區塊*) $\rightarrow$ 21×15，因此找兩邊的最大公因數，縱(20,21)=1,(16,15)=1，以縱 1 橫 1 的切法切，而中間那條對角線是為了使圖黃色的區塊不移動，被劃過的黃色塗色區域，保持著不移動，紅色圖色區域移動使藍色框起來的區域的縱邊 20 變成 20+1=21，橫邊 16 變成 16-1=15。

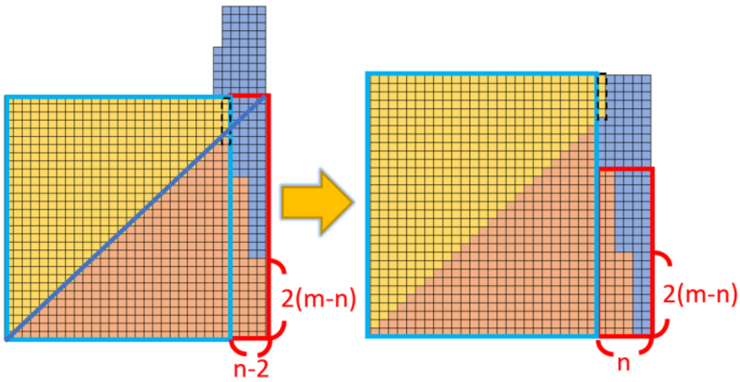


圖 5.66：$5^2+6^2+30^2=31^2$的通解

3. 最後只要把S_A以及S_B整個連接到S_D的右上角，即完成三片解的切割。

我們發現可將A_2類畢氏四元數(a,b,c,d)數據整理如表 5.7，且將其以一般式表達：

m	n	$a=m-n$	$b=n$	$c=n^2-2$	$d=n^2-n+1$
7	4	3	4	12	13
11	6	5	6	30	31
15	8	7	8	56	57
19	10	9	10	90	91

表 5.7：畢氏四元數$(a,b,c,d)A_2$類數據整理表

$\boldsymbol{B_1}$類$(\boldsymbol{n+2=m})$通式：

$\boldsymbol{S_A}$：$\boldsymbol{m-n=(n+2)-n=2}$　　　　$\boldsymbol{S_B}$：$\boldsymbol{n}$(奇數)

$\boldsymbol{S_C}$：$\frac{[(m-n)^2+n^2-p^2]}{2p}=\frac{4+n^2-1}{2}=\frac{n^2+3}{2}$　　　$\boldsymbol{S_D}$：$\frac{[(m-n)^2+n^2+p^2]}{2p}=\frac{4+n^2+1}{2}=\frac{n^2+5}{2}$

研究一：$2^2+3^2+6^2=7^2$ $(n=3, m=5)$的切割策略：(淺色為同一個步驟新加的部件)

1. 先將S_A和S_B的塗上藍色(順時針旋轉 180 度)，並且S_B的右下角要空一格。
2. 接著把S_C的外圍分別補上黃色(無翻轉及旋轉)以及紅色(先順時針旋轉 90 度在左右翻轉)，因為黃色區塊S_D比S_C大 1 格(前面提到的$d-c=1$)，因此剛剛上一個步驟才需要空一格。
3. 依序把所有空格先依照只能填一個顏色的格子，慢慢地往內縮，如果黃色或紅色都沒辦法塗，就塗藍色，完成三片解。

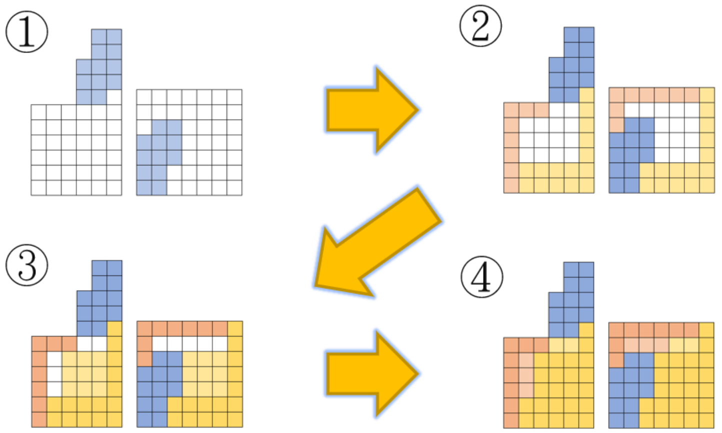


圖 5.67：$2^2+3^2+6^2=7^2$

研究二：$2^2+5^2+14^2=15^2$ $(n=5, m=7)$的切割策略：

1. 先將S_A和S_B的圖上藍色(順時針旋轉 180 度)，並且S_B的右下角要空一個洞，接著把S_C的外圍分別補上黃色(無翻轉及旋轉)以及紅色(先順時針旋轉 90 度在左右翻轉)。
2. 依序把所有空格先依照只能填一個顏色的格子，慢慢地往內縮，如果黃色或紅色都沒辦法塗，就塗藍色，把所有格子都填滿顏色後，完成三片解。

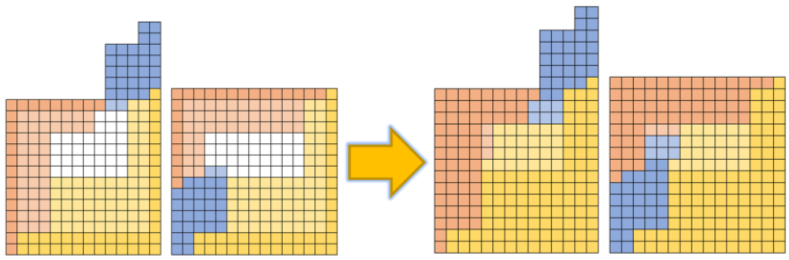


圖 5.68：$2^2+5^2+14^2=15^2$

研究三：$2^2+7^2+26^2=27^2$的切割策略

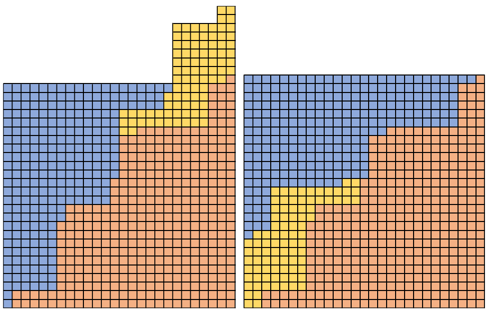


圖 5.69：$2^2+7^2+26^2=27^2$

研究四：$2^2+9^2+42^2=43^2$的切割策略

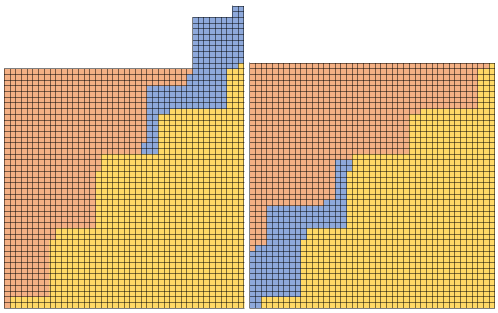


圖 5.70：$2^2+9^2+42^2=43^2$

B_1類研究結果：$\langle 2, n, \frac{n^2+3}{2}, \frac{n^2+5}{2} \rangle$的切割策略

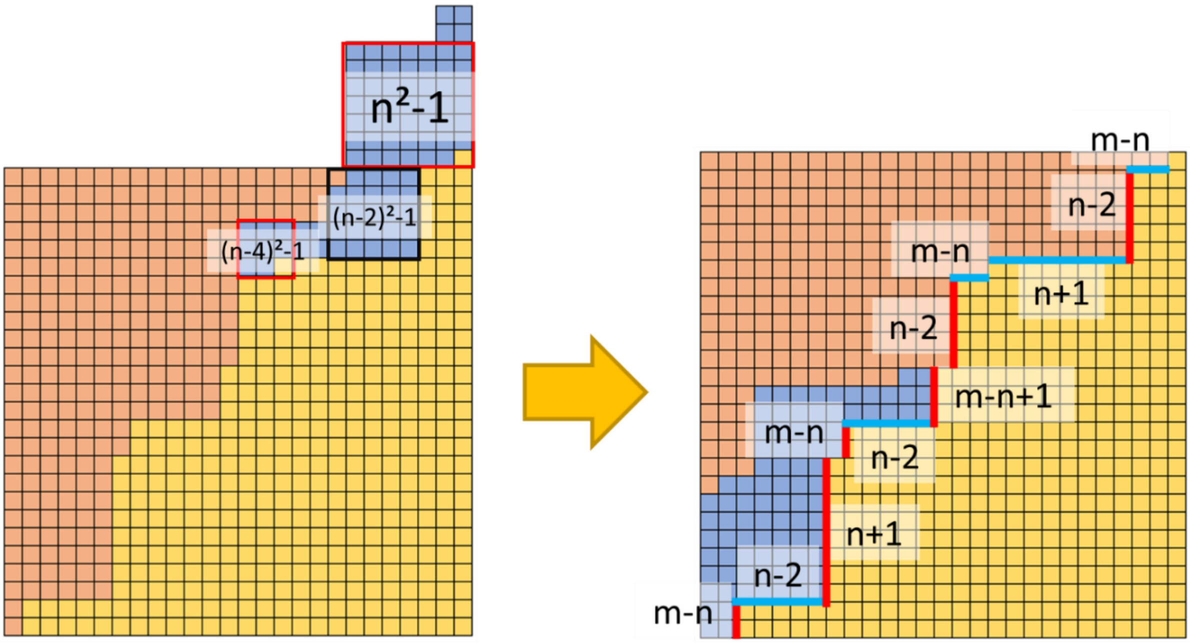


圖 5.71：$\langle \mathbf{2}, \boldsymbol{n}, \frac{n^2+3}{2}, \frac{n^2+5}{2} \rangle$的切割策略

B_1類圖的一般化解：

1. B_1類的圖皆是以切正方形-邊角 1 的方式，且正方形(藍色圖色區塊)最大為 n，正方形最小為$(m-n+1)^2-1$。(黃色方程式為通式)
2. 黃色圖色區塊開頭為$m-n, n-2, n+1$(綠色方程式)，結尾倒過來為$n+1, n-2, m-n$ (綠色方程式)，而 5 中間則會被畢氏四元數中n的大小受影響。
3. 唯一不變的是黃色塗色方塊頭尾邊數的中間為$m-n+1$ (紅色方程式)，像這張圖頭尾至中間皆有 6 個邊，3 直+3 橫，且中間為$m-n+1$。

我們發現可將B_1類畢氏四元數(a,b,c,d)數據整理如表 5.8，且將其以一般式表達：

m	n	$a=m-n$	$b=n$	$c=\frac{n^2+3}{2}$	$d=\frac{n^2+5}{2}$
5	3	2	3	6	7
7	5	2	5	14	15
9	7	2	7	26	27
11	9	2	9	42	43

表 5.8：畢氏四元數$(a,b,c,d)B_1$類數據整理表

B_2類$(n+4=m)$通式：

S_A：$n-1$　　S_B：n(奇數)　　S_C: n^2-n　　S_D: n^2+1

研究一$\langle 4,5,20,21\rangle$的切割策略

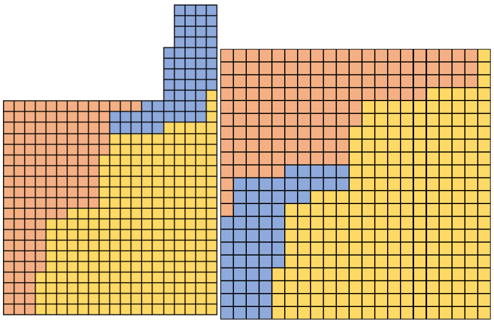


圖 5.72：⟨4,5,20,21⟩的切割策略

研究二$\langle 6,7,42,43\rangle$的切割策略

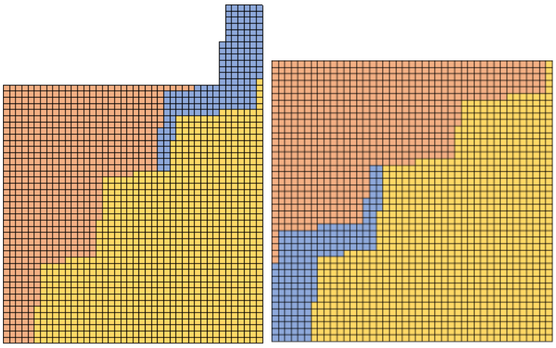


圖 5.73：⟨6,7,42,43⟩的切割策略

研究三$\langle 8,9,72,73\rangle$的切割策略

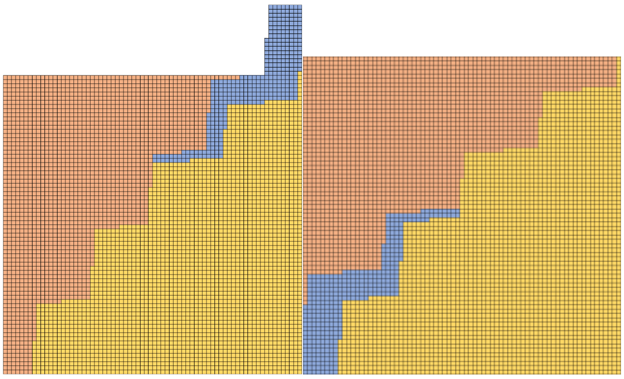


圖 5.74：⟨8,9,72,73⟩的切割策略

B_1類研究結果：$\langle n-1,n,n^2-n,n^2+1\rangle$的切割策略

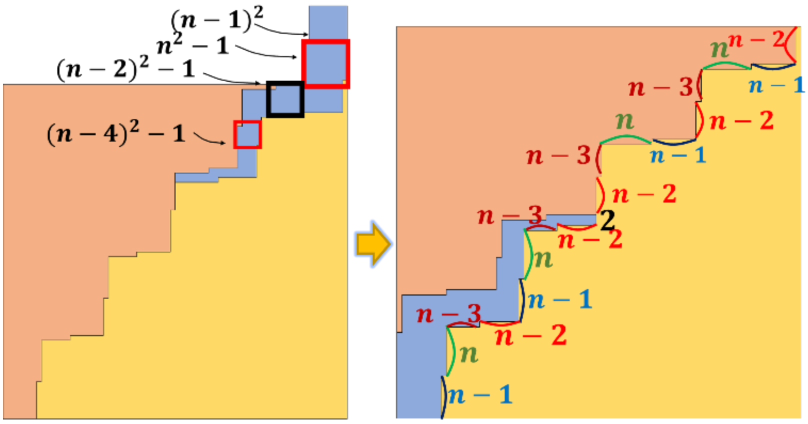


圖 5.75：$\langle n-1,n,n^2-n,n^2+1\rangle$的切割策略

我們發現可將B_2類畢氏四元數(a,b,c,d)數據整理如表 5.9，且將其以一般式表達：

m	n	$a=m-n$	$b=n$	$c=n^2-2$	$d=n^2-n+1$
9	5	4	5	20	21
13	7	6	7	42	43
17	9	8	9	72	73
21	11	10	11	100	101

表 5.9：畢氏四元數$(a,b,c,d)B_2$類數據整理表

C_1類(n+n=m)通式：

S_A：$m-n=n$ S_B：n

S_C：$\frac{[(m-n)^2+n^2-p^2]}{2p}=\frac{n^2+n^2-4}{4}=\frac{n^2-2}{2}$ S_D：$\frac{[(m-n)^2+n^2+p^2]}{2p}=\frac{n^2+n^2+4}{4}=\frac{n^2+2}{2}$

研究一$\langle 4,4,7,9\rangle$的分解：$(n=4)$

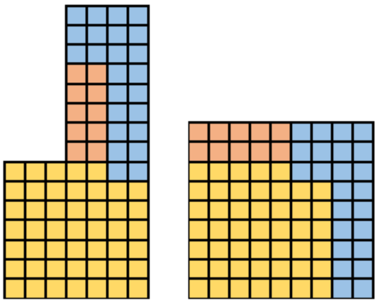


圖 5.76：⟨4,4,7,9⟩的分解

研究二$\langle 6,6,17,19\rangle$的分解：$(n=6)$

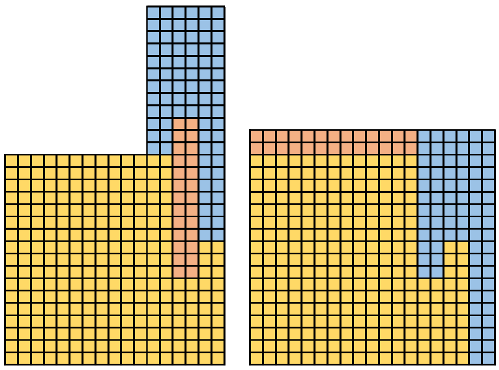


圖 5.77：⟨6,6,17,19⟩的分解

研究三$\langle 8,8,31,33\rangle$的分解$(n=8)$

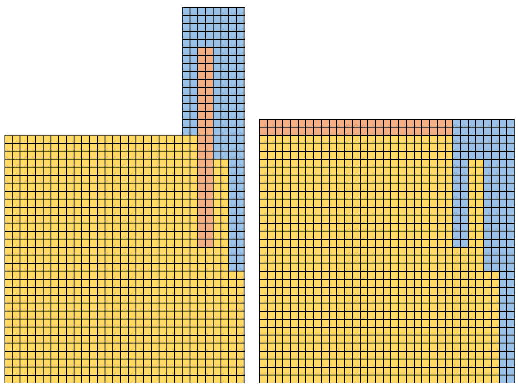


圖 5.78：⟨8,8,31,33⟩的分解

研究四$\langle 10,10,49,51\rangle$的分解$(n=10)$

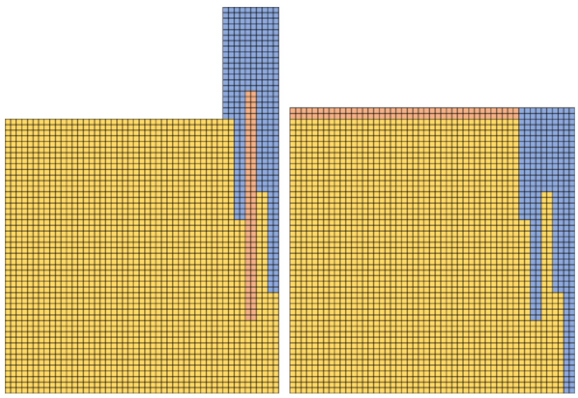


圖 5.79：⟨10,10,49,51⟩的分解

為方便說明，我們將a_1，a_2，a_3 ....，視為由右而左藍色直行方格的個數，令$n=2k$

(1)當k為偶數時，$a_i=\frac{4k^2+2}{2}+(i-1)(2-4k)$，其中$i\in N$且$i\le\frac{k}{2}$

$$a_{\frac{k}{2}+i}=\frac{4k^2+2}{2}+\left(\frac{k}{2}+i-1\right)(2-4k)+\frac{4k^2+2}{2}-2k$$

由此可驗證

$$a_k=a_{\frac{k}{2}+\frac{k}{2}}=\frac{4k^2+2}{2}+(k-1)(2-4k)+\frac{4k^2+2}{2}-2k$$

$$=2\times\frac{4k^2+2}{2}+2k-2-4k^2+4k-2k$$

$$=4k^2+2+2k-2-4k^2+4k-2k$$

$=4k$（即為S_A+S_B的邊長）

(2)當$\boldsymbol{k}$為奇數時，$a_i=\frac{4k^2+2}{2}+(i-1)(2-4k)$，其中$i\in N$且$i\le\frac{k+1}{2}$

$$a_{\frac{k+1}{2}+i}=\frac{4k^2+2}{2}+\left(\frac{k+1}{2}+i-1\right)(2-4k)+\frac{4k^2+2}{2}-2k$$

由此可驗證

$$a_k=a_{\frac{k+1}{2}+\frac{k-1}{2}}=\frac{4k^2+2}{2}+(k-1)(2-4k)+\frac{4k^2+2}{2}-2k$$

$$=2\times\frac{4k^2+2}{2}+2k-2-4k^2+4k-2k$$

$$=4k^2+2+2k-2-4k^2+4k-2k$$

$$=4k\text{（即為}S_A+S_B\text{的邊長）}$$

我們發現可將C_1類畢氏四元數(a,b,c,d)數據整理如表 5.10，且將其以一般式表達：

m	n	$a=m-n$	$b=n$	$c=\frac{n^2-2}{2}$	$d=\frac{n^2+2}{2}$
8	4	4	4	7	9
12	6	6	6	17	19
16	8	8	8	31	33
20	10	10	10	49	51

表 5.10：畢氏四元數$(a,b,c,d)C_1$類數據整理表

C_2類(n+2=m)通式：

$\boldsymbol{S_A}$：$\boldsymbol{m-n=2}$

$\boldsymbol{S_B}$：$\boldsymbol{n}$

$\boldsymbol{S_C}$：$\frac{[(m-n)^2+n^2-p^2]}{2p}=\frac{2^2+n^2-4}{4}=\frac{n^2}{4}$

$\boldsymbol{S_D}$：$\frac{[(m-n)^2+n^2+p^2]}{2p}=\frac{2^2+n^2+4}{4}=\frac{n^2+8}{4}$

研究一$\langle 2,6,9,11\rangle$的分解：$(n=6)$

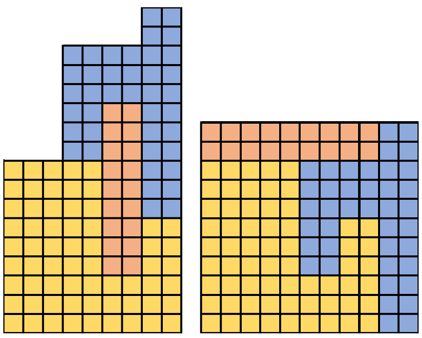


圖 5.80：$\langle 2,6,9,11\rangle$的分解

研究二$\langle 2,10,25,27\rangle$的分解：$(n=10)$

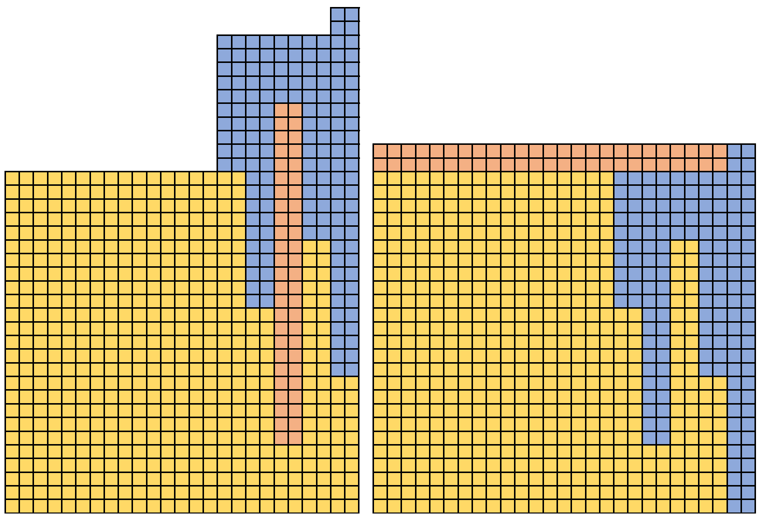


圖 5.81：$\langle 2,10,25,27\rangle$的分解

研究三$\langle \mathbf{2}, \mathbf{14}, \mathbf{49}, \mathbf{51} \rangle$的分解$(\boldsymbol{n} = \mathbf{14})$

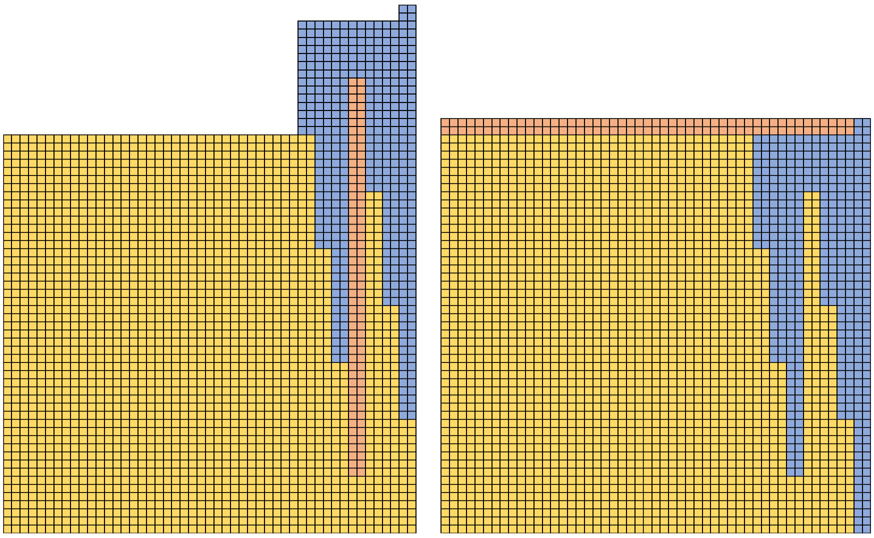


圖 5.82：$\langle 2,14,49,51 \rangle$的分解

為方便說明我們將a_1，a_2，a_3 ....，視為由右而左藍色直行方格的個數

令$n = 2k$

$$a_1 = \frac{4k^2+8}{4}$$

$$a_i = \frac{4k^2+8}{4} - 2k(i-1) - 2 \text{，其中} i \in N \text{且} 2 \le i \le \frac{k+1}{2}$$

$$a_{\frac{k+1}{2}+i} = \frac{4k^2+8}{4} - 2k(i-1) - 2 + \frac{4k^2+8}{4} - 2$$

由此可驗證

$$a_k = a_{\frac{k+1}{2}+\frac{k-1}{2}} = \frac{4k^2+8}{4} - 2k(k-1) - 2 + \frac{4k^2+8}{4} - 2$$

$$= 2 \times \frac{4k^2+8}{4} - 2k^2 + 2k - 2 - 2$$

$$= 2k^2 + 4 - 2k^2 + 2k - 2 - 2$$

$$= 2k \text{（即為} S_B \text{的邊長）}$$

我們發現可將C_2類畢氏四元數(a,b,c,d)數據整理如表 5.11，且將其以一般式表達：

m	n	$a = m - n$	$b = n$	$c = n^2 - 2$	$d = n^2 - n + 1$
8	6	2	6	9	11
12	10	2	10	25	27
16	14	2	14	49	51
18	16	2	16	64	66

表 5.11：畢氏四元數$(a,b,c,d)C_2$類數據整理表

陸、研究討論

一、研究中的十種缺格類型，運用於各類型分割策略，**均可有最少片數二片或三片解**。而其中一字型、P 字型、方字型、三角階梯型較多為二片解;L 字型、Z 字型、T 字型、X 字型、F 字型、W 字型較多為三片解。各類型擺放位置及組合眾多，無法完整列舉。在研究過程中，我們思考到影響其切割片數多寡的可能因素有：

(一)缺格形狀：較為對稱及方格數較少之缺格型較能成功兩片解。

(二)缺格位置：較為集中在矩形中央位置，並兼具其對稱性者，較能成功兩片解。

(三)階梯走向與缺格輪廓較為吻合者，較為能成功兩片解。

二、切割策略多種，利用「切割填補」、「階梯分割」、「平移、旋轉、翻轉」等方式拼湊，若遇到阻礙則考慮「變形」及「逆推」策略，以求其他種缺格圖形分割成功的可能。而其中**以階梯切割技術最為能拓展一般式**。階梯狀的優點：

(一)不考慮沿格線時，可採用斜線，**若能評估切割斜線的斜率，透過計算切割前後的矩形長寬的最大公因數**，能讓我們嘗試以階梯狀整個圖形往上下或往左右移動，即可成功重組矩形。

(二)各類型可由基本型找出規律，再向外邊緣擴大，或由中心點內部向外擴大。每一種圖形都有適合的不同組合方式。**一字型的圖案比較適合以階梯狀組合，而中心對稱的圖形，比較適合用其他方式(如因式分解法)，也可以透過平移或上下或左右翻轉來組合。**

三、我們運用了**階梯解剖技術分割成最少的區塊並重新組成矩形**，每一個圖形都有幾種不同影響排列的因素。圖形的大小、形狀、挖洞的位置，都會影響最後圖形排列組合或方式。**我們發現大部分的圖形都可以歸納出一般式，利用方法找出一個圖形的一般式**，例如 n(n+3)-(n-1)=(n+1)(n+1)，**要擴大圖形的邊長時，再將其他數字代入 n 即可。**

四、畢氏三元數的研究結果分類整理如表 6.1:

類別	A 類	B 類	C 類	
			C_1類	C_2類
n 的奇偶	n 為任意正整數	n 為偶數	n 為奇數	
表達式	n∈N	n=2k	n=2k+3	n=2k+5
片數解	T_A與T_B相連：3 片解 T_A與T_B不相連：4 片解		T_A與T_B相連：4 片解 T_A與T_B不相連：5 片解	
畢氏三元數歸類	(3,4,5) (5,12,13) (7,24,25) (9,40,41)	(8,15,17) (12,35,37) (16,63,65) (20,99,101)	(20,21,29) (28,45,53) (36,77,85) (44,117,125)	(33,56,65) (65,72,97) (88,105,137) (104,153,185)

表 6.1：畢氏三元數的研究結果整理表

五、畢氏四元數的研究結果分類整理如表 6.2：

類別	A類		B類		C類	
	A_1類	A_2類	B_1類	B_2類	C_1類	C_2類
n 的性質	n 為偶數		n 為奇數		n 為偶數	
表達式	m-n=1	m-n≧3 (奇數)	m-n=2 (偶數)	m-n＞2 (偶數)	m-n=n	m-n=2
片數解	皆為 3 片解					
畢氏四元數歸類	(1,2,2,3) (1,4,8,9) (1,6,18,19) (1,8,32,33) …	(3,4,12,13) (5,6,30,31) (7,8,56,57) (9,10,90,91) …	(2,3,6,7) (2.5,14,15) (2,7,26,27) (2,9,42,43) …	(4,5,20,21) (6,7,42,43) (8,9,72,73) (10,11,110,111) …	(2,2,1,3) (4.4,7,9) (6,6,17,19) (8,8,31,33) …	(2,6,9,11) (2,10,25,27) (2,14,49,51) (2,16,64,66) …

表 6.2：畢氏四元數的研究結果整理表

六、結語：我們一開始從一張一張圖片，用最隨機切割的方式拼出組合，經過大家的多次討論後，找出最快組合圖形的策略，非常不容易。而且在本次研究中**突破了歷屆得獎作品驗證畢氏三元數更少片的切割方式(如 p.17.18 說明)，並歸納出各類四元數的切割策略圖形通解，且嘗試使用 Scratch 以本研究切割策略的一般式編寫圖形程式**，來驗證我們找出的畢氏四元數各類通式的圖形。

柒、未來展望

一、朝向將矩形內部合併挖去兩種圖形，擺放的位置可隨意設置，並能將探究演算法編寫程式讓電腦做出自動化分割重組的處理，讓幾何與資訊跨域整合。

二、希望能將畢氏四元數(a,b,c,d)中$d-c \geq 3$的情況作完整的通解，甚至找出畢氏五元數的通解。

三、探討任意一個正三角形將其中挖去數個空格，接著將正三角形分割為數個區塊，並透過平移、旋轉、翻轉，組成一個新的正三角形(圖 7.1)。

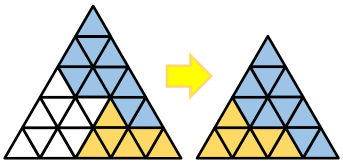


圖 7.1：$5^2-3^2=4^2$

捌、參考文獻資料

[1]徐惠莉.臺灣通識網：數學的故事. https://youtu.be/BYO6JRCfVV4

[2]孫文先 (1999). *多方塊的數學問題、拼圖謎題與遊戲*. 九章出版社.

[3]Frederickson, Greg N. (1997). *Dissections: Plane and Fancy*. Cambridge University Press.

[4]Dave peterson (2020, December 15). *Cutting and Rearranging a Rectangle*. The Math Doctors.Org. https://www.themathdoctors.org/cutting-and-rearranging-a-rectangle/

[5]Loyd, sam/ Sloan, sam (1914). *Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles Tricks and Conundrums with Answers*.

[6]李承學,林鼎容,陳克秦(2019). 「正方形分撕秀」.中華民國第 59 屆中小學科學展覽會

[7]Chandrahas Halai (2012) *Triples and quadruples: from Pythagoras to Fermat*. Plus Magazine, University of Cambridge. https://plus.maths.org/content/triples-and-quadruples

玖、附錄

Scratch 部份程式截圖：(以本作品第 20 頁A_1類畢氏四元數切割策略為例)

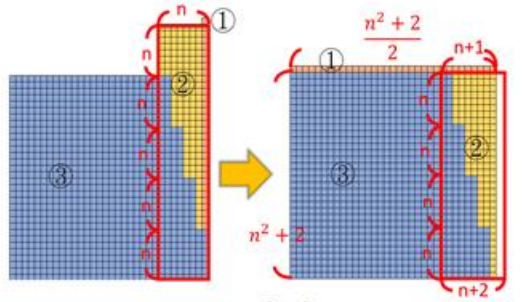
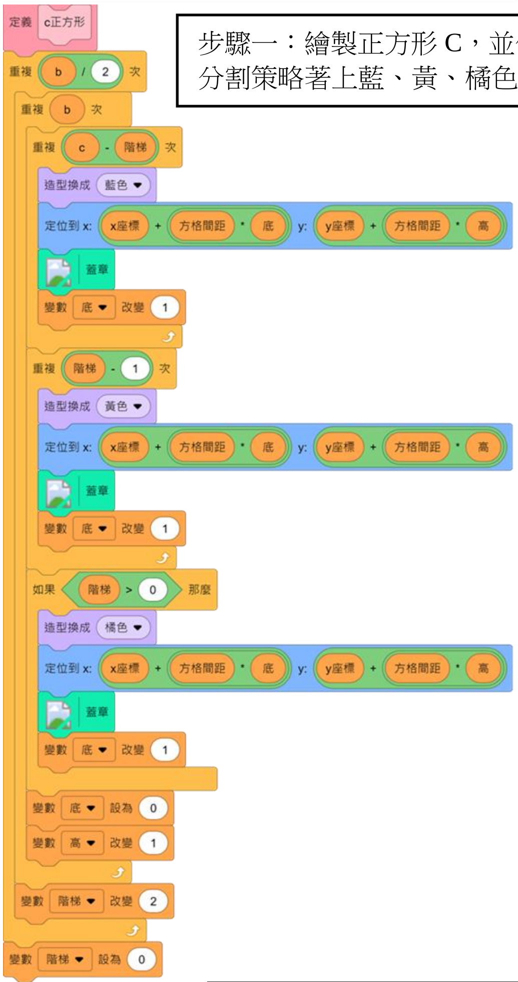
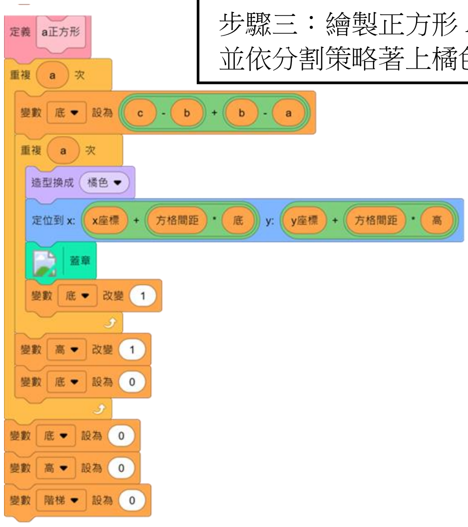


圖 5.64：探討$\langle 1, n, \frac{n^2}{2}, \frac{n^2+2}{2} \rangle$的分解通解

步驟一：繪製正方形 C，並依分割策略著上藍、黃、橘色

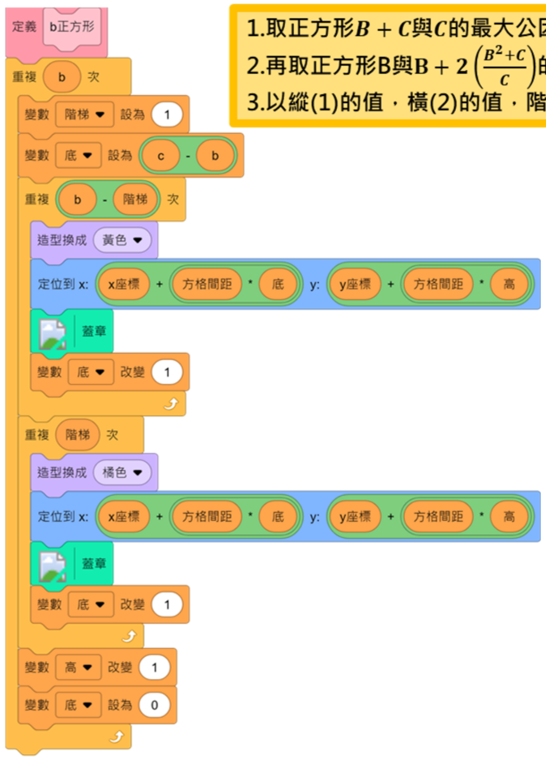


步驟三：繪製正方形 A，並依分割策略著上橘色

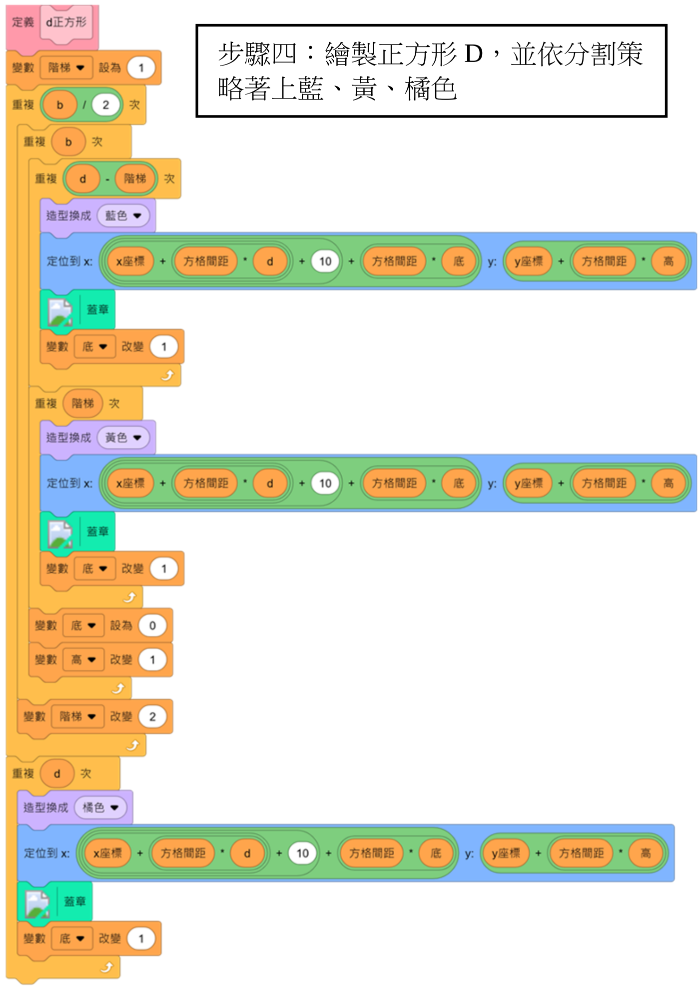


步驟二：繪製正方形 B，並依分割策略著上黃、橘色

1.取正方形$B+C$與C的最大公因數。
2.再取正方形B與$B+2\left(\frac{B^2+C}{C}\right)$的最大公因數
3.以縱(1)的值，橫(2)的值，階梯切法切割



步驟四：繪製正方形 D，並依分割策略著上藍、黃、橘色



【評語】030419

1. 本作品主要探討在一個 mxn 方格矩形，在移除部分連通的方格後，是否可以適當的沿單位格線切割成若干個部分，再將這些部分適當重組成一個矩形的問題。

2. 作者以因式分解法、逆推法、階梯狀切割法、座標移動法等不同手法，透過平移、旋轉或翻轉操作方式，巧妙的分割與拼接，極具巧思，值得稱許。

3. 作者也延伸討論堆疊在一起的若干個小正方形，在面積總和恰為完全平方數的情況下，是否也可以藉由適當的分割，再透過拼接、組成一個大正方形的問題，並引進了畢氏三元數與畢氏四元數的切割策略，為未來的研究給了一個發展方向。

作品海報

壹、摘要

在一個矩形中挖去連續方格，透過不同方法，重組成另一個面積較小的矩形，尋找其中的規律

貳、文獻探討

幾何解剖謎題「Disscetion Puzzle」出現在1885年的一張廣告卡上，運用到切割技術Stutter-step (Fig.2-1) [1]
以下階梯解剖的技術解決了「畢達格拉斯夫人的謎題」，以最少三片解且發現有不同的解法 (Fig.2-2、Fig.2-3)

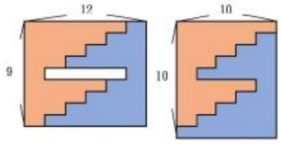


Fig. 2-1 Stutter-Step切割策略

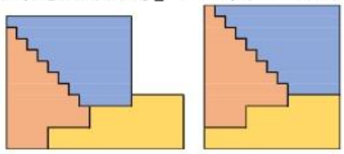


Fig. 2-2 Loyd'squares切割策略

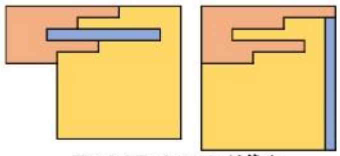


Fig. 2-3 Dudeney切割策略

參、研究問題

1.在十種缺格類型中，如何以最少塊透過平移、旋轉、翻轉重組成矩形？

2.將矩形逐步擴大，重組前後長寬的變化是否有規律？

3.推導擴大同一個字型重組前後長寬的一般式是否有規律？

4.如何運用階梯切割技術，以最少片解說明畢氏三元數圖形？

5.如何運用階梯切割技術，以最少片解說明畢氏四元數圖形？

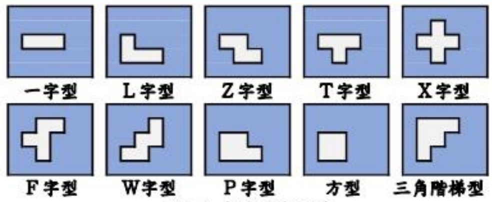


Fig. 3 十種缺格類型

肆、研究方法

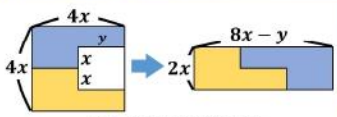


Fig. 4-1-1 因式分解法

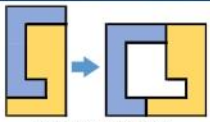


Fig. 4-1-2 逆推法

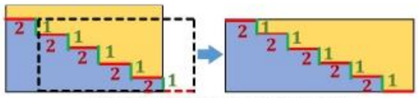


Fig. 4-1-3 Cardano階梯狀切割法

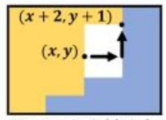


Fig. 4-1-4 座標移動法

伍、研究結果

一、策略分析與探討

(一)基本型切割策略探討

以T字型為例：

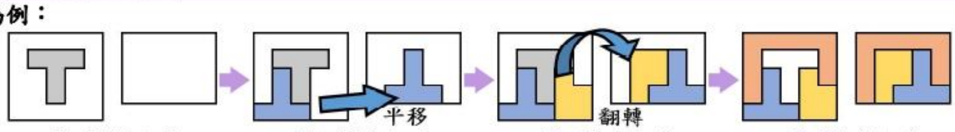


Fig. 5-1-1 step 1　Fig. 5-1-2 step 2　Fig. 5-1-3 step 3　Fig. 5-1-4 step 4

以P字型為例：

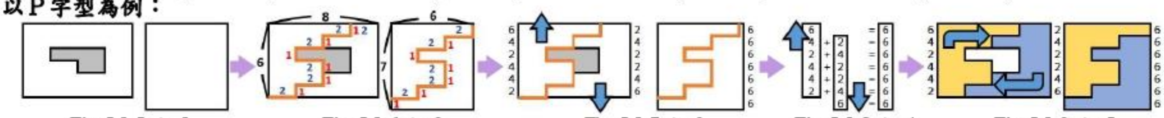


Fig. 5-1-5 step1　Fig. 5-1-6 step2　Fig. 5-1-7 step3　Fig. 5-1-8 step4　Fig. 5-1-9 step5

(二)逐步擴大推導一般式

依據圖案方向及位置，繼續擴展的部分也不一樣

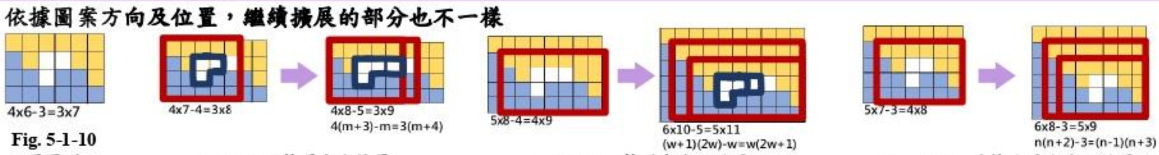


Fig. 5-1-10 原圖形　Fig. 5-1-11 整體向右擴展　Fig. 5-1-12 整體向左上擴展　Fig. 5-1-13 缺格除外向左上擴展

(三)逐步變形推導一般式

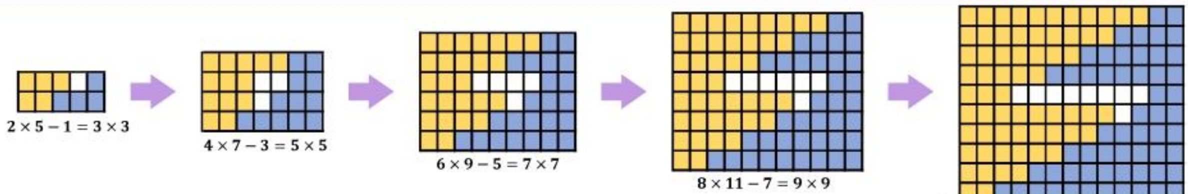


Fig. 5-1-14 L字型→P字型變形，可推導一般式：$n(n+3)-(n-1)=(n+1)^2$

二、延伸探討「畢達格拉斯夫人」的謎題、畢氏三元數、畢氏四元數

(一)畢氏三元數的研究過程：

*A*類：

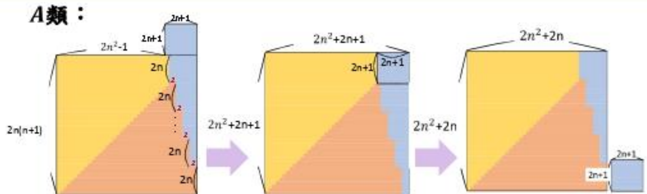


Fig. 5-2-1 *A*類通式

Table 5-2-1 *A*類數據

n	a	b	c
	$2n+1$	$2n^2+2n$	$2n^2+2n+1$
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
⋮	⋮	⋮	⋮

*B*類：

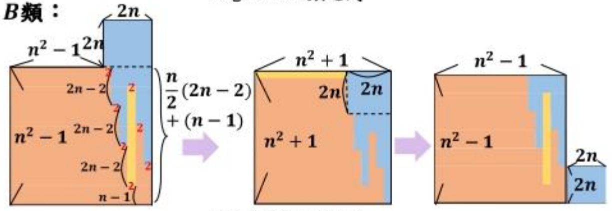


Fig. 5-2-2 *B*類通式

Table 5-2-2 *B*類數據

n	a	b	c
	$2n$	n^2-1	n^2+1
4	8	15	17
6	12	35	37
8	16	63	65
10	20	99	101
⋮	⋮	⋮	⋮

C_1類：

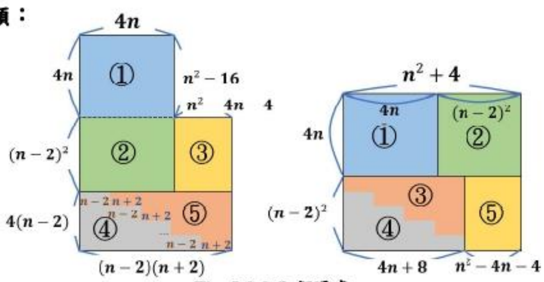


Fig. 5-2-3 C_1類通式

Table 5-2-3 C_1類數據

n	a	b	c
	$4n$	n^2-4	n^2+4
5	20	21	29
7	28	45	53
9	36	77	85
11	44	117	125
⋮	⋮	⋮	⋮

C_2類：

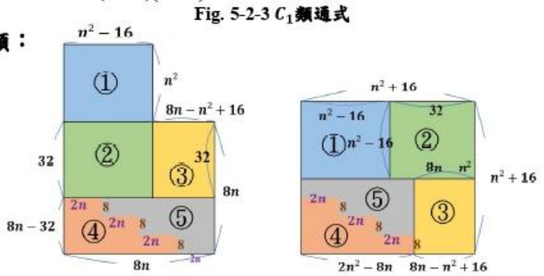


Fig. 5-2-4 C_2類通式

Table 5-2-4 C_2類數據

n	a	b	c
	n^2-16	$8n$	n^2+16
7	33	56	65
9	65	72	97
11	105	88	137
13	153	104	185
⋮	⋮	⋮	⋮

由上述切割策略分析，我們發現畢氏三元數其實可以只用五片解，突破在「正方形分撕秀」中提到的六片解限制[2]
以$20^2+21^2=29^2$為例，比較兩者差異

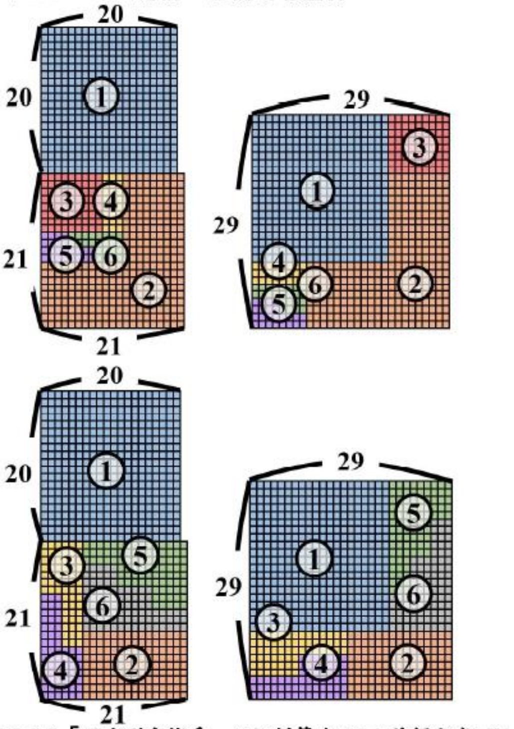


Fig. 5-2-5「正方形分撕秀」之切割策略(以六片解完成) [2]

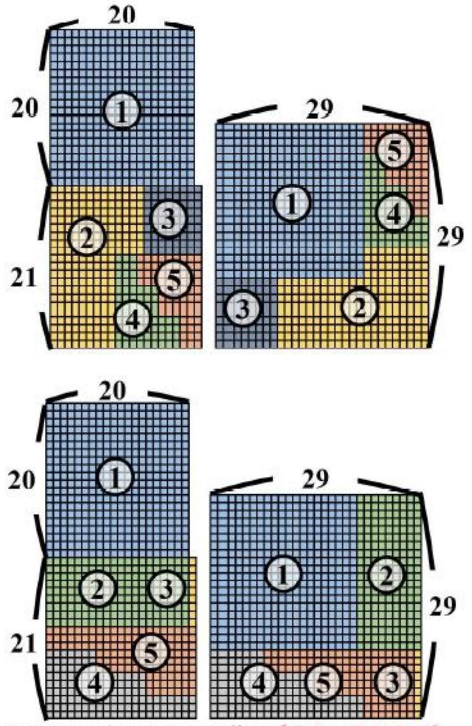


Fig. 5-2-6 本研究之切割策略(僅以五片解完成)

(二)畢氏四元數的研究過程：

A_1類：

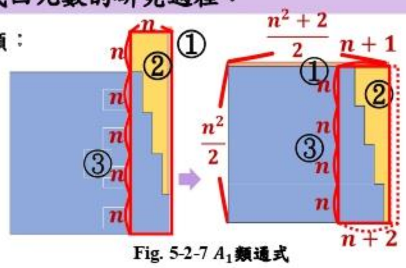


Fig. 5-2-7 A_1類通式

Table 5-2-5 A_1類數據($n=m-1$)

m	n	a	b	c	d
		$m-n$	n	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{n^2+2}{2}$
3	2	1	2	2	3
5	4	1	4	8	9
7	6	1	6	18	19
9	8	1	8	32	33
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

A_2類：

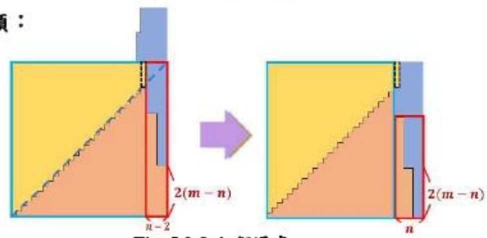


Fig. 5-2-8 A_2類通式

Table 5-2-6 A_2類數據($n=\frac{m+1}{2}$)

m	n	a	b	c	d
		$m-n$	n	n^2-n	n^2-n+1
7	4	3	4	12	13
11	6	5	6	30	31
15	8	7	8	56	57
19	10	9	10	90	91
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

B_1類：

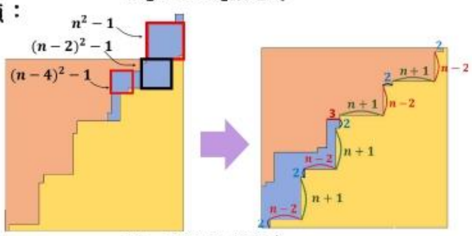


Fig. 5-2-9 B_1類通式

Table 5-2-7 B_1類數據

m	n	a	b	c	d
		$m-n$	n	$\frac{n^2+3}{2}$	$\frac{n^2+5}{2}$
5	3	2	3	6	7
7	5	2	5	14	15
9	7	2	7	26	27
11	9	2	9	42	43
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

B_2類：n為奇數

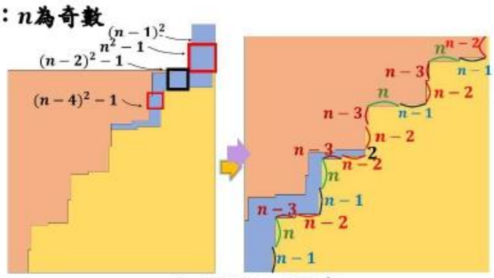


Fig. 5-2-10 B_2類通式

Table 5-2-8 B_2類數據

m	n	a	b	c	d
		$m-n$	n	n^2-2	n^2-n+1
9	5	4	5	20	21
13	7	6	7	42	43
27	9	8	9	72	73
21	11	10	11	100	101
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

C_1類：n為偶數

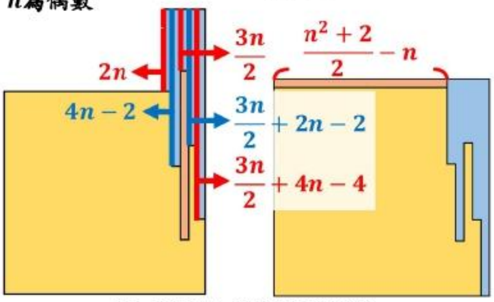


Fig. 5-2-11 C_1類通式(k為奇數)

Table 5-2-9 C_1類數據(k為奇數)

m	n	a	b	c	d
		$m-n$	n	$\frac{n^2-2}{2}$	$\frac{n^2+2}{2}$
12	6	6	6	17	19
20	10	10	10	49	51
28	14	14	14	97	99
36	18	18	18	161	163
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

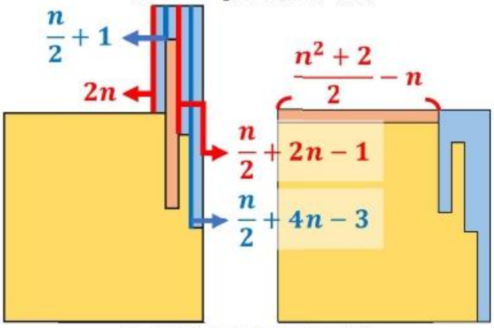


Fig. 5-2-12 C_1類通式(k為偶數)

Table 5-2-10 C_1類數據(k為偶數)

a	n	a	b	c	d
		$m-n$	n	$\frac{n^2-2}{2}$	$\frac{n^2+2}{2}$
8	4	4	4	7	9
16	8	8	8	31	33
24	12	12	12	71	73
32	16	16	16	127	129
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

C_2類：n為偶數

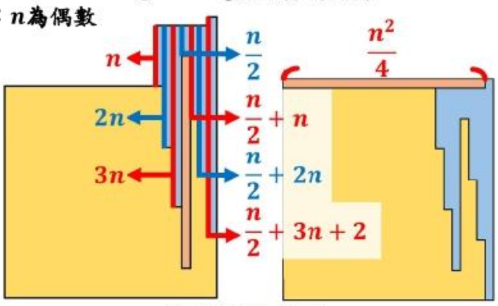


Fig. 5-2-13 C_2類通式

Table 5-2-11 C_2類數據

m	n	a	b	c	d
		$m-n$	n	n^2-2	n^2-n+1
8	6	2	6	9	11
12	10	2	10	25	27
16	14	2	14	49	51
18	16	2	16	64	66
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

陸、研究討論與結論

一、影響切割片數的因素：

1-1 缺格形狀
1-2 缺格位置　→　影響切割片數
1-3 缺格輪廓

二、階梯切割狀的優點：

2-1 可先由基本型找出規律，再由外部、內部擴大

2-2 先評估切割斜線的幅度，計算切割前後長寬最大公因數將圖形整體移動

三、畢氏三元數與畢氏四元數：

3-1 畢氏三元數圖形以更少片解突破歷屆科展得獎作品

3-2 畢氏三元數與畢氏四元數的研究結果：

Table 6-3-2 畢氏三元數與畢氏四元數的研究結果

類別	A類	B類	C類		A類		B類		C類	
			C_1類	C_2類	A_1類	A_2類	B_1類	B_2類	C_1類	C_2類
片數	T_AT_B 相連：3片解 不相連：4片解		T_AT_B 相連：4片解 不相連：5片解		3片解					
歸類	(3, 4, 5) (5, 12, 13) (7, 24, 25) (9, 40, 41) ⋮	(8, 15, 17) (12, 35, 37) (16, 63, 65) (20, 99, 101) ⋮	(20, 21, 29) (28, 45, 53) (36, 77, 85) (44, 117, 125) ⋮	(33, 56, 65) (65, 72, 97) (88, 105, 137) (104, 153, 185) ⋮	(1, 2, 2, 3) (1, 4, 8, 9) (1, 6, 18, 19) (1, 8, 32, 33) ⋮	(3, 4, 12, 13) (5, 6, 30, 31) (7, 8, 56, 57) (9, 10, 90, 91) ⋮	(2, 3, 6, 7) (2. 5, 14, 15) (2, 7, 26, 27) (2, 9, 42, 43) ⋮	(4, 5, 20, 21) (6, 7, 42, 43) (8, 9, 72, 73) (10, 11, 110, 111) ⋮	(2, 2, 1, 3) (4. 4, 7, 9) (6, 6, 17, 19) (8, 8, 31, 33) ⋮	(2, 6, 9, 11) (2, 10, 25, 27) (2, 14, 49, 51) (2, 16, 64, 66) ⋮

3-3 使用Scratch以一般式編寫程式，驗證各類型通式的圖形

柒、未來展望

1-1 將矩形內部合併挖去兩種圖形，隨意擺放位置
　並與資訊跨域整合，讓電腦自動分割並重組

1-2 完整探討畢氏四元數中$d-c\geq 3$的情況及畢氏五元數

1-3 延伸探討將正三角形挖去空格，透過不同方法組成圖形的規律

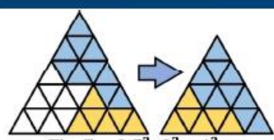


Fig. $7-3$ $5^2-3^2=4^2$

捌、參考資料

[1]Loyd Sam (1914). *Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles Tricks and Conundrums with Answers*

[2]李承學, 林鼎容, 陳克秦(2019). 「正方形分撕秀」. 中華民國第59屆中小學科學展覽會