中華民國第 63 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030417

分割子三角形的內切圓與旁切圓

學校名稱：新北市立文山國民中學

作者：	指導老師：
國二 顏廷翰 國二 黃品鈞	蕭偉智

關鍵詞：不變量、面積、半徑

分割子三角形的內切圓與旁切圓

摘要

關於三角形的分割子三角形之內切圓問題，有文獻探討此分割線的長度[4]，也有探討內切圓半徑和[5]，或內切圓半徑平方和[3]。本研究異於前者，創新探究分割子三角形的內切圓與旁切圓的「半徑長度乘積不變量」、「兩點圓心連線性質」以及「三點圓心連線三角形的面積不變量」。我們依序探討兩個、三個到多個子三角形，先給出內切圓與旁切圓半徑長度乘積與邊長的關係式，接著探討兩點圓心連線的共點及相似形，最後是三點圓心連線三角形面積不變量。值得一提的是，看似不相關的「圓心連線三角形的面積比值」與「半徑長度乘積比值」居然是等價，這是本研究亮點。最後我們完整給出分割為三個子三角形的所有面積不變量的所有組合。

壹、 前言

一、 研究背景與文獻

1988 年第 29 屆國際奧林匹亞數學競賽 IMO 的預選題第 84 題如下。

在 $\triangle ABC$ 的 $\overline{BC}$ 邊上取一點 D，使得 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的內切圓半徑相等，則求證 $\overline{AD}^2 = \triangle ABC \times \cot\frac{A}{2}$ (見 [6]，pp.51-52)。

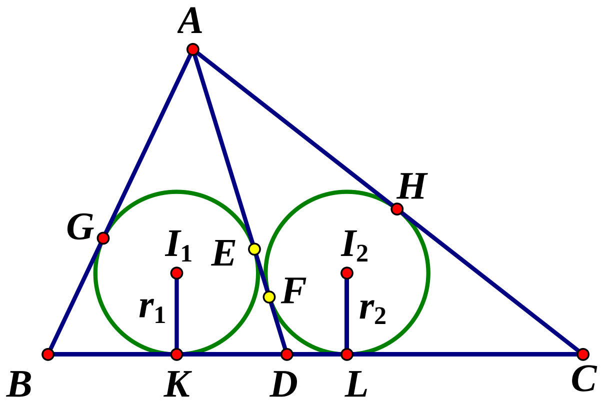


圖 1：$\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的內切圓半徑相等

其中，令 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑長為 r，$\triangle ABD$ 的內切圓半徑長為 r_1，$\triangle ADC$ 的內切圓半徑長為 r_2，其證明方式如下(見 [6]，pp.135-137)。

1. 設 $\triangle ABD$ 的內切圓分別切 $\overline{AD}$、$\overline{BA}$、$\overline{DB}$ 於 E、G、K。$\triangle ADC$ 的內切圓分別切 $\overline{AD}$、$\overline{AC}$、$\overline{DC}$ 於 F、H、L。令 $\overline{AC}=b$、$\overline{CB}=a$、$\overline{BA}=c$、$\overline{AD}=p$，因為 $r_1=r_2$，可知 $r_1(c+p+\overline{BD}+b+p+\overline{CD})=2\triangle ABC$，即 $r_1(a+b+c+2p)=2\triangle ABC$。

2. 考慮 $\overline{BG}=\overline{BK}=r_1\cot\frac{B}{2}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BD}-p)$，$\overline{CH}=\overline{CL}=r_1\cot\frac{C}{2}=\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{CD}-p)$，兩式相加得出 $r_1\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=\frac{1}{2}(a+b+c-2p)$，又 $\triangle ABC=\frac{1}{2}r_1(a+b+c+2p)$，

所以
$$\begin{aligned}\triangle ABC\times\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)&=\frac{1}{2}r_1(a+b+c+2p)\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\\&=\frac{1}{4}(a+b+c+2p)(a+b+c-2p)\\&=\frac{1}{4}(a+b+c)^2-p^2\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\triangle ABC\times\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)&=\frac{1}{2}r(a+b+c)\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}(a+b+c)\left(\frac{b+c-a}{2}+\frac{c+a-b}{2}+\frac{a+b-c}{2}\right)\\&=\frac{1}{4}(a+b+c)^2\end{aligned}$$

即得 $\triangle ABC\times\cot\frac{A}{2}=p^2=\overline{AD}^2$ ■

注意到此題的 $\overline{AD}^2=\triangle ABC\times\cot\frac{A}{2}$ 可以表示更簡潔，令 $s=\frac{a+b+c}{2}$，則 $\triangle ABC\times\cot\frac{A}{2}=rs\times\frac{\frac{b+c-a}{2}}{r}=s(s-a)$。事實上，推廣到切割 n 個子三角形，令分割線依序為 $\overleftrightarrow{AD_k}$（$k=1,2,..,n-1$），若 n 個內切圓半徑等長時，則 $\cot\frac{B}{2},\tan\frac{\angle AD_1B}{2},,\ldots,\tan\frac{\angle AD_{n-1}B}{2},\tan\frac{C}{2}$ 為等比數列 [2, p.133]。

2011 年，莊健祥在數學傳播季刊發表一篇文章將前述的特殊分割線 $\overline{AD}$ 稱為內切圓等分線，並且利用內切圓等分線長作為過度量，證明了三中線長、三內角平分線、三邊上的高、三旁切圓半徑、三內切圓等分線長的四條不等式 [4]。

2011 年，陳俐安與陳品璇在全國中小學科學展覽會發表一篇研究，他們沒有研究內切圓等分線，而是針對兩個子三角形 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的半徑長 r_1 與 r_2 進行探討 [5]。他們先特殊化，討論 $\triangle ABC$ 為直角三角形時，$\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的「半徑和 r_1+r_2」的最大

值，以及$\triangle ABD$和$\triangle ADC$的「半徑平方和$r_1^2+r_2^2$」的最大值，最後才是討論$\triangle ABC$為任意三角形時，$\triangle ABD$和$\triangle ADC$的「半徑平方和$r_1^2+r_2^2$」的最大值。他們發現兩個子三角形$\triangle ABD$和$\triangle ADC$的半徑長相等$r_1=r_2$時，前述討論的算式有最大值。換句話說，陳俐安與陳品璇的研究可以視為內切圓等分線的延伸性質。當分割三個子三角形時，他們認為「半徑和$r_1+r_2+r_3$」的最大值會發生在「$r_1=r_2=r_3$」，換句話說，他們研究的對象即為$\triangle ABD$的內切圓面積與$\triangle ADC$的內切圓面積的總和之極值問題。

2016年，李承軒與翁如萱在臺灣國際科學展覽會發表一篇研究，他們從陳俐安與陳品璇出發，設定出新的研究方向，他們聚焦研究原三角形與兩個子三角形的「半徑平方（圓面積）」的關聯性 [3]。他們研究「$\overline{BC}$邊上是否存在D點使得子三角形$\triangle ABD$和$\triangle ADC$的內切圓面積和與原三角形$\triangle ABC$的內切圓面積相等？即$r_1^2+r_2^2=r^2$」、「若前述等式存在，有多少解？」他們 先討論$\triangle ABC$為直角三角形的特殊化情形，最後推廣到$\triangle ABC$為任意三角形的情形。

本研究跳脫前述研究「內切圓半徑和」或「內切圓半徑平方和」，而是創新探討給定分割n個子三角形時，探討其「內切圓半徑」與「旁切圓半徑」，考慮n個半徑的乘積不變量，以及內切圓與旁切圓圓心連線之性質。

二、 研究目的

一、 探討多個子三角形的內切圓（旁切圓）的切點重合下的性質。

二、 探討兩個子三角形的內切圓與旁切圓的幾何性質。

1. 刻劃內切圓與旁切圓的半徑長度乘積不變量性質。
2. 刻劃內切圓與旁切圓的兩點圓心連線、三點圓心連線三角形的性質。

三、 探討三個子三角形的內切圓與旁切圓的幾何性質。

1. 刻劃內切圓與旁切圓的半徑長度乘積不變量性質。
2. 刻劃內切圓與旁切圓的圓心連線三角形面積不變量性質。

四、 一般化探討n個子三角形的內切圓與旁切圓的的幾何性質。

1. 刻劃內切圓與旁切圓的半徑乘積比值等價圓心連線三角形面積比值。
2. 計算具有圓心連線三角形面積不變量的三角形的組合數。

貳、　研究設備及器材

軟體：The Geometer's Sketchpad 5.0、Wolfram Mathematica 12.3

參、　研究過程與結果

本文約定 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$、$s=\frac{a+b+c}{2}$。

一、 分割子三角形的切圓的切點共點性質

（一）分割 2 個子三角形

先將 $\triangle ABC$ 分割為兩個子三角形，不失一般性，令分割線為 $\overleftrightarrow{AD}$，其中動點 D 點在 $\overline{BC}$ 上。不同於前人的研究，我們好奇的對象是兩個內切圓在 $\overleftrightarrow{AD}$ 上切點 E 點與 F 點，此兩點重合的充要條件為何？此時的分割點 D 點是唯一的嗎？

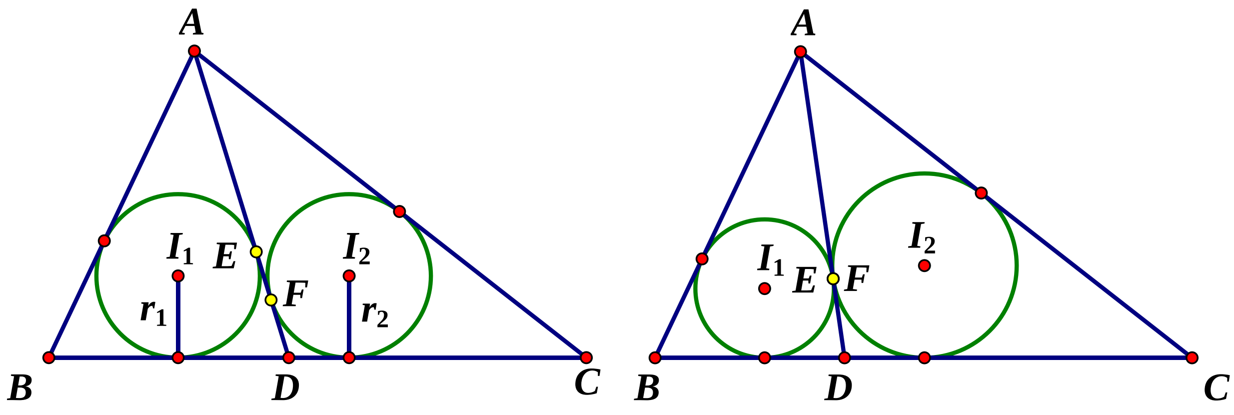


圖 2：切點 E 點與 F 點重合

性質 1：若 $\overline{BD}=s-b$，若且唯若內切圓 I_1 與 圓 I_2 分別切 $\overleftrightarrow{AD}$ 於同一點。

證明：

$(\Rightarrow)$充分性

由 $\overline{BD}=s-b$，可推得 $\overline{CD}=a-(s-b)=s-c$。如圖，令圓 I_1 與 圓 I_2 分別切 $\overleftrightarrow{AD}$ 於 E、F 點，並切 $\overline{BC}$ 於 K、L 點。因為切線段等長，可得 $\overline{DE}=\overline{DK}=\frac{(s-b)+\overline{AD}-c}{2}$、$\overline{DF}=\overline{DL}=\frac{(s-c)+\overline{AD}-b}{2}$，所以 $\overline{DE}=\overline{DF}$，因此 E、F 重合。

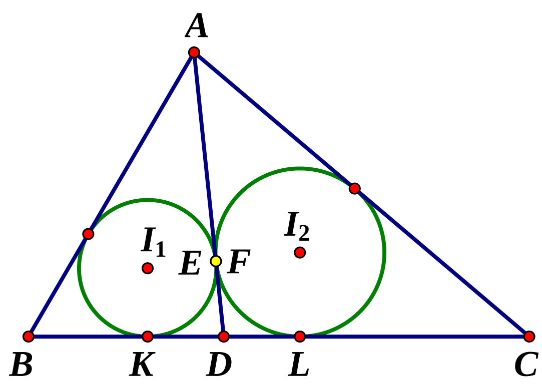


圖 3：E 點與 F 點重合的充要條件

(⇐)必要性

因切點 E、F 重合，可得 $\overline{DE}=\overline{DF}$，因為切線段等長可得 $\overline{DE}=\overline{DK}=\overline{DF}=\overline{DL}$，由此可列等式 $\frac{\overline{AD}+\overline{BD}-c}{2}=\frac{\overline{AD}+\overline{CD}-b}{2}$，化簡可得 $\overline{BD}-c=\overline{CD}-b$，又 $\overline{CD}=a-\overline{BD}$ 代入前式，可得 $\overline{BD}=\frac{a-b+c}{2}$，即 $\overline{BD}=s-b$。

■

討論完內切圓後，我們繼續探討頂點 A 的對邊之旁切圓的情形。同樣發現有趣的性質，兩個旁切圓相切 $\overleftrightarrow{AD}$ 同一點時，此時 $\overline{BD}$ 的長度為 $s-c$。

性質 2：若 $\overline{BD}=s-c$，若且唯若旁切圓 J_1 與 圓 J_2 分別切 $\overleftrightarrow{AD}$ 於同一點。

證明：

(⇒)充分性

由 $\overline{BD}=s-c$，可推得 $\overline{CD}=s-b$。如圖，令圓 J_1 與 圓 J_2 分別切 $\overleftrightarrow{AD}$ 於 M、N 點，並切 $\overline{BC}$ 於 P、Q 點。因為圓 J_1 為旁切圓，所以 $\overline{AM}=\frac{\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{BD}}{2}$，可得 $\overline{DM}=\frac{\overline{AB}-\overline{AD}+\overline{BD}}{2}=\frac{c-\overline{AD}+(s-c)}{2}=\frac{s-\overline{AD}}{2}$，同理 $\overline{DN}=\frac{\overline{AC}-\overline{AD}+\overline{CD}}{2}=\frac{b-\overline{AD}+(s-b)}{2}=\frac{s-\overline{AD}}{2}$，所以 $\overline{DM}=\overline{DN}$，因此 M、N 重合。

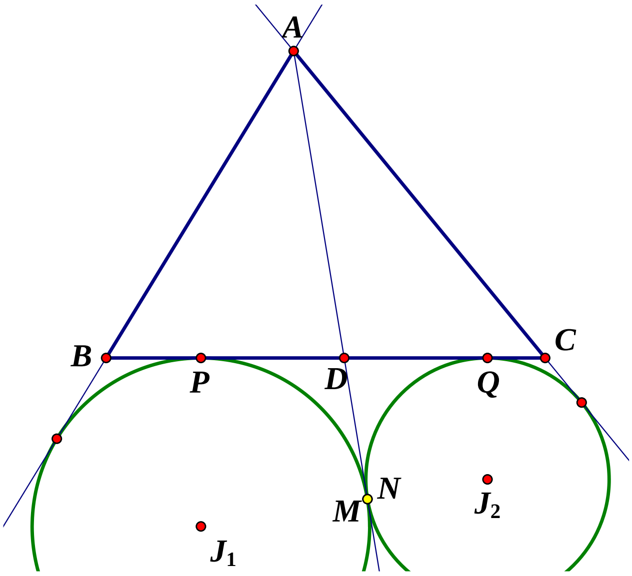


圖 4：M 點與 N 點重合的充要條件

(⇐)必要性

切線段等長可得 $\overline{DP}=\overline{DM}=\overline{DN}=\overline{DQ}$，由此可列等式 $\frac{c+\overline{BD}-\overline{AD}}{2}=\frac{b+\overline{CD}-\overline{AD}}{2}$，化簡可得 $\overline{BD}+c=\overline{CD}+b$，又 $\overline{CD}=a-\overline{BD}$ 代入前式，可得 $\overline{BD}=\frac{a+b-c}{2}$，即 $\overline{BD}=s-c$。

■

我們給出兩個子三角形的內切圓切點或旁切圓切點重合的充要條件，此時分割點 D 點是否是特殊點呢？有幾何意義嗎？根據切線段等長性發現 D 點恰好是 $\triangle ABC$ 內切圓（下圖左）或旁切圓（下圖右）與 $\overline{BC}$ 邊的切點，這是巧妙有趣的結果！

值得一提的是，將性質 1 與性質 2 的充要條件關係式移項可得出有趣的結果，內切圓（下圖左）則是 $\overline{AB}-\overline{BD}=\overline{AC}-\overline{CD}$。旁切圓（下圖右），$\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AC}+\overline{CD}$，所以此時分割線 $\overline{AD}$ 恰好也是 $\triangle ABC$ 的等周線（perimeter-bisecting lines）。

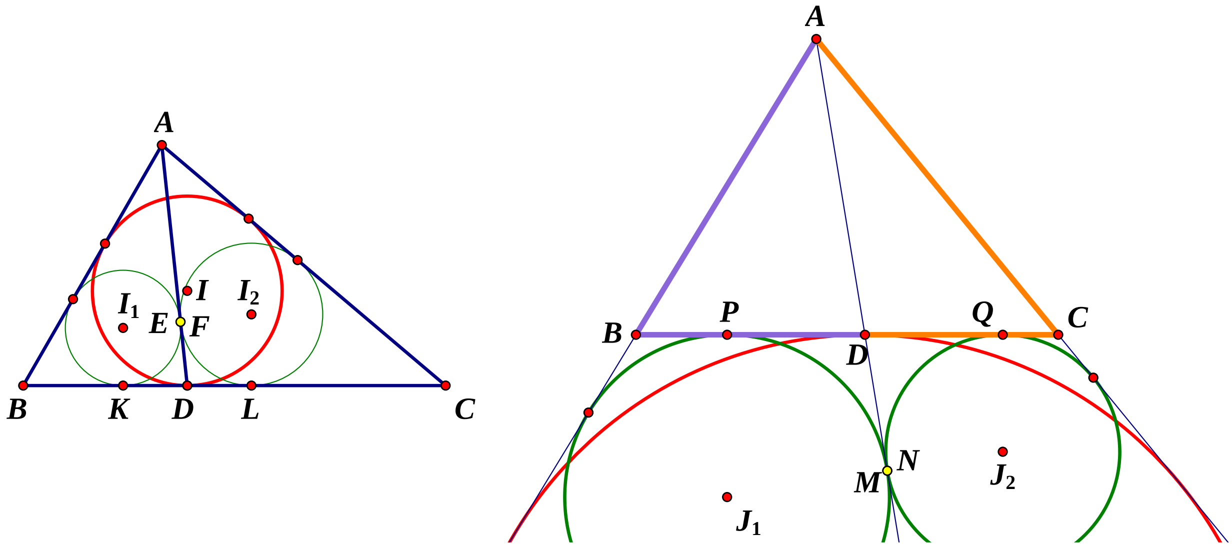


圖 5：切點重合時的分割點幾何意義

（二）分割 3 個子三角形

考慮將 $\triangle ABC$ 分割為 3 個子三角形，令分割線為 $\overleftrightarrow{AD_1}$ 與 $\overleftrightarrow{AD_2}$，令 $\overline{BD_1}:\overline{D_1C}=(1-t_1):t_1$ 且 $\overline{BD_2}:\overline{D_2C}=(1-t_2):t_2$，其中 $0<t_2<t_1<1$。我們先計算分割線 $\overline{AD_1}$ 與 $\overline{AD_2}$ 的長度，透過引理 3 可得出 $\overline{AD_1}^2=a^2{t_1}^2+b^2-t_1(a^2+b^2-c^2)$，$\overline{AD_2}^2=a^2{t_2}^2+b^2-t_2(a^2+b^2-c^2)$。

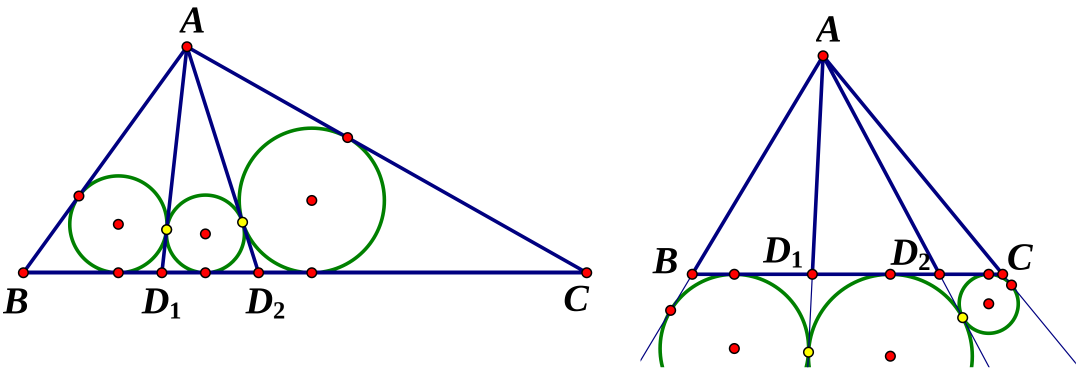


圖 6：三個內切圓（旁切圓）的切點重合

引理 3 (Stewart's theorem)：在 $\triangle ABC$ 的 $\overline{BC}$ 上任取一點 D，則 $\overline{DC}\times\overline{AB}^2+\overline{DB}\times\overline{AC}^2=(\overline{DB}+\overline{DC})(\overline{DA}^2+\overline{DB}\times\overline{DC})$。

證明：

如圖，令 $\angle ADB=\theta$，依據餘弦定理，可列出

$$\overline{AB}^2=\overline{DA}^2+\overline{DB}^2-2\times\overline{DA}\times\overline{DB}\times\cos\theta \qquad \text{式 (1)}$$

$$\overline{AC}^2=\overline{DA}^2+\overline{DC}^2-2\times\overline{DA}\times\overline{DC}\times cos(180°-\theta) \qquad \text{式 (2)}$$

將式 (1) 乘 $\overline{DC}$、式 (2) 乘 $\overline{DB}$ 後，相加可得

$\overline{DC}\times\overline{AB}^2+\overline{DB}\times\overline{AC}^2$

$=(\overline{DB}+\overline{DC})(\overline{DA}^2+\overline{DB}\times\overline{DC})$

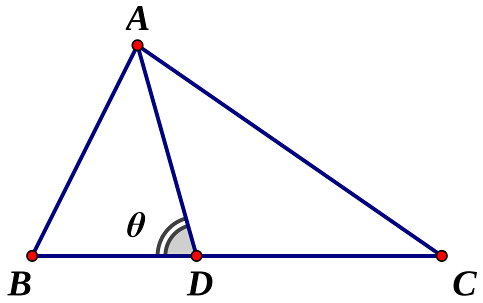


圖 7：Stewart's theorem

■

根據性質 1 可得 $\triangle ABD_1$ 與 $\triangle AD_1D_2$ 的內切圓的切點重合的充要條件為 $2\overline{BD_1}=\overline{AB}+\overline{BD_2}-\overline{AD_2}$，$\triangle AD_1D_2$ 與 $\triangle AD_2C$ 的內切圓的切點重合的充要條件為 $2\overline{CD_2}=\overline{AC}+\overline{CD_1}-\overline{AD_1}$，將兩式整理可得出聯立方程組。

$$\begin{cases}\sqrt{a^2{t_2}^2+b^2-t_2(a^2+b^2-c^2)}=-a+c+2at_1-at_2\\ \sqrt{a^2{t_1}^2+b^2-t_1(a^2+b^2-c^2)}=b+at_1-2at_2\end{cases}$$

為了方便運算，考慮平方去掉根號。

$$\begin{cases}a^2{t_2}^2+b^2-t_2(a^2+b^2-c^2)=(-a+c+2at_1-at_2)^2\\ a^2{t_1}^2+b^2-t_1(a^2+b^2-c^2)=(b+at_1-2at_2)^2\end{cases}$$

Wolfram Mathematica 解聯立方程組可以得出 t_1 可由 $\triangle ABC$ 的邊長 a、b、c 所表示，t_2 可由 $\triangle ABC$ 的邊長 a、b、c 所表示，但是式子冗長複雜，看不出一些好性質，於是我們就不放入本研究報告書，改放在研究日誌。若我們將 $\triangle ABC$ 設定為等腰三角形時，則有三個子三角形的內切圓切點重合的充要條件如下。

$$t_1=\frac{11a-6b+\sqrt{(-a+2b)(7a+18b)}}{16a}\text{、}t_2=\frac{5a+6b-\sqrt{(-a+2b)(7a+18b)}}{16a}$$

注意到，三角不等式 $-a+2b>0$，所以對於任意等腰 $\triangle ABC$，存在唯一的一組解滿足內切圓切點重合。同理可得三個子三角形的旁切圓切點重合的充要條件，$-a+2b>0$，所以 $-7a+18b>-7a+14b>0$，即存在唯一的一組解滿足旁切圓切點重合。

$$t_1=\frac{11a+6b-\sqrt{(a+2b)(-7a+18b)}}{16a}\text{、}t_2=\frac{5a-6b+\sqrt{(a+2b)(-7a+18b)}}{16a}$$

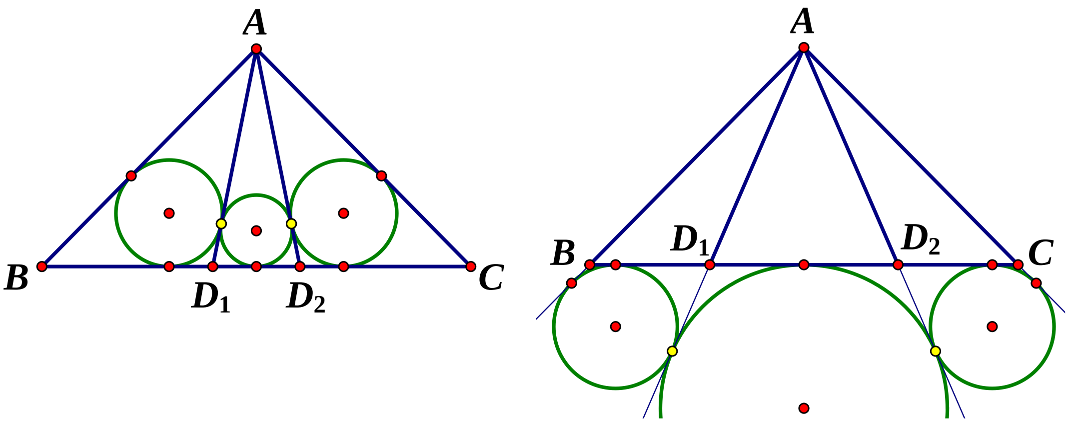


圖 8：等腰三角形的三個內切圓或旁切圓的切點重合

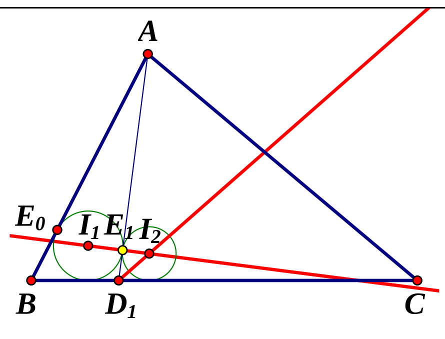
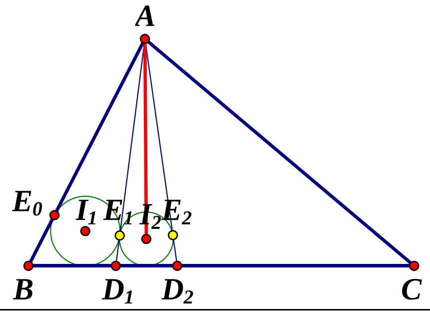
分割 4 個以上的子三角形，可以利用前述方法迭代找出內切圓或旁切圓的切點重合的分割點 D_k 的位置的代數式（由 a、b、c 邊長所表示），但是冗長複雜，我們不再討論。

（三）分割 n 個子三角形的切點重合之分割線的存在唯一性

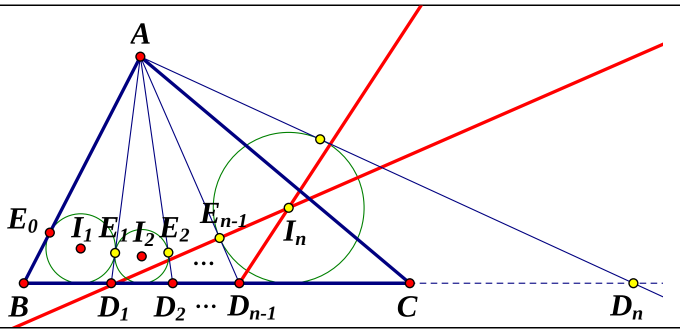
我們用純幾何來證明對於任意 $\triangle ABC$ 皆存在唯一的一組分割線 $\overleftrightarrow{AD_1}$、$\overleftrightarrow{AD_2}$、…、$\overleftrightarrow{AD_{n+1}}$ 使得這 n 個子三角形兩兩相鄰的內切圓或旁切圓的切點重合，其中為了方便表示，令分割點 $D_0 = B$、$D_n = C$。礙於篇幅，以下僅討論內切圓，旁切圓的情形同理可證。

根據下表，因為 $\angle AD_kC < 180°$，過 E_k 點的垂線與 $\angle AD_kC$ 的角平分線必有交點 I_{k+1}，其中 $k = 1, 2, \ldots, n-1$，故必可構造 n 個內切圓使得任意相鄰的內切圓切於同一點。

表 1：n 個子三角形的切圓之切點重合尺規步驟

1. 給定 $\triangle ABC$，在 $\overline{BC}$ 上任取一點 D_1，作 $\triangle ABD_1$ 的內切圓 I_1 分別與 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AD_1}$ 相切於 E_0 與 E_1 點。 2. 過 E_1 點作 $\overline{AD_1}$ 的垂線，再作 $\angle AD_1C$ 的角平分線，兩線交於 I_2 點。	
3. 連 $\overline{AI_2}$，作 E_1 點關於 $\overline{AI_2}$ 的對稱點 E_2。 4. $\overrightarrow{AE_2}$ 交 $\overrightarrow{BC}$ 於 D_2 點。	

5. 利用前述垂線與角平分線的方法，依序疊作得出內切圓 I_n 與分割線 $\overline{AD_n}$。



接著討論存在唯一性，也就是 $\overline{AD_n}$ 與 $\overline{AC}$ 重合。如圖，在 $\overline{BC}$ 上任取一點 D_1' 點，令有向距離 $[D_1D_1'] = \overline{BD_1'} - \overline{BD_1} = \delta_1$，當 $\delta_1 > 0$ 表示 D_1' 點在 D_1 的右側，反之亦然。考慮 $\triangle ABD_1$ 與 $\triangle ABD_1'$ 的切線段 $\overline{AE_0} = \frac{\overline{AB}+\overline{AD_1}-\overline{BD_1}}{2}$，$\overline{AE_0'} = \frac{\overline{AB}+\overline{AD_1'}-\overline{BD_1'}}{2}$，可得 $\overline{AE_0'} - \overline{AE_0} = \frac{\overline{AD_1'}-\delta_1-\overline{AD_1}}{2}$。

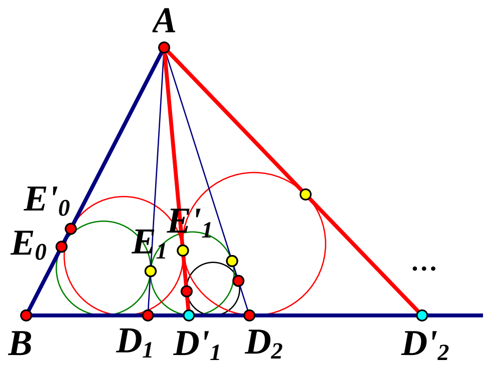


圖 9-1：D_k 的運動方向討論

利用三角不等式，當 $\delta_1 > 0$，$\overline{AE_0'} < \overline{AE_0}$；當 $\delta_1 \leq 0$，$\overline{AE_0'} \geq \overline{AE_0}$。考慮 $\delta_1 > 0$ 的情形（同理可得 $\delta_1 \leq 0$ 的情形），此時 $\triangle AD_1'D_2$ 的 A 點對內切圓的切線段大於 $\triangle AD_1D_2$ 的 A 點對內切圓的切線段長，但是此時設定的切線段長 $\overline{AE_0'}$ 是較短的，因此有向距離 $[D_2D_2'] = \delta_2$ 必須大於 0，表示 D_2' 點在 D_2 的右側，所以實數 δ_k 的正負必定同號，即 D_1、D_2、…、D_n 的運動方向必定同向。因為所有切線段須等長，所以當 δ_1 變大時，δ_2、δ_3、…、δ_n 也會隨之變大，反之亦然。因此對於所有實數 δ_n，必可找到唯一的對應 δ_1，即存在唯一分割線 $\overline{AD_k}$ 使得 $\triangle AD_{k-1}D_k$ 與 $\triangle AD_kD_{k+1}$ 的內切圓相切於同一點，其中 $k = 1,2,\ldots,n-1$，$D_0 = B$、$D_n = C$。

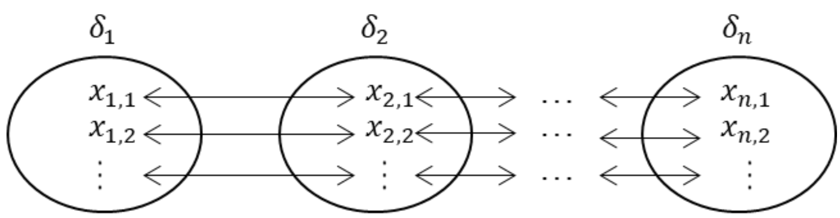


圖 9-2：實數 δ_k 的對應關係

性質 4 (不相似三角形，但面積比等於邊長平方比)：

(1) 若任意兩相鄰子三角形的內切圓外切，則由旁心與分割點構成的任兩個三角形面積比

$\triangle D_{h-1}J_hD_h : \triangle D_{k-1}J_kD_k = \overline{D_{h-1}D_h}^2 : \overline{D_{k-1}D_k}^2$，其中 $h,k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$。

(2) 若任意兩相鄰子三角形的旁切圓外切，則由內心與分割點構成的任兩個三角形面積比

$\triangle D_{h-1}I_kD_k : \triangle D_{k-1}I_kD_k = \overline{D_{h-1}D_h}^2 : \overline{D_{k-1}D_k}^2$，其中 $h,k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$。

證明：

因為兩相鄰內切圓外切，可得 $\overline{AD_{h-1}} + \overline{AD_h} - \overline{D_{h-1}D_h} = \overline{AD_{k-1}} + \overline{AD_k} - \overline{D_{k-1}D_k}$ 為定值，又 $\triangle AD_{h-1}D_h = \frac{1}{2} \times r_h' \times (\overline{AD_{h-1}} + \overline{AD_h} - \overline{D_{h-1}D_h})$ 且 $\triangle AD_{k-1}D_k = \frac{1}{2} \times r_k' \times (\overline{AD_{k-1}} + \overline{AD_k} - \overline{D_{k-1}D_k})$，所以 $\triangle AD_{h-1}D_h : \triangle AD_{k-1}D_k = r_h' : r_k'$。考慮 $\triangle AD_{h-1}D_h : \triangle AD_{k-1}D_k = \overline{D_{h-1}D_h} : \overline{D_{k-1}D_k}$（同高），因此 $\overline{D_{h-1}D_h} : \overline{D_{k-1}D_k} = r_h' : r_k'$，故旁心與分割點構成的三角形面積比 $\triangle D_{h-1}J_hD_h : \triangle D_{k-1}J_kD_k = \overline{D_{h-1}D_h}^2 : \overline{D_{k-1}D_k}^2$。同理可推得任意兩個相鄰旁切圓外切條件下，內心與分割點構成的三角形面積比。

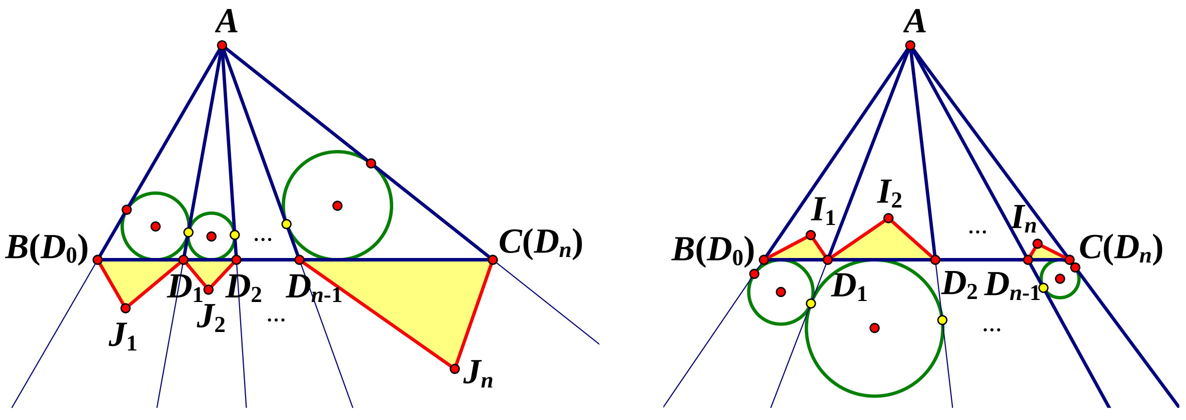


圖 10：任意三角形相鄰切圓的切點重合下的三角形面積性質

■

二、 分割兩個子三角形的內切圓與旁切圓的不變量性質

當動點 D 點在 $\overline{BC}$ 上移動時，$\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的內切圓半徑長 r_1 與 r_2 也是變動的量，同時旁切圓半徑長 r_1' 與 r_2' 也是變動的量，陳俐安與陳品璇的研究是探討兩個函數 $r_1 + r_2$ 與 $r_1^2 + r_2^2$ 的極大值，也就是討論兩變量的上界。然而，我們轉換方向，兩個變量中，是否存在不變量呢？切圓的新性質──內切圓與旁切圓半徑長度的不變量。

令 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 r、$\overline{BC}$ 邊的旁切圓半徑為 r'；$\triangle ABD$ 的內切圓半徑為 r_1、$\overline{BD}$ 邊的旁切圓半徑為 r_1'；$\triangle ADC$ 的內切圓半徑為 r_2、$\overline{DC}$ 邊的旁切圓半徑為 r_2'。

定理 5 (長度不變量)：對於 $\overline{BC}$ 上的任意動點 D 點，$\frac{r_1r_2}{r_1'r_2'}$ 恆為定值 $\frac{s-a}{s}$。

證明：

1. 令 $\overline{AD}=p$ 與 $\overline{DB}:\overline{DC}=(1-t):t$，其中 $0<t<1$，可得 $\overline{DB}=a(1-t)$ 且 $\overline{DC}=at$，則 $\triangle ABD$ 的半周長為 $\frac{a(1-t)+c+p}{2}$ 且 $\triangle ACD$ 的半周長為 $\frac{at+b+p}{2}$。因為所求半徑比值，不失一般性再令 $\triangle ABC$ 的面積為 1，所以 $\triangle ABD$ 的面積為 $1-t$ 且 $\triangle ADC$ 的面積為 t。

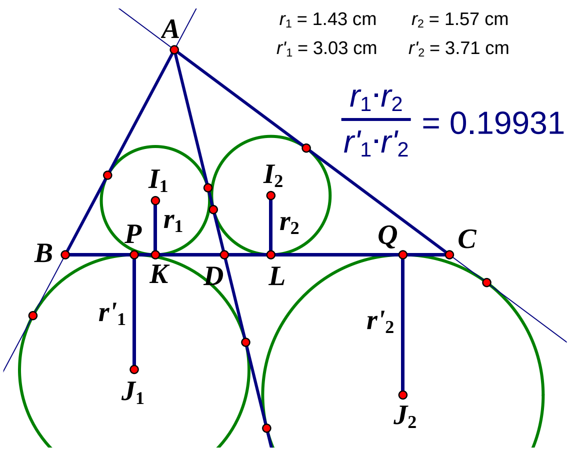
2. $\triangle ABD$ 的內切圓半徑 r_1 為 $\frac{2\triangle ABD}{a(1-t)+c+p}=\frac{2(1-t)}{a(1-t)+c+p}$ 且 $\triangle ADC$ 的內切圓半徑 r_2 為 $\frac{2\triangle ACD}{at+b+p}=\frac{2t}{at+b+p}$。考慮旁切圓半徑，因 $\triangle ABD=\triangle ABJ_1+\triangle ADJ_1-\triangle BDJ_1$，可推得 $r_1'=\frac{2\triangle ABD}{-a(1-t)+c+p}=\frac{2(1-t)}{-a(1-t)+c+p}$，同理可得 $r_2'=\frac{2t}{-at+b+p}$。所以

$$\frac{r_1r_2}{r_1'r_2'}=\frac{\frac{2(1-t)}{a(1-t)+c+p}\times\frac{2t}{at+b+p}}{\frac{2(1-t)}{-a(1-t)+c+p}\times\frac{2t}{at+b+p}}=\frac{\big((-a(1-t)+c)+p\big)\big((-at+b)+p\big)}{\big((a(1-t)+c)+p\big)\big((at+b)+p\big)}$$

$$=\frac{(-a(1-t)+c)(-at+b)+p(-a+b+c)+p^2}{(a(1-t)+c)(at+b)+p(a+b+c)+p^2}$$

3. 依據引理 3，將 $\overline{AD}^2=p^2=\frac{a(1-t)\times b^2+at\times c^2}{a}-a(1-t)\times at=a^2t^2+b^2-t(a^2+b^2-c^2)$，代入並化簡，可得

$$\frac{r_1r_2}{r_1'r_2'}=\frac{(-a+b+c)(b(1-t)+ct)+p(-a+b+c)}{(a+b+c)(b(1-t)+ct)+p(a+b+c)}=\frac{-a+b+c}{a+b+c}=\frac{s-a}{s}$$



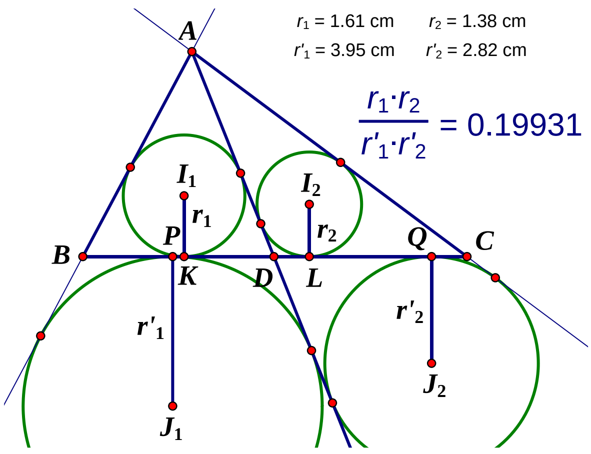


圖 11：半徑不變量

■

我們可以將定理 5 的結果轉換成十分有趣的結論，這是本研究的新發現，即兩個子三角形的內切圓半徑長與原旁切圓半徑長乘積等於兩個子三角形的旁切圓半徑長與原內切圓半徑長乘積。

推論 6 (長度不變量)：對於 $\overline{BC}$ 上的任意動點 D 點，$r' \times r_1 \times r_2 = r \times r_1' \times r_2'$。

證明：

在定理 5 中，我們發現 $\frac{r_1 r_2}{r_1' r_2'} = \frac{-a+b+c}{a+b+c}$，因為 $\frac{-a+b+c}{a+b+c}$ 是非常特殊的幾何量！考慮 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑長為 r、$\angle A$ 對邊的旁切圓半徑長為 r'，$r = \frac{2\triangle ABC}{a+b+c}$ 且 $r' = \frac{2\triangle ABC}{-a+b+c}$，因此 $\frac{r}{r'} = \frac{-a+b+c}{a+b+c} = \frac{s-a}{s}$，因此 $\frac{r_1 \times r_2}{r_1' \times r_2'} = \frac{r}{r'}$，即 $r' \times r_1 \times r_2 = r \times r_1' \times r_2'$。

■

考慮將內切圓圓心 I_1 與 I_2 連線，旁切圓圓心 J_1 與 J_2 連線，關於這兩條連心線的性質過往的文獻也沒有進行探究，於是我們朝這部分進行研究並且發現許多有趣的性質。我們引入齊次坐標 Barycentric coordinate 來作為工具（見 [1, pp25-60]）。

定義 7：對於任意三點 P、Q、R，以 $[PQR]$ 表示由此三點圍成的三角形的有向面積，頂點 P、Q、R 逆時鐘方向為正，頂點順時鐘方向為負。

定義 8：設平面上有一點 P，若 $[PBC]$：$[PCA]$：$[PAB]$ $= x$：y：z，則 P 的重心坐標（Barycentric coordinate）為

$$P\left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}\right) \text{ 或 } P(x:y:z)$$

當三個分量和為 1 時，稱為正規化（Normalization）的重心坐標，因此 $\triangle ABC$ 的頂點的重心坐標為 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$。

性質 9 (連心線交點性質)：對於 $\overline{BC}$ 上的任意動點 D 點，$\overleftrightarrow{I_1I_2}$、$\overleftrightarrow{J_1J_2}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 恆三線共點 E。

證明：

1. 考慮齊次坐標 Barycentric coordinate 系統，令 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$、內心 $I(a:b:c)$、旁心 $J(-a:b:c)$。再令 $D(0,t,1-t)$，其中 $0<t<1$，可得 $\overline{CD} = at$、$\overline{BD} =$

$a(1-t)$。討論點 I_1 的重心坐標，令 $\overline{AD}=p$。不失一般性，$\triangle ABC=1$、$\triangle ABD=1-t$，可得圓 I_1 的半徑為 $\frac{2(1-t)}{c+a(1-t)+p}$，我們有 $\triangle AI_1B=\frac{c(1-t)}{c+a(1-t)+p}$、$\triangle BI_1C=\frac{a(1-t)}{c+a(1-t)+p}$、$\triangle CI_1A=1-\frac{(a+c)(1-t)}{c+a(1-t)+p}=\frac{p+ct}{c+a(1-t)+p}$，即內心 $I_1\big(a(1-t):(p+ct):c(1-t)\big)$，再得出其旁心 $J_1\big(a(t-1):(p+ct):c(1-t)\big)$，同理有內心 $I_2\Big(at:bt:\big(p+b(1-t)\big)\Big)$、旁心 $J_2\Big(-at:bt:\big(p+b(1-t)\big)\Big)$。

2. 接下來給出直線方程 $\overleftrightarrow{I_1I_2}$: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a(1-t) & p+ct & c(1-t) \\ at & bt & p+b(1-t) \end{vmatrix}=0$ 與 $\overleftrightarrow{J_1J_2}$: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a(t-1) & p+ct & c(1-t) \\ -at & bt & p+b(1-t) \end{vmatrix}=0$，再解兩直線的交點 E，化簡可得

$$E\left(0:t\left(-b^2(1-t)^2+(p+ct)^2\right):(1-t)\left(c^2t^2-(p+b-bt)^2\right)\right)$$

因為 E 點坐標的第一個分量為 0，所以 $\overleftrightarrow{I_1I_2}$、$\overleftrightarrow{J_1J_2}$ 的交點在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上。

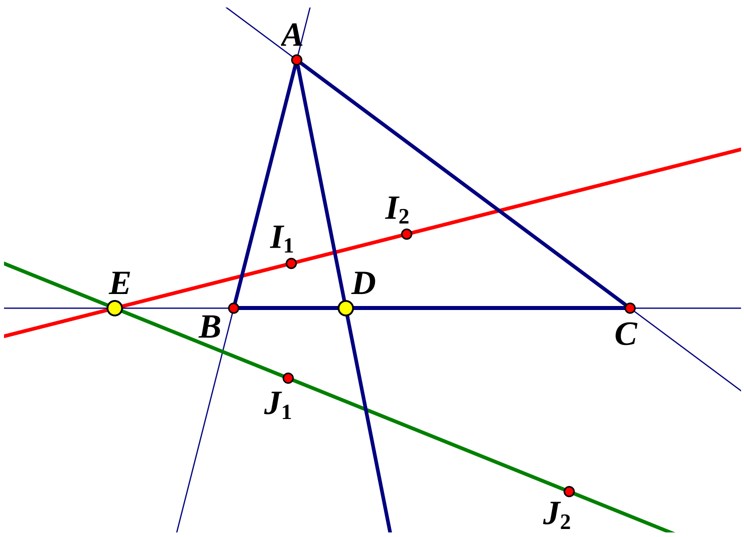


圖 12：$\overleftrightarrow{I_1I_2}$ 與 $\overleftrightarrow{J_1J_2}$ 交於 $\overleftrightarrow{BC}$ 上

■

我們先引用重心坐標系統下的兩點距離公式，如下引理。

引理 10（見 [1, pp.89-90]）：若 $P(u_1:u_2:u_3)$、$Q(w_1:w_2:w_3)$，則兩點距離為

$$\overline{PQ}^2=\frac{\sum_{cyclic}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\times\big(u_1(w_2+w_3)-w_1(u_2+u_3)\big)^2\right)}{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)(w_1^2+w_2^2+w_3^2)}$$

性質 11：若 $\overline{AB}=\overline{AC}$，則對於 $\overline{BC}$ 上的任意動點 D 點，$\triangle EI_1J_1$ 恆相似於 $\triangle EJ_2I_2$。

證明：

1. 因為 $\overline{AB}=\overline{AC}$，代回可得出等腰三角形下的 E、I_1、I_2、J_1 與 J_2 五點坐標為 $E(0:t(2bt-b+p):(1-t)(2bt-b-p))$、$I_1\big(a(1-t):(p+bt):b(1-t)\big)$、$I_2\Big(at:bt:\big(p+b(1-t)\big)\Big)$、$J_1\big(a(t-1):(p+bt):b(1-t)\big)$、$J_2\Big(-at:bt:\big(p+b(1-t)\big)\Big)$。

2. 根據引理 10 以 Wolfram Mathematica 計算 $\overline{EI_1}^2\times\overline{EI_2}^2$ 與 $\overline{EJ_1}^2\times\overline{EJ_2}^2$，化簡可得出

$$\overline{EI_1}^2\times\overline{EI_2}^2=a^4(-1+t)^2t^2(b^4(1-2t)^2+2b^3p(1-2t)^2+p^2(a+p-at)(p+at)+2bp^2(a+p+2a(-1+t)t)+b^2(ap(1-2t)^2+a^2(1-2t)^2(-1+t)t+2p^2(1+2(-1+t)t)))^2/(b+p)^4(1-2t)^4(a+b+p-at)^2(b+p+at)^2 \qquad \text{式 (3)}$$

$$\overline{EJ_1}^2\times\overline{EJ_2}^2=a^4(-1+t)^2t^2((b+p)^2(b^2+p(-a+p))-(b+p)(a^2(b-p)-4abp+4b^2(b+p))t+(-4abp(b+p)+4b^2(b+p)^2+a^2(5b^2-p^2))t^2-8a^2b^2t^3+4a^2b^2t^4)^2/(b+p)^4(b+p+a(-1+t))^2(1-2t)^4(b+p-at)^2 \qquad \text{式 (4)}$$

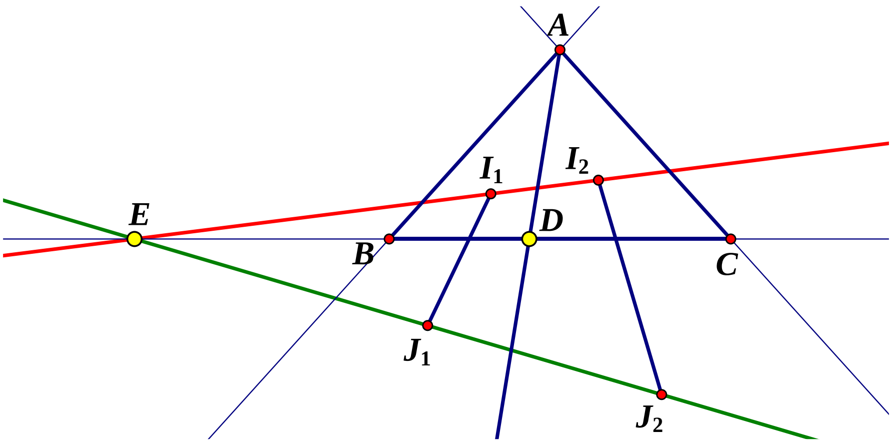


圖 13：$\triangle EI_1J_1\sim\triangle EJ_2I_2$

注意到我們為了比較式 (3) 與式 (4) 的大小，考慮將式 (3) 的分子乘上式 (4) 的分母，將式 (3) 的分母乘上式 (4) 的分子，利用 Wolfram Mathematica 進行化簡，發現兩者乘積相等，因此 $\overline{EI_1}^2\times\overline{EI_2}^2=\overline{EJ_1}^2\times\overline{EJ_2}^2$，即 $\overline{EI_1}:\overline{EJ_2}=\overline{EJ_1}:\overline{EI_2}$，又 $\angle I_1EJ_1=\angle J_2EI_2$，故 $\triangle EI_1J_1$ 恆相似於 $\triangle EJ_2I_2$。

■

推論 12：若 $\overline{AB}=\overline{AC}$，則內切圓圓心 I_1 與 I_2 與旁切圓圓心 J_1 與 J_2 四點共圓。

證明 1：

由性質 11 即可推得 $\angle EI_1J_1=\angle EJ_2I_2$，所以 I_1、I_2、J_1 與 J_2 四點共圓。

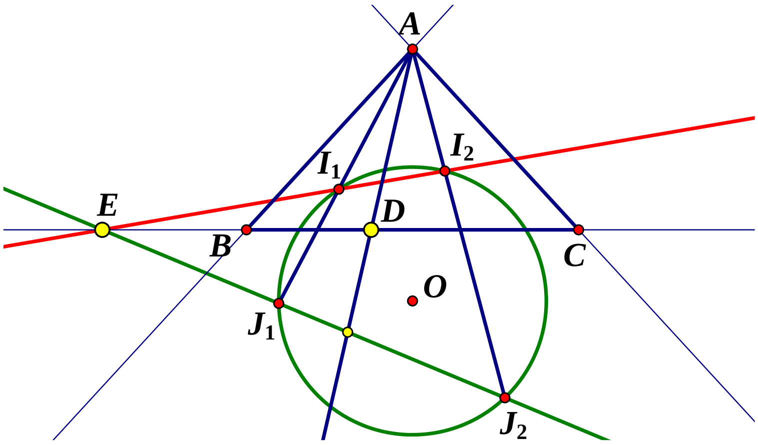


圖 14-1：四點共圓

我們發現性質 11 和推論 12 是等價，因此是否能否利用純幾何（synthetic geometry）方法進行共圓證明，即可證明 $\triangle EI_1J_1$ 恆相似於 $\triangle EJ_2I_2$。我們給出了很簡潔的證明方法。

證明 2：

因為 J_1 是 $\triangle ABD$ 的旁心，可得 $\angle AJ_1D=\frac{1}{2}\angle B$，同理可得 $\angle AJ_2D=\frac{1}{2}\angle C$，又 $\angle B=\angle C$，因此 $\angle AJ_1D=\angle AJ_2D$。然而 I_1、D、J_2 三點共線，I_2、D、J_1 三點共線，因此 $\angle I_1J_1D=\angle I_1J_1I_2$ 且 $\angle I_2J_2D=\angle I_2J_2I_1$，所以 I_1、I_2、J_1 與 J_2 四點共圓。

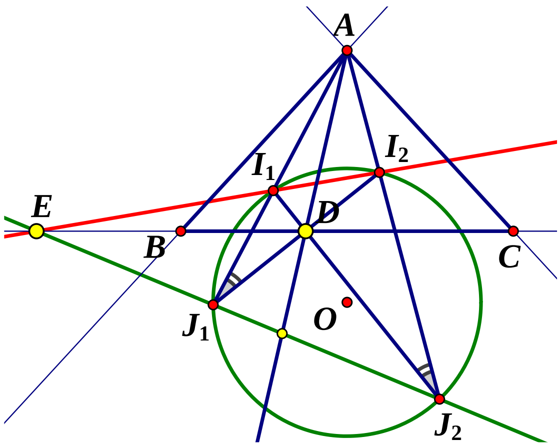


圖 14-2：純幾何方法證明四點共圓

■

除了半徑長度乘積的不變量，以及內切圓圓心連線（旁切圓圓心連線）之外，考慮原本三角形 $\triangle ABC$ 的內心與旁心，我們發現一個十分有趣，但不是直觀可察覺到的「面積不變量」。令 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的內切圓圓心分別為 I、I_1 與 I_2；$\triangle ABC$、$\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的頂點 A 對邊的旁切圓圓心分別為 J、J_1 與 J_2，考慮圓心連線形成的兩個三角形，

我們發現 $\triangle I_1I_2J$ 的面積恆等於 $\triangle J_1J_2I$ 的面積。

在定理 13 的面積不變量證明過程中發現此面積不變量與長度不變量具有密切關聯性！

定理 13 (面積不變量)：對於 $\overline{BC}$ 上的任意動點 D 點，$\triangle I_1I_2J$ 的面積 $=\triangle J_1J_2I$ 的面積。

證明：

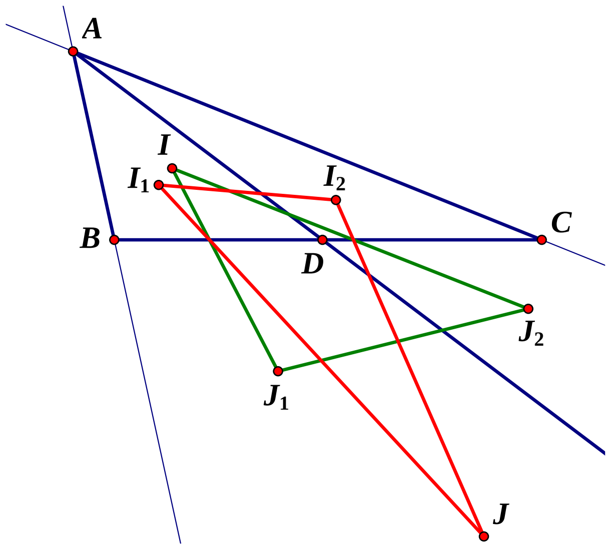


圖 15：內心/旁心連線面積不變量

1. 根據性質 9 得出內心 $I_1\big(a(1-t):(p+ct):c(1-t)\big)$，再得出旁心 $J_1\big(a(t-1):(p+ct):c(1-t)\big)$。同理我們有內心 $I_2\Big(at:bt:\big(p+b(1-t)\big)\Big)$、旁心 $J_2\Big(-at:bt:\big(p+b(1-t)\big)\Big)$。

2. 分別考慮由三頂點 I、J_1、J_2 坐標，以及三頂點 J、I_1、I_2 坐標構成的三階行列式，再正規化可得出其有向面積比值

$$\frac{[IJ_1J_2]}{[ABC]}=\frac{1}{2s(at-a+c+p)(-at+b+p)}\times\begin{vmatrix}a & b & c\\ a(t-1) & p+ct & c(1-t)\\ -at & bt & p+b(1-t)\end{vmatrix} \qquad \text{式 (5)}$$

$$\frac{[JI_1I_2]}{[ABC]}=\frac{1}{2(s-a)(-at+a+c+p)(at+b+p)}\times\begin{vmatrix}-a & b & c\\ a(1-t) & p+ct & c(1-t)\\ at & bt & p+b(1-t)\end{vmatrix} \qquad \text{式 (6)}$$

注意到定理 5 的證明過程可知式 (5) 分母的 $(at-a+c+p)(-at+b+p)=(-a+b+c)(b(1-t)+ct+p)=2(s-a)(b(1-t)+ct+p)$，而且式 (6) 分母的 $(-at+a+c+p)(at+b+p)=(a+b+c)(b(1-t)+ct+p)=2s(b(1-t)+ct+p)$

因此

$$\frac{[IJ_1J_2]}{[ABC]}=\frac{1}{4s(s-a)(b(1-t)+ct+p)}\times\begin{vmatrix}a & b & c\\ a(t-1) & p+ct & c(1-t)\\ -at & bt & p+b(1-t)\end{vmatrix}$$

$$\frac{[JI_1I_2]}{[ABC]}=\frac{1}{4s(s-a)(b(1-t)+ct+p)}\times\begin{vmatrix}-a & b & c\\ a(1-t) & p+ct & c(1-t)\\ at & bt & p+b(1-t)\end{vmatrix}$$

可得有向面積 $[IJ_1J_2]=-[JI_1I_2]$，即 $\triangle IJ_1J_2=\triangle JI_1I_2$。

■

三、 分割三個子三角形的內切圓與旁切圓的不變量性質

（一）分割 3 個子三角形

考慮將 $\triangle ABC$ 分割為 3 個子三角形，令分割線為 $\overleftrightarrow{AD_1}$ 與 $\overleftrightarrow{AD_2}$，其中動點 D_1 與 D_2 依序在 $\overline{BC}$ 上（由左而右）。為了方便表示，令 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑長為 r_{BC}、$\overline{BC}$ 邊的旁切圓半徑長為 r'_{BC}；$\triangle ABD_1$ 的內切圓半徑長為 r_{BD_1}、$\triangle ABD_1$ 的 $\overline{BD_1}$ 邊的旁切圓半徑長為 r'_{BD_1}，以此類推。

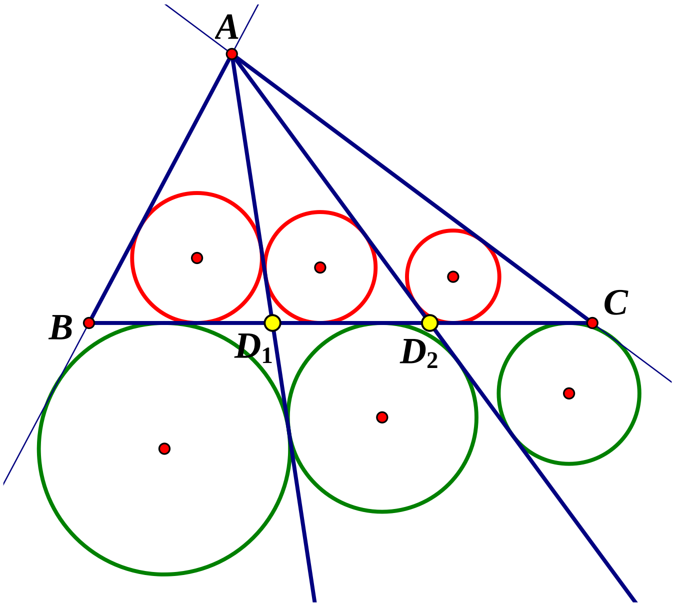


圖 16：切割 3 個子三角形

定理 14 (長度不變量)：對於 $\overline{BC}$ 上的任意動點 D_1、D_2 點，$\frac{r_{BD_1}\times r_{D_1D_2}\times r_{D_2C}}{r'_{BD_1}\times r'_{D_1D_2}\times r'_{D_2C}}$ 恆為定值 $\frac{s-a}{s}$。

證明：

依據推論 6 可得出 $\frac{r_{BD_1}\times r_{D_1D_2}}{r'_{BD_1}\times r'_{D_1D_2}}=\frac{r_{BD_2}}{r'_{BD_2}}$ 且 $\frac{r_{BD_2}\times r_{D_2C}}{r'_{BD_2}\times r'_{D_2C}}=\frac{r_{BC}}{r'_{BC}}$，所以再得出 $\frac{r_{BD_1}\times r_{D_1D_2}\times r_{D_2C}}{r'_{BD_1}\times r'_{D_1D_2}\times r'_{D_2C}}=\frac{r_{BC}}{r'_{BC}}=\frac{-a+b+c}{a+b+c}=\frac{s-a}{s}$，恆為定值。

■

除了分割的 3 個子三角形外，考慮更大一些的三角形，$\triangle ABD_2$ 與 $\triangle AD_1C$，利用定理 7 可代換出另外一種有趣的半徑不變量。

定理 15 (長度不變量)：對於 $\overline{BC}$ 上的任意動點 D_1、D_2 點，$\frac{r_{BD_2}\times r_{D_1C}\times r'_{D_1D_2}}{r'_{BD_2}\times r'_{D_1C}\times r_{D_1D_2}}$ 恆為定值 $\frac{s-a}{s}$。

證明：

依據推論 6 有

$$\frac{r_{BD_1}\times r_{D_1C}}{r'_{BD_1}\times r'_{D_1C}}\times\frac{r_{D_1D_2}}{r'_{D_1D_2}}\times\frac{r_{BD_2}\times r_{D_2C}}{r'_{BD_2}\times r'_{D_2C}}=\frac{r_{BC}}{r'_{BC}}\times\frac{r_{D_1D_2}}{r'_{D_1D_2}}\times\frac{r_{BC}}{r'_{BC}} \qquad \text{式 (7)}$$

依據定理 14 有

$$\frac{r_{BD_1}\times r_{D_1D_2}\times r_{D_2C}}{r'_{BD_1}\times r'_{D_1D_2}\times r'_{D_2C}}=\frac{r_{BC}}{r'_{BC}} \qquad \text{式 (8)}$$

由式 (7) 與式 (8) 得出

$$\frac{r_{BC}}{r'_{BC}}\times\frac{r_{D_1C}}{r'_{D_1C}}\times\frac{r_{D_2C}}{r'_{D_2C}}=\frac{r_{BC}}{r'_{BC}}\times\frac{r_{D_1D_2}}{r'_{D_1D_2}}\times\frac{r_{BC}}{r'_{BC}}$$

再化簡得 $\frac{r_{D_1C}}{r'_{D_1C}}\times\frac{r_{D_2C}}{r'_{D_2C}}=\frac{r_{D_1D_2}}{r'_{D_1D_2}}\times\frac{r_{BC}}{r'_{BC}}$

即 $\frac{r_{BD_2}\times r_{D_1C}\times r'_{D_1D_2}}{r'_{BD_2}\times r'_{D_1C}\times r_{D_1D_2}}=\frac{r_{BC}}{r'_{BC}}=\frac{s-a}{s}$

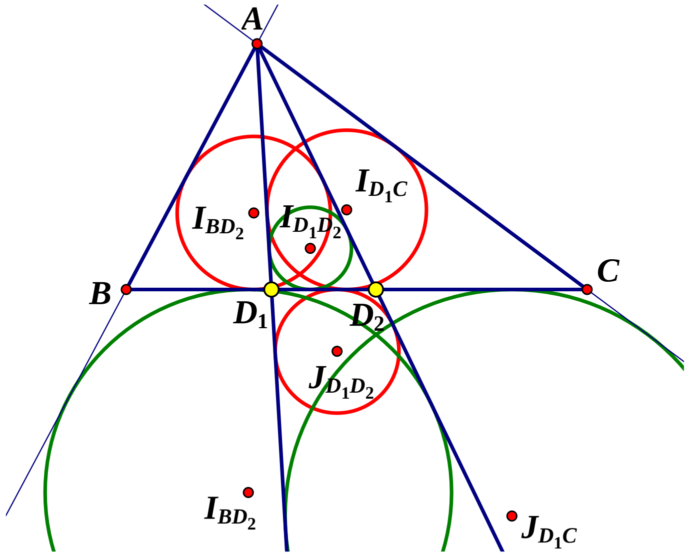


圖 17：分割 3 個子三角形的半徑不變量

■

我們本來猜想分割 3 個子三角形時，是否有如同定理 13 的圓心連線構造的多邊形面積不變量，如下圖，即四邊形 $IJ_{BD_1}J_{D_1D_2}J_{D_2C}$ 的面積與四邊形 $JI_{BD_1}I_{D_1D_2}I_{D_2C}$ 的面積比值。

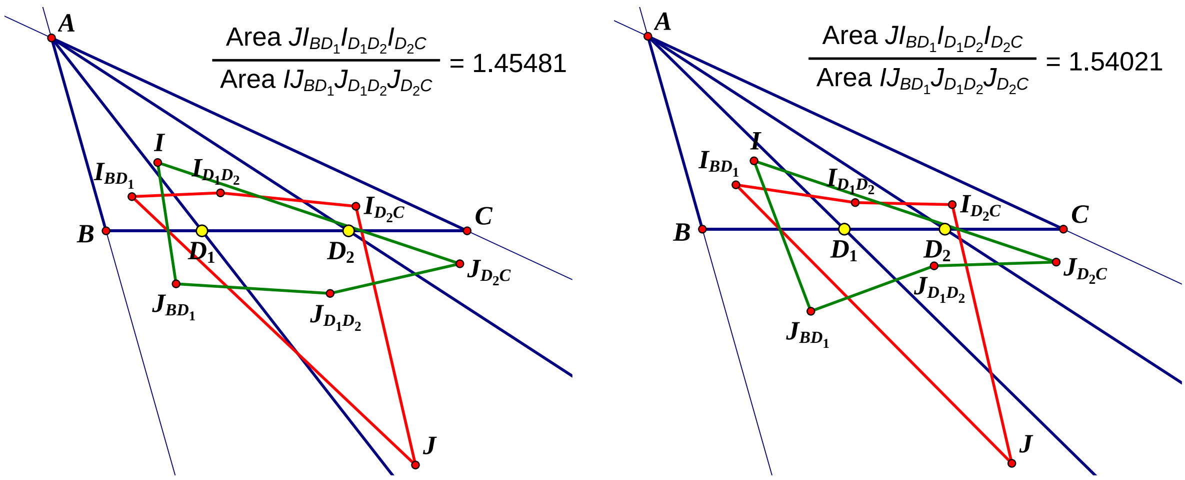


圖 18：內心/旁心連線構造多邊形

然而，我們可以發現這個猜想是錯誤的，在動點 D_1 與 D_2 變動的條件下，兩個四邊形 $IJ_{BD_1}J_{D_1D_2}J_{D_2C}$ 的面積與四邊形 $JI_{BD_1}I_{D_1D_2}I_{D_2C}$ 的面積比值不是不變量。

分割三個子三角形沒有面積不變量了嗎？我們在定理 15 獲得靈感，考慮圓心 I_{BD_2}、I_{D_1C} 與 $J_{D_1D_2}$ 連線構造一個三角形，圓心 J_{BD_2}、J_{D_1C} 與 $I_{D_1D_2}$ 連線構造一個三角形。我們發現 $\triangle J_{D_1D_2}I_{BD_2}I_{D_1C}$ 的面積與 $\triangle I_{D_1D_2}J_{BD_2}J_{D_1C}$ 的面積比值具有定值。

定理 16 (面積不變量)：對於 $\overline{BC}$ 上的任意動點 D_1、D_2 點，恆有 $\frac{\triangle J_{D_1D_2}I_{BD_2}I_{D_1C}}{\triangle I_{D_1D_2}J_{BD_2}J_{D_1C}}=\frac{s-a}{s}$。

證明：

1. 令 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$。再令 $D_1(0,t_1,1-t_1)$、$D_2(0,t_2,1-t_2)$，其中 $0<t_2<t_1<1$，可得 $\overline{BD_1}=a(1-t_1)$、$\overline{BD_2}=a(1-t_2)$、$\overline{CD_1}=at_1$、$\overline{CD_2}=at_2$、$\overline{D_1D_2}=a(t_1-t_2)$。
2. 令 $\overline{AD_1}=p_1$、$\overline{AD_2}=p_2$。不失一般性，$\triangle ABC=1$、$\triangle ABD_1=1-t_1$、$\triangle ABD_2=1-t_2$，利用三角形面積與周長計算內切圓與旁切圓半徑後可得出以下各點坐標
$I_{BD_2}\big(a(1-t_2):(p_2+ct_2):c(1-t_2)\big)$、$J_{BD_2}\big(a(t_2-1):(p_2+ct_2):c(1-t_2)\big)$；
$I_{D_1C}\left(at_1:bt_1:\big(p_1+b(1-t_1)\big)\right)$、$J_{D_1C}\left(-at_1:bt_1:\big(p_1+b(1-t_1)\big)\right)$；
$I_{D_1D_2}\left(a(t_1-t_2):(p_1t_2+p_2t_1):\big(p_1(1-t_2)+p_2(1-t_1)\big)\right)$、$J_{D_1D_2}\left(a(t_2-t_1):(p_1t_2+p_2t_1):\big(p_1(1-t_2)+p_2(1-t_1)\big)\right)$。

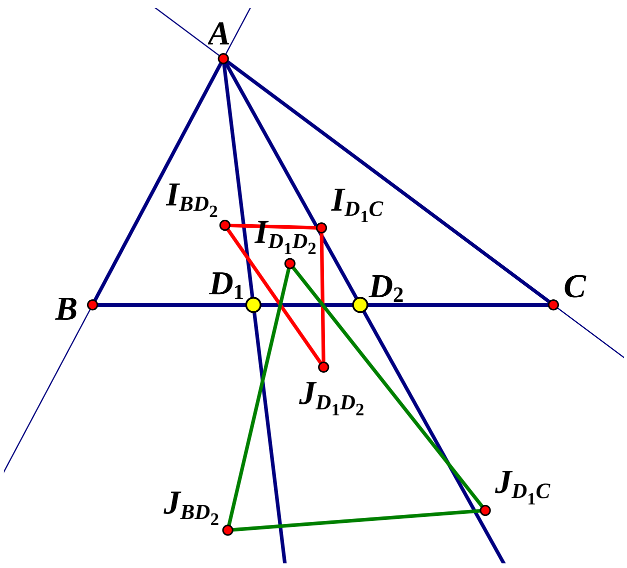


圖 19：內心/旁心連線面積不變量

3. 分別考慮由三頂點 $J_{D_1D_2}$、I_{BD_2}、I_{D_1C} 坐標，以及三頂點 $I_{D_1D_2}$、J_{BD_2}、J_{D_1C} 坐標構成的三階行列式，再正規化可得出其有向面積比值

$$\frac{\left[J_{D_1D_2}I_{BD_2}I_{D_1C}\right]}{[ABC]}$$
$$=\frac{1}{(a(t_2-t_1)+p_1+p_2)(-at_2+a+c+p_2)(at_1+b+p_1)}$$
$$\times\begin{vmatrix} a(t_2-t_1) & (p_1t_2+p_2t_1) & p_1(1-t_2)+p_2(1-t_1) \\ a(1-t_2) & p_2+ct_2 & c(1-t_2) \\ at_1 & bt_1 & p_1+b(1-t_1) \end{vmatrix}$$

$$\frac{\left[I_{D_1D_2}J_{BD_2}J_{D_1C}\right]}{[ABC]}$$
$$=\frac{1}{(a(t_1-t_2)+p_1+p_2)(at_2-a+c+p_2)(-at_1+b+p_1)}$$
$$\times\begin{vmatrix} a(t_1-t_2) & (p_1t_2+p_2t_1) & p_1(1-t_2)+p_2(1-t_1) \\ a(t_2-1) & p_2+ct_2 & c(1-t_2) \\ -at_1 & bt_1 & p_1+b(1-t_1) \end{vmatrix}$$

所以我們有

$$\frac{\left[J_{D_1D_2}I_{BD_2}I_{D_1C}\right]}{\left[I_{D_1D_2}J_{BD_2}J_{D_1C}\right]}=\frac{(a(t_1-t_2)+p_1+p_2)(at_2-a+c+p_2)(-at_1+b+p_1)}{(a(t_2-t_1)+p_1+p_2)(-at_2+a+c+p_2)(at_1+b+p_1)}$$

注意到依據引理 3 可得 $p_1^2=a^2{t_1}^2+b^2-t_1(a^2+b^2-c^2)$、$p_2^2=a^2{t_2}^2+b^2-t_2(a^2+b^2-c^2)$，利用 Wolfram Mathematica 代入前式化簡得出 $\frac{\left[J_{D_1D_2}I_{BD_2}I_{D_1C}\right]}{\left[I_{D_1D_2}J_{BD_2}J_{D_1C}\right]}=-\frac{s-a}{s}$，即 $\frac{\triangle J_{D_1D_2}I_{BD_2}I_{D_1C}}{\triangle I_{D_1D_2}J_{BD_2}J_{D_1C}}=\frac{s-a}{s}$。

■

我們發現推論 6 的半徑長度乘積比值與定理 13 的三角形面積比值都是 1，另外定理 15 的半徑長度乘積比值與定理 16 的三角形面積比值都是 $\frac{s-a}{s}$，也就是半徑長度乘積比值與三角形面積比值是等價的，因此我們將此發現轉化為一般性理論，這是本研究最重要的貢獻——半徑長度乘積不變量等價於其圓心連線的三角形面積不變量。

定理 17：半徑的長度乘積不變量等價於其對應的圓心連線的三角形面積不變量。

證明：

1. 令 $\triangle ABC$ 的 $\overline{BC}$ 上有相異兩點 D_h、D_k，其中 $0\le h<k\le n$ 且 $D_0=B$、$D_n=C$，分割線 $\overline{AD_h}=p_h$、$\overline{AD_k}=p_k$。再令 $\triangle ABC$ 的子三角形 $\triangle AD_hD_k$ 的半周長為 $s_{h,k}$，內切圓半徑為 $r_{h,k}$，內心為 $I_{h,k}$ 點，頂點 A 的對邊長度為 $a_{h,k}$ 以及旁切圓半徑為 $r'_{h,k}$，旁心為 $J_{h,k}$ 點，可得出 $r_{h,k}=\frac{\triangle AD_hD_k}{s_{h,k}}$ 且 $r'_{h,k}=\frac{\triangle AD_hD_k}{s_{h,k}-a_{h,k}}$。

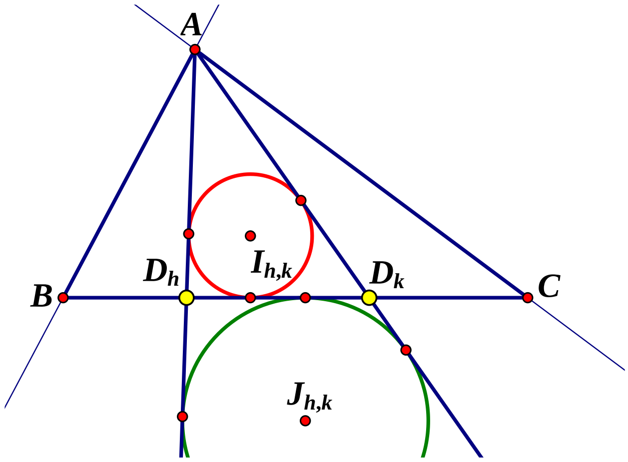


圖 20：分割子三角形的一般化內心與旁心坐標

2. 考慮正規化 $\triangle ABC$ 的面積為 1，$t_h = \triangle AD_hC$，$t_k = \triangle AD_kC$，得出子三角形 $\triangle AD_hD_k$ 的內心與 $\triangle ABC$ 的三邊構成的三角形有向面積為

$$[I_{h,k}BC] = \frac{a \times r_{h,k}}{2} = \frac{a \times \triangle AD_hD_k}{2 \times s_{h,k}} = \frac{a \times (t_h - t_k)}{2 \times s_{h,k}}$$

$$[I_{h,k}CA] = \triangle AD_hC - \triangle AD_hI_{h,k} - \triangle I_{h,k}D_hC = \frac{p_kt_h + p_ht_k}{2 \times s_{h,k}}$$

$$[I_{h,k}AB] = 1 - \triangle I_{h,k}BC - \triangle I_{h,k}CA = \frac{p_k(1-t_h) + p_h(1-t_k)}{2 \times s_{h,k}}$$

同理，$\triangle AD_hD_k$ 的頂點 A 之對邊的旁心與 $\triangle ABC$ 的三邊構成的有向三角形面積為

$$[J_{h,k}BC] = \frac{-a \times (t_h - t_k)}{2 \times s_{h,k} - 2a(t_h - t_k)}$$

$$[J_{h,k}CA] = \triangle AD_hC - \triangle AD_hJ_{h,k} + \triangle J_{h,k}D_hC = \frac{p_kt_h + p_ht_k}{2 \times \left(s_{9h,k} - a(t_h - t_k)\right)}$$

$$[J_{h,k}AB] = 1 - \triangle J_{\triangle h,k}BC - \triangle J_{\triangle h,k}CA = \frac{p_k(1-t_h) + p_h(1-t_k)}{2 \times \left(s_{h,k} - a(t_h - t_k)\right)}$$

可得子三角形 $\triangle AD_hD_k$ 的內心坐標與旁心的坐標

$$I_{h,k}\left(\frac{a(t_h - t_k)}{2 \times s_{h,k}}, \frac{p_kt_h + p_ht_k}{2 \times s_{h,k}}, \frac{p_k(1-t_h) + p_h(1-t_k)}{2 \times s_{h,k}}\right)$$

$$J_{h,k}\left(\frac{-a \times (t_h - t_k)}{2 \times \left(s_{h,k} - a(t_h - t_k)\right)}, \frac{p_kt_h + p_ht_k}{2 \times \left(s_{h,k} - a(t_h - t_k)\right)}, \frac{p_k(1-t_h) + p_h(1-t_k)}{2 \times \left(s_{h,k} - a(t_h - t_k)\right)}\right)$$

3. 考慮選取的共用頂點 A 的三個子三角形分別為 $\triangle_i$，其中 $i = 1,2,3$。一般化內心與旁心的選法，將表示法簡化為點 I^+ 為內心、點 I^- 為旁心，r^+ 為內切圓半徑，r^- 為旁切圓

半徑，$a_{\triangle_i}$ 為 $\triangle_i$ 的頂點 A 的對邊長度，$s_{\triangle_i}$ 為 $\triangle_i$ 的半周長長度，於是將前面推導結果寫成以下坐標形式。

$$I_{\triangle_i}^{+}\left(\frac{x_i}{2s_{\triangle_i}},\frac{y_i}{2s_{\triangle_i}},\frac{z_i}{2s_{\triangle_i}}\right)$$
$$I_{\triangle_i}^{-}\left(\frac{-x_i}{2\left(s_{\triangle_i}-a_{\triangle_i}\right)},\frac{y_i}{2\left(s_{\triangle_i}-a_{\triangle_i}\right)},\frac{z_i}{2\left(s_{\triangle_i}-a_{\triangle_i}\right)}\right)$$

依據規則若選了 $I_{\triangle_i}^{+}$ 作為一個圓心連線三角形的頂點，另外一個圓心連線三角形的頂點就必須為 $I_{\triangle_i}^{-}$，反之亦然。

因為正規化 $\triangle ABC$ 的面積為 1，點 $I_{h,k}$ 與 $J_{h,k}$ 坐標的分量和等於 1，我們繼續計算有向面積 $[I_{\triangle_1}^{\pm}I_{\triangle_2}^{\pm}I_{\triangle_3}^{\pm}]$ 與 $[I_{\triangle_1}^{\mp}I_{\triangle_2}^{\mp}I_{\triangle_3}^{\mp}]$

$$\frac{\left[I_{\triangle_1}^{\pm}I_{\triangle_2}^{\pm}I_{\triangle_3}^{\pm}\right]}{[ABC]}=\frac{1}{(2s_{\triangle_1}-a_{\triangle_1}\pm a_{\triangle_1})(2s_{\triangle_2}-a_{\triangle_2}\pm a_{\triangle_2})(2s_{\triangle_3}-a_{\triangle_3}\pm a_{\triangle_3})}\times\begin{vmatrix}\pm x_1 & y_1 & z_1\\ \pm x_2 & y_2 & z_2\\ \pm x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix} \quad \text{式 (9)}$$

$$\frac{\left[I_{\triangle_1}^{\mp}I_{\triangle_2}^{\mp}I_{\triangle_3}^{\mp}\right]}{[ABC]}=\frac{1}{(2s_{\triangle_1}-a_{\triangle_1}\mp a_{\triangle_1})(2s_{\triangle_2}-a_{\triangle_2}\mp a_{\triangle_2})(2s_{\triangle_3}-a_{\triangle_3}\mp a_{\triangle_3})}\times\begin{vmatrix}\mp x_1 & y_1 & z_1\\ \mp x_2 & y_2 & z_2\\ \mp x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix} \quad \text{式 (10)}$$

將式 (9) 與 式 (10) 相除可得有向面積的比值，如式 (11)

$$\frac{\left[I_{\triangle_1}^{\pm}I_{\triangle_2}^{\pm}I_{\triangle_3}^{\pm}\right]}{\left[I_{\triangle_1}^{\mp}I_{\triangle_2}^{\mp}I_{\triangle_3}^{\mp}\right]}=-\prod_{i=1}^{3}\frac{2s_{\triangle_i}-a_{\triangle_i}\mp a_{\triangle_i}}{2s_{\triangle_i}-a_{\triangle_i}\pm a_{\triangle_i}} \quad \text{式 (11)}$$

注意到 $2s_{\triangle_i}-a_{\triangle_i}\pm a_{\triangle_i}=\frac{2\triangle_i}{r_{\triangle_i}^{\pm}}$，於是可得出

$$\frac{\left[I_{\triangle_1}^{\pm}I_{\triangle_2}^{\pm}I_{\triangle_3}^{\pm}\right]}{\left[I_{\triangle_1}^{\mp}I_{\triangle_2}^{\mp}I_{\triangle_3}^{\mp}\right]}=-\prod_{i=1}^{3}\frac{r_{\triangle_i}^{\pm}}{r_{\triangle_i}^{\mp}}$$

■

根據定理 17，我們可以將定理 14 的長度不變量等價以下的推論 18 的面積不變量。

推論 18 (面積不變量)：對於 $\overline{BC}$ 上的任意動點 D_1、D_2 點，恆有 $\frac{\triangle I_{BD_1}I_{D_1D_2}I_{D_2C}}{\triangle J_{BD_1}J_{D_1D_2}J_{D_2C}}=\frac{s-a}{s}$。

證明：

由定理 17 可知 $\frac{\triangle I_{BD_1}I_{D_1D_2}I_{D_2C}\text{ 的面積}}{\triangle J_{BD_1}J_{D_1D_2}J_{D_2C}\text{ 的面積}}=\frac{r_{BD_1}\times r_{D_1D_2}\times r_{D_2C}}{r'_{BD_1}\times r'_{D_1D_2}\times r'_{D_2C}}=\frac{s-a}{s}$。

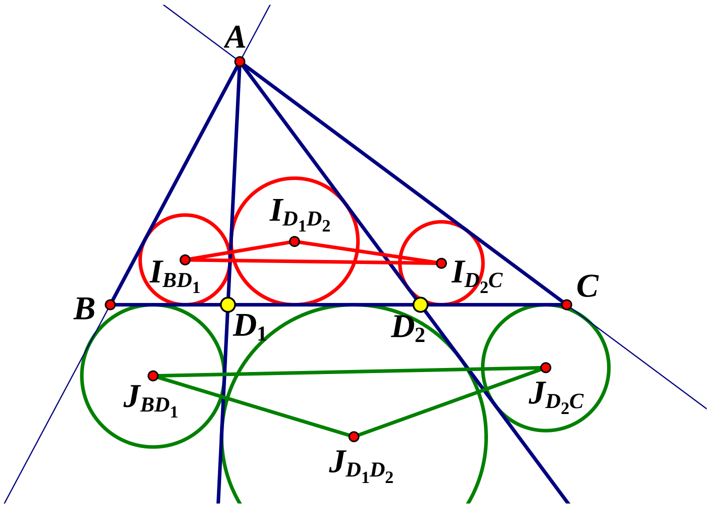


圖 21：面積不變量等價長度不變量

■

（二）所有具有面積不變量的圓心連線三角形

更一般化的問題是給定$\triangle ABC$的分割線為$\overleftrightarrow{AD_1}$與$\overleftrightarrow{AD_2}$時，其構造出的內心與旁心分別有 6 個點，這 12 個點I、I_{BD_1}、$I_{D_1D_2}$、I_{D_2C}、I_{BD_2}、I_{D_1C}以及J、J_{BD_1}、$J_{D_1D_2}$、J_{D_2C}、J_{BD_2}、J_{D_1C}連線構造的兩個三角形，是否還有其他的組合使得其面積比值為定值呢？

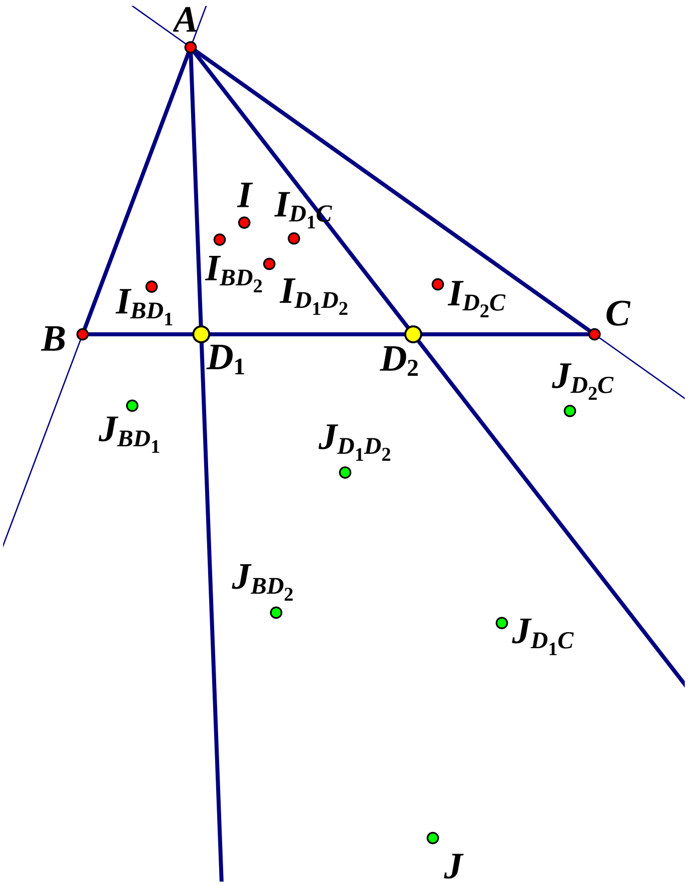


圖 22：三個分割子三角形的所有內心與旁心

由 12 個點構造的一個三角形可能性有 $\binom{12}{3}=220$ 種（不扣除三點共線的退化情形），此時對應的第二個三角形是固定的。我們不可能一一窮舉，注意到因為圓心連線的三角形面積比值為定值，於是一定與 $\triangle ABC$ 的邊長 a、b、c 有關，從這個角度來切入，此定值必由 s 與 $s-a$ 所構成，再透過定理 17，將面積不變量轉換成半徑長度不變量，這樣的轉換是本研究的創新之處。我們可得出兩個三角形的面積比值必為以下 6 種，1、$\frac{s-a}{s}$、$\left(\frac{s-a}{s}\right)^2$、$\frac{1}{1}$、$\frac{s}{s-a}$、$\left(\frac{s}{s-a}\right)^2$，我們將上述比值以半徑表示，分別對應到 1、$\frac{r}{r'}$、$\left(\frac{r}{r'}\right)^2$、$\frac{1}{1}$、$\frac{r'}{r}$、$\left(\frac{r'}{r}\right)^2$，其中 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑長為 r，$\overline{BC}$ 邊的旁切圓半徑長為 r'。

其形態必為以下 4 種形式，其中符號 $\boxdot$、$\boxtimes$、$\boxplus$ 表示內切圓半徑，$\odot$、$\otimes$、$\oplus$ 表示對應的旁切圓半徑。我們將結果整理成表 2，三個分割子三角形的所有內心與旁心連線構造的三角形共有 24 組面積不變量。

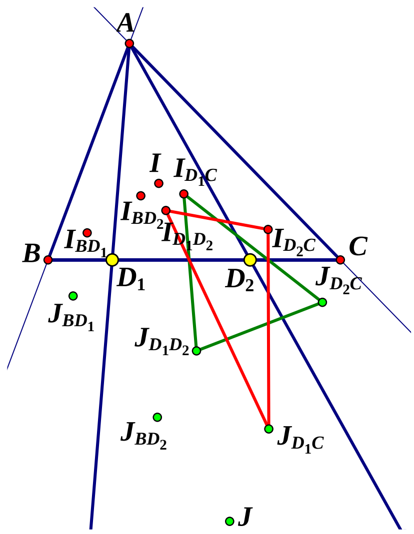
$$\left(\frac{\boxdot}{\odot}\times\frac{\boxtimes}{\otimes}\right)\times\frac{\oplus}{\boxplus}=\frac{s-a}{s}\times\frac{s}{s-a}=1 \text{ 以及其倒數}$$

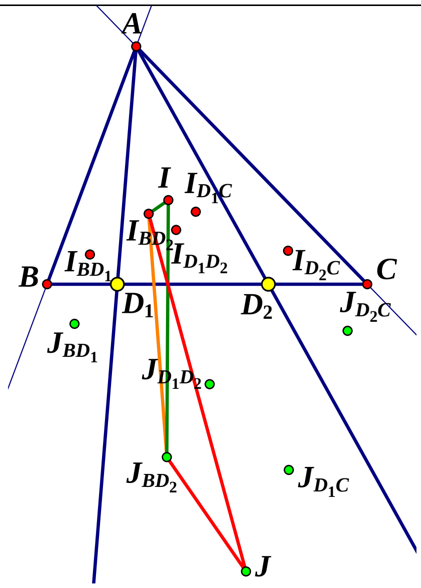
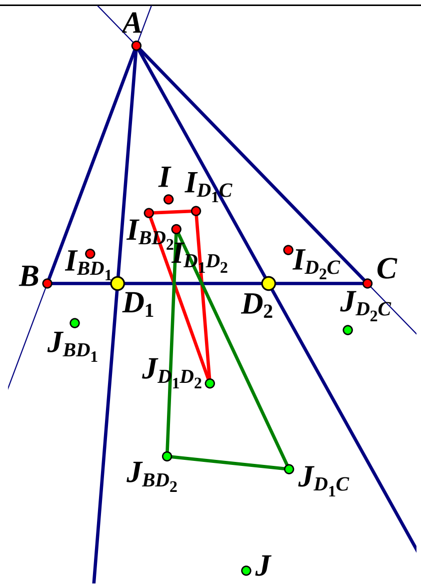
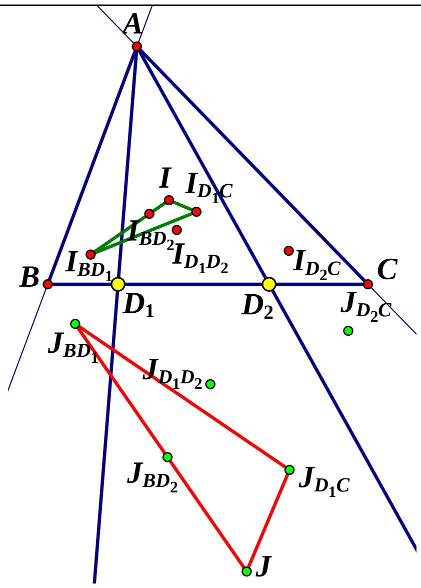
$$\frac{\boxdot}{\odot}\times\left(\frac{\otimes}{\boxtimes}\times\frac{\oplus}{\boxplus}\right)=\frac{\boxdot}{\odot}\times\left(\frac{s}{s-a}\times\frac{\odot}{\boxdot}\right)=\frac{s}{s-a} \text{ 以及其倒數}$$

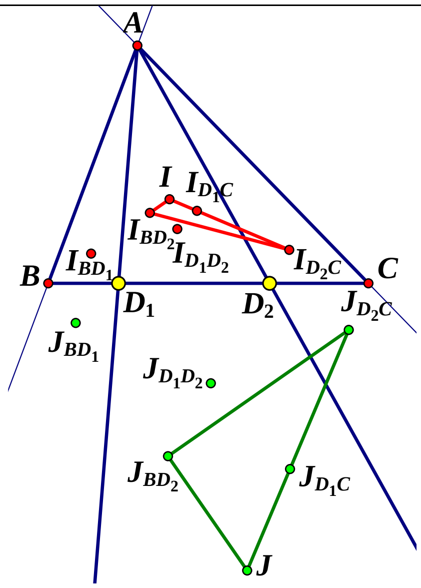
$$\left(\frac{\boxdot}{\odot}\times\frac{\odot}{\boxdot}\right)\times\frac{\oplus}{\boxplus}=1\times\frac{s}{s-a}=\frac{s}{s-a} \text{ 以及其倒數}$$

$$\left(\frac{\odot}{\boxdot}\times\frac{\otimes}{\boxtimes}\right)\times\frac{\oplus}{\boxplus}=\frac{s}{s-a}\times\frac{s}{s-a}=\left(\frac{s}{s-a}\right)^2 \text{ 以及其倒數}$$

表 2：24 組圓心連線的三角形面積不變量

定值	三角形	圖例
1 與 $\frac{1}{1}$	$\frac{\triangle I_{D_1D_2}I_{D_2C}J_{D_1C}}{\triangle J_{D_1D_2}J_{D_2C}I_{D_1C}}$、$\frac{\triangle I_{BD_1}I_{D_1C}J}{\triangle J_{BD_1}J_{D_1C}I}$ $\frac{\triangle I_{BD_1}I_{D_1D_2}J_{BD_2}}{\triangle J_{BD_1}J_{D_1D_2}I_{BD_2}}$、$\frac{\triangle I_{BD_2}I_{D_2C}J}{\triangle J_{BD_2}J_{D_2C}I}$ $\frac{\triangle J_{D_1D_2}J_{D_2C}I_{D_1C}}{\triangle I_{D_1D_2}I_{D_2C}J_{D_1C}}$、$\frac{\triangle J_{BD_1}J_{D_1C}I}{\triangle I_{BD_1}I_{D_1C}J}$ $\frac{\triangle J_{BD_1}J_{D_1D_2}I_{BD_2}}{\triangle I_{BD_1}I_{D_1D_2}J_{BD_2}}$、$\frac{\triangle J_{BD_2}J_{D_2C}I}{\triangle I_{BD_2}I_{D_2C}J}$	

$\frac{s}{s-a}$	$\frac{\triangle I_{BD_2}J_{BD_2}J}{\triangle J_{BD_2}I_{BD_2}I}$ 、 $\frac{\triangle I_{D_1C}J_{D_1C}J}{\triangle J_{D_1C}I_{D_1C}I}$ $\frac{\triangle I_{BD_1}J_{BD_1}J}{\triangle J_{BD_1}I_{BD_1}I}$ 、 $\frac{\triangle I_{D_2C}J_{D_2C}J}{\triangle J_{D_2C}I_{D_2C}I}$ $\frac{\triangle I_{D_1D_2}J_{BD_2}J_{D_1C}}{\triangle J_{D_1D_2}I_{BD_2}I_{D_1C}}$ 、 $\frac{\triangle J_{BD_1}J_{D_1D_2}J_{D_2C}}{\triangle I_{BD_1}I_{D_1D_2}I_{D_2C}}$	
$\frac{s-a}{s}$	$\frac{\triangle I_{BD_2}J_{D_1D_2}I_{D_1C}}{\triangle J_{BD_2}I_{D_1D_2}J_{D_1C}}$ 、 $\frac{\triangle I_{D_1C}J_{D_1C}I}{\triangle J_{D_1C}I_{D_1C}J}$ $\frac{\triangle I_{BD_1}I_{D_1D_2}I_{D_2C}}{\triangle J_{BD_1}J_{D_1D_2}J_{D_2C}}$ 、 $\frac{\triangle I_{D_2C}J_{D_2C}I}{\triangle J_{D_2C}I_{D_2C}J}$ $\frac{\triangle I_{BD_2}J_{BD_2}I}{\triangle J_{BD_2}I_{BD_2}J}$ 、 $\frac{\triangle I_{BD_1}J_{BD_1}I}{\triangle J_{BD_1}I_{BD_1}J}$	
$\left(\frac{s}{s-a}\right)^2$	$\frac{\triangle J_{BD_1}J_{D_1C}J}{\triangle I_{BD_1}I_{D_1C}I}$ 、 $\frac{\triangle J_{BD_2}J_{D_2C}J}{\triangle I_{BD_2}I_{D_2C}I}$	

$\left(\frac{s-a}{s}\right)^2$	$\frac{\triangle I_{BD_2}I_{D_2C}I}{\triangle J_{BD_2}J_{D_2C}J}$、$\frac{\triangle I_{BD_1}I_{D_1C}I}{\triangle J_{BD_1}J_{D_1C}J}$	

四、 分割 n 個子三角形的內切圓與旁切圓的不變量性質

考慮將 $\triangle ABC$ 分割為 n 個子三角形，令分割線為 $\overleftrightarrow{AD_1}$、$\overleftrightarrow{AD_2}$、…、$\overleftrightarrow{AD_{n-1}}$，其中動點 D_1、D_2、D_3、…、D_{n-1} 依序在 $\overline{BC}$ 上（由左而右）。

為了方便表示，令 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑長為 r_{BC}、$\overline{BC}$ 邊的旁切圓半徑長為 r'_{BC}；$\triangle ABD_1$ 的內切圓半徑長為 r_{BD_1}、$\triangle ABD_1$ 的 $\overline{BD_1}$ 邊的旁切圓半徑長為 r'_{BD_1}；$\triangle AD_kD_{k+1}$ 的內切圓半徑長為 $r_{D_kD_{k+1}}$、$\triangle AD_kD_{k+1}$ 的 $\overline{D_kD_{k+1}}$ 邊的旁切圓半徑長為 $r'_{D_kD_{k+1}}$，其中 $k=1,2,\dots,n-2$；$\triangle AD_{n-1}C$ 的內切圓半徑長為 $r_{D_{n-1}C}$、$\triangle AD_{n-1}C$ 的 $\overline{D_{n-1}C}$ 邊的旁切圓半徑長為 $r'_{D_{n-1}C}$。

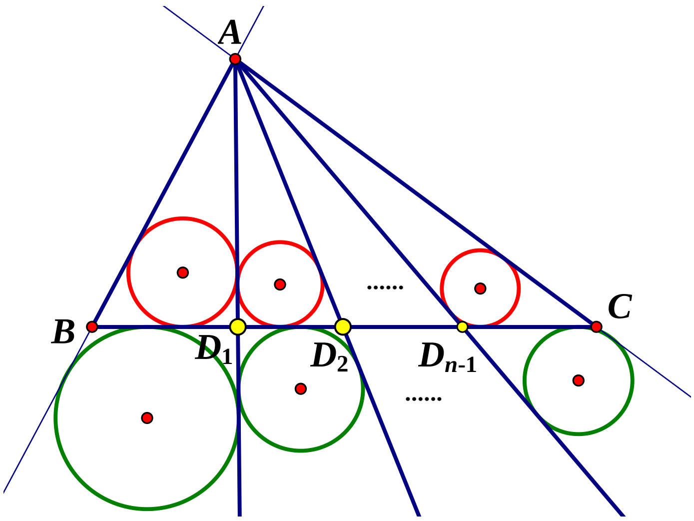


圖 23：切割 n 個子三角形

定理 19 (長度不變量)：對於 $\overline{BC}$ 上的任意動點 D_1、D_2、…、D_{n-1} 點（$n \geq 2$），

$$\frac{r_{BD_1}\times r_{D_1D_2}\times r_{D_2D_3}\times\ldots\times r_{D_{n-2}D_{n-1}}\times r_{D_{n-1}C}}{r'_{BD_1}\times r'_{D_1D_2}\times r'_{D_2D_3}\times\ldots\times r'_{D_{n-2}D_{n-1}}\times r'_{D_{n-1}C}} \text{ 恆為定值 } \frac{r_{BC}}{r'_{BC}}=\frac{s-a}{s}$$

證明：

我們利用數學歸納法證明對於 $n=2,3,4,5,\ldots$，皆有 $\frac{r_{BD_1}\times r_{D_1D_2}\times\ldots\times r_{D_{n-2}D_{n-1}}\times r_{D_{n-1}C}}{r'_{BD_1}\times r'_{D_1D_2}\times\ldots\times r'_{D_{n-2}D_{n-1}}\times r'_{D_{n-1}C}}=\frac{r_{BC}}{r'_{BC}}$。

1. $n=2$ 時，根據定理 5，$\frac{r_{BD_1}\times r_{D_1C}}{r'_{BD_1}\times r'_{D_1C}}=\frac{r_{BC}}{r'_{BC}}=\frac{s-a}{s}$，即原式成立。
2. 假設 $n=k$ 時，$\frac{r_{BD_1}\times r_{D_1D_2}\times\ldots\times r_{D_{k-2}D_{k-1}}\times r_{D_{k-1}C}}{r'_{BD_1}\times r'_{D_1D_2}\times\ldots\times r'_{D_{k-2}D_{k-1}}\times r'_{D_{k-1}C}}=\frac{r_{BC}}{r'_{BC}}=\frac{s-a}{s}$ 成立。
3. 當 $n=k+1$ 時，

$$\begin{aligned}
&\frac{r_{BD_1}\times r_{D_1D_2}\times r_{D_2D_3}\times\ldots\times r_{D_{k-1}D_k}\times r_{D_kC}}{r'_{BD_1}\times r'_{D_1D_2}\times r'_{D_2D_3}\times\ldots\times r'_{D_{k-1}D_k}\times r'_{D_kC}}\\
&=\left(\frac{r_{BD_1}\times r_{D_1D_2}\times\ldots\times r_{D_{k-2}D_{k-1}}}{r'_{BD_1}\times r'_{D_1D_2}\times\ldots\times r'_{D_{k-2}D_{k-1}}}\times\frac{r_{D_{k-1}C}}{r'_{D_{k-1}C}}\right)\times\left(\frac{r_{D_{k-1}D_k}\times r_{D_kC}}{r'_{D_{k-1}D_k}\times r'_{D_kD_C}}\times\frac{r'_{D_{k-1}C}}{r_{D_{k-1}C}}\right)\\
&=\frac{r_{BC}}{r'_{BC}}\times\left(\frac{r_{D_{k-1}C}}{r'_{D_{k-1}C}}\times\frac{r'_{D_{k-1}C}}{r_{D_{k-1}C}}\right)(\text{利用定理 }5)\\
&=\frac{r_{BC}}{r'_{BC}}=\frac{s-a}{s}
\end{aligned}$$

對於動點 D_1、D_2、…、D_{n-1} 點，恆有 $\frac{r_{BD_1}\times r_{D_1D_2}\times r_{D_2D_3}\times\ldots\times r_{D_{n-2}D_{n-1}}\times r_{D_{n-1}C}}{r'_{BD_1}\times r'_{D_1D_2}\times r'_{D_2D_3}\times\ldots\times r'_{D_{n-2}D_{n-1}}\times r'_{D_{n-1}C}}$ 為定值 $\frac{s-a}{s}$。

■

定理 20：對於 $\overline{BC}$ 上的任意相異動點依序為 D_1、D_2、…、D_{n-1} 點（$n \geq 3$），則由內心與旁心連線構造的三角形，其面積比值具有定值的共有 $24\times\binom{n-1}{2}$ 組。

證明：

$\triangle ABC$ 共有 $n-1$ 條相異分割線，其中任取 2 條分割線構造的 3 個子三角形與原三角形共有 24 組面積比值為定值，因此共有 $24\times\binom{n-1}{2}$ 組。

■

定理 21：對於任意兩個子三角形 $\triangle_1$ 與 $\triangle_2$，其內心連線 $\overleftrightarrow{I^+_{\triangle_1}I^+_{\triangle_2}}$，旁心連線 $\overleftrightarrow{I^-_{\triangle_1}I^-_{\triangle_2}}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 恆三線共點。

證明：

考慮任意選取相異兩個子三角形分別為 $\triangle_1$ 與 $\triangle_2$，根據定理 17 得其內心與旁心的坐標

$$I^+_{\triangle_1}\left(\frac{x_1}{2s_{\triangle_1}},\frac{y_1}{2s_{\triangle_1}},\frac{z_1}{2s_{\triangle_1}}\right)、I^+_{\triangle_2}\left(\frac{x_2}{2s_{\triangle_2}},\frac{y_2}{2s_{\triangle_2}},\frac{z_2}{2s_{\triangle_2}}\right)$$

$$I^-_{\triangle_1}\left(\frac{-x_1}{2(s_{\triangle_1}-a_{\triangle_1})},\frac{y_1}{2(s_{\triangle_1}-a_{\triangle_1})},\frac{z_1}{2(s_{\triangle_1}-a_{\triangle_1})}\right)、I^-_{\triangle_2}\left(\frac{-x_2}{2(s_{\triangle_2}-a_{\triangle_2})},\frac{y_2}{2(s_{\triangle_2}-a_{\triangle_2})},\frac{z_2}{2(s_{\triangle_2}-a_{\triangle_2})}\right)$$

接下來給出內心連線的直線方程 $\overleftrightarrow{I^+_{\triangle_1}I^+_{\triangle_2}}$: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{x_1}{2s_{\triangle_1}} & \frac{y_1}{2s_{\triangle_1}} & \frac{z_1}{2s_{\triangle_1}} \\ \frac{x_2}{2s_{\triangle_2}} & \frac{y_2}{2s_{\triangle_2}} & \frac{z_2}{2s_{\triangle_2}} \end{vmatrix}=0$ 與旁心連線的直線方程

$\overleftrightarrow{I^-_{\triangle_1}I^-_{\triangle_2}}$: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{-x_1}{2(s_{\triangle_1}-a_{\triangle_1})} & \frac{y_1}{2(s_{\triangle_1}-a_{\triangle_1})} & \frac{z_1}{2(s_{\triangle_1}-a_{\triangle_1})} \\ \frac{-x_2}{2(s_{\triangle_2}-a_{\triangle_2})} & \frac{y_2}{2(s_{\triangle_2}-a_{\triangle_2})} & \frac{z_2}{2(s_{\triangle_2}-a_{\triangle_2})} \end{vmatrix}=0$，再解兩直線的交點 $(\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3)$，我們只要

討論解第一個分量 λ_1 是否為 0 即可，根據克拉瑪公式可得出第一個分量為

$$\lambda_1=k\left(\left(-\begin{vmatrix}\frac{x_1}{2s_{\triangle_1}} & \frac{z_1}{2s_{\triangle_1}}\\ \frac{x_2}{2s_{\triangle_2}} & \frac{z_2}{2s_{\triangle_2}}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\frac{-x_1}{2(s_{\triangle_1}-a_{\triangle_1})} & \frac{y_1}{2(s_{\triangle_1}-a_{\triangle_1})}\\ \frac{-x_2}{2(s_{\triangle_2}-a_{\triangle_2})} & \frac{y_2}{2(s_{\triangle_2}-a_{\triangle_2})}\end{vmatrix}\right)-\left(-\begin{vmatrix}\frac{-x_1}{2(s_{\triangle_1}-a_{\triangle_1})} & \frac{z_1}{2(s_{\triangle_1}-a_{\triangle_1})}\\ \frac{-x_2}{2(s_{\triangle_2}-a_{\triangle_2})} & \frac{z_2}{2(s_{\triangle_2}-a_{\triangle_2})}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\frac{x_1}{2s_{\triangle_1}} & \frac{y_1}{2s_{\triangle_1}}\\ \frac{x_2}{2s_{\triangle_2}} & \frac{y_2}{2s_{\triangle_2}}\end{vmatrix}\right)\right)=0$$

因此任意兩個相異的子三角形的內心連線 $\overleftrightarrow{I^+_{\triangle_1}I^+_{\triangle_2}}$ 與旁心連線 $\overleftrightarrow{I^-_{\triangle_1}I^-_{\triangle_2}}$ 恆交於 $\overleftrightarrow{BC}$

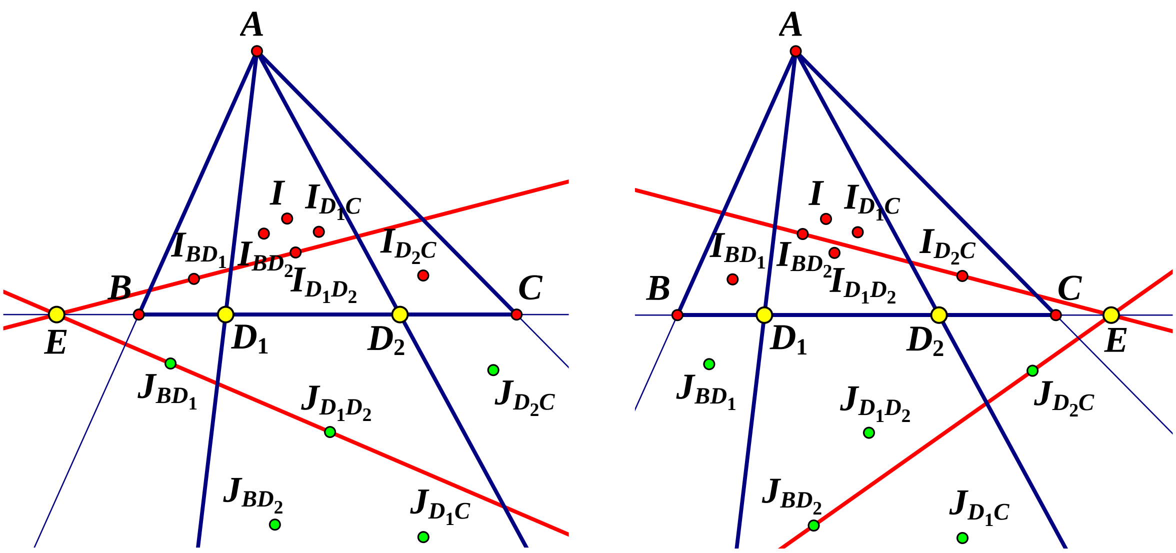


圖 24：任意內心連線、旁心連線、$\overleftrightarrow{BC}$ 共點

■

肆、　結論

對於平面上任意 $\triangle ABC$ 分割子三角形的數學問題，本研究先從 1988 年國際奧林匹亞數學競賽進行探討，隨後有文獻探討此分割線的長度[4]，也有探討內切圓半徑和[5]，或內

切圓半徑平方和[3]。我們的研究異於前者，創新探究分割子三角形的內切圓與旁切圓的「半徑長度乘積不變量」、「兩點圓心連線性質」以及「三點圓心連線三角形的面積不變量」，並且推廣到 n 個子三角形的情形，最後給出豐富有趣的幾何性質。

一、 探討多個子三角形的內切圓（旁切圓）的切點共點性質

針對兩個分割子三角形內切圓（旁切圓）的切點重合情形，我們利用切線段等長性質，給出了切點重合的充要條件。有趣的是，此時的動點 D 是唯一的，而其幾何意義是 $\triangle ABC$ 的內切圓與旁切圓的切點！利用前述兩個子三角形的結果，我們繼續給出三個子三角形的內切圓（旁切圓）的切點重合的充要條件式，相同的方法可推廣到多個子三角形。

我們也從尺規作圖的方法來分析，給出對於任意 $\triangle ABC$ 存在唯一的一組分割線 $\overline{AD_k}$ 使得子三角形 $\triangle AD_{k-1}D_k$ 與 $\triangle AD_kD_{k+1}$ 的內切圓相切於同一點，其中 $k=1,2,\dots,n-1$，$D_0=B$、$D_n=C$。

二、 探討兩個子三角形的內切圓與旁切圓的幾何性質

前人探討半徑長度和或半徑長度平方和，然而我們創新探討內切圓半徑 r 與旁切圓的半徑 r' 的「乘積」。有趣的是，我們發現兩個子三角形的切圓半徑相乘的比值 $\frac{r_1\times r_2}{r_1'\times r_2'}$ 恰好等於 $\triangle ABC$ 的內切圓與旁切圓半徑比值 $\frac{r}{r'}$，我們可以視作子三角形半徑乘積比值合成為原三角形的半徑乘積比值。另外，我們考慮兩個圓心連線，兩條圓心連線與 $\triangle ABC$ 的邊恆三線共點。設定 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，以連心線構造的三角形相似，再得出四個圓心共圓的定性性質。我們加入 $\triangle ABC$ 的內心與旁心，考慮三個圓心連線，給出圓心連線 $\triangle I_1I_2J$ 的面積恆等於 $\triangle J_1J_2I$ 的面積的性質，更重要的是我們發現面積不變量對應到半徑乘積不變量 $r_1\times r_2\times r'=r_1'\times r_2'\times r$。

三、 探討三個子三角形的內切圓與旁切圓的幾何性質

考慮將 $\triangle ABC$ 分割為 3 個子三角形，根據推論 6 我們將較小的三角形半徑乘積比值合成較大的三角形半徑比值，如此便能快速得出半徑不變量。我們延續前面的主題，繼續討論圓心連線三角形，給出半徑乘積比值與面積比值的不變量是相同的，於是將這個關係發展為一般性的理論，我們證明了半徑乘積不變量等價於其圓心連線三角形的面積不變量之

定理，透過這個定理，我們只需要系統性將內切圓與旁切圓的半徑分類，即可給出所有具有面積不變量的圓心連線三角形，我們發現將 $\triangle ABC$ 分割為 3 個子三角形時，具有面積不變量的圓心連線三角形共有 24 組。

四、 一般化探討多個子三角形的內切圓與旁切圓的的幾何性質

最後推廣到分割 n 個子三角形，利用數學歸納法我們給出內切圓與旁切圓半徑乘積的長度不變量，以及具有面積不變量的圓心連線三角形共有 $24\times\binom{n-1}{2}$ 組。我們利用定理 17 的一般化坐標，我們也發現任意兩個子三角形的內心連線 $\overleftrightarrow{I^{+}_{\triangle_1}I^{+}_{\triangle_2}}$，旁心連線 $\overleftrightarrow{I^{-}_{\triangle_1}I^{-}_{\triangle_2}}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 恆三線共點。

伍、 參考文獻

[1] P. Yiu (2012). *Introduction to the Geometry of the Triangle (Version 12.1224)*, available at http://math.fau.edu/Yiu/YIUIntroductionToTriangleGeometry121226.pdf

[2] P. Yiu (2005). Notes on Euclidean Geometry,available at http://math.fau.edu/Yiu/EuclideanGeometryNotes.pdf

[3] 李承軒、翁如萱（2016）。圓圓不絕的三角問題－三角形分割內切圓性質探討。2016 年臺灣國際科展數學科作品。

[4] 莊健祥（2011）。有關三角形內切圓等分線的一些不等式。數學傳播季刊，35(4)，82-85。

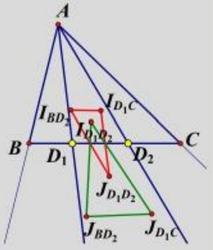
[5] 陳俐安、陳品璇（2011）。共邊三角形的內切圓。第 51 屆全國中小學科展高中組數學科作品。

[6] 單墫、胡大同（1989）。數學奧林匹克（第 28、29 屆國際數學競賽預選題）。台北市：九章出版社。

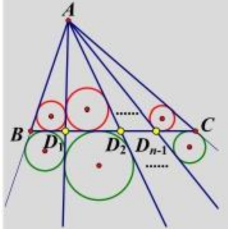
【評語】030417

作品從一則奧林匹亞數學競賽的預選題發想：在△ABC的 BC 邊上取一點D，使得△ABD和△ADC的內切圓半徑相等，證明一個線段 AD 與△ABC面積的關係式。作者衍生出新的問題，探討△ABD和△ADC的內切圓相切時切點的性質。先前已有科展作品研究「內切圓半徑和」或「內切圓半徑平方和」等相關題材，本文作者藉由敏銳的觀察和巧妙的分析，給出分割子三角形的內切圓與旁切圓的「半徑長度乘積不變量」創新的結果，即兩個子三角形的內切圓半徑長與原旁切圓半徑長乘積等於兩個子三角形的旁切圓半徑長與原內切圓半徑長乘積。證明的手法頗具巧思，說理也很清楚，值得嘉許。

作品海報



分割子三角形的
內切圓與旁切圓



壹、前言

國際奧林匹亞數學競賽 1988 年預選題「將 $\triangle ABC$ 分割為兩個子三角形，使得內切圓半徑 $r_1 = r_2$，求證 $\overline{AD}^2 = \triangle ABC$的面積 $\times \cot\frac{A}{2}$」。對此前人做了不少延伸研究，例如：$r_1 + r_2$ 的最大值，或 $r_1^2 + r_2^2$ 的最大值，或 $r_1^2 + r_2^2 = r^2$ 的充要條件。

本研究跳脫過往研究主題，考慮加入旁切圓，我們創新探討給定分割 n 個子三角形的內切圓與旁切圓的「半徑長度乘積不變量」以及其「圓心連線性質」。

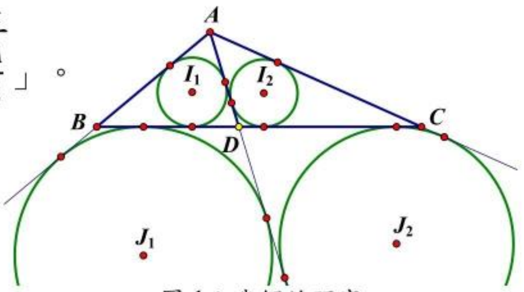


圖 1：我們的研究

貳、預備知識

引理 1. (Stewart's theorem) 在 $\triangle ABC$ 的 $\overline{BC}$ 上任取一點 D，則
$$\overline{DC} \times \overline{AB}^2 + \overline{DB} \times \overline{AC}^2 = (\overline{DB} + \overline{DC})(\overline{DA}^2 + \overline{DB} \times \overline{DC})。$$

定義 2. (有向面積) 平面上對於任意三點 P、Q、R，以 $[PQR]$ 表示由此三點圍成的三角形有向面積，點 P、Q、R 逆時鐘方向為正，頂點順時鐘方向為負。

定義 3. (重心坐標) 設平面上有一點 P，若 $[PBC]:[PCA]:[PAB] = x:y:z$，則 P 的重心坐標（Barycentric coordinate）為 $P\left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}\right)$ 或 $P(x:y:z)$。

參、研究結果

一、分割子三角形的切圓的切點重合性質

本研究約定在 $\triangle ABC$ 中 $\overline{BC} = a$，$\overline{CA} = b$，$\overline{AB} = c$，$s = \frac{a+b+c}{2}$

性質 1. 若 $\overline{BD} = s - b$，若且唯若內切圓 I_1 與 圓 I_2 分別切 $\overleftrightarrow{AD}$ 於同一點

性質 2. 若 $\overline{BD} = s - c$，若且唯若旁切圓 J_1 與 圓 J_2 分別切 $\overleftrightarrow{AD}$ 於同一點

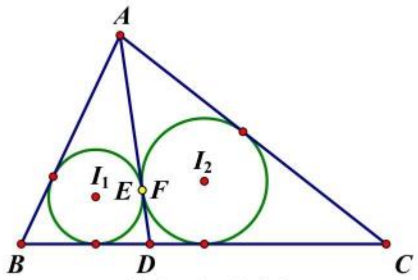


圖 2：切點重合

(一) 切點重合時動點 D 的幾何意義

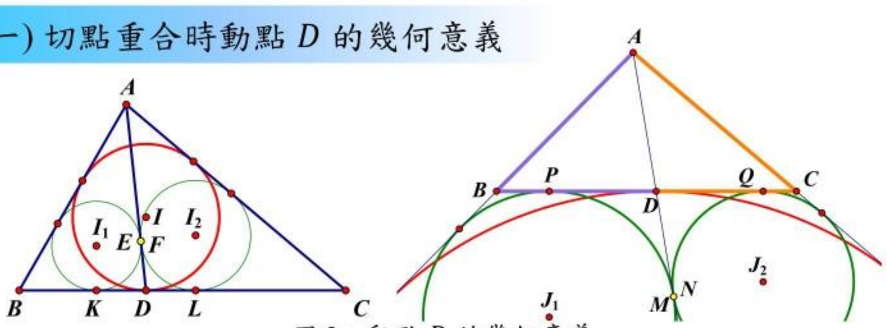


圖 3：動點 D 的幾何意義

我們發現 D 點恰好是 $\triangle ABC$ 的內切圓或旁切圓的切點！

(二) 分割三個子三角形的切圓之切點重合

令分割比例 $\overline{BD_1}:\overline{D_1C} = (1-t_1):t_1$ 且 $\overline{BD_2}:\overline{D_2C} = (1-t_2):t_2$，根據性質 1 與性質 2 可得出三個子三角形的內（旁）切圓的切點重合的充要條件聯立方程式，化簡得出 t_1 和 t_2 可由 $\triangle ABC$ 的三邊長所表示。

若將 $\triangle ABC$ 設定為等腰三角形時，透過三角不等式可得對於任意等腰三角形皆存在唯一的解滿足內（旁）切圓的切點重合。

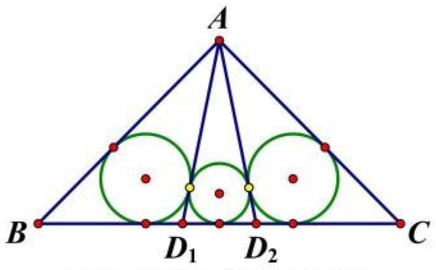


圖 4：等腰三角形切點重合

(三) 分割 n 個子三角形的切圓之切點重合的存在唯一性

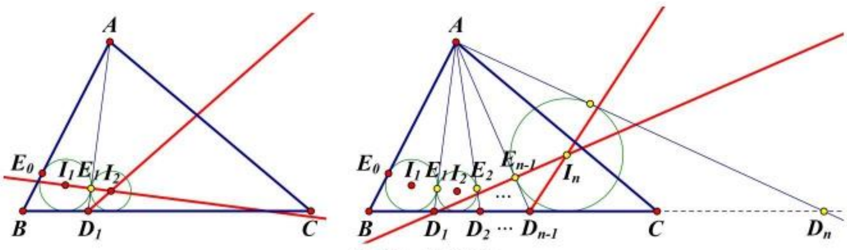


圖 5：構造法

令增量 $[D_kD'_k] = \delta_k$，發現 δ_1、δ_2、…同號

再證明存在唯一 δ_1，使得 $\overline{CD_n} = 0$

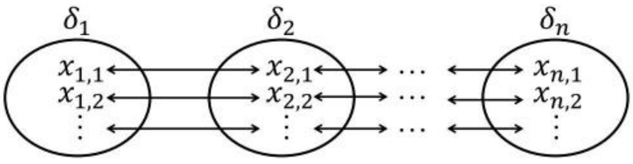


圖 6：實數 δ_k 的對應關係

性質 4.(不相似三角形，但面積比等於邊長平方比)

(1) 相鄰內切圓外切時，旁心構造三角形 $[D_{h-1}J_hD_h]:[D_{k-1}J_kD_k] = \overline{D_{h-1}D_h}^2 : \overline{D_{k-1}D_k}^2$

(2) 相鄰旁切圓外切時，內心構造三角形 $[D_{h-1}I_hD_h]:[D_{k-1}I_kD_k] = \overline{D_{h-1}D_h}^2 : \overline{D_{k-1}D_k}^2$

二、兩個子三角形的內切圓與旁切圓的不變量性質

(一) 半徑長度乘積不變量

我們發現了內切圓與旁切圓半徑長的不變量，這是本研究的創新發現。

定理 5. 對於 $\overline{BC}$ 上任意動點 D，$\frac{r_1r_2}{r'_1r'_2}$ 恆為定值 $\frac{s-a}{s}$

推論 6. $r' \times r_1 \times r_2 = r \times r'_1 \times r'_2$

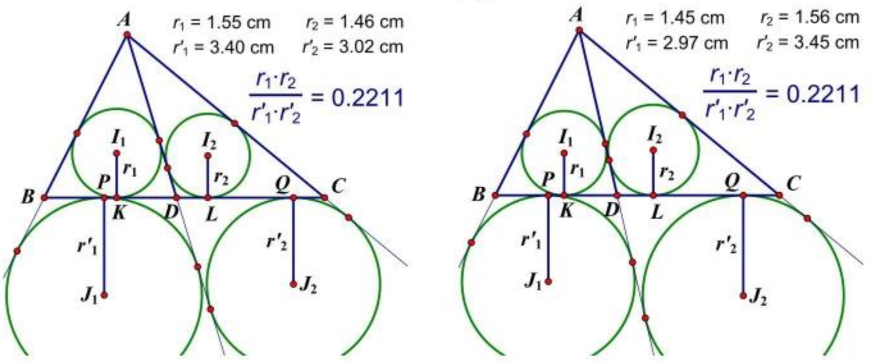


圖 7：半徑乘積定值

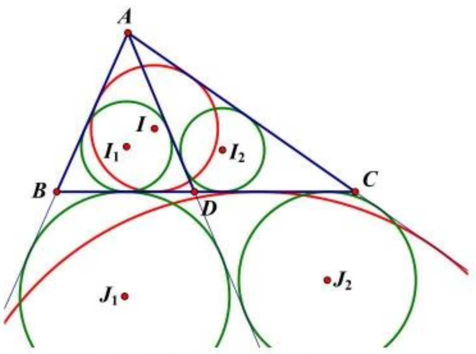


圖 8：半徑乘積等式

(二) 內切圓與旁切圓之圓心連線性質

我們繼續研究前人沒有討論的主題：內切圓圓心連線 $\overleftrightarrow{I_1I_2}$ 與旁切圓圓心連線 $\overleftrightarrow{J_1J_2}$。

性質 9. 對於動點 D，$\overleftrightarrow{I_1I_2}$、$\overleftrightarrow{J_1J_2}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 恆共點

證明：利用解析幾何 Barycentric coordinate 進行處理

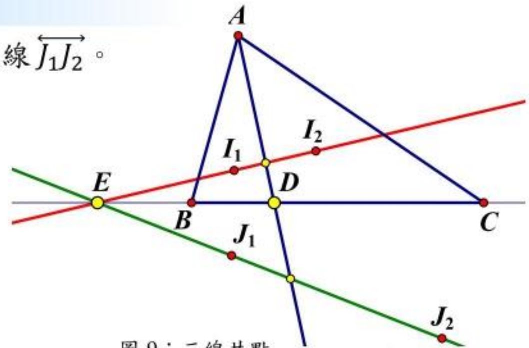


圖 9：三線共點

等價

性質 11. 若 $\overline{AB}=\overline{AC}$，則 $\triangle EI_1J_1$ 恆相似於 $\triangle EJ_2I_2$

證明：利用解析幾何 Barycentric coordinate 進行處理

推論 12. 若 $\overline{AB}=\overline{AC}$，則點 I_1、I_2、J_1 與 J_2 共圓

證明：利用內角平分線與外角平分線的角度性質

可得 $\angle I_1J_1I_2=\frac{\angle B}{2}=\frac{\angle C}{2}=\angle I_2J_2I_1$

定理 21. (性質 9 的一般化)

對於任意兩個子三角形 $\triangle_1$ 與 $\triangle_2$

其內心連線 $\overleftrightarrow{I^+_{\triangle_1}I^+_{\triangle_2}}$，旁心連線 $\overleftrightarrow{I^-_{\triangle_1}I^-_{\triangle_2}}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 恆三線共點

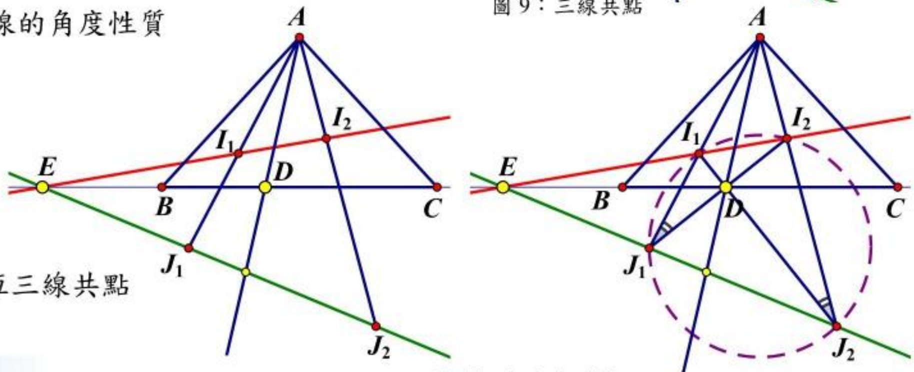


圖 10：相似與共圓

(三) 圓心連線三角形的面積不變量

繼半徑不變量，我們又找到了另一個有趣的不變量—面積不變量，這也是研究中重要的發現。

定理 13. $\triangle I_1I_2J$ 的面積 $=\triangle J_1J_2I$ 的面積

證明：用解析幾何 Barycentric coordinate 來處理面積

令 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$、內心 $I(a\colon b\colon c)$、旁心 $J(-a\colon b\colon c)$

再令 $D(0,t,1-t)$ 且 $\triangle ABC=1$，可得內心 I_1、I_2，旁心 J_1、J_2 的坐標

$$\frac{[IJ_1J_2]}{[ABC]}=\frac{1}{2s(at-a+c+p)(-at+b+p)}\times\begin{vmatrix} a & b & c \\ a(t-1) & p+ct & c(1-t) \\ -at & bt & p+b(1-t)\end{vmatrix}$$

$$\frac{[JI_1I_2]}{[ABC]}=\frac{1}{2(s-a)(-at+a+c+p)(at+b+p)}\times\begin{vmatrix} -a & b & c \\ a(1-t) & p+ct & c(1-t) \\ at & bt & p+b(1-t)\end{vmatrix}$$

化簡後可得有向面積 $[IJ_1J_2]=-[JI_1I_2]$，即 $\triangle I_1I_2J$ 的面積 $=\triangle J_1J_2I$ 的面積

化簡過程中發現定理 13 與定理 5、推論 6 有密切關聯

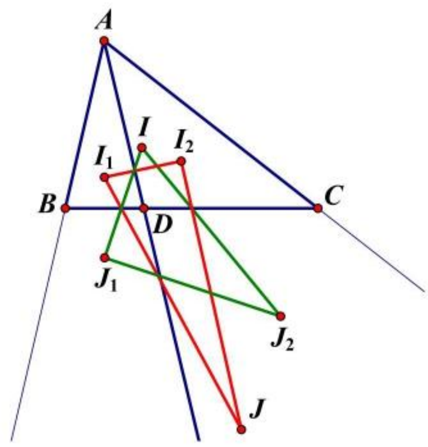


圖 11：圓心連線三角形面積不變量

三、三個子三角形的內切圓與旁切圓的不變量性質

令 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑長為 r_{BC}、$\overline{BC}$ 邊的旁切圓半徑長為 r'_{BC}；$\triangle ABD_1$ 的內切圓半徑長為 r_{BD_1}、$\triangle ABD_1$ 的 $\overline{BD_1}$ 邊的旁切圓半徑長為 r'_{BD_1}，以此類推。

(一) 半徑長度乘積不變量

定理 14. $\frac{r_{BD_1}\times r_{D_1D_2}\times r_{D_2C}}{r'_{BD_1}\times r'_{D_1D_2}\times r'_{D_2C}}$ 恆為定值 $\frac{s-a}{s}$

半徑的合成關係

$$\frac{s-a}{s}=\frac{r_{BC}}{r'_{BC}}$$

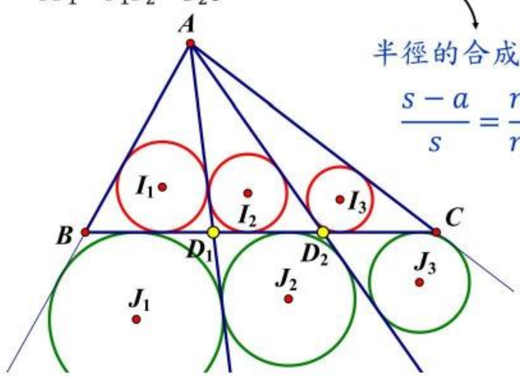
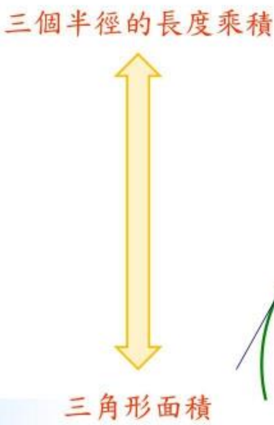


圖 12：半徑乘積定值 (1)



定理 15. $\frac{r_{BD_2}\times r_{D_1C}\times r'_{D_1D_2}}{r'_{BD_2}\times r'_{D_1C}\times r_{D_1D_2}}$ 恆為定值 $\frac{s-a}{s}$

半徑的合成關係

$$\frac{s-a}{s}=\frac{r_{BC}}{r'_{BC}}$$

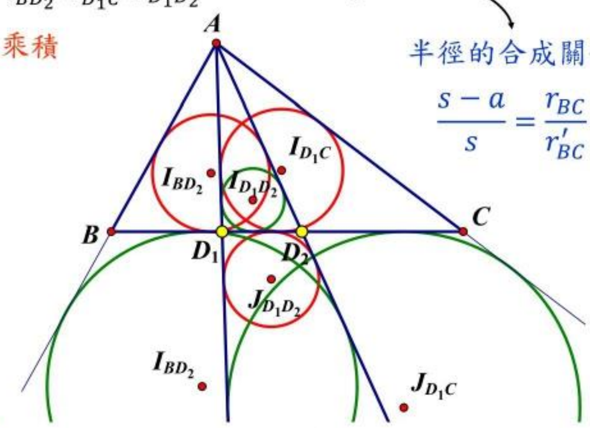


圖 13：半徑乘積定值 (2)

(二) 圓心連線三角形的面積不變量

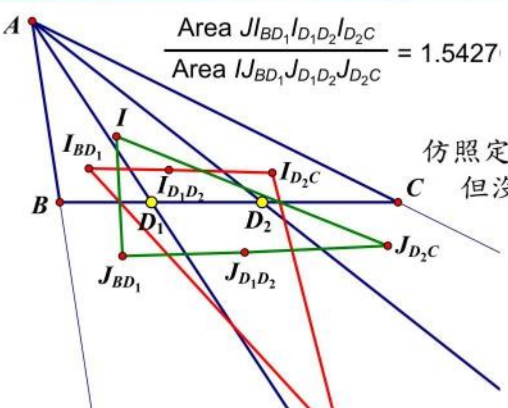


圖 14：圓心連線四邊形

仿照定理 12 構造四邊形

但沒有面積不變量

再觀察 三角形

定理 16. $\frac{\text{Area }\triangle I_{BD_2}I_{D_1C}J_{D_1D_2}}{\text{Area }\triangle J_{BD_2}J_{D_1C}I_{D_1D_2}}$ 恆為定值 $\frac{s-a}{s}$

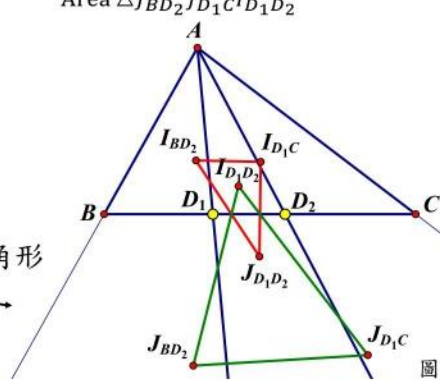


圖 15：面積不變量

(三) 半徑長度乘積不變量等價面積不變量

我們將「半徑長度乘積比值與三角形面積比值」轉化為一般性理論，這是本研究最重要的貢獻。

定理 17. 半徑長度乘積不變量等價於其對應的圓心連線的三角形面積不變量

證明：

1.正規化 $\triangle ABC$ 的面積為 1，$\triangle AD_hC$ 的面積$=t_h$，$\triangle AD_kC$ 的面積 $=t_k$，$s_{h,k}$ 為半周長，可得出 $\triangle AD_hD_k$ 的內心坐標與旁心的坐標：

$$I_{h,k}\left(\frac{a(t_h-t_k)}{2\times s_{h,k}},\frac{p_kt_h+p_ht_k}{2\times s_{h,k}},\frac{p_k(1-t_h)+p_h(1-t_k)}{2\times s_{h,k}}\right)$$

$$J_{h,k}\left(\frac{-a\times(t_h-t_k)}{2\times\left(s_{h,k}-a(t_h-t_k)\right)},\frac{p_kt_h+p_ht_k}{2\times\left(s_{h,k}-a(t_h-t_k)\right)},\frac{p_k(1-t_h)+p_h(1-t_k)}{2\times\left(s_{h,k}-a(t_h-t_k)\right)}\right)$$

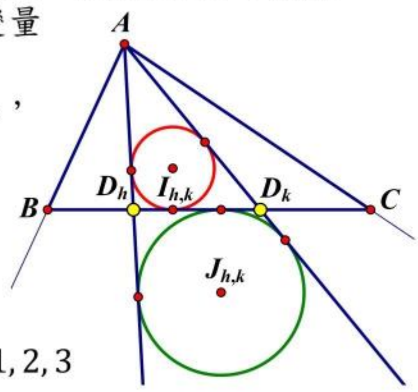


圖 16：坐標的一般化

2.令選取的三個子三角形分別為 $\triangle_i$，$I^{+}_{\triangle_i}$ 為內心、$I^{-}_{\triangle_i}$ 為旁心，其中 $i=1,2,3$

根據前面的坐標一般式，可再化簡內心與旁心的坐標：

$$I^{+}_{\triangle_i}\left(\frac{x_i}{2s_{\triangle_i}},\frac{y_i}{2s_{\triangle_i}},\frac{z_i}{2s_{\triangle_i}}\right)\text{、}I^{-}_{\triangle_i}\left(\frac{-x_i}{2\left(s_{\triangle_i}-a_{\triangle_i}\right)},\frac{y_i}{2\left(s_{\triangle_i}-a_{\triangle_i}\right)},\frac{z_i}{2\left(s_{\triangle_i}-a_{\triangle_i}\right)}\right)$$

繼續計算有向面積 $\left[I^{\pm}_{\triangle_1}I^{\pm}_{\triangle_2}I^{\pm}_{\triangle_3}\right]$ 與 $\left[I^{\mp}_{\triangle_1}I^{\mp}_{\triangle_2}I^{\mp}_{\triangle_3}\right]$

$$\frac{\left[I^{\pm}_{\triangle_1}I^{\pm}_{\triangle_2}I^{\pm}_{\triangle_3}\right]}{[ABC]}=\frac{1}{(2s_{\triangle_1}-a_{\triangle_1}\pm a_{\triangle_1})(2s_{\triangle_2}-a_{\triangle_2}\pm a_{\triangle_2})(2s_{\triangle_3}-a_{\triangle_3}\pm a_{\triangle_3})}\times\begin{vmatrix}\pm x_1 & y_1 & z_1\\ \pm x_2 & y_2 & z_2\\ \pm x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

$$\frac{\left[I^{\mp}_{\triangle_1}I^{\mp}_{\triangle_2}I^{\mp}_{\triangle_3}\right]}{[ABC]}=\frac{1}{(2s_{\triangle_1}-a_{\triangle_1}\mp a_{\triangle_1})(2s_{\triangle_2}-a_{\triangle_2}\mp a_{\triangle_2})(2s_{\triangle_3}-a_{\triangle_3}\mp a_{\triangle_3})}\times\begin{vmatrix}\mp x_1 & y_1 & z_1\\ \mp x_2 & y_2 & z_2\\ \mp x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

注意到，$2s_{\triangle_i}-a_{\triangle_i}\pm a_{\triangle_i}=\frac{2\triangle_i}{r^{\pm}_{\triangle_i}}$，於是兩式相除可得出

$$\frac{\left[I^{\pm}_{\triangle_1}I^{\pm}_{\triangle_2}I^{\pm}_{\triangle_3}\right]}{\left[I^{\mp}_{\triangle_1}I^{\mp}_{\triangle_2}I^{\mp}_{\triangle_3}\right]}=-\prod_{i=1}^{3}\frac{r^{\pm}_{\triangle_i}}{r^{\mp}_{\triangle_i}}$$

推論 18. 對於 $\overline{BC}$ 上的任意動點 D_1、D_2 點，恆有 $\frac{\text{Area }\triangle I_{BD_1}I_{D_1D_2}I_{D_2C}}{\text{Area }\triangle J_{BD_1}J_{D_1D_2}J_{D_2C}}=\frac{s-a}{s}$

(四) 所有面積不變量的圓心連線三角形

圓心連線三角形的面積比值可轉換為半徑長度乘積比值，又考慮其為定值，所以必須合成為原三角形的邊長，因此僅為以下六種定值：

$$1\text{、}\frac{s-a}{s}\text{、}\left(\frac{s-a}{s}\right)^2\text{、}\frac{1}{1}\text{、}\frac{s}{s-a}\text{、}\left(\frac{s}{s-a}\right)^2$$

我們將其合成關係分為四種型態，給出所有具有面積不變量的圓心連線三角形總共有 24 組。

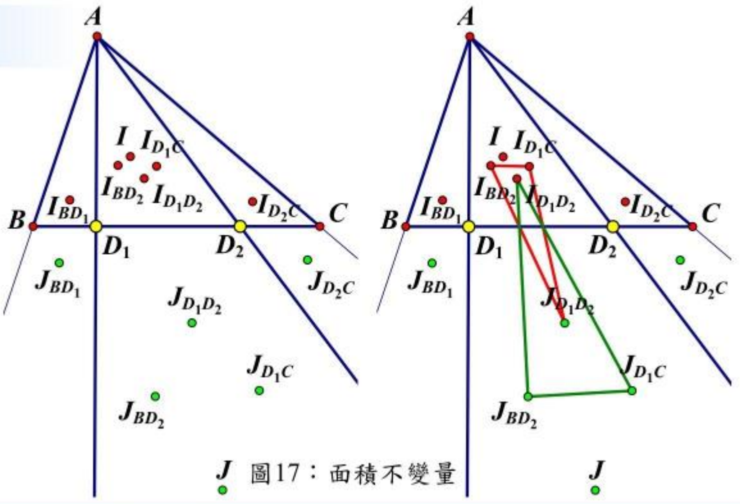


圖17：面積不變量

四、分割 n 個子三角形的內切圓與旁切圓的不變量性質

定理 19. $\frac{r_{BD_1}\times r_{D_1D_2}\times r_{D_2D_3}\times\cdots\times r_{D_{n-2}D_{n-1}}\times r_{D_{n-1}C}}{r'_{BD_1}\times r'_{D_1D_2}\times r'_{D_2D_3}\times\cdots\times r'_{D_{n-2}D_{n-1}}\times r'_{D_{n-1}C}}$ 恆為定值 $\frac{s-a}{s}$

證明：利用數學歸納法進行證明。

$\triangle ABC$ 共有 $n-1$ 條相異分割線，其中任取 2 條分割線則有 24 組具有面積不變量的圓心連線三角形。

定理 20. 具有面積不變量的三角形共有 $24\times\binom{n-1}{2}$ 組

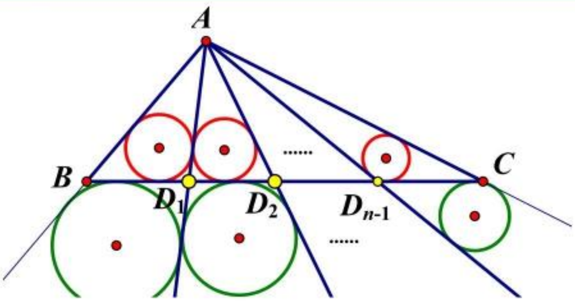


圖 18：n 個子三角形

肆、結論

一、考慮 $\triangle ABC$ 分割為兩個子三角形時，我們先給出了內切圓（旁切圓）切點重合的充要條件。有趣的是，此時 D 點的幾何意義是 $\triangle ABC$ 的內切圓與旁切圓的切點！考慮 D 點為動點時，我們發現半徑長度乘積不變量 $\frac{r_1\times r_2}{r'_1\times r'_2}=\frac{r}{r'}$，這可以視作半徑長度乘積的合成。構造兩個圓心的連線以及三個圓心連線的三角形，我們得到了有趣的共點、共圓，以及面積不變量性質。

二、考慮分割 3 個子三角形時，我們發現半徑長度乘積比值和面積比值相同，於是將此關係發展為一般性的理論，這是本研究的亮點及貢獻。利用這個定理，我們系統性的將切圓半徑分類，再給出了具有面積不變量的圓心連線三角形數量，共有 24 組。

三、最後推廣到分割 n 個子三角形，利用數學歸納法給出內切圓與旁切圓半徑長度乘積不變量，以及具有面積不變量的圓心連線三角形共有 $24\times\binom{n-1}{2}$ 組。

伍、參考文獻

[1] P. Yiu (2001). *Introduction to the Geometry of the Triangle* (*Version 12.1224*).

[2] 李承軒、翁如萱（2016）。**圓圓不絕的三角問題－三角形分割內切圓性質探討**。2016年臺灣國際科展數學作品。

[3] 莊健祥（2011）。有關三角形內切圓等分線的一些不等式。**數學傳播季刊**，**35**(4)，82-85。

[4] 陳俐安、陳品璇（2011）。**共邊三角形的內切圓**。第51屆全國中小學科展高中組數學作品。

[5] 單墫、胡大同（1989）。**數學奧林匹克**（第28、29屆國際數學競賽預選題）。臺北市：九章出版社。