# 中華民國第63屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

國中組　數學科

030418

## 萬花三角玩花樣


學校名稱：基隆市立中正國民中學

| 作者： | 指導老師： |
|---|---|
| 國二 游芳華 | 吳建昀 |
| 國二 吳姵妤 | 張淑敏 |
| 國二 潘辰芳 | |



關鍵詞：七點共一圓錐曲線、萬花三角芒星、塞瓦線

# 摘要

先設定△作為外圖形，在其內作內△。利用內△等分點做塞瓦線，透過相鄰內△塞瓦線交點及其頂點探討產生之不同圓錐曲線圖形的關係，並做相關推論及證明。之後，改變外圖形邊數，利用外圖形相鄰邊夾角與內△的關係研究出「萬花三角芒星」規則，並藉由製作多邊形的圓錐曲線，並在確認外圖形邊數及內角角度的條件下直接推出對應圓錐曲線關係。

# 壹、研究動機

我們參考歷屆科展，發現許多有關幾何的研究，我們便利用△與塞瓦線交點，找出圓錐曲線，再改變內△的角度組合、正反向和位置關係，運用更多不同的操縱變因，推論出圓錐曲線出現的條件和規律，加以證明及探討。

# 貳、研究目的

一、探討利用△作為外圖形所產生的圓錐曲線

(一)圓形產生條件及對應關係推論及證明

(二)橢圓產生條件及對應關係推論及證明

(三)雙曲線產生條件及對應關係推論及證明

(四)拋物線產生條件及對應關係推論及證明

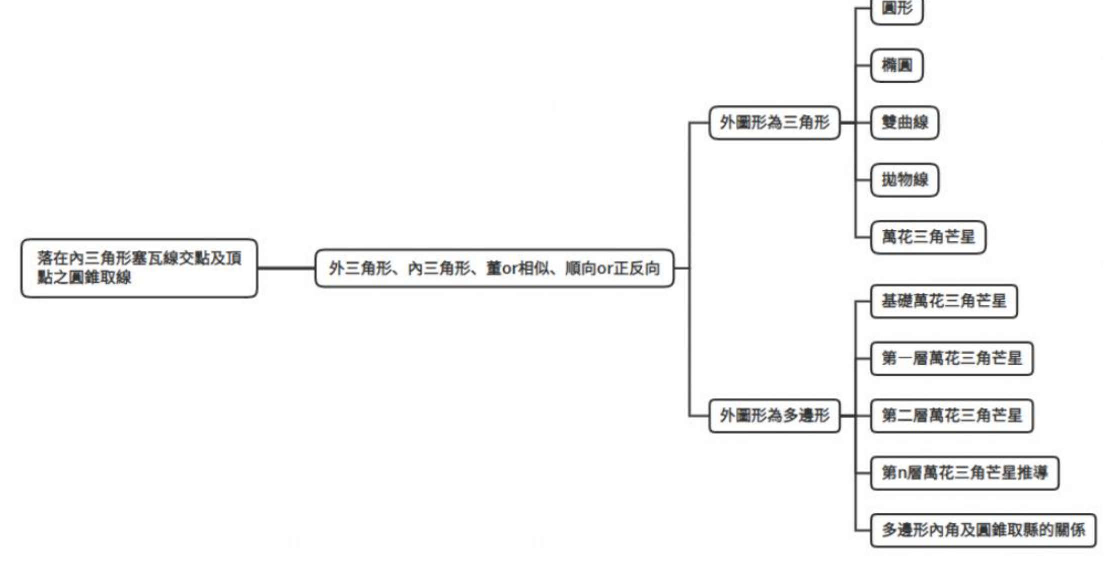
(五)萬花三角芒星推導與應用

二、利用「萬花三角芒星」推導不同邊數外圖形所產生的圓錐曲線

(一)推導四邊形、五邊形、六邊形、七邊形為外圖形所產生的圓錐曲線

(三)推導 n 多邊形為外圖形所產生的圓錐曲線

研究架構



# 參、研究設備及器材

一、繪圖軟體 Geogebra

二、電腦軟體 Word

# 肆、研究過程或方法

一、名詞解釋、定義與預備定理

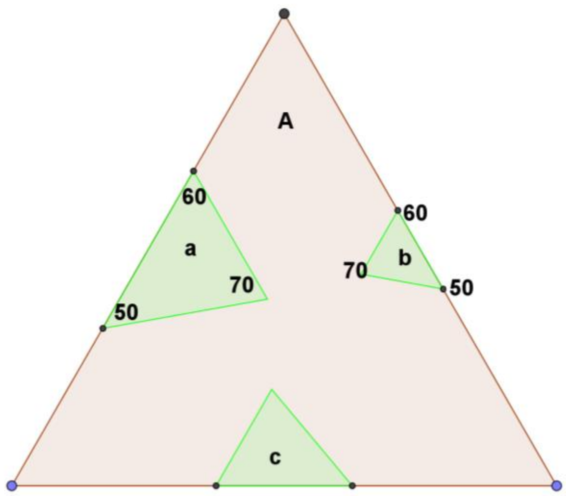
名詞解釋 1：

外圖形：外圖形為多邊形(其中 n 邊形，n≥3)。

內圖形：內圖形為△(其中△非全等、相似、不等三種狀況討論)。

正反向關係：內圖形為全等或相似△時，順向排列稱為正向、逆向排列時稱為反向。

作圖方式：設定外圖形，並在其邊上做 n 個內△，在內△底邊(7 個等分點+底角 2 點，共 9 點)，取單邊 5 個等分點與內△頂點連成塞瓦線，鄰近內△塞瓦線產生 5 個交點，此五個交點必落在同一圓錐曲線上。




圖(1) 反向關係圖例為內△a(50°-60°-70°)與內△b(60°-50°-70°)

定義 1：**圓錐曲線種類，(** [1]維基百科及[4]項武義 **)**。

圓錐曲線之二次方程式

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

(一)圓：$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$、$x^2+y^2 = r^2$

(二)橢圓：$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ or ：$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$，中心(h,k)，且 a>b>0

(三)雙曲線：$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ or ：$\frac{(x-h)^2}{b^2}-\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$，中心(h,k)，且 a,b>0

(四)拋物線：$(y-x)^2=4c(x-h)$ or $(x-h)^2=4c(y-k)$，頂點(h,k)，$|c|$焦距

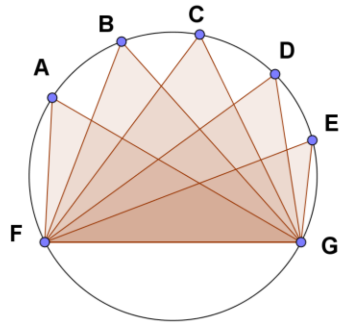
定義 2：**圓錐曲線的二圓二次方程式判別，( [1]維基百科)**。

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，以判別式 $B^2-4AC$ 檢驗：

$$\begin{cases} B^2-4AC>0 \text{ 為雙曲線} \\ B^2-4AC<0 \text{ 為橢圓} \\ B^2-4AC=0 \text{ 為拋物線} \end{cases}$$

預備定理 1：圓的判斷定理定義 ( [2]維基百科)。

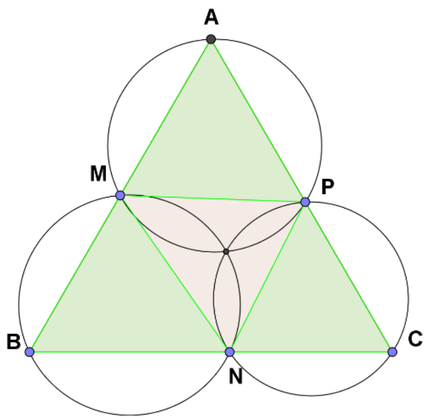
(一)如圖(2)，平面上相異 7 點 A,B,C,D,E,F,G，若∠FAG=∠FBG=∠FCG=∠FDG=∠FEG 則 7 點共圓。




圖(2)

預備定理 2： 密克定理逆定理 ( [2]維基百科 )

(二)密克定理逆定理：如圖圖(2-2)△ABC 中若 M、N、P 三點分別在 AB、BC、AC 線段上，則△AMP、△BMN、△CNP 的外接圓交於一點。




圖(2-2)

在研究的前半年，我們針對外圖形與內△塞瓦線交點所形成之圓錐曲線關係畫出了 2 百多份的 ggb 圖檔(請參閱研究日誌)，並整理分析當外圖形為△時與內△的關係(如表所示)。隨後又針對外圖形為四邊形及五邊形畫了 1 百多份的 ggb 圖檔及相對應關係之表格。

為了避免成為只是統計分析圖形並增加研究的數學推理性，我們透過幾何證明、三角函數推導角度與長度關係及圓錐曲線二元二次方程式證明，依序說明下列各項性質與發現。

二、不同圓錐曲線產生的條件及對應關係推論及證明

(一)圓形產生條件及對應關係推論及證明( [3]笹部貞市郎 )

**性質一：內△為相似形且方向為順向，兩內△塞瓦線交點落在同一個圓形**

1.內△為銳角時之判別

(1)先在正△ABC 中的$\overline{AB}$與$\overline{AC}$上分別做兩個相似、同向、不同位置的內△銳角△($60^{\circ}$-$40^{\circ}$-$80^{\circ}$)，如圖(3)，並取等分點 $P_1$~ $P_5$，$Q_1$~ $Q_5$。

(2)做兩個內△過等分點及頂點 S、T 塞瓦線，分別產生交點 $R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$。

(3)在四邊形 $AP_1R_1Q_1$中，令$\angle AP_1R_1$為 $\theta$ ，因為兩內△為相似，所以$\angle AP_1R_1$和$\angle AQ_1R_1$互補，

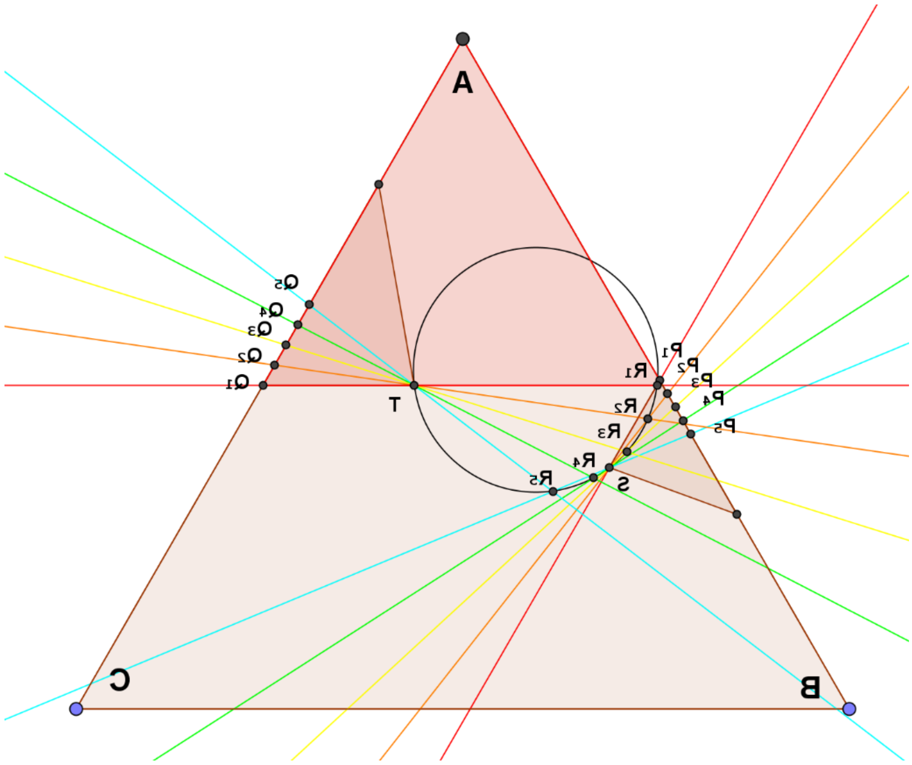
得$\angle AP_1R_1+\angle AQ_1R_1=180^{\circ}$，又四邊形內角和為 $360^{\circ}$，所以△$\angle P_1AQ_1+\angle P_1R_1Q_1=180^{\circ}$。

(4)令 $P_1AQ_1=x^{\circ}$，得$\angle P_1R_1Q_1=180^{\circ}-x^{\circ}$

(5)同理可證，四邊形 $AP_2R_2Q_2$、$AP_3R_3Q_3$、$AP_4R_4Q_4$、$AP_5R_5Q_5$中亦可得$\angle P_2R_2Q_2=180^{\circ}-X^{\circ}=\angle P_3R_3Q_3=\angle P_4R_4Q_4=\angle P_5R_5Q_5=\angle P_1R_1Q_1$及此五角度度數相同。

(6)依預備定理 1 得在平面上相異 7 點

可得證 S、T、$R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$七點共圓。




圖(3)

2.內△為鈍角時之判別

(1)先在正△ABC 中的$\overline{AB}$與$\overline{AC}$上分別做兩個相似、同向、不同位置的內△鈍角△(100°-40°-40°)，如圖(4)，並取等分點 $P_1$~ $P_5$，$Q_1$~ $Q_5$。

(2)做兩個內△過等分點及頂點 S、T 塞瓦線，分別產生交點 $R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$。

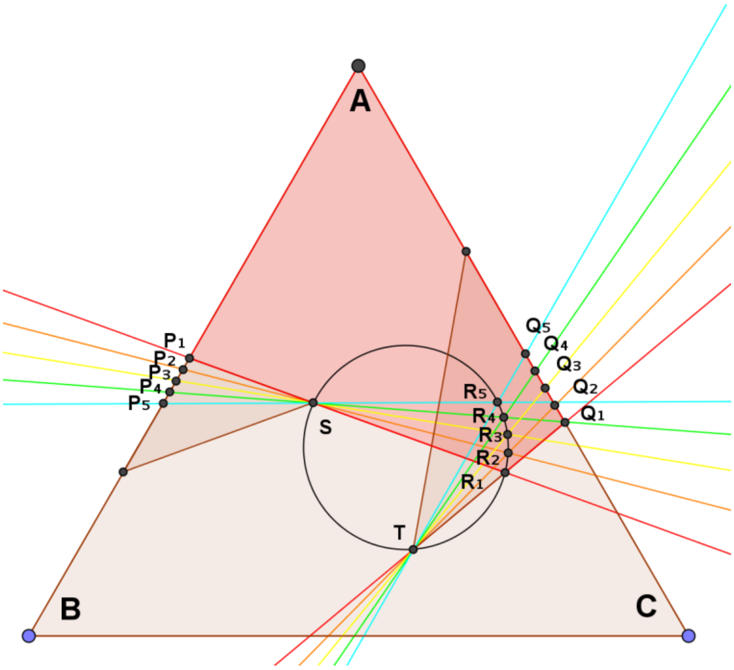
(3)在四邊形 $AP_1R_1Q_1$中，令∠$AP_1R_1$為 $\theta$，因為兩內△為相似，所以∠$AP_1R_1$和∠$AQ_1R_1$互補，得∠$AP_1R_1$+∠$AQ_1R_1$=180°，又四邊形內角和為 360°，所以△∠$P_1AQ_1$+∠$P_1R_1Q_1$=180°。

(4)令 $P_1AQ_1$=x°，得∠$P_1R_1Q_1$=180°-x°。

(5)同理可證，四邊形 $AP_2R_2Q_2$、$AP_3R_3Q_3$、$AP_4R_4Q_4$、$AP_5R_5Q_5$中亦可得∠$P_2R_2Q_2$=180°-X°=∠$P_3R_3Q_3$=∠$P_4R_4Q_4$=∠$P_5R_5Q_5$=∠$P_1R_1Q_1$及此五角度度數相同。

(6)依預備定理 1 得在平面上相異 7 點

可得證 S、T、$R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$七點共圓。




圖(4)

1.內△為直角時之判別

(1)先在正△ABC 中的$\overline{AB}$與$\overline{AC}$上分別做兩個相似、同向、不同位置的內△直角△(60°-40°-80°)，如圖(5)，並取等分點 $P_1$~ $P_5$，$Q_1$~ $Q_5$。

(2)做兩個內△過等分點及頂點 S、T 塞瓦線，分別產生交點 $R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$。

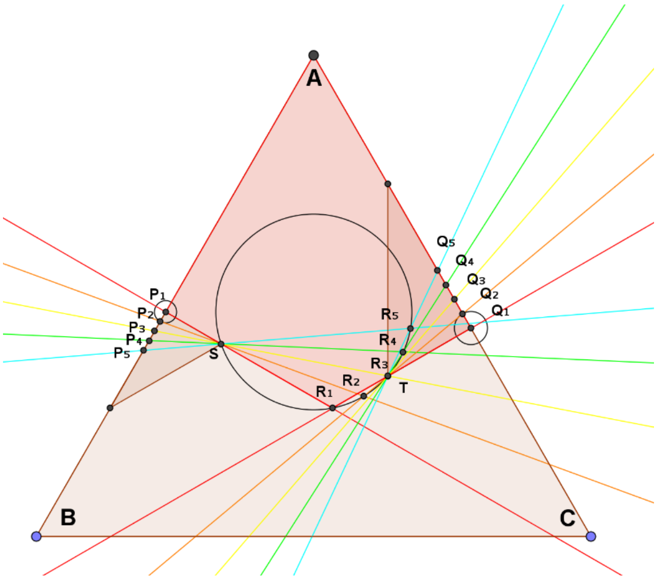
(3)在四邊形 $AP_1R_1Q_1$中，令∠$AP_1R_1$為 $\theta$，因為兩內△為相似，所以∠$AP_1R_1$和∠$AQ_1R_1$互補，得∠$AP_1R_1$+∠$AQ_1R_1$=180°，又四邊形內角和為 360°，所以△∠$P_1AQ_1$+∠$P_1R_1Q_1$=180°。

(4)令 $P_1AQ_1$=x°，得∠$P_1R_1Q_1$=180°-x°。

(5)同理可證，四邊形 $AP_2R_2Q_2$、$AP_3R_3Q_3$、$AP_4R_4Q_4$、$AP_5R_5Q_5$中亦可得$\angle P_2R_2Q_2=180^{\circ}-X^{\circ}=\angle P_3R_3Q_3=\angle P_4R_4Q_4=\angle P_5R_5Q_5=\angle P_1R_1Q_1$及此五角度度數相同。

(6)依預備定理 1 得在平面上相異 7 點

可得證 S、T、$R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$七點共圓。



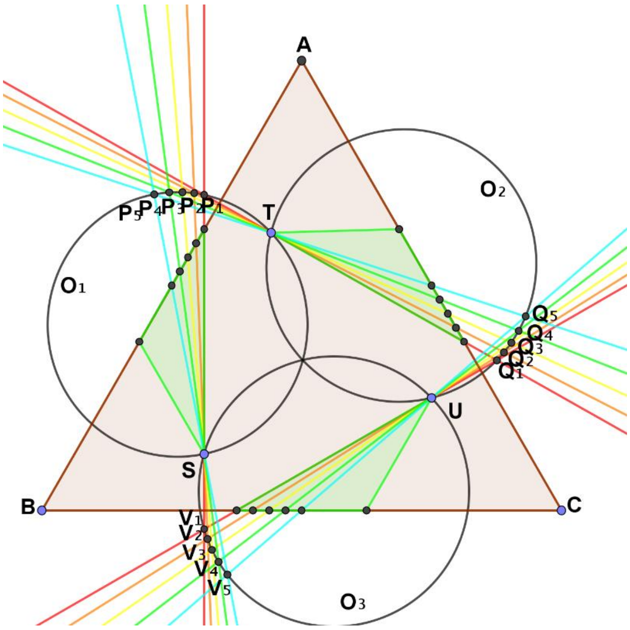

圖(5)

**性質二： 鄰邊內△之塞瓦線交點落在同一圓上，則此三圓必定共點**( [2]維基百科)

1.如圖(6)，在$\triangle P_1V_1Q_1$中，S、T、U 分別落在$\overline{P_1V_1}$、$\overline{P_1Q_1}$、$\overline{V_1Q_1}$上，由預備定理 2.可知，$\triangle P_1ST$、$\triangle Q_1TU$、$\triangle V_1SU$ 的外接圓，三圓共點

2.同理$\triangle P_2ST$、$\triangle Q_2TU$、$\triangle V_2SU$、$\triangle P_3ST$、$\triangle Q_3TU$、$\triangle V_3SU$、$\triangle P_4ST$、$\triangle Q_4TU$、$\triangle V_4SU$、$\triangle P_5ST$、$\triangle Q_5TU$、$\triangle V_5SU$

3.由 1.2 可得證，若外△ABC，鄰邊之塞瓦線交點落在同一圓上，則此三圓必定共點。




圖(6)

**性質三：任何種類之三圓比例式計算(** [3]笹部貞市郎 **)**

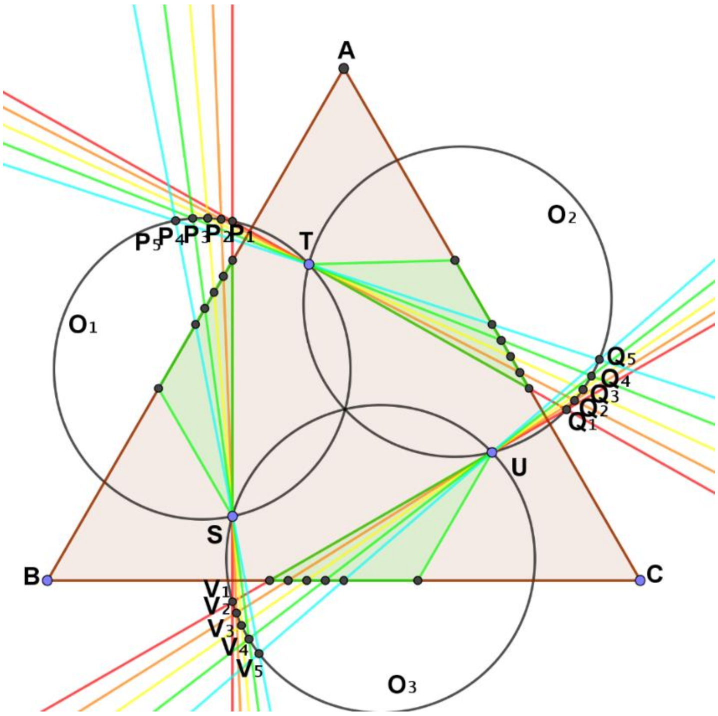
1.如圖(7)在△ABC 令$\angle A=\theta^{\circ}$，$\angle B=\alpha^{\circ}$，$\angle C=\beta^{\circ}$

圓 $O_1$中$\angle P_1=\angle P_2=\angle P_3=\angle P_4=\angle_5=180^{\circ}-\angle A=180^{\circ}-\theta^{\circ}$

$\widehat{SP_1}=2*(180^{\circ}-\theta^{\circ})$∴圓 $O_1$半徑 $r_1=\frac{\overline{ST}}{2\sin\theta}$

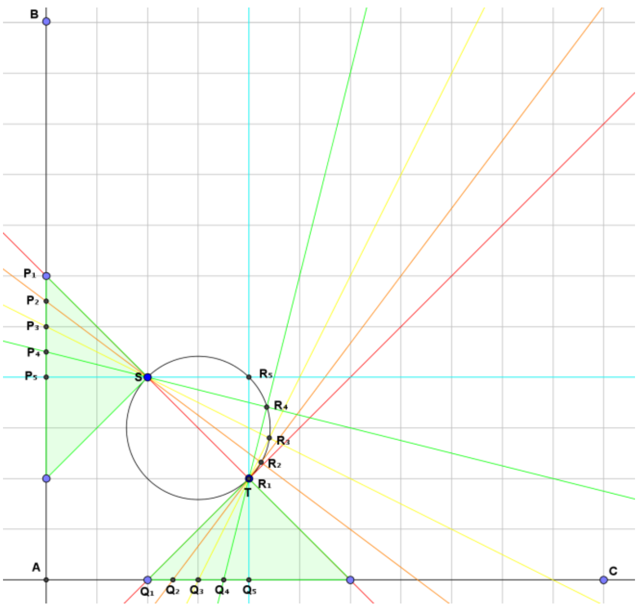
2.∴圓 $O_1$：圓 $O_2$：圓 $O_3$=$\left(\frac{\overline{ST}}{2\sin\theta}\right)^2\pi$：$\left(\frac{\overline{TU}}{2\sin\theta}\right)^2\pi$：$\left(\frac{\overline{SU}}{2\sin\theta}\right)^2\pi$=$\left(\frac{\overline{ST}}{2\sin\theta}\right)^2$：$\left(\frac{\overline{TU}}{2\sin\theta}\right)^2$：$\left(\frac{\overline{SU}}{2\sin\theta}\right)^2$

3.由上述可得證此三圓之比例式為$\left(\frac{\overline{ST}}{2\sin\theta}\right)^2$：$\left(\frac{\overline{TU}}{2\sin\theta}\right)^2$：$\left(\frac{\overline{SU}}{2\sin\theta}\right)^2$




圖(7)

證明：以圓錐曲線二元二次方程式檢驗圓




圖(8)

1.在△ABC 中，另∠A=90°，A(0,0)，在$\overline{AB}$與$\overline{AC}$上做兩個全等、同位置、逆向內△。

2. 頂點 S(4,8)、T(8,4)，兩內△等分點為 $P_1(0,12)$、$P_2(0,11)$、$P_3(0,10)$、$P_4(0,9)$、$P_5(0,8)$，$Q_1(4,0)$、$Q_2(5,0)$、$Q_3(6,0)$、$Q_4(7,0)$、$Q_5(8,0)$。分別通過內△頂點 S、T 做塞瓦線交 $R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$。

3.其中$\overleftrightarrow{P_5S}$直線方程式：y = 8，$\overleftrightarrow{Q_5T}$直線方程式：x = 8，由兩方程式

交點可得 $R_5(8,8)$，同理可得 $R_1(8,4)$、$R_2(\frac{212}{25},\frac{116}{25})$、$R_3(\frac{44}{5},\frac{28}{5})$、$R_4(\frac{148}{17},\frac{116}{17})$。

4.設 $R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$ 落在 $\mathrm{Ax}^2+\mathrm{Bxy}+Cy^2+\mathrm{Dx}+\mathrm{Ey}+\mathrm{F}=0$上，分別將點座標代入後求出二元二次方程式為$-\mathrm{x}^2-y^2+12\mathrm{x}+21\mathrm{y}-64=0$

5.頂點 T 與 $R_1$ 重疊，將 S 代入方程式左右相等 ∴ S、T 亦在同一圓錐曲線上。

6.因此方程式無 xy 項，故七點皆在相同的圓上。

(二)橢圓產生條件及對應關係推論及證明

**性質四： 在圖(9)中**

**∠a+∠b=180°會產生正圓**

**∠a+∠b<180°會產生左右形的橢圓**

**∠a+∠b>180°會產生上下形的橢圓**

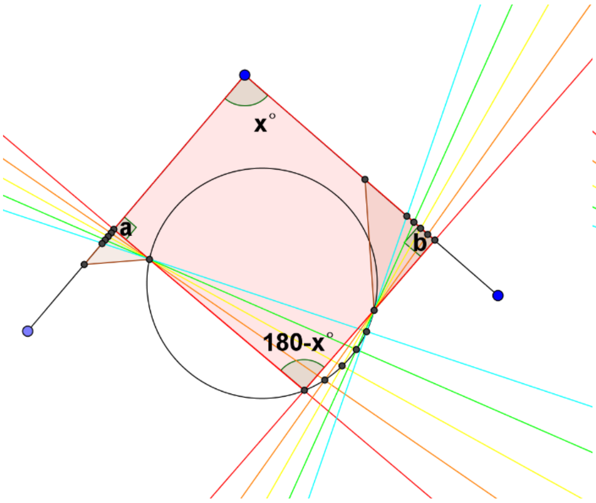
**在 a°+b°+x°<360°會產生橢圓;在 a°+b°+x°>360°會產生雙曲線**

1.圖(10)中，由性質一可得 a+b=90°+90°=180°所以結果必為正圓。

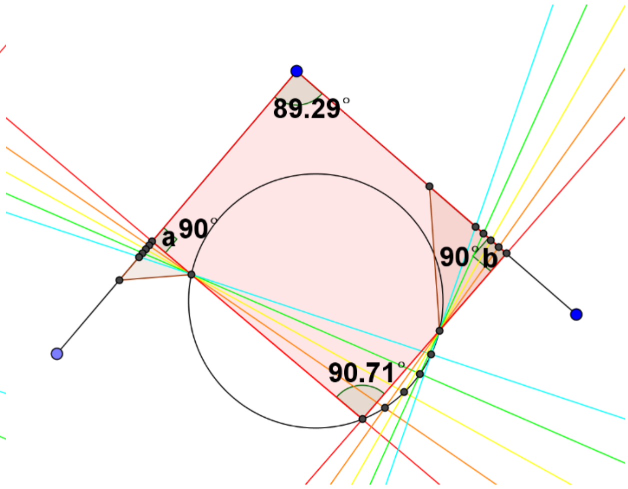
2.圖(11)中，因為紅色四邊形(紅色塞瓦線所連出的)下面的角度為 83.39，上面的角度為 116.61，相加得>180，四邊形左右拉開，且 a+b=80°+80°=160°所以結果必為橢圓，且∠a+∠b<180°所以產生的為左右形的橢圓。

3.圖(12)中因為紅色四邊形(紅色塞瓦線所連出的)下面的角度為 28.39，上面的角度為 116.61，相加得>180，四邊形上下拉開，且 a+b=100°+120°=220°所以結果必為橢圓，且∠a+∠b>180°所以產生的為上下形的橢圓。

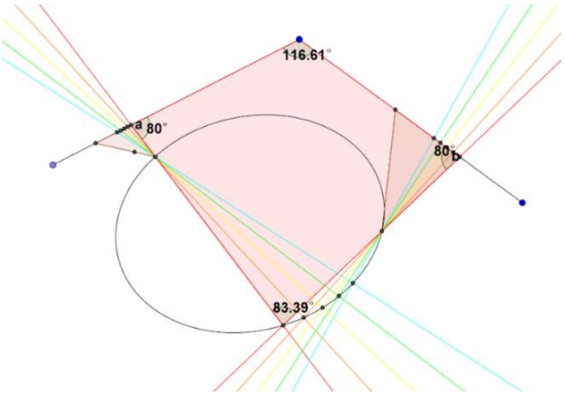
4.在 a°+b°+x°<360°會產生橢圓;在 a°+b°+x°>360°會產生雙曲線。因為若 a°+b°+x°>360 則不能連成一四邊形，則塞瓦線交點會從外△頂點內轉到外△頂點外側，而在外側的塞瓦線交點及在內側的內△頂點七點會落在一雙曲線上。



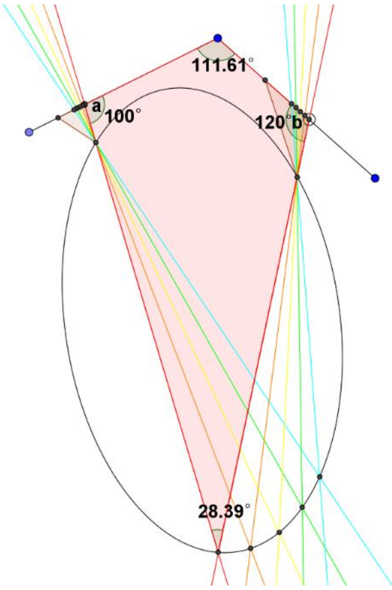

圖(9)




圖(10)

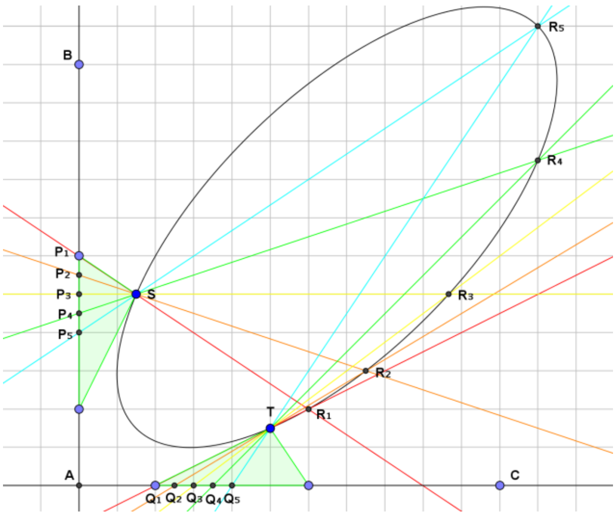



圖(11)




圖(12)

證明：以圓錐曲線二元二次方程式檢驗橢圓




圖(13)

1.在△ABC 中，另∠A=90°，A(0,0)，在$\overline{AB}$與$\overline{AC}$上做兩個全等、同位置、逆向內△。

2. 頂點 S(3,10)、T(10,3)，兩內△等分點為 $P_1(0,12)$、$P_2(0,11)$、$P_3(0,10)$、$P_4(0,9)$、$P_5(0,8)$，

$Q_1(4,0)$、$Q_2(5,0)$、$Q_3(6,0)$、$Q_4(7,0)$、$Q_5(8,0)$。分別通過內△頂點 S、T 做塞瓦線交 $R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$。

3.其中$\overleftrightarrow{P_5S}$直線方程式：$y = \frac{2}{3}x + 8$，$\overleftrightarrow{Q_5T}$直線方程式：$y = \frac{3}{2}x - 12$，由兩方程式交點可得

$R_5(24,24)$，同理可得 $R_1(12,4)$、$R_2(15,6)$、$R_3(\frac{58}{3}, 10)$、$R_4(24,17)$。

4.設 $R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$ 落在 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$上，分別將點座標代入得

$$\begin{cases} 576A + 576B + 576C + 24D + 24E + F = 0 \\ 576A + 408B + 289C + 24D + 17E + F = 0 \\ \frac{3364}{9}A + \frac{580}{3}B + 100C + \frac{58}{3}D + 10E + F = 0 \\ 225A + 80B + 36C + 15D + 6E + F = 0 \\ 144A + 48B + 16C + 12D + 4E + F = 0 \end{cases}$$

∴A=3、B=-4、C=3、D=-27、E=-27、F=144

5.將 S、T 代入方程式左右相等 ∴ S、T 亦在同一圓錐曲線上。

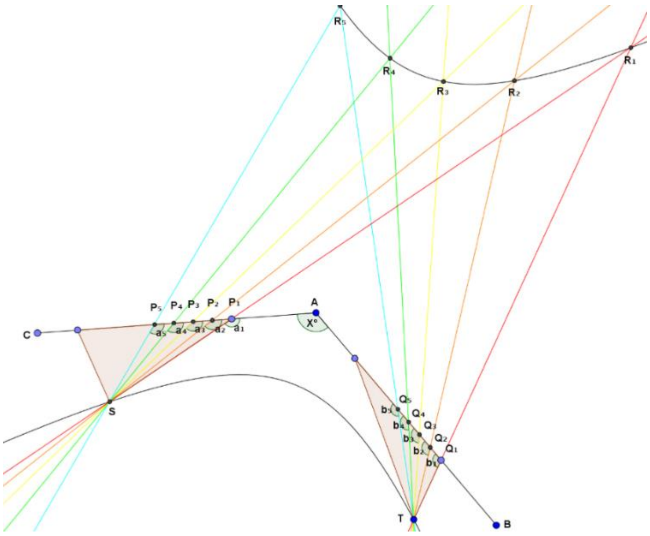
6.檢驗 $B^2$-4AC = $(-4)^2$-4×9×9 = -20 < 0，七點皆在相同的橢圓上。

(三)雙曲線產生條件及對應關係推論及證明

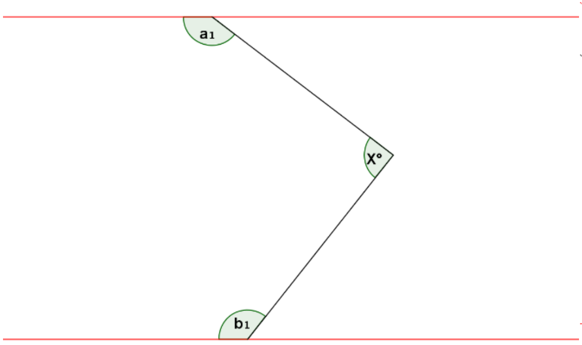
**性質五：當相鄰兩內△任意塞瓦線交點超出外△上方頂點時，塞瓦線交點會落在雙曲線上**

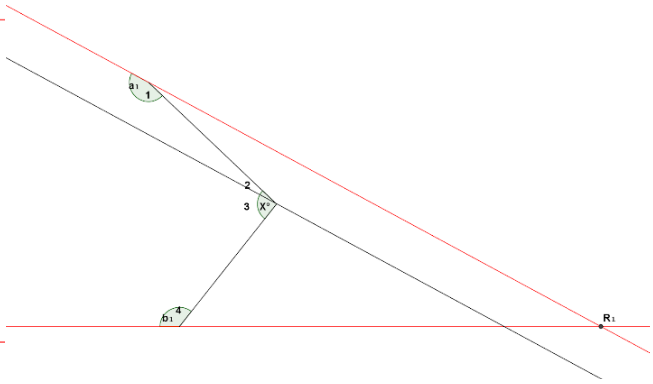
在圖(15)中 $a_1+b_1+x=360$ 兩條塞瓦現為平行，無交點產生。圖(16)中∠1+∠2=180°，∠3+∠4>180°

∴ $a_1+b_1+x>360$ 塞瓦線交點位於右側。圖(17)中∠1+∠2=180°，∠3+∠4<180°∴ $a_1+b_1+x<360$ 塞瓦線交點位於左側。依上述角度與塞瓦線交點位置之關係可用來推論圓錐曲線，且圖(14)中的塞瓦線交點皆位於∠A 上方，故所產生之圓錐曲線為雙曲線，得證。

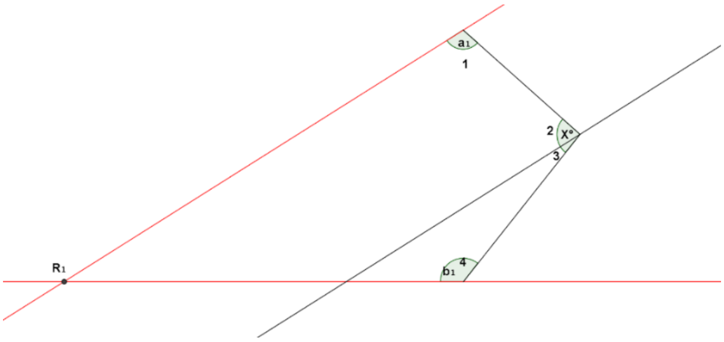



圖(14)



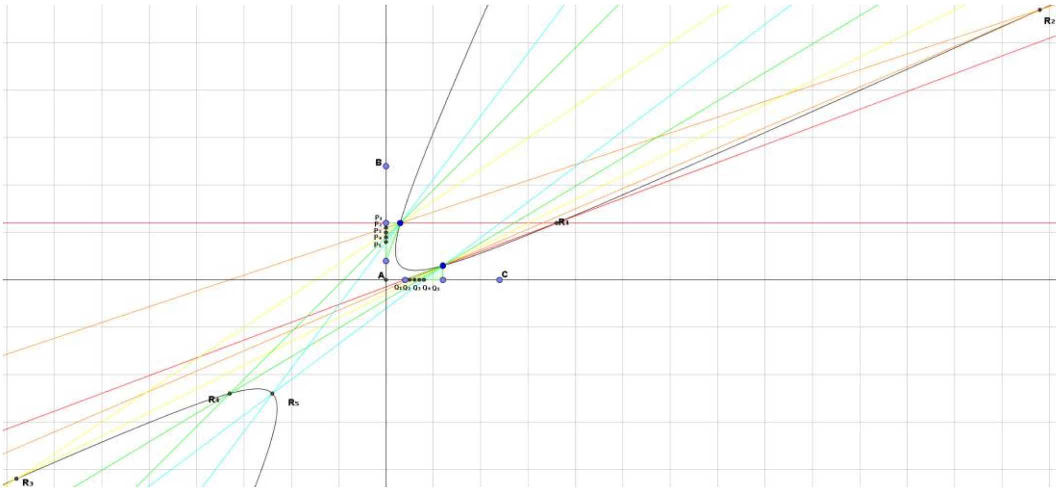




圖(15)　　圖(16)




圖(17)

證明：以圓錐曲線二元二次方程式檢驗雙曲線




圖(18)

1.做圖方式及內△等分點位置不變，頂點 S(3,12)、T(12,3)

2..其中$\overleftrightarrow{P_5S}$直線方程式：y = $\frac{4}{3}$x + 8，$\overleftrightarrow{Q_5T}$直線方程式：y = $\frac{3}{4}$x − 6，由兩方程式

交點可得 $R_5$(-24,-24)，同理可得 $R_1$(36,12)、$R_2$(138,57)、$R_3$(-78, −42)、$R_4$(-33,-24)。

3.設 $R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$ 落在 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$上，分別將點座標代入後求

出二元二次方程式為$3x^2 - 8xy + 3y^2 + 21x + 21y - 144 = 0$

4.將 S、T 代入方程式左右相等 ∴ S、T 亦在同一圓錐曲線上。

5.檢驗 $B^2$-4AC = $(-8)^2$-4×3×3 = 28 > 0，七點皆在相同的雙曲線上。

(四)拋物線產生條件及對應關係推論及證明

**性質六：產生拋物線之證明**

證明：以圓錐曲線二元二次方程式檢驗拋物線


圖(19)

1.做圖方式及內△等分點位置不變，而$\overleftrightarrow{P_5S}$與$\overleftrightarrow{Q_5T}$為平行線，因此無交點產生。

2.其中$\overleftrightarrow{P_4S}$直線方程式：y = $\frac{3}{4}$x + 9，$\overleftrightarrow{Q_4T}$直線方程式：y = $\frac{4}{5}$x − $\frac{28}{5}$，由兩方程式交點可得 $R_4$ (292,-228)，同理可得 $R_1$(28,12)、$R_2$($\frac{388}{9}$,$\frac{196}{9}$)、$R_3$(84,52)。

3.設 $R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$ 與 1 內△頂點 T(12,4)落在 $\mathrm{Ax^2+Bxy+C}y^2+\mathrm{Dx+Ey+F}=0$上，分別將點座標代入後求出二元二次方程式為$-\mathrm{x}^2+2\mathrm{xy}-y^2+8\mathrm{x}+8\mathrm{y}-64=0$

4.將 S 代入方程式左右相等 ∴ S 亦在同一圓錐曲線上。

5.檢驗 $B^2$-4AC = $(-2)^2$ − (-1) × (-1) × 4 = 0，七點皆在相同的拋物線上。

三、不同變因下外圖形為△的結果及其發現

外圖形為△，結果如下表所示：

| 外圖形 | 彼此關係 | 形狀 | 位置 | 方向 | 結果 |
|---|---|---|---|---|---|
| 正△ | 全等 | 正△ | 同位置 | - | 3圓(大小相同) |
| | | | 不同位置 | - | 3圓(大小不同) |
| | | 銳角△ | 同位置 | 正向 | 3圓(大小相同) |
| | | | | 反向 | 1圓2橢圓 |
| | | | 不同位置 | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1圓2橢圓 |
| | | 鈍角△ | 同位置 | 正向 | 3圓(大小相同) |
| | | | | 反向 | 1雙曲線1圓1橢圓 |
| | | | 不同位置 | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1雙曲線1圓1橢圓 |
| | | 直角△ | 同位置 | 正向 | 3圓(大小相同) |
| | | | | 反向 | 1雙曲線1圓1橢圓 |
| | | | 不同位置 | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1雙曲線1圓1橢圓 |

表(1)

| 外圖形 | 彼此關係 | 形狀 | 位置 | 方向 | 結果 |
|---|---|---|---|---|---|
| 正△ | 相似 | 正△ | 同位置 | - | 3圓(大小不同) |
| | | | 不同位 | - | 3圓(大小不同) |
| | | 銳角△ | 同位置 | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1圓2橢圓 |
| | | | 不同位 | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1圓2橢圓 |
| | | 鈍角△ | 同位置 | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1雙曲線1圓1橢圓 |
| | | | 不同位 | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1雙曲線1圓1橢圓 |
| | | 直角△ | 同位置 | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1雙曲線1圓1橢圓 |
| | | | 不同位 | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1雙曲線1圓1橢圓 |

表(2)

| 外圖形 | 彼此關係 | 形狀 | 位置 | 方向 | 結果 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 銳角▵ | 全等 | 正▵ | 同位置 | - | 三圓(大小不同) |
| | | | 不同位 | - | 三圓(大小不同) |
| | | 銳角▵ | 同位置 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 2橢圓1圓 (或1雙曲線1橢圓) |
| | | | 不同位 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 2橢圓1圓 (或1雙曲線1橢圓) |
| | | 鈍角▵ | 同位置 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1橢圓1圓1雙曲線(或2橢圓) |
| | | | 不同位 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1橢圓1圓1雙曲線(或2橢圓) |
| | | 直角▵ | 同位置 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1橢圓1圓1雙曲線(或2橢圓) |
| | | | 不同位 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1橢圓1圓1雙曲線(或2橢圓) |

表(3)

| 外圖形 | 彼此關係 | 形狀 | 位置 | 方向 | 結果 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 銳角▵ | 相似 | 正▵ | 同位置 | - | 三圓(大小不同) |
| | | | 不同位 | - | 三圓(大小不同) |
| | | 銳角▵ | 同位置 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 2橢圓1圓 (或1雙曲線1橢圓) |
| | | | 不同位 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 2橢圓1圓 (或1雙曲線1橢圓) |
| | | 鈍角▵ | 同位置 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1橢圓1圓1雙曲線(或2橢圓) |
| | | | 不同位 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1橢圓1圓1雙曲線(或2橢圓) |
| | | 直角▵ | 同位置 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1橢圓1圓1雙曲線(或2橢圓) |
| | | | 不同位 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1橢圓1圓1雙曲線(或2橢圓) |

表(4)

| 外圖形 | 彼此關係 | 形狀 | 方向 | 結果 |
|---|---|---|---|---|
| 鈍角▵ | 相似 | 正▵ | - | 3圓(大小不同) |
| | | 銳角▵ | 反向 | 1圓1橢圓1雙曲線 |
| | | | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | 鈍角▵ | 反向 | 1圓1橢圓1雙曲線 |
| | | | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | 直角▵ | 反向 | 1圓1橢圓1雙曲線 |
| | | | 正向 | 3圓(大小不同) |
| 鈍角▵ | 全等 | 正▵ | - | 3圓(大小不同) |
| | | 銳角▵ | 反向 | 1圓1橢圓1雙曲線 |
| | | | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | 鈍角▵ | 反向 | *1圓2橢圓 |
| | | | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | 直角▵ | 反向 | 1圓1橢圓1雙曲線 |
| | | | 正向 | 3圓(大小不同) |

表(5)

| 外圖形 | 彼此關係 | 形狀 | 位置 | 方向 | 結果 |
|---|---|---|---|---|---|
| 直角▵ | 全等 | 正▵ | 同位置 | - | 3圓(大小不同) |
| | | | 不同位 | - | 3圓(大小不同) |
| | | 銳角▵ | 同位置 | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1圓2橢圓(大小不同) |
| | | | 不同位 | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1圓2橢圓(大小不同) |
| | | 鈍角▵ | 同位置 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 2雙曲1圓<br>1雙曲1圓1橢圓 |
| | | | 不同位 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 2雙曲1圓<br>1雙曲1圓1橢圓<br>1圓1雙曲1拋物 |
| | | 直角▵ | 同位置 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1圓2橢圓(大小不同) |
| | | | 不同位 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1圓2橢圓(大小不同) |

表(6)

| 外圖形 | 彼此關係 | 形狀 | 位置 | 方向 | 結果 |
|---|---|---|---|---|---|
| 直角▵ | 相似 | 正▵ | 同位置 | - | 3圓(大小不同) |
| | | | 不同位置 | - | 3圓(大小不同) |
| | | 銳角▵ | 同位置 | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1圓2橢圓 |
| | | | 不同位置 | 正向 | 3圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1圓2橢圓 |
| | | 鈍角▵ | 同位置 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1圓1雙曲1拋物<br>1圓1雙曲1橢圓<br>2雙曲1圓<br>2橢圓1圓 |
| | | | 不同位置 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 2雙曲1圓<br>1圓1橢圓1雙曲<br>2橢圓1圓 |
| | | 直角▵ | 同位置 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1圓1雙曲1橢圓 |
| | | | 不同位置 | 正向 | 三圓(大小不同) |
| | | | | 反向 | 1圓1雙曲1橢圓 |

表(7)

**發現一： 產生圓的條件為 2 內△角度相似，不管外△是銳角、直角或鈍角，只要內△角度相似，兩內△之塞瓦線交點皆會落在一個圓上;若內△距離相等且 3 邊上的內△全等，則會產生 3 個等圓。**

**發現二：產生 1 圓 2 橢圓、1 圓 1 橢圓 1 雙曲線的情況，內△必為反向**

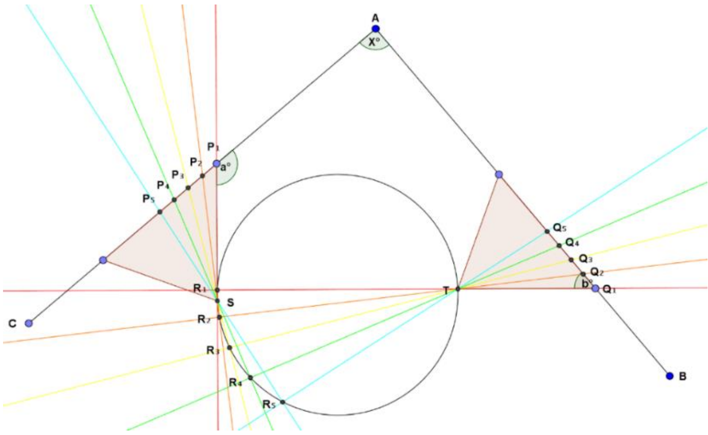
**發現三：只有在外△為直角△，內△為鈍角△且反向時，會形成 1 圓 1 雙曲線 1 橢圓及 1 圓 2 雙曲線。**

四、萬花三角芒星的推導與應用

芒星探討前言：透過外△相鄰兩邊所形成之內△塞瓦線交點所得之圓錐曲線性質我們發現：

如圖(20)，令$\angle A = x^{\circ}$

$$\begin{cases} \angle AP_1S_1 = a_1^{\circ}, \angle AQ_1T_1 = b_1^{\circ} \\ \angle AP_2S_2 = a_2^{\circ}, \angle AQ_2T_2 = b_2^{\circ} \\ \angle AP_3S_3 = a_3^{\circ}, \angle AQ_3T_3 = b_3^{\circ} \\ \angle AP_4S_4 = a_4^{\circ}, \angle AQ_4T_4 = b_4^{\circ} \\ \angle AP_5S_5 = a_5^{\circ}, \angle AQ_5T_5 = b_5^{\circ} \end{cases}$$



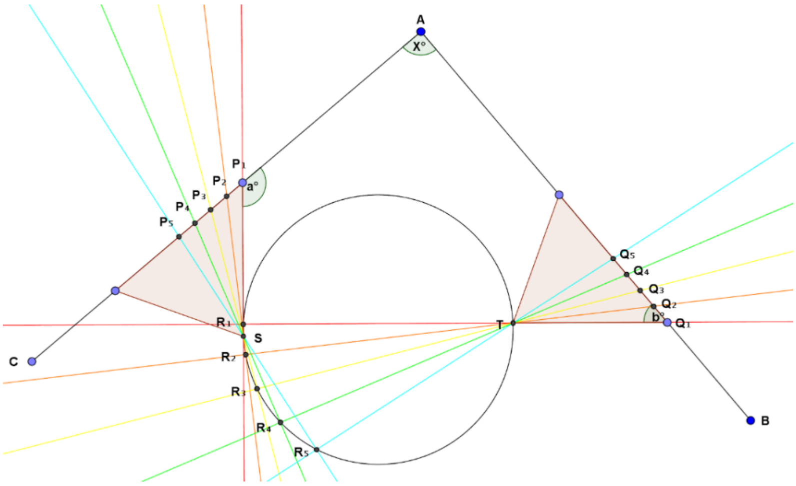
圖(20)

其中 $x^\circ$, $a_n$,$b_n$之間的度數關係可決定所產生的塞瓦線交點會或在的圓錐曲線的型態。

關於 a,b,x 之間的度數關係與圓錐曲線之型態，我們稱之為「萬花三角芒星」，而萬花三角芒星在外圖形為多邊形的探討中可直接簡化過程，對後續研究影響頗大，相關探討如下：

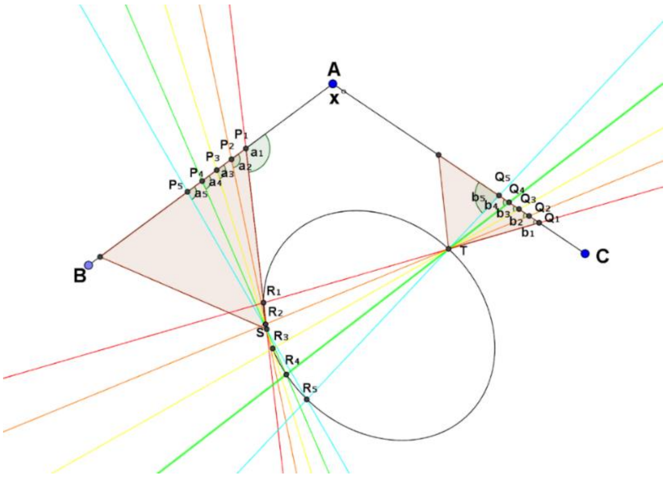
(一)基礎芒星

**性質七：如圖(21)由性質一(圓的幾何證明)可得知，△ABC 中∠A 的兩邊$\overline{AB}$和$\overline{AC}$上的內△，若∠A=$x^\circ$，∠$P_1$=$a^\circ$，∠$Q_1$=$b^\circ$。其中，$a+b=180^\circ$，則∠$P_1R_1Q_1$=$(180-x)^\circ$=∠$P_2R_2Q_2$=∠$P_3R_3Q_3$=∠$P_4R_4Q_4$=∠$P_5R_5Q_5$。則 S、T、$R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$七點共圓。**



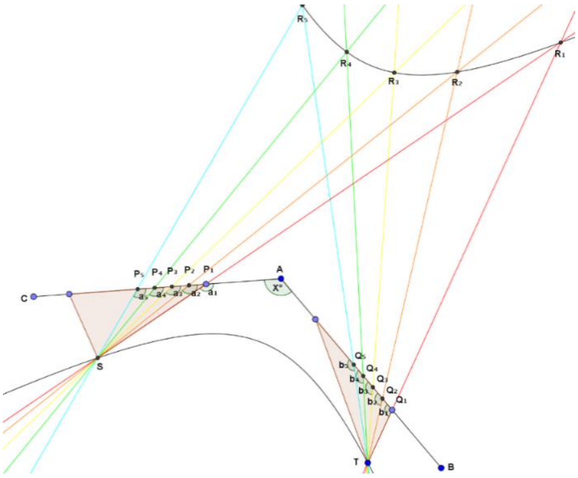
圖(21)

**性質八：如圖(22)，$a_1^\circ+b_1^\circ \neq a_2^\circ+b_2^\circ \neq a_3^\circ+b_3^\circ \neq a_4^\circ+b_4^\circ \neq a_5^\circ+b_5^\circ$。且 $a_n^\circ+b_n^\circ+x^\circ<360^\circ$(即可形成四邊形 $AP_1R_1Q_1$、$AP_2R_2Q_2$、$AP_3R_3Q_3$、$AP_4R_4Q_4$、$AP_5R_5Q_5$)則點 S、T、$R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$七點會落在一橢圓上。**




圖(22)

**性質九：如圖(23)，**$a_1^\circ+b_1^\circ \neq a_2^\circ+b_2^\circ \neq a_3^\circ+b_3^\circ \neq a_4^\circ+b_4^\circ \neq a_5^\circ+b_5^\circ$。且 $a_n^\circ+b_n^\circ+x^\circ>360^\circ$(即塞瓦線不在∠x 內)**則塞瓦線交點會落在△ABC 之外，5 個塞瓦線交點與 S、T 會落在雙曲線的兩邊。**

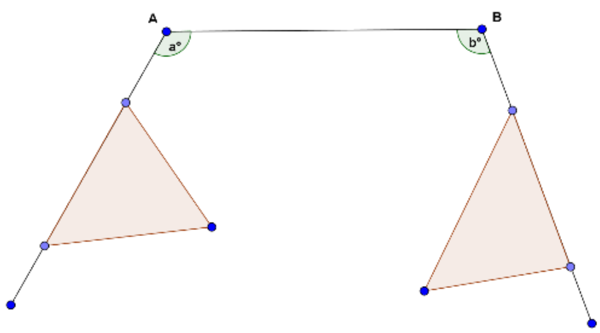



圖(23)

透過基礎芒星的探討，我們進一步推導當外圖形不只是△，而是有不同相鄰對邊存在時是否也可以利用芒星解決之前對於多邊外圖形的複雜製圖及研究過程。以下是芒星的推廣應用：

(二)第一層萬花三角芒星的推導

如圖(24)，兩個內△位置為非鄰邊關係，中間隔了$\overline{AB}$延伸$\overleftrightarrow{AD}$與$\overleftrightarrow{BC}$交點於 $O_1$，則此圖形我們稱為一層芒星。




圖(24)

**性質十：依圖()，其中利用△外角性質可得$\angle O_1=x^\circ=a+b-180^\circ=50^\circ$，即當兩內△為一層芒星的狀態，可轉化視為相鄰兩內△夾角為$(a+b-180)^\circ$的基礎芒星狀態，直接推出這兩個內△塞瓦線交點所落在之圓錐曲線類型。**

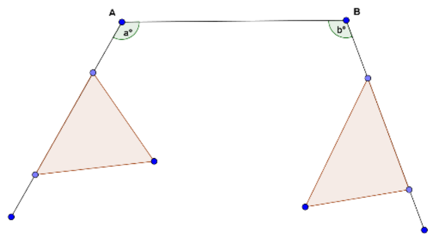
例 1：

1.如圖(25)，先畫出一任意的 n 邊形並找出其任意一組隔了一個邊的內△

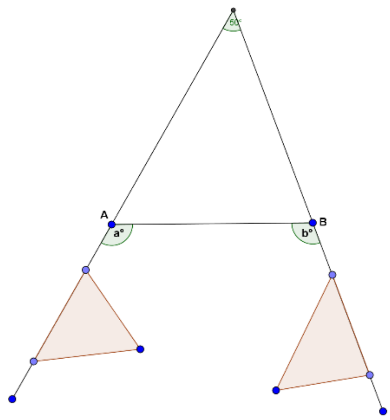
2.如圖(26)，加入一層芒星，並使用性質十推算芒星之角度

3.如圖(27)，由性質四可得，若 $a^\circ+b^\circ+x^\circ<360^\circ$會產生橢圓，

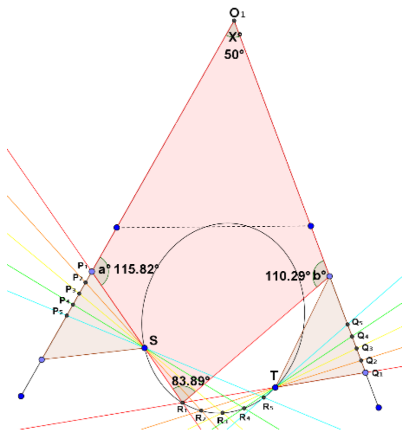
$a^\circ+b^\circ+x^\circ=116.82^\circ+110.29+50^\circ=286.11^\circ<360^\circ$，故得證點 $R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$、T、S 所落在的圓錐曲線為橢圓。




圖(25)原始圖




圖(26)加入一層芒星

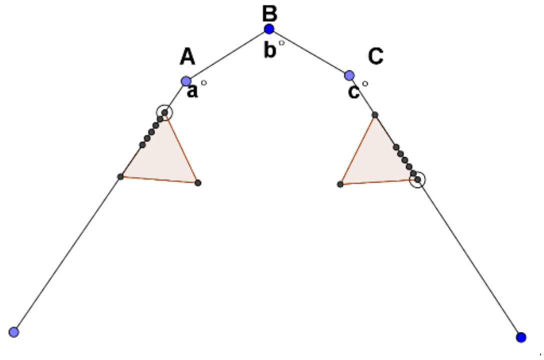



圖(27)判斷圓錐曲線

(三)第二層萬花三角芒星的推導

**性質十一：依圖(30)，其中利用△外角性質可得$\angle O_2=x^\circ=a+b+c-180^\circ*2$，即當兩內△為二層芒星的狀態，可轉化視為相鄰兩內△夾角為$(a+b+c-180*2)^\circ$的基礎芒星狀態，直接推出這兩個內△塞瓦線交點所落在之圓錐曲線類型。**

如圖(28)，兩個內△位置為非鄰邊關係，中間隔了$\overline{AB}$和$\overline{BC}$延伸$\overleftrightarrow{AD}$與$\overleftrightarrow{BC}$交點於 $O_2$，則此圖形我們稱為二層芒星。



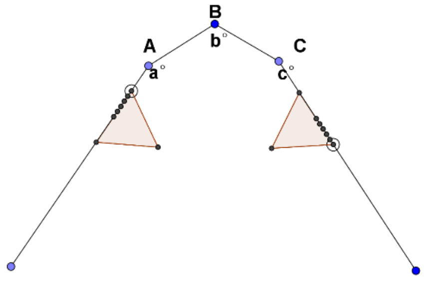

圖(28)

例 2：

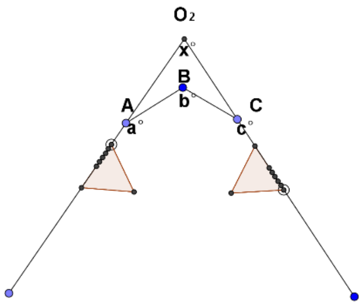
1.如圖(29)先畫出一任意的 n 邊形並找出其任意一組隔了兩個邊的內△。

2.如圖(30)加入二層芒星，並使用性質十一推算芒星之角度。

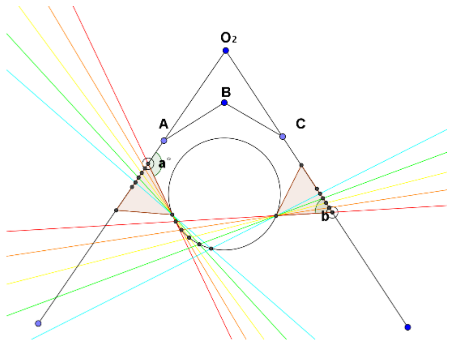
3.如圖(31)由性質四可得，若 $a^{\circ}+b^{\circ}=180^{\circ}$會產生圓，$a^{\circ}+b^{\circ}=180^{\circ}$，故得證點 $R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$、T、S 所落在的圓錐曲線為正圓。




圖(29)原始圖




圖(30)加入二層芒星

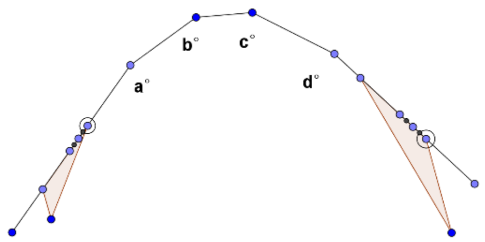



圖(31)判斷圓錐曲線

(四)第三層萬花三角芒星的推導

**性質十二：依圖(32)，其中利用△外角性質可得$\angle O_3=x^{\circ}=a+b+c+d-180^{\circ}*3$，即當兩內△為三層芒星的狀態，可轉化視為相鄰兩內△夾角為$(a+b+c+d-180*3)^{\circ}$的基礎芒星狀態，直接推出這兩個內△塞瓦線交點所落在之圓錐曲線類型。**

如圖(32)，兩個內△位置為非鄰邊關係，中間隔了$\overline{AB}$和$\overline{BC}$及$\overline{CD}$延伸$\overleftrightarrow{AD}$與$\overleftrightarrow{BC}$交點於 $O_3$，則此圖形我們稱為三層芒星。



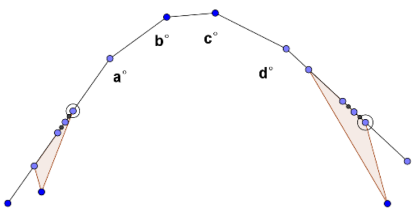

圖(32)

例 3：

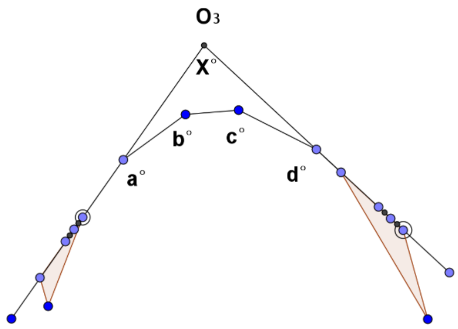
1.先畫出一任意的 n 邊形並找出其任意一組隔了三個邊的內△，如圖(33)

2. 如圖(34)加入三層芒星，並使用性質十二推算芒星之角度

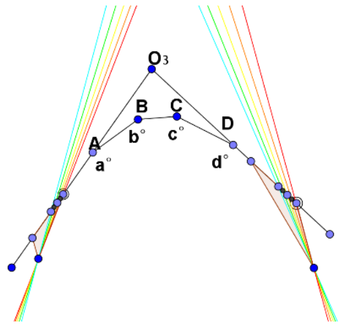
3.由性質五得當**相鄰兩內△任意塞瓦線交點超出外△上方頂點時，塞瓦線交點會落在雙曲上**




圖(33)原始圖



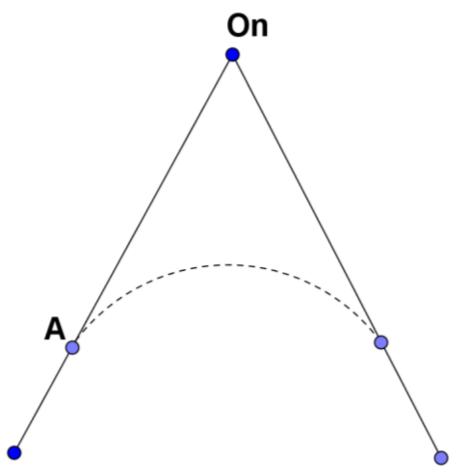

圖(34)加入三層芒星




圖(35)判斷圓錐曲線

(五)第 n 層萬花三角芒星的推導

**性質十三：依圖(36)，其中利用△外角性質可得$\angle O_n=x^\circ=a+b+c+d\cdots-180^\circ*n$，即當兩內△為 n 層芒星的狀態，可轉化視為相鄰兩內△夾角為$(a+b\cdots-180*n)^\circ$的基礎芒星狀態，直接推出這兩個內△塞瓦線交點所落在之圓錐曲線類型。**




圖(36)

七、利用(萬花三角芒星)推導不同邊數外圖形所產生的圓錐曲線

前期研究我們對於外圖形為四邊形及五邊形有諸多探討，相關發現、證明及研究見(研究日誌)。

透過萬花三角芒星的探討後，我們嘗試將此芒星應用在多邊形研究上，敘述如下：

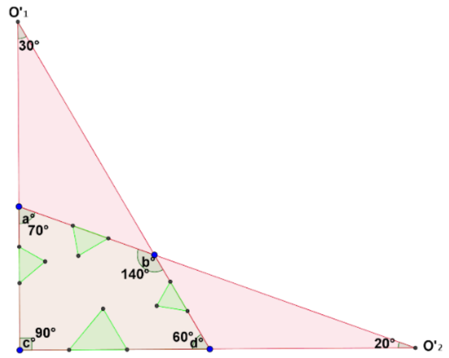
(一)n 多邊形各層芒星數的探討

四邊形各層芒星數的探討：

如圖(37)，四邊形在外邊非平行的情況之下會有 4 個基礎芒星和 2 個一層芒星，而總芒星數量為 6 個。

算法如下：

①總芒星數=$\frac{4*3}{2}$=6 ②基礎芒星數$\frac{4*2}{2}$=4 ③一層芒星數$\frac{4*1}{2}$=2

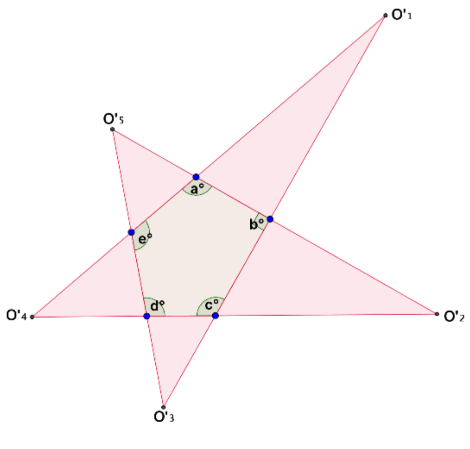



圖(37)

五邊形各層芒星數的探討：

如圖(38)，五邊形在各邊非平行的情況之下會有 5 個基礎芒星和 5 個一層芒星，而總芒星數量為 10 個。算法如下：

①總芒星數=$\frac{5*4}{2}$=10②基礎芒星數$\frac{5*2}{2}$=5 ③一層芒星數$\frac{5*2}{2}$=5

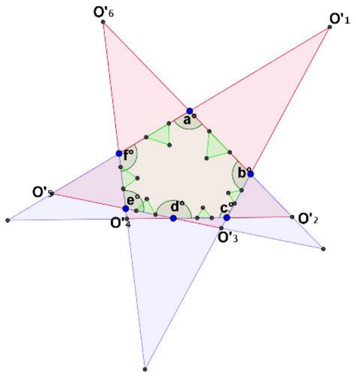



圖(38)

六邊形各層芒星數的探討：

如圖(39)，六邊形在各邊非平行的情況之下會有 6 個基礎芒星和 6 個一層芒星及 3 個二層芒星，而總芒星數量為 15 個。算法如下：

①總芒星數=$\frac{5*6}{2}$=15②基礎芒星數$\frac{6*2}{2}$=6 ③一層芒星數$\frac{6*2}{2}$=6 ④二層芒星數$\frac{6*1}{2}$=3

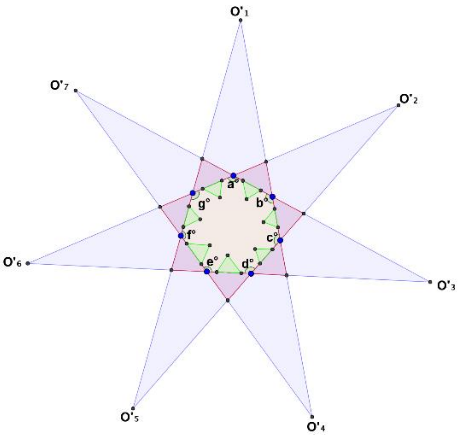



圖(39)

七邊形各層芒星數的探討：

如圖(40)，七邊形在各邊非平行的情況之下會有 7 個基礎芒星和 7 個一層芒星及 7 個二層芒星，而總芒星數量為 21 個。算法如下：

①總芒星數=$\frac{7*6}{2}$=21②基礎芒星數$\frac{7*2}{2}$=7 ③一層芒星數$\frac{7*2}{2}$=7 ④二層芒星數$\frac{7*2}{2}$=7




圖(40)

八邊形各層芒星數的探討：

八邊形在各邊非平行的情況之下會有 8 個基礎芒星和 8 個一層芒星及 8 個二層芒星 4 個三層芒星，而總芒星數量為 28 個。算法如下：

①總芒星數=$\frac{8*7}{2}$=28②基礎芒星數$\frac{8*2}{2}$=8 ③一層芒星數$\frac{8*2}{2}$=8 ④二層芒星數$\frac{8*2}{2}$=8⑤三層芒星數

$\frac{8*1}{2}$=4

九邊形各層芒星數的探討：

九邊形在各邊非平行的情況之下會有 9 個基礎芒星和 9 個一層芒星及 9 個二層芒星 9 個三層芒星，而總芒星數量為 36 個。算法如下：

①總芒星數=$\frac{9*8}{2}$=28②基礎芒星數$\frac{9*2}{2}$=8 ③一層芒星數$\frac{9*2}{2}$=8 ④二層芒星數$\frac{9*2}{2}$=8⑤三層芒星數$\frac{9*1}{2}$=4

n 多邊形各層芒星數的探討總整理表：

| | 四邊形 | 五邊形 | 六邊形 | 七邊形 | 八邊形 | n 奇數 | n 偶數 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 總計 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ |
| 基礎 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | n | n |
| 1 層 | 2 | 5 | 6 | 7 | 8 | n | n |
| 2 層 | | | 3 | 7 | 8 | n | n |
| 3 層 | | | | | 4 | n | n |
| 層數 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | $\frac{(n-1)}{2}$ | $\frac{n}{2}$ |

表(8)

n 多邊形各層芒星數的公式：奇數第一層~第$\frac{(n-1)}{2}$(層數)都為 n 個總個數為$\frac{n(n-1)}{2}$

偶數第一層~第$\frac{n}{2}$層(層數)都為 n 個總個數為$\frac{n(n-1)}{2}$

*在外圖形為正 n(偶數)邊形時，有些原本有的芒星會呈現平行的狀態，不會產生芒星，其塞瓦線也會產生平行。

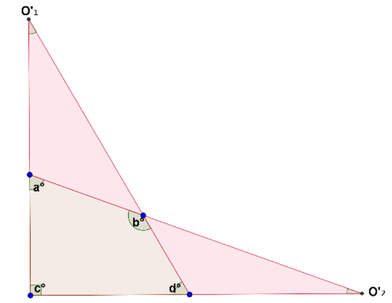
(二)推導四邊形及五邊形為外圖形所產生的圓錐曲線

在外圖形為四邊形時，使用芒星來推導塞瓦線交點落在的圓錐曲線為何，以圖(41)的四邊形做舉例。

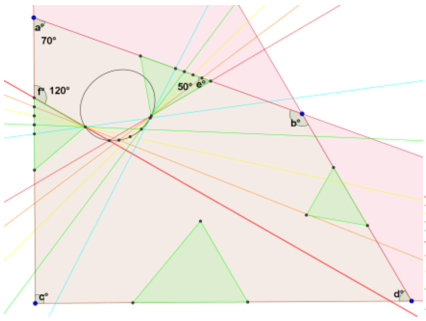
1.用性質七、八、九推導基礎芒星之圓錐曲線，圖(42)中上、下、右之內△為相似內△，由性質七及可得知，只要角度相似且順向便會產生圓形，由此可知上和右、右和下會產生大小不同的正圓，左邊的內△角度和其他內△角度關係為反向，由性質八得圖(42)中的(e+f+70(夾角度數))°<360°則塞瓦線交點會落在橢圓上，e+f+70=50+120+70=240<360，所以左和上的內△會產生橢圓，同理可證內△左和下也會產生橢圓。

2.先使用性質十算出一層芒星 O’1 和 O’2 的夾角角度，O’1 夾角為(140+60-180°)=20°;O’2 夾角為(70+140-180) °=30°

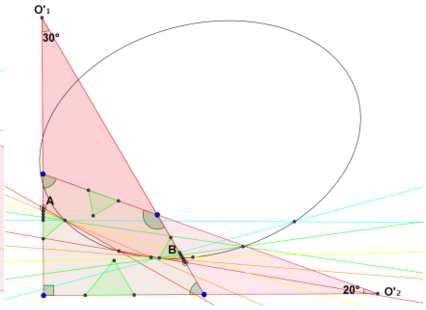
3.如圖(43)，左和右內△為不相似，由性質八可得，若 a°+b°+x°<360°會產生橢圓，a°+b°+x°=50°+120+30°=200°<360°，故得證一層芒星 O’1 的內△塞瓦線交點所落在的圓錐曲線為橢圓。一層芒星 O’2 的兩個內△為角度相似，由性質七得證，120+60=180，則內△上、下的塞瓦線交點落在圓上。



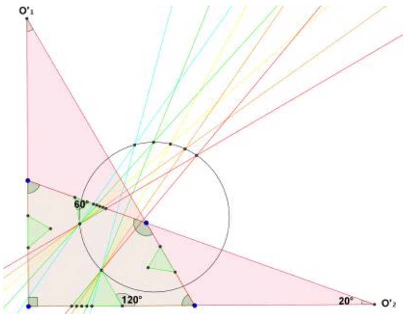
圖(41)



圖(42)



圖(43)



圖(44)

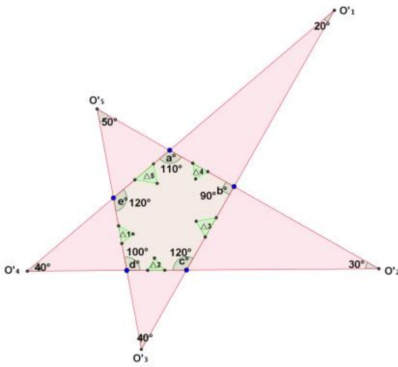
在外圖形為五邊形時，使用芒星來推導塞瓦線交點落在的圓錐曲線為何，以圖(45)的五邊形做舉例。

1.用性質七、八、九推導基礎芒星之圓錐曲線，圖(45)中內△1 與其他內△關係為反向，其餘內△為相似內△。由性質七及可得知，只要角度相似且順向便會產生圓形，由此可知△5 與△4、△4 與△3、△3 與△2 之間會產生大小不同的圓。以△1 與△5 舉例，由性質八得圖(46)中的(f+g+120(夾角度數)) °<360°則塞瓦線交點會落在橢圓上，g+f+30=97.46+97.46+30=314.62<360，所以△1 與△5 會產生橢圓，同理可證△1 與△2 也會產生橢圓。

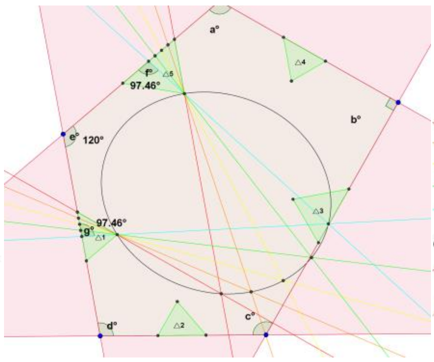
2.先使用性質十算出一層芒星 O’1、O’2…O’5 的夾角角度，O’1 夾角為(110+90-180°)=20°;O’2 夾角為(90+120-180) °=30°;O’3 夾角為(100+120-180°)=40°;O’4 夾角為(120+100-180) °=40°; O’5 夾角為(120+110-180°)=50°

3.如圖(47)，△1 與△4 為不相似，由性質八可得，若 $a^\circ+b^\circ+x^\circ<360^\circ$會產生橢圓，

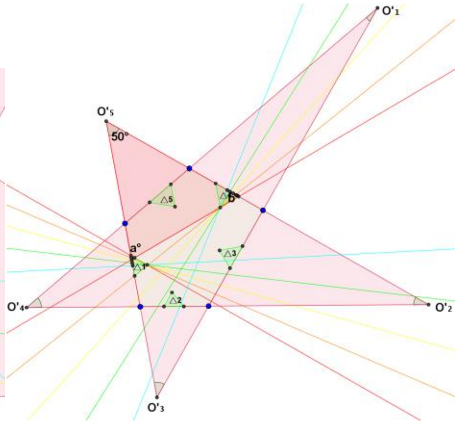
$a^\circ+b^\circ+x^\circ=50^\circ+120+50^\circ=220^\circ<360^\circ$，故得證一層芒星 O’5 的內△塞瓦線交點所落在的圓錐曲線為橢圓，同理可證一層芒星 O’3 的兩內△會產生橢圓。芒星 O’1、O’2、O’4 的兩個內△角度相似，由性質七得證，塞瓦線交點皆落在圓上。



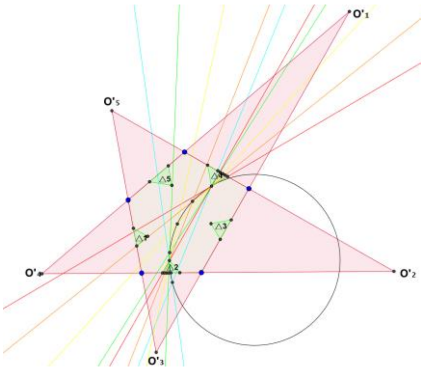

圖(45)




圖(46)




圖(47)




圖(48)

(二)推導六邊形及七邊形為外圖形所產生的圓錐曲線

在外圖形為六邊形時，使用芒星來推導塞瓦線交點落在的圓錐曲線為何，以圖(49)的六邊形做舉例。

1.用性質七、八、九推導基礎芒星之圓錐曲線，圖(49)中內△1 與其他內△關係為反向，其餘內△為相似內△。以△1 與△6 舉例，由性質八得圖(50)中的(h+g+114.16(夾角度數)) $^\circ<360^\circ$則塞瓦線交點會落在橢圓上，g+h+30=107.12+87.36+114.16=229.64<360，所以△1 與△6 會產生橢圓，同理可證△1 與△2 也會產生橢圓。其餘內△依性質一可知塞瓦線交點會落在圓上。

2.先使用性質十算出一層芒星 O’1、O’2…O’6 的夾角角度。

如圖(51)，△1 與△5 為不相似，由性質八可得，若 $a^\circ+b^\circ+x^\circ<360^\circ$會產生橢圓，

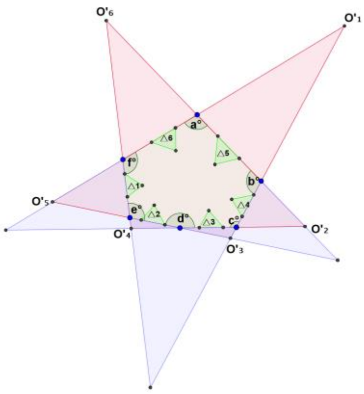
$a^\circ+b^\circ+x^\circ=50^\circ+120+37.19^\circ=207.19^\circ<360^\circ$，故得證一層芒星 O’6 的內△塞瓦線交點所落在的圓錐

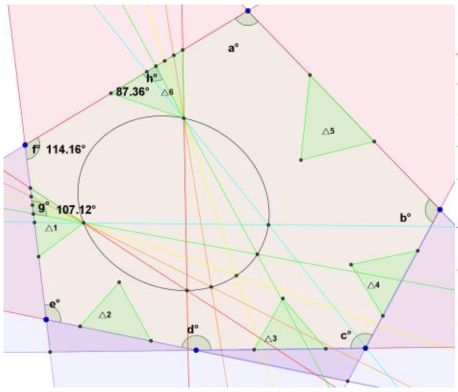
曲線為橢圓，同理可證一層芒星 O’4 的兩內△會產生橢圓。其餘內△依性質一可知塞瓦線交點會落在圓上。

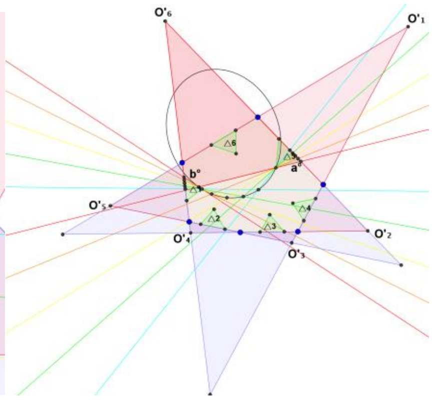
3.利用性質十算出二層芒星 O’7、O’8、O’9 夾角角度。

如圖(52)，△1 與△4 為不相似，由性質八可得，若 $a^\circ+b^\circ+x^\circ<360^\circ$會產生橢圓，

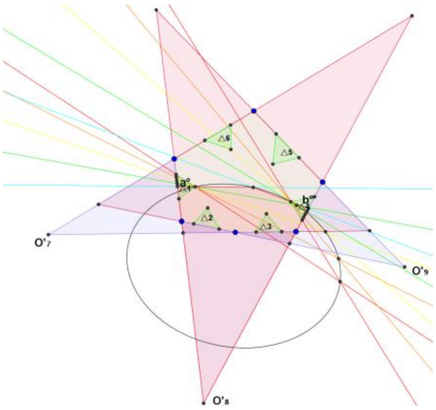
$a^\circ+b^\circ+x^\circ=82.54^\circ+82.54+35.16^\circ=200.24^\circ<360^\circ$，故得證二層芒星 O’8 的內△塞瓦線交點所落在的圓錐曲線為橢圓。其餘內△依性質一可知塞瓦線交點會落在圓上。




圖(49) 圖(50) 圖(51)




圖(52)

在外圖形為七邊形時，使用芒星來推導塞瓦線交點落在的圓錐曲線為何，以圖(53)的七邊形做舉例。

1.用性質七、八、九推導基礎芒星之圓錐曲線，圖(53)中內△1 與其他內△關係為反向，其餘內△為相似內△。以△1 與△2 舉例，由性質八得圖(54)中的(h+i+128.57(夾角度數)) $^\circ<360^\circ$則塞瓦線交點會落在橢圓上，i+h+30=105.9+77.42+128.57=311.89<360，所以△1 與△2 會產生橢圓，同理可證△1 與△7 也會產生橢圓。其餘內△依性質一可知塞瓦線交點會落在圓上。

2.先使用性質十算出一層芒星 O’1、O’2…O’7 的夾角角度。

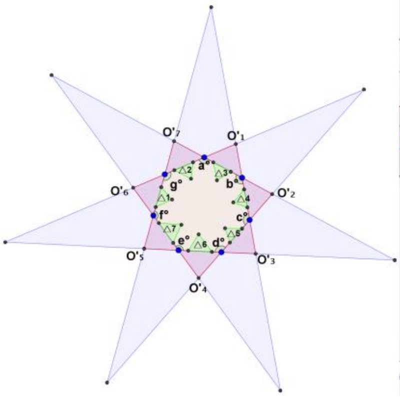
如圖(55)，△1 與△3 為不相似，由性質八可得，若 $a^\circ+b^\circ+x^\circ<360^\circ$會產生橢圓，

$a^\circ+b^\circ+x^\circ=50^\circ+120+77.14^\circ=247.14^\circ<360^\circ$，故得證一層芒星 O’ 7 的內△塞瓦線交點所落在的圓錐曲線為橢圓，同理可證一層芒星 O’ 5 的兩內△會產生橢圓。其餘內△依性質一可知塞瓦線交點會落在圓上。

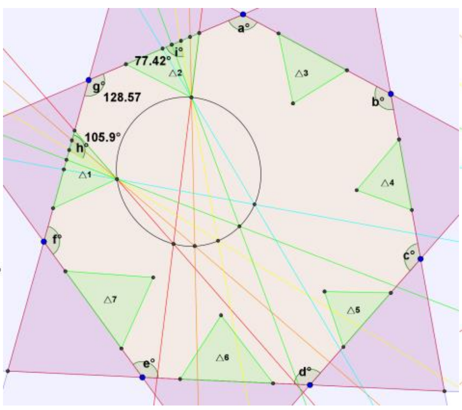
3.利用性質十算出二層芒星 O’ 8、O’ 9…O’ 14 夾角角度。

如圖(56)，△1 與△4 為不相似，由性質八可得，若 $a^\circ+b^\circ+x^\circ<360^\circ$會產生橢圓，

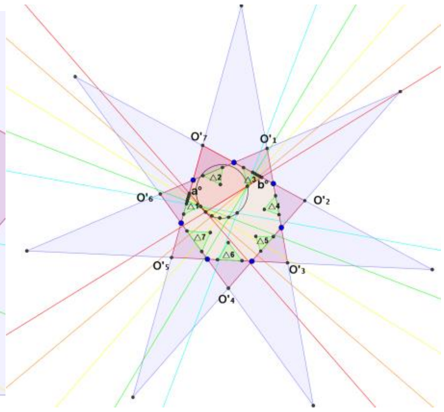
$a^\circ+b^\circ+x^\circ=84.87^\circ+97.46^\circ+25.17^\circ=207.5^\circ<360^\circ$，故得證二層芒星 O’ 9 的內△塞瓦線交點所落在的圓錐曲線為橢圓。其餘內△依性質一可知塞瓦線交點會落在圓上。



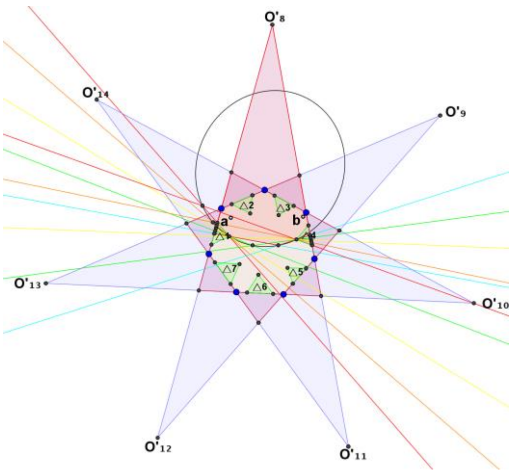
圖(53)



圖(54)



圖(55)



圖(56)

(四)推導 n 多邊形及 n+1 邊形為外圖形所產生的圓錐曲線

設定一 n 邊形，利用 n 多邊形各層芒星數的公式推算出各層芒星數，再以性質七、八、九推導出基礎芒星內△塞瓦線交點落在的圓錐曲線，最後利用一~十三性質一一推導出 n 多邊形所有內△塞瓦線交點落在的圓錐曲線，不管是幾邊形，都能推導出所有的圓錐曲線。

# 伍、研究結果

一、內Δ為相似形且方向為順向，兩內Δ塞瓦線交點落在同一個圓形

二、在外圖形為Δ時，鄰邊內Δ之塞瓦線交點落在同一圓上，則此三圓必定共點

三、判別橢圓、雙曲線及圓之方法(圖(9))

(一)$\angle a+\angle b=180°$會產生正圓

(二)$\angle a+\angle b<180°$會產生左右形的橢圓

(三)$\angle a+\angle b>180°$會產生上下形的橢圓

(四)在 $a°+b°+x°<360°$會產生橢圓;在 $a°+b°+x°>360°$會產生雙曲線

四、當相鄰兩內△任意塞瓦線交點超出外△上方頂點時，塞瓦線交點會落在雙曲線上

五、不同變因下外圖形為△的結果及其發現

(一) 圓的條件為 2 內△角度相似

(二) 內△距離相等且 3 邊上的內△全等，則會產生 3 個等圓

(三) 產生 1 圓 2 橢圓、1 圓 1 橢圓 1 雙曲線的情況，內△必為反向

(四) 外△為直角△，內△為鈍角△且反向時，會形成 1 圓 2 雙曲線，若內△不同位置則會形成 1 圓 1 雙曲線 1 拋物線

六、萬花三角芒星的推導與應用

(一) 如圖(21)，△ABC 中∠A 的兩邊$\overline{AB}$和$\overline{AC}$上的內△，設$\angle A=x^{\circ}$，$\angle P_1=a^{\circ}$，$\angle Q_1=b^{\circ}$，若 $a+b=180^{\circ}$、$\angle P_1R_1Q_1=(180-x)^{\circ}$，則 S、T、$R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$七點共圓

(二) 如圖(22)，$a_1^{\circ}+b_1^{\circ}\neq a_2^{\circ}+b_2^{\circ}\neq a_3^{\circ}+b_3^{\circ}\neq a_4^{\circ}+b_4^{\circ}\neq a_5^{\circ}+b_5^{\circ}$，且 $a_n^{\circ}+b_n^{\circ}+x^{\circ}<360^{\circ}$，則點 S、T、$R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$七點會落在一橢圓上

(三) 如圖(23)，$a_1^{\circ}+b_1^{\circ}\neq a_2^{\circ}+b_2^{\circ}\neq a_3^{\circ}+b_3^{\circ}\neq a_4^{\circ}+b_4^{\circ}\neq a_5^{\circ}+b_5^{\circ}$，且 $a_n^{\circ}+b_n^{\circ}+x^{\circ}>360^{\circ}$，則塞瓦線交點會落在△ABC 之外，5 個塞瓦線交點與 S、T 會落在雙曲線的兩邊

(四) 利用△外角性質可得∠$O_n$=x°=a+b+c+d⋯-180°*n，即當兩內△為 n 層芒星的狀態，可轉化視為相鄰兩內△夾角為(a+b⋯-180*n) °的基礎芒星狀態，直接推出這兩個內△塞瓦線交點所落在之圓錐曲線類型

七、n 多邊形各層芒星數的公式：奇數第一層~第$\frac{(n-1)}{2}$(層數)都為 n 個總個數為$\frac{n(n-1)}{2}$

偶數第一層~第$\frac{n}{2}$層(層數)都為 n 個總個數為$\frac{n(n-1)}{2}$

# 陸、討論

在不同圓錐曲線產生的條件及對應關係推論及證明中，我們分別敘述了圓、橢圓、雙曲線及拋物線的出現條件、規律及其證明方法。透過「萬花三角芒星」，我們可以推導出外圖形為 n 多邊形對應內△產生的各種圓錐曲線類型，後續研究可將內△翻轉至外圖形線段外側，針對翻轉後芒星角度，探討外圖形對應其邊上外翻後內△所能產生的圓錐曲線類型。

# 柒、結論

透過不斷的做圖及推論，我們研究出在各種情況下內△塞瓦線交點落在的圓錐曲線為何。當內△為相似形且方向為正向時，兩內△塞瓦線交點落在同一個圓形，運用密克定理證明在外圖形為△，若鄰邊內△之塞瓦線交點在同一圓上，則三圓交於一點。當內△為反向時，會產生橢圓、雙曲線或拋物線，使用公式證明出在不同角度組合下產生的圓錐曲線為橢圓或雙曲線，並利用「萬花三角芒星」推導出當外圖形為 n 邊形時，內△塞瓦線交點落在的圓錐曲線類型。

# 捌、參考資料及其他

[1]維基百科 (2023)。圓錐曲線。圓錐曲線 - 維基百科，自由的百科全書 (wikipedia.org)。

[2]維基百科 (2023)。密克定理。https：//zh.wikipedia.org/wiki/密克定理。

[3]笹部貞市郎 (2003)。幾何學辭典。台北市：九章出版社。

[4]項武義 (2009)。基礎幾何學。台北市：五南圖書出版有限公司。

## 【評語】030418

作品設定一個外三角形 ABC，在其 AB 與 AC 這兩邊上放兩個相似三角形 SDE 和 TFG，其中 DE 在 AB 邊上，FG 在 AC 邊上，$\angle S=\angle T$，$\angle D=\angle F$（可想成是三角形 SDE 逆時針旋轉$\angle A$ 的角度，縮放後再把原貼合在 AB 邊上的邊貼在 AC 邊上)。在 DE 和 FG 邊上分別取等分點 $P_1, P_2, \cdots, P_{(n-1)}$和 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{(n-1)}$，其中 $n\geq 6$。假設當 $1\leq i \leq 5$ 時，過 S 和 $P_i$ 的的直線與過 T 和 $Q_i$ 的的直線交於 $R_i$。作者們證明了 $R_1, R_2, \cdots, R_5$ 這 5 點共圓。並證明了透過同樣方式對三組相鄰邊構造出的三個圓會共點。對於改變三角形的放置方式，所得出的 5 個點會落在哪一種二次曲線的圖形上，也做了討論。作者們給出了很多的結果，可以看得出是投入了不少的心力才完成這個作品，這一點頗值得鼓勵。問題設定的有點奇怪，對於相似三角形順向擺放的情況，似乎不需要把條件限縮在只考慮 5 個點，作者們之所以要限制只考慮 5 個點，似乎只是為了決定一個二次曲線，這也讓後半部的討論看起來有些突兀。此外，在討論不同三角形、不同放置方式對圖形造成的影響時，細分為放置在同位置或不同位置兩種情況似乎沒有必要（兩種結果完全一致，而且當

三角形大小不同時，同位置是指什麼？)。作者們考慮了一個特別的問題，如果能聚焦在主要的問題上，針對原始問題作更深入的分析，挖掘出更多有趣的性質，應該會更好。

# 作品海報

# 壹、研究動機

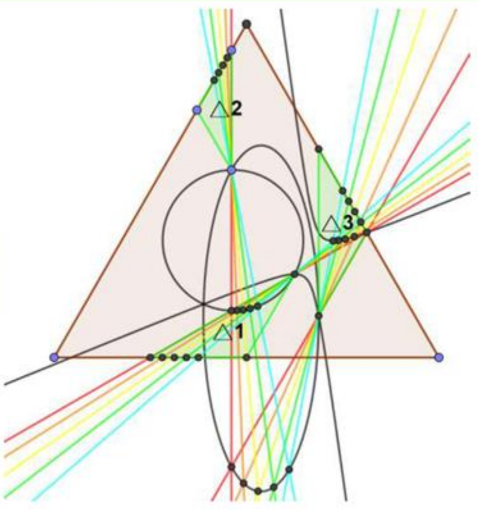
我們參考歷屆科展，發現許多有關幾何的研究，我們便利用△與塞瓦線交點，相連找出圓錐曲線，再利用內△ 的變化，如全等、相似、順逆向、位置關係等，藉由運用更多不同的操縱變因，推論出圓錐曲線出現的條件和規律，加以證明及探討。

# 貳、研究架構

外圖形為三角形 → 內三角形
- 全等、相似、不相似
- 順向、正反向
- 同位置、不同位置

→ 圓錐曲線種類產生條件與相關證明 → 萬花三角芒星推導 →
- 基礎萬花三角芒星
- n層萬花三角芒星

→ 多邊形內角及圓錐曲線的關係




# 參、預備知識

- 名詞解釋

| | |
|---|---|
| 外圖形 | 外圖形為n邊形(n≥3) |
| 內圖形 | 內圖形為△(其中△非全等、相似、不等三種狀況)。 |
| 正反向關係 | 內圖形為全等或相似△時，順向排列稱為正向；逆向排列時稱為反向。 |
| 作圖方式 | 設定外圖形，並在其各邊上做一個內△，在內△底邊(7個等分點+底角2點，共9點)，取單邊5個等分點與內△頂點連成塞瓦線，鄰近內△塞瓦線產生5個交點，此五個交點必落在同一圓錐曲線上。 |

- 定義

**定義1：圓錐曲線種類之二次曲線方程式**

(一)圓：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$、$x^2+y^2=r^2$

(二)橢圓：$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ or ：$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$，中心(h,k)，且a>b>0

(三)雙曲線：$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ or ：$\frac{(x-h)^2}{b^2}-\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$，中心(h,k)，且a,b>0

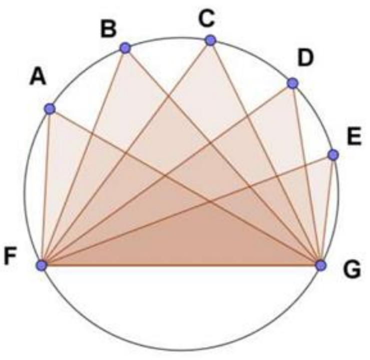
(四)拋物線：$(y-x)^2=4c(x-h)$ or $(x-h)^2=4c(y-k)$，頂點(h,k)，$|c|$焦距

**定義2：圓錐曲線的二圓二次方程式判別**

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，以判別式$B^2-4AC$檢驗：$\begin{cases} B^2-4AC>0 \text{為雙曲線} \\ B^2-4AC<0 \text{為橢圓} \\ B^2-4AC=0 \text{為拋物線} \end{cases}$

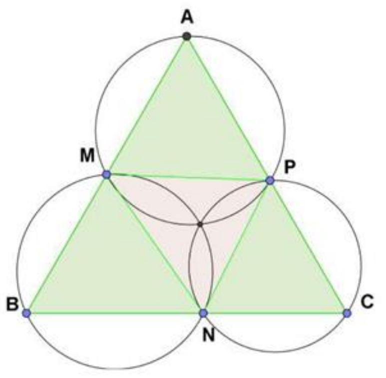
- 預備定理

**預備定理1：圓的判斷定理定義**




平面上相異7點A,B,C,D,E,F,G，若∠FAG=∠FBG=∠FCG=∠FDG=∠FEG則7點共圓

**預備定理2：密克定理逆定理**




△ABC中若M、N、P三點分別在$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$線段上，則△AMP、△BMN、△CNP的外接圓交於一點。

# 肆、研究過程

- 不同圓錐曲線產生的條件及對應關係推論及證明

**一、圓形**

**(一)以銳角△為內△做舉例**

1.先在外△任兩邊分別做兩個相似、順向、不同位置的銳角△(60°-40°-80°)，並取等分點$P_1$~ $P_5$，$Q_1$~ $Q_5$，做內△過等分點及頂點S、T塞瓦線，分別產生交點$R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$。

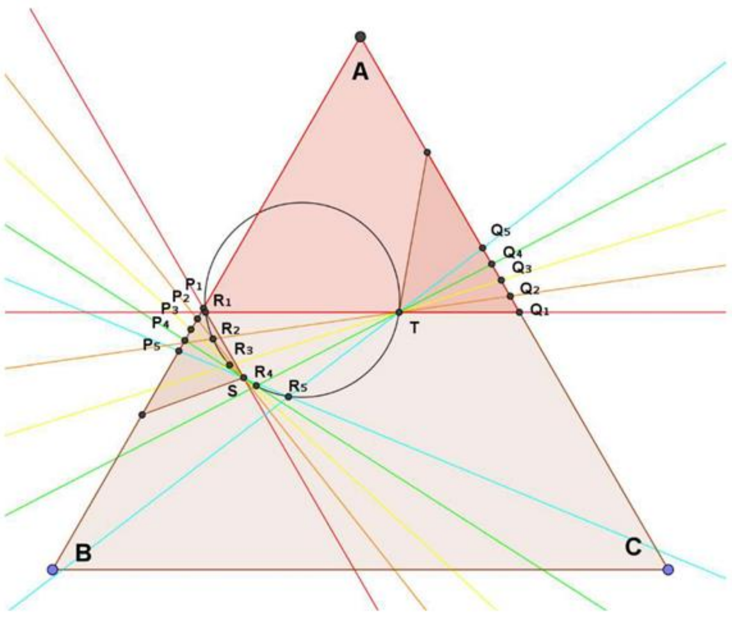
2.在四邊形$AP_1R_1Q_1$中，令$\angle AP_1R_1$為θ，因為兩內△為相似，所以$\angle AP_1R_1$和$\angle AQ_1R_1$互補，

得$\angle AP_1R_1+\angle AQ_1R_1=180°$，又四邊形內角和為360°，所以△$\angle P_1AQ_1+\angle P_1R_1Q_1=180°$。

3.令$P_1AQ_1=x°$，得$\angle P_1R_1Q_1=180°-x°$

4.同理可證，其餘四邊形亦可得$\angle P_2R_2Q_2=180°-X°=\angle P_3R_3Q_3=\angle P_4R_4Q_4=\angle P_5R_5Q_5=\angle P_1R_1Q_1$此五角度度數相同。

5.依預備定理1得在平面上相異7點可得證S、T、$R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$七點共圓。

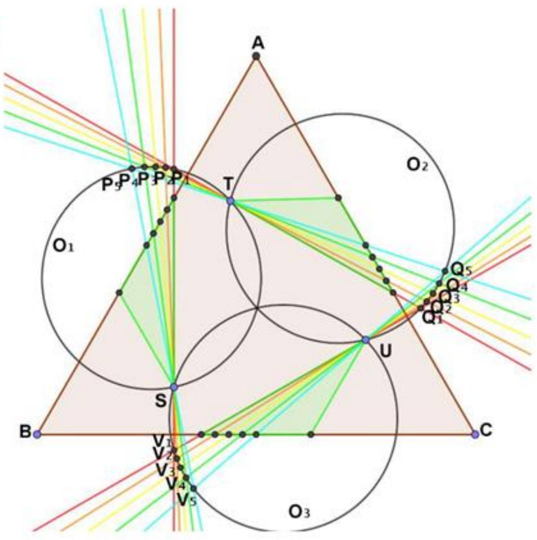



**性質一：內△為相似形且方向為順向，兩內△塞瓦線交點落在同一個圓形**

### (二)以銳角△為內△做舉例

1. 在△$P_1V_1Q_1$中，S、T、U分別落在P1V1、$P1Q1$、$V_1Q_1$上，由預備定理2.可知，△$P_1ST$、△$Q_1TU$、△$V_1SU$的外接圓，三圓共點
2. 同理可得證，若外△ABC，鄰邊之塞瓦線交點落在同一圓上，則此三圓必定共點。

**性質二： 鄰邊內△之塞瓦線交點落在同一圓上，則此三圓必定共點**




3.在△ABC令∠A=θ°，∠B=α°，∠C=β°

圓$O_1$中$\angle P_1=\angle P_2=\angle P_3=\angle P_4=\angle_5=180°-\angle A=180°-\theta°$

$\widehat{SP_1}=2*(180°-\theta°)$∴圓$O_1$半徑$r_1=\frac{\overline{ST}}{2\sin\theta}$

2.∴圓$O_1$：圓$O_2$：圓$O_3$=$(\frac{\overline{ST}}{2\sin\theta})^2\boldsymbol{\pi}$： $(\frac{\overline{TU}}{2\sin\theta})^2\boldsymbol{\pi}$： $(\frac{\overline{SU}}{2\sin\theta})^2\boldsymbol{\pi}$=$(\frac{\overline{ST}}{2\sin\theta})^2$： $(\frac{\overline{TU}}{2\sin\theta})^2$： $(\frac{\overline{SU}}{2\sin\theta})^2$

3.由上述可得證此三圓之比例式為$(\frac{\overline{ST}}{2\sin\theta})^2$： $(\frac{\overline{TU}}{2\sin\theta})^2$： $(\frac{\overline{SU}}{2\sin\theta})^2$

**性質三：任何種類之三圓比例式計算**

### (三)解析幾何證明

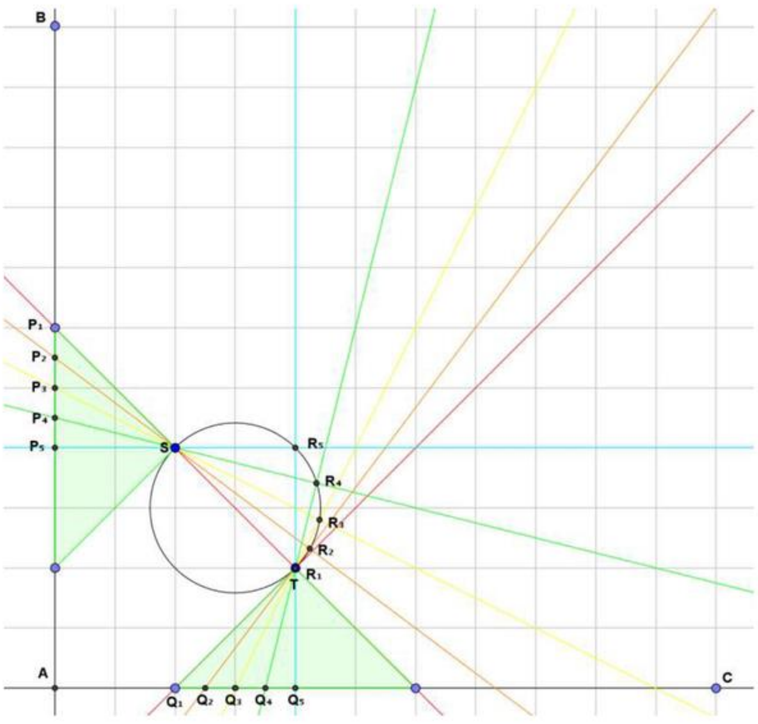
1.在△ABC中，另∠A=90°，A(0,0)，在$\overline{AB}$與$\overline{AC}$上做兩個全等、同位置、逆向內△。

2.其中$\overleftrightarrow{P_5S}$直線方程式：y = 8，$\overleftrightarrow{Q_5T}$直線方程式：x = 8，由兩方程式交點可得$R_5(8,8)$，同理可得$R_1(8,4)$、$R_2(\frac{212}{25},\frac{116}{25})$、$R_3(\frac{44}{5},\frac{28}{5})$、$R_4(\frac{148}{17},\frac{116}{17})$。

3.設$R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$落在$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$上，分別將點座標代入後求出二元二次方程式為$-x^2-y^2+12x+21y-64=0$

4.頂點T與$R_1$重疊，將S代入方程式左右相等∴S、T亦在同一圓錐曲線上。

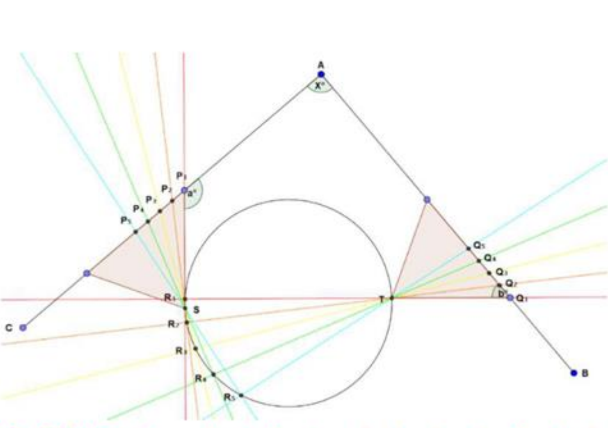
5.因此方程式無xy項，故七點皆在相同的圓上。

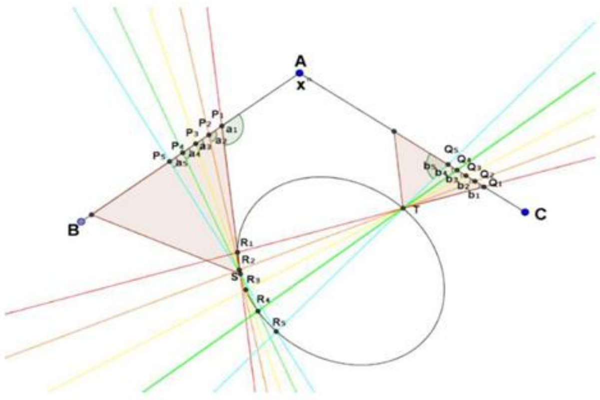


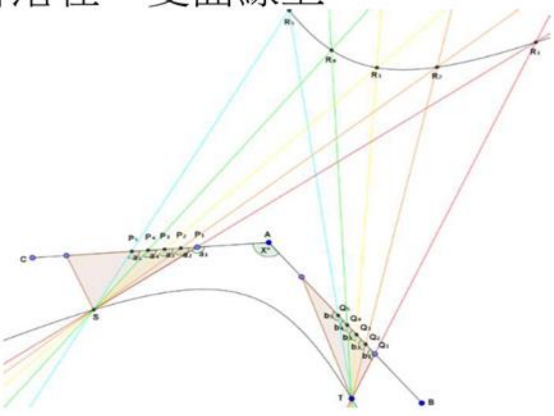

## 二、橢圓與雙曲線

### (一)產生條件

a°+b°+x°<360°會產生橢圓；a°+b°+x°>360°會產生雙曲線。因為若a°+b°+x°>360則塞瓦線交點會從外△頂點內轉到外△頂點外側，而在外側的塞瓦線交點及在內側的內△頂點七點會落在一雙曲線上







性質四：$a_1°+b_1°\neq a_2°+b_2°\neq a_3°+b_3°\neq a_4°+b_4°\neq a_5°+b_5°$。且$a_n°+b_n°+x°>360°$(即塞瓦線不在∠x內)則塞瓦線交點會落在△ABC之外，5個塞瓦線交點與S、T會落在雙曲線的兩邊。

性質五：$a_1°+b_1°\neq a_2°+b_2°\neq a_3°+b_3°\neq a_4°+b_4°\neq a_5°+b_5°$。且a□°+b□°+x°<360°(即可形成四邊形$AP_1R_1Q_1$、$AP_2R_2Q_2$、$AP_3R_3Q_3$、$AP_4R_4Q_4$、$AP_5R_5Q_5$)則點S、T、$R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$七點會落在一橢圓上。

性質六：由性質一(圓的幾何證明)可得知，△ABC中∠A的兩邊$\overline{AB}$和$\overline{AC}$上的內△，若∠A=x°，$\angle P_1$=a°，$\angle Q_1$=b°，其中，a+b=180°，且內△符合相似、順向等條件則$\angle P_1R_1Q_1=(180-x)°=\angle P_2R_2Q_2=\angle P_3R_3Q_3=\angle P_4R_4Q_4=\angle P_5R_5Q_5$。則S、T、$R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$七點共圓。

- 外圖形為三角形時不同變因下的發現

> 發現一： 產生圓的條件為2內△角度相似，不管外△是銳角、直角或鈍角，只要內△角度相似，兩內△之塞瓦線交點皆會落在一個圓上;若內△距離相等且3邊上的內△全等，則會產生3個等圓。
> 發現二：產生1圓2橢圓、1圓1橢圓1雙曲線的情況，內△必為反向
> 發現三：只有在外△為直角△，內△為鈍角△且反向時，會形成1圓1雙曲線1橢圓及1圓2雙曲線。

- 萬花三角芒星

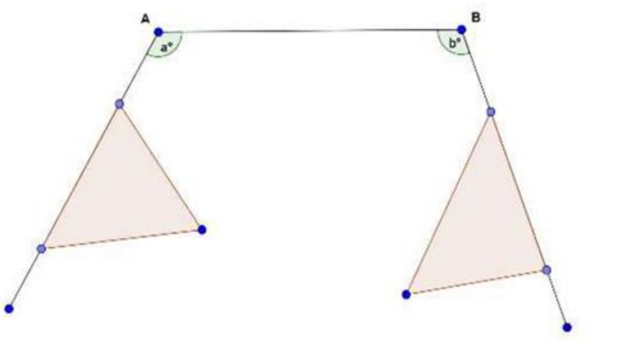
**一、基礎芒星**：可透過性質四~性質六得知

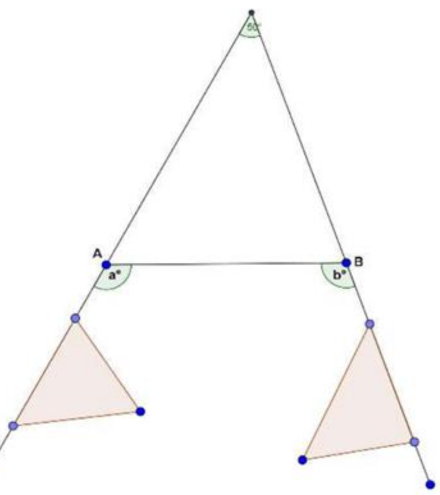
**二、一層芒星：**

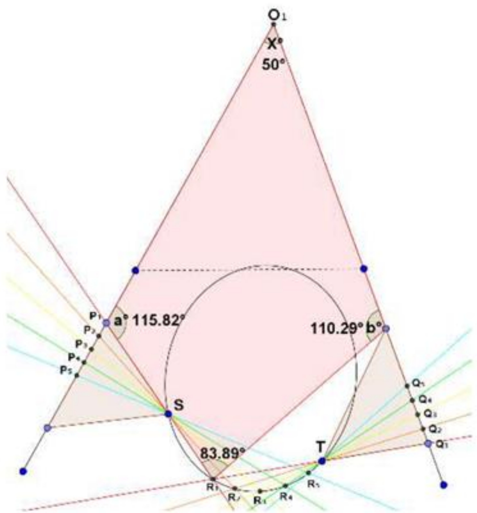
(一) 先畫出一任意的n邊形並找出其任意一組隔了一個邊的內△

(二) 加入一層芒星，並使用性質七推算芒星之角度

(三) 由性質四可得，若a°+b°+x°<360°會產生橢圓，a°+b°+x°=116.82°+110.29+50°=286.11°<360°，故得證點$R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$、$R_5$、T、S所落在的圓錐曲線為橢圓。



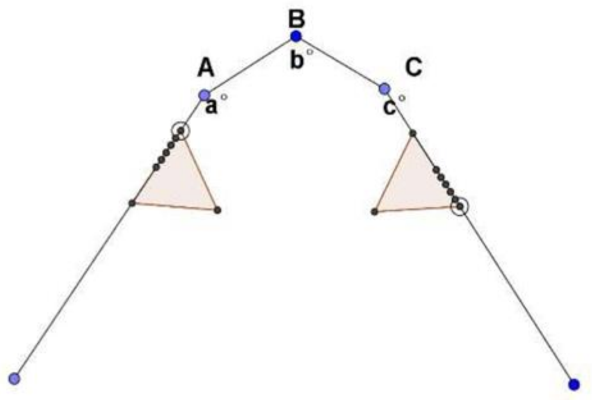



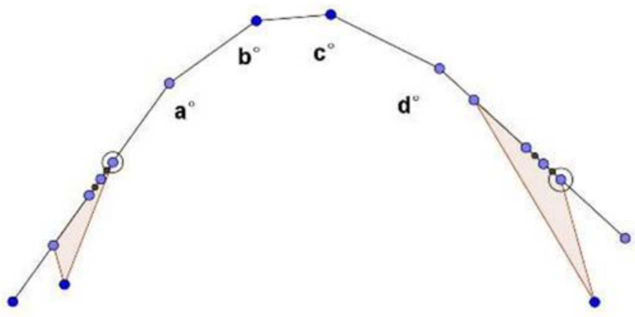
**性質七：其中利用△外角性質可得$\angle O_1=x^\circ=a+b-180^\circ=50^\circ$，即當兩內△為一層芒星的狀態，可轉化視為相鄰兩內△夾角為(a+b-180) °的基礎芒星狀態，直接推出這兩個內△塞瓦線交點所落在之圓錐曲線類型。**

### 三、多層芒星：

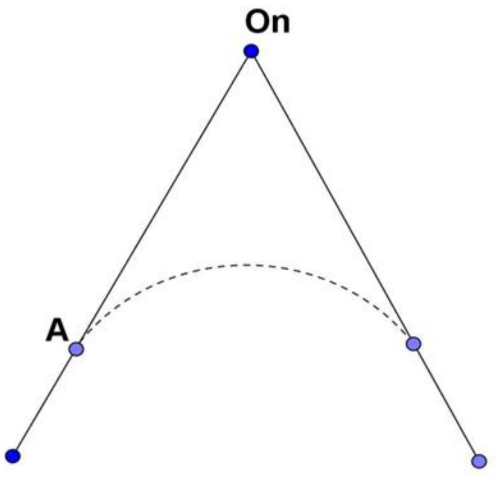
與一層芒星之作圖方式相同，△外角性質可得O□ $x^\circ$=a+b+c+d⋯-180°*n，即當兩內△為n層芒星的狀態，可轉化視為相鄰兩內△夾角為(a+b⋯-180*n) °的基礎芒星狀態，直接推出這兩個內△塞瓦線交點所落在之圓錐曲線類型。



二層芒星



三層芒星



n層芒星

## • 利用萬花三角芒星推導不同邊數外圖形所產生的圓錐曲線

### 一、n多邊形各層芒星數的探討：

| | 四邊形 | 五邊形 | 六邊形 | 七邊形 | 八邊形 | n奇數 | n偶數 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 總計 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | $\frac{n(n-1)}{2}$ | $\frac{n(n-1)}{2}$ |
| 基礎 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | n | n |
| 1層 | 2 | 5 | 6 | 7 | 8 | n | n |
| 2層 | - | - | 3 | 7 | 8 | n | n |
| 3層 | - | - | - | - | 4 | n | n |
| 層數 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | $\frac{(n-1)}{2}$ | $\frac{n}{2}$ |

n多邊形各層芒星數的公式：奇數第一層~第$\frac{(n-1)}{2}$(層數)都為n個總個數為$\frac{n(n-1)}{2}$

偶數第一層~第$\frac{n}{2}$層(層數)都為n個總個數為$\frac{n(n-1)}{2}$

*在外圖形為正n(偶數)邊形時，有些原本有的芒星會呈現平行的狀態，不會產生芒星，其塞瓦線也會產生平行。

### 二、n多邊形各層芒星產生之圓錐曲線的探討：

外圖形為五邊形，以△1與其餘內△之間的關係做舉例

(一)基礎芒星推導

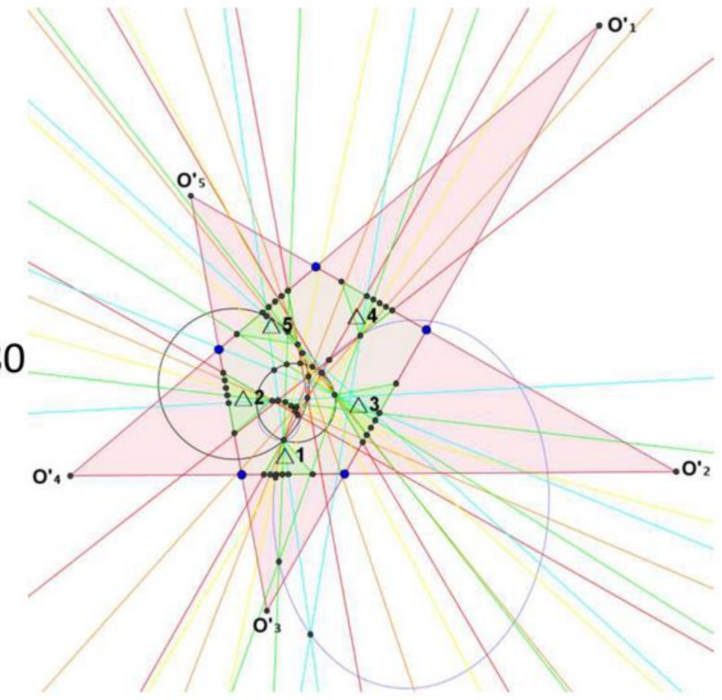
1.△1與△2為相似、正反向，由性質五得A+B+100(夾角度數)=82.54+82.54+100=265.08<360則塞瓦線交點落在橢圓上

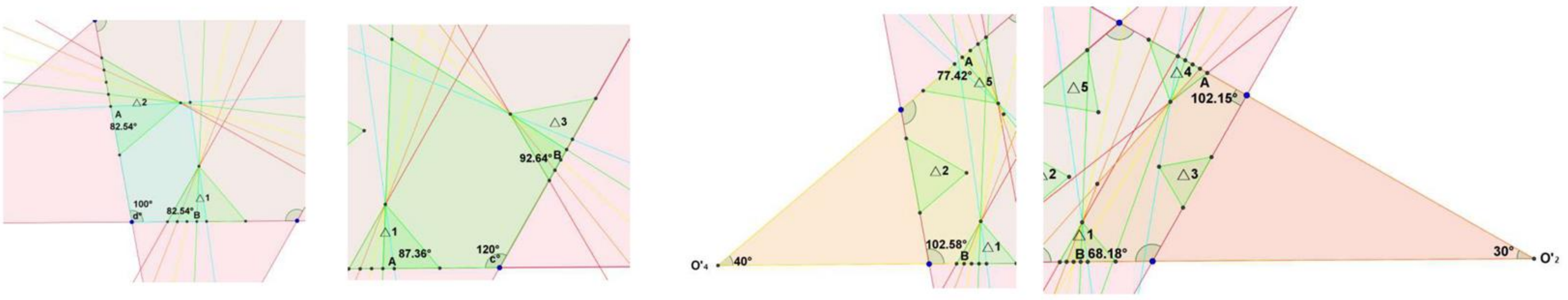
2. △1與△3為相似、順向，由性質六得A+B=87.36+82.64=180則塞瓦線交點落在圓上

(二)一層芒星推導

1. △1與△2為相似、正反向，由性質五得A+B=77.42+102.58=180則塞瓦線交點落在圓上

2. △1與△2為相似、正反向，由性質五得A+B+30(夾角度數)=102.15+68.18+30=200.33<360則塞瓦線交點落在橢圓上




# 伍、結論

透過不斷的做圖及推論，我們研究出在各種情況下內△塞瓦線交點落在的圓錐曲線為何。

當內△為相似形且方向為正向時，兩內△塞瓦線交點落在同一個圓形，運用密克定理證明在外圖形為△，若鄰邊內△之塞瓦線交點在同一圓上，則三圓交於一點。

當內△為反向時，會產生橢圓、雙曲線或拋物線，使用公式證明出在不同角度組合下產生的圓錐曲線為橢圓或雙曲線，並利用「萬花三角芒星」推導出當外圖形為n邊形時，內△塞瓦線交點落在的圓錐曲線類型。

# 陸、參考文獻資料


[1]維基百科 (2023)。圓錐曲線。圓錐曲線 - 維基百科，自由的百科全書 (wikipedia.org)。

[2]維基百科 (2023)。密克定理。https：//zh.wikipedia.org/wiki/密克定理。

[3]笹部貞市郎 (2003)。幾何學辭典。台北市：九章出版社。

[4]項武義 (2009)。基礎幾何學。台北市：五南圖書出版有限公司。