中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030416

天文密碼

學校名稱： 嘉義市立玉山國民中學

作者：	指導老師：
國三 沈伯勉	林鴻哲
國三 楊友嘉	鄭巧芊
國三 涂成穎	

關鍵詞： 三角比、硬幣悖論、摩天輪

摘要

本研究探討平面中三圓的關係，其中圓 O 固定不動，圓 O_1 以逆時針方向滾動且繞行圓 O；而圓 O_2 同時也以逆時針方向滾動且繞行動圓圓 O_1。其中圓 O_1 與圓 O_2 上各有一動點 P、Q。三圓一開始為圓 O_2 分別與圓 O 和圓 O_1 外切，且 O 、Q、P 三點成一直線，Q 點介於 O 、P 兩點之間。當 $\overline{OO_1}$ 與 x 軸夾角為 θ 時，先以繪圖軟體了解動點的軌跡；其次以三角比的概念求得 P、Q 兩點的坐標；最後再以電腦繪圖軟體，製作當三點共線時之 θ 值，並藉由函數圖形了解三點之中何者介於其他兩點之間。本研究由原本的三圓外切的情形，邁向討論三圓外離的情況，猶如恆星、行星、衛星三者的運行，進而以各圓半徑、兩圓連心距、繞行角度為變數，歸納合理的數學式，以利日後進行更廣泛的研究。

壹、前言

一、研究動機

這個學期我們學習了「三角比」，數學老師提出一個升大學考試的題目，它是一個有關摩天輪轉動的題目，其所求為「摩天輪運轉時間」與「車廂離地面高度」的函數關係。此外，在三年級學兩圓關係時，老師又提了一個題目，就是一個十元硬幣，滾動繞行另一個十元硬幣，當繞行一周的時候，求繞轉硬幣自轉幾周。於是我們就把這兩個問題聯想在一起，設計了一個題目。「當一個圓滾動繞行另一個固定不動的圓的時候，繞行圓周上的動點與固定圓圓心，其距離與繞行角度的函數關係式」。後來又衍生了一些想法，類似恆星、行星、衛星運行的概念，因而展開了一連串的探究之旅。

二、研究目的

當一個動圓滾動繞行另一個定圓的時候，若動圓半徑：定圓半徑=m：n，探討圓上動點的軌跡作圖法則及基本性質。此外，若兩圓同時是動圓且滾動時，探討兩圓圓周上各自動點的相對位置。分為以下三大主題：

第一：導出動圓 O_1 上的 P 點，其繞行固定圓 O 的軌跡參數式。

第二：導出動圓 O_2 上的 Q 點，其繞行動圓 O_1 的軌跡參數式。

第三：當 O、P、Q 三點共線時，θ 的解即稱為「天文密碼」，探討此狀況在天文上的意義。

貳、 研究設備器材

硬幣、繪圖軟體。

參、研究過程及方法

一、首先我們找出了 93 年的大學考試題目，試著去了解題意並從中體會有關三角比的應用。

遊樂區有一個摩天輪，中心軸高 22 公尺，直徑 40 公尺，逆時針方向運轉一圈需費時 15 分鐘。當摩天輪開始運轉時，阿美恰坐在離地最近的位置上，x 分鐘後，阿美離地的高度可表為 y=asin(bx+c)+d，a>0 且 b>0。試問下列選項有哪些是正確的？(多選題)________【93 年指考數乙(補)】

(1) a=20 (2) a=40 (3) b=$\frac{2\pi}{15}$ (4) c=0 (5) d=2

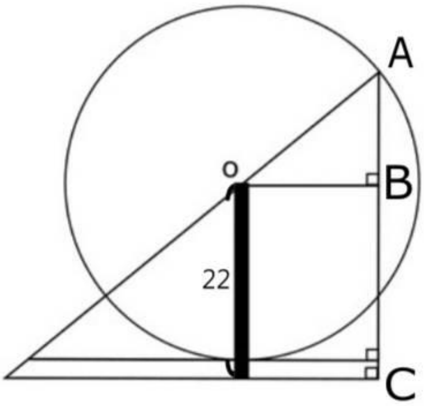


圖 1：摩天輪與摩天輪相對位置示意圖

由題意：

摩天輪一分鐘轉 $360° \div 15 = 24°$

假設摩天輪轉了 x 分鐘，因此轉 $24x°$

因為**高度 y=$\overline{AB}$+$\overline{BC}$**

$$=r\sin(24x-90)+22$$

$$=20\sin(24x-90)+22$$

所以 a=20, b=24, c=-90, d=22。

以這個題目而言，變因「時間」以 x 表示，乘以每分鐘轉的角度 b，再減去 90 度，即為「摩天輪車廂中心與轉軸中心連線段」和 y 軸負向的夾角。由此正弦函數值乘以繞行半徑，可得車廂中心與轉軸中心的相對高度。當然，我們也可以餘弦函數值來推得水平的相對位置，即其 x 坐標。

二、數學老師提供的另外一個問題，其題意如下：有兩個 10 圓硬幣緊靠在一起，其中一個不動，另一個繞著不動的那一個硬幣圓周滾動一圈，請問滾動的那個硬幣自轉幾圈？

圖 2：右方硬幣滾動繞行左方固定不動硬幣

一般來說，我們稱硬幣轉動的問題為硬幣悖論，所謂「悖論」就是一般情況很容易誤解。

面對這個問題，我們很可能輕意的回答：「1 圈」，原因是因為我們覺得兩個硬幣的圓周長相等。因此我們要實際來研究兩個半經相等的兩個圓，一個固定不動，另一個則繞著它的圓周滾動一周，則滾動的圓會自轉幾圈。

事實上，這個問題並沒有這麼單純，如圖 1 所示，我們先假設圓 O 由左滾動至右，由以下的軌跡圖所示，動點由 P 移動至 Q，即圓 O 自轉一圈。

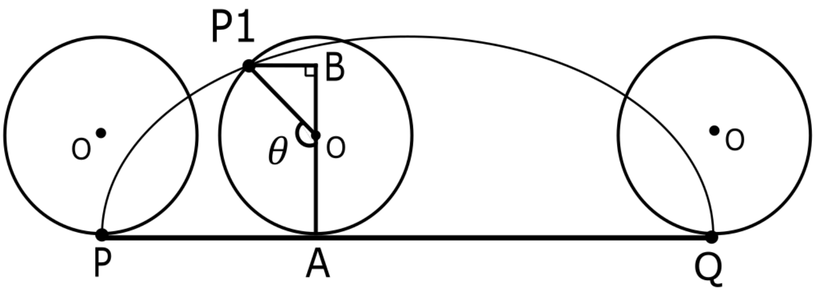


圖 3：圓 O 滾動圖

當圓 O 在直線上的切點 P,若沿著直線向前滾動$\overline{AP}$距離，旋轉 θ 度，此時 P 點到達 P_1 點,A 為切點,$\angle P_1OA=\theta$度。

$\widehat{AP_1}=\overline{AP}=2\pi r\times\frac{\theta}{360}=\frac{\theta\pi r}{180}$

其次在ΔP_1BO 中,$\angle P_1OB=180-\theta$, $\angle B=90^o$,

$\overline{OB}=r\cos(180-\theta)^o=-r\cos\theta^o$

$\overline{BP_1}=r\sin(180-\theta)^o=r\sin\theta^o$

設 P 點坐標(0,0) ,則 $P_1=(\frac{\theta\pi r}{180}-r\sin\theta, r-r\cos\theta)$

當圓 O 滾動一圈和直線相切於 Q 點時，$\theta=360^o$，

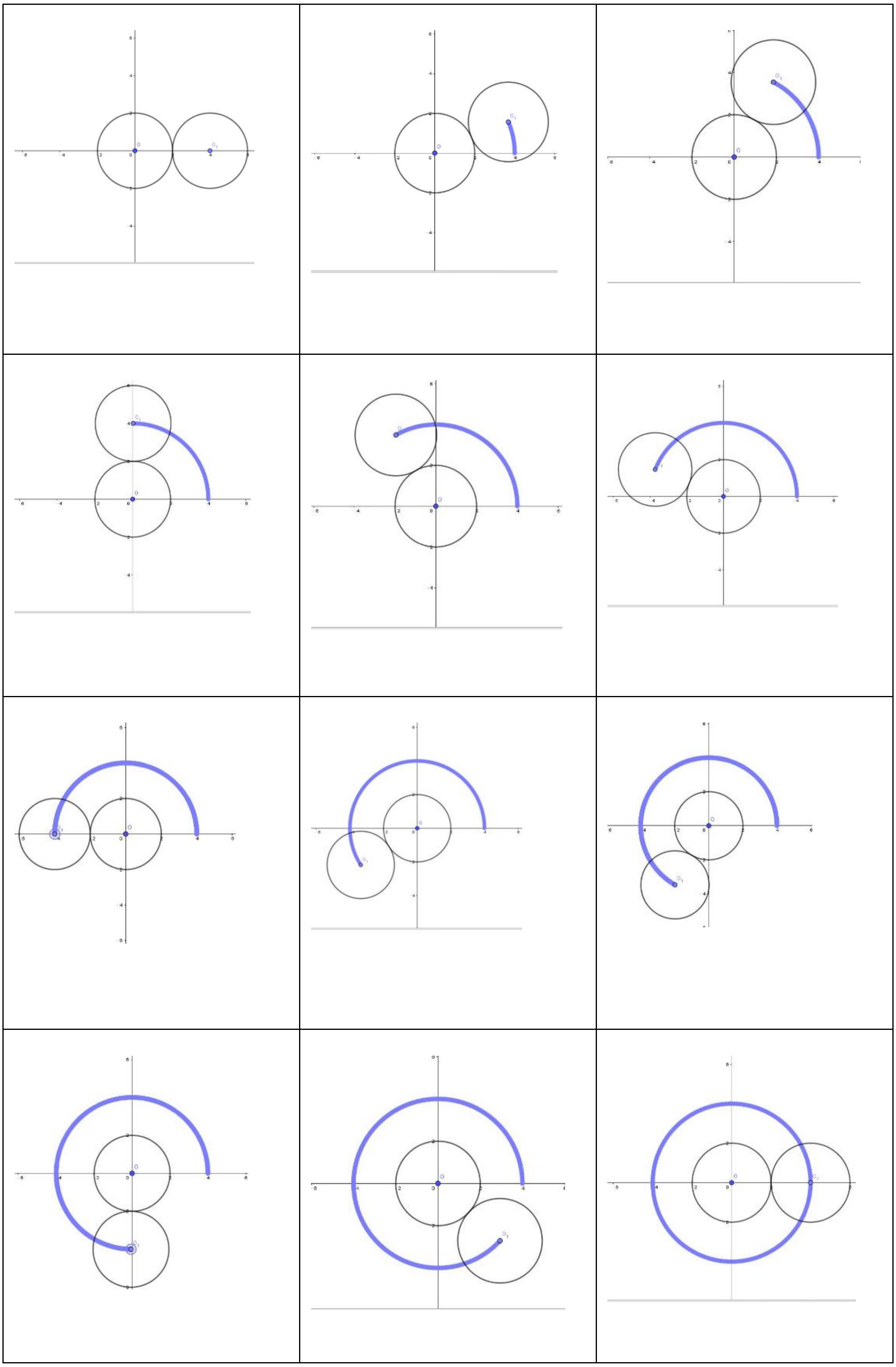
此時，Q 點坐標為$(\frac{360\pi r}{180}-r\sin 360^o, r-r\cos 360^o)=(2\pi r, 0)$，

所以 $\overline{PQ}$=圓心 O 所走的距離=圓 O 的周長=$2\pi r$ ，

因此推得：**圓 O 滾動所經的距離=圓心移動的路徑長**。

於是，我們先以電腦繪製了一動圓繞行另一固定圓如表 1 所示，對其圓心的軌跡圖進行初步了解。

表格 1　圓 O_1 繞行圓 O 時，圓心 O_1 點的軌跡圖表



註：以上軌跡圖由左至右，由上而下依序呈現。

如上表 1 所示，定圓 O 的半徑=動圓 O_1 的半徑=r，動圓 O_1 繞著定圓 O 逆時針滾動，當動圓 O_1 滾動定圓 O 達 1 周時，動圓 O_1 的圓心路徑長=$2\pi \times 2r = 4\pi r$，而動圓 O_1 的圓周長 $=2\pi r$。

所以推得：動圓 O_1 滾動定圓 O 一周時，動圓 O_1 自轉=$\frac{4\pi r}{2\pi r}$=2 圈。

若固定圓圓 O 半徑 R，繞行滾動圓圓 O_1 半徑 r，動圓 O_1 繞著定圓 O 逆時針滾動。

動圓 O_1 滾動定圓 O 達 1 周時，動圓 O_1 的圓心 O_1 點行經軌跡路徑長=$\mathbf{2\pi \times (R + r)}$，而動圓 O_1 的圓周長=$2\pi r$ ，因此，O_1 點行經軌跡路徑長是動圓 O_1 圓周長的=$\frac{2\pi(R+r)}{2\pi r}$倍， 所以推得：動圓 O_1 滾動定圓 O 一周時，動圓 O_1 自轉=$\frac{R+r}{r}$圈。

三、以下，我們繼續探討圓 O_1 繞行圓 O，連心線與 x 軸的角度為θ，稱之為公轉θ，此時圓 O_1 自轉θ_1，其中θ_1 和θ的關係，以及動點 P 的軌跡參數式。

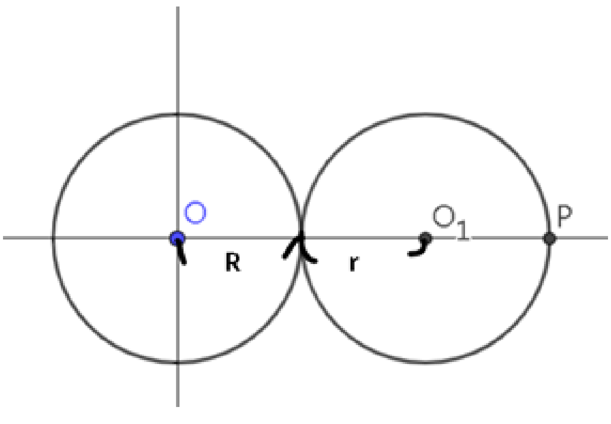


圖 4：圓 O 及圓 O_1 相切

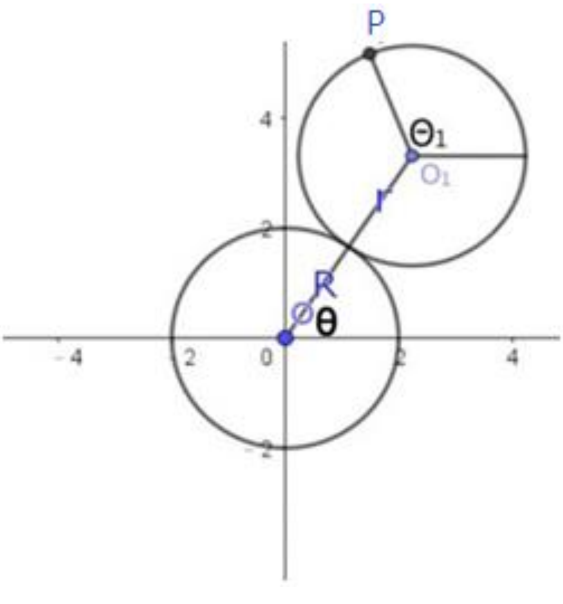


圖 5：圓 O_1 則公轉θ

如上圖 4 及圖 5 所示，圓 O_1 上的 P 點自轉θ_1，圓 O_1 則公轉θ，

首先假設固定圓圓 O 半徑為 R，繞行且滾動圓圓半徑為 r，

因為圓 O_1 滾動所經的距離=圓心 O_1 移動的路徑長，

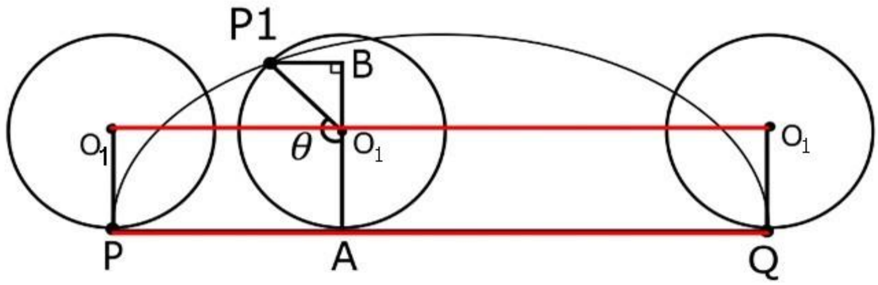


圖 6：圓 O_1 滾動所經的距離=圓心 O_1 移動的路徑長

所以 $\mathbf{2\pi r \times \frac{\theta 1}{360} = 2\pi(R+r) \times \frac{\theta}{360}}$

$\mathbf{r\theta_1 = (R+r)\theta}$

$\mathbf{\theta : \theta_1 = r : (R+r)}$

$\mathbf{\theta_1 = \frac{R+r}{r}\theta}$

我們先定義圓 O_1 上的動點 P，其起始位置如圖 4。

由於 **P 點的坐標與$\overrightarrow{OP}$的坐標表示法相同**，O_1點的坐標與$\overrightarrow{OO_1}$ 的坐標表示法相同，因此，我們可先求動點 O_1 的軌跡參數式，再藉由動點 P 與動點 O_1 的相對位置，即$\overrightarrow{O_1P}$，求得動點 P 的軌跡參數式。

即$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1P}$。

因為連心線$\overline{OO_1}$ =R+r，

所以動點 $\mathbf{O_1((R+r)\cos\theta, (R+r)\sin\theta)}$，

$\overrightarrow{OO_1}$ =O_1 坐標=$\mathbf{((R+r)\cos\theta, (R+r)\sin\theta)}$。

其次，假設 O 固定不動，動點 P 繞行 O 點逆時針滾動，圓 O_1 公轉θ，則圓 O_1 上的 P 點自轉θ_1，利用 $\theta_1=\frac{R+r}{r}\theta$的概念， 可推得 P 點以θ為變數的軌跡參數式。

於是考慮動點 P 與 O_1 的相對位置，

可得$\overrightarrow{O_1P}$$\mathbf{=(r\cos\theta_1, r\sin\theta_1)}$

$\mathbf{=(r\cos\frac{R+r}{r}\theta, r\sin\frac{R+r}{r}\theta)}$，

綜合上述

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1P}$$

$$=((R+r)\cos\theta,(R+r)\sin\theta)+(r\cos\theta_1,r\sin\theta_1)$$

$$=((R+r)\cos\theta+r\cos\theta_1,(R+r)\sin\theta+r\sin\theta_1)$$

$$=((R+r)\cos\theta+r\cos\frac{R+r}{r}\theta,(R+r)\sin\theta+r\sin\frac{R+r}{r}\theta)。$$

所以動點 **P 坐標=$((R+r)\cos\theta+r\cos\frac{R+r}{r}\theta,(R+r)\sin\theta+r\sin\frac{R+r}{r}\theta)$**。

倘若等圓的情況，則 R=r，

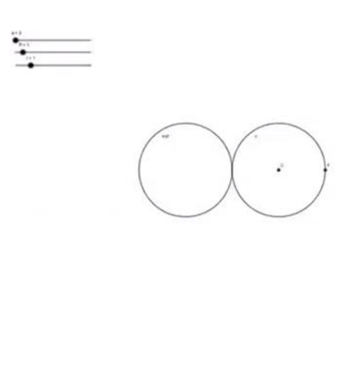
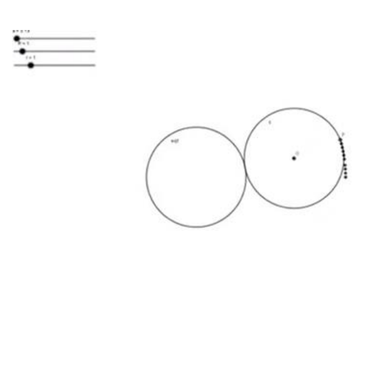
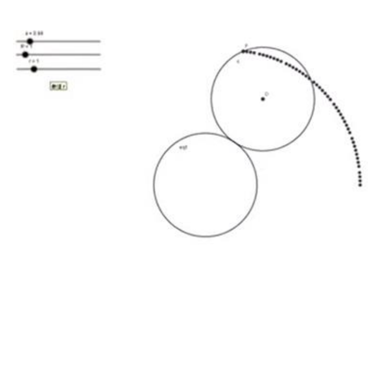
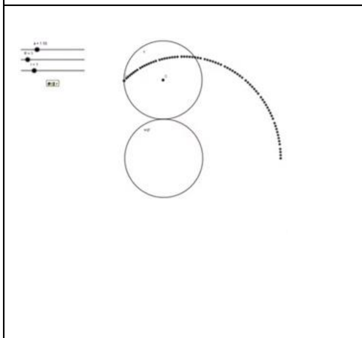
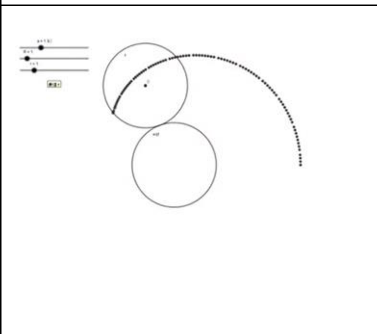
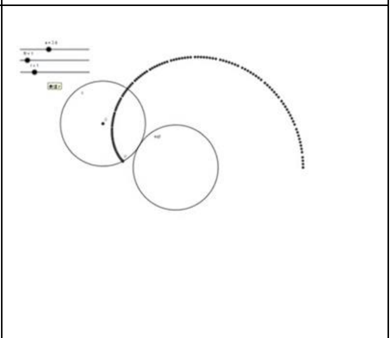
因此推得：

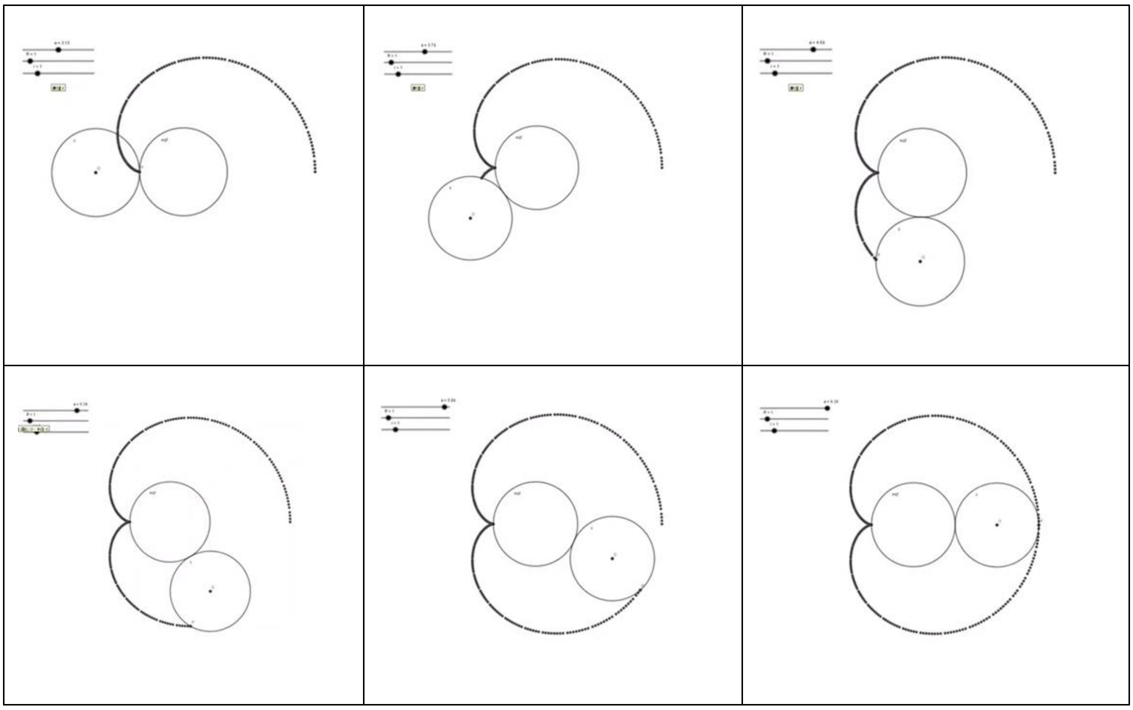
當兩圓半徑相等時，

動點 **P 軌跡參數式 $(2R\cos\theta+R\cos 2\theta, 2R\sin\theta+R\sin 2\theta)$**

並以軌跡圖的動畫截圖呈現如下表 2：

表格 2　圓 O_1 上動點 P 的軌跡截圖表

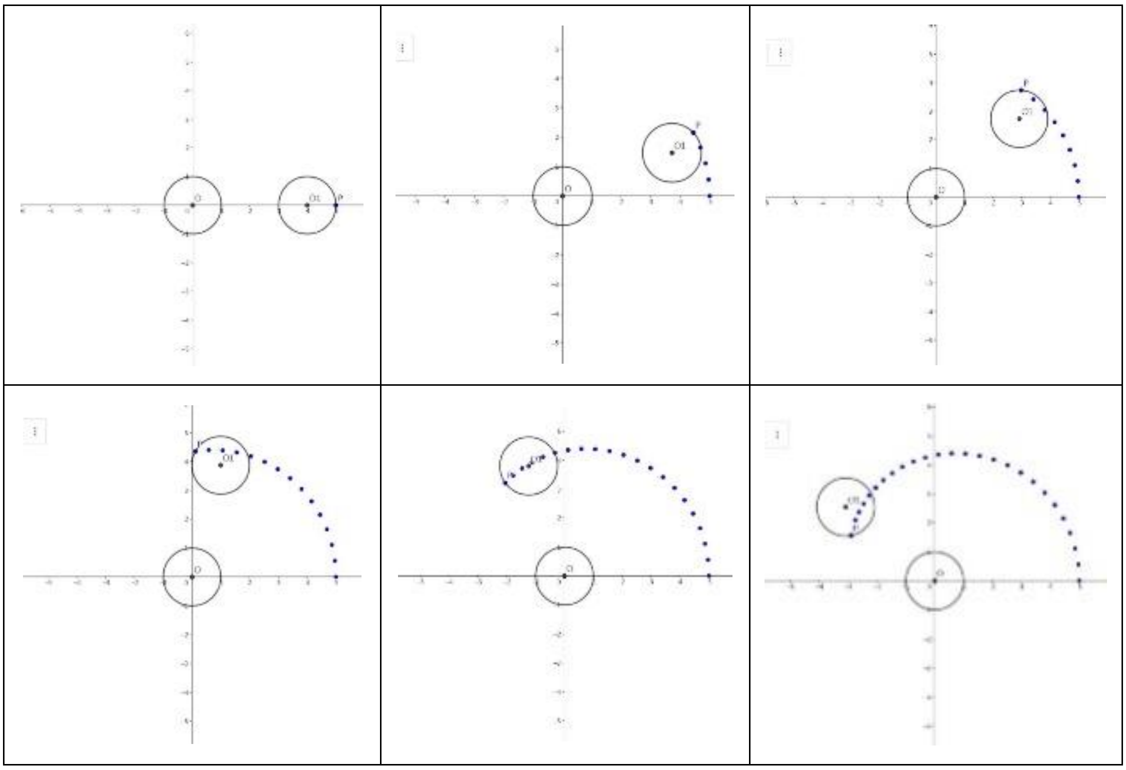
		
		

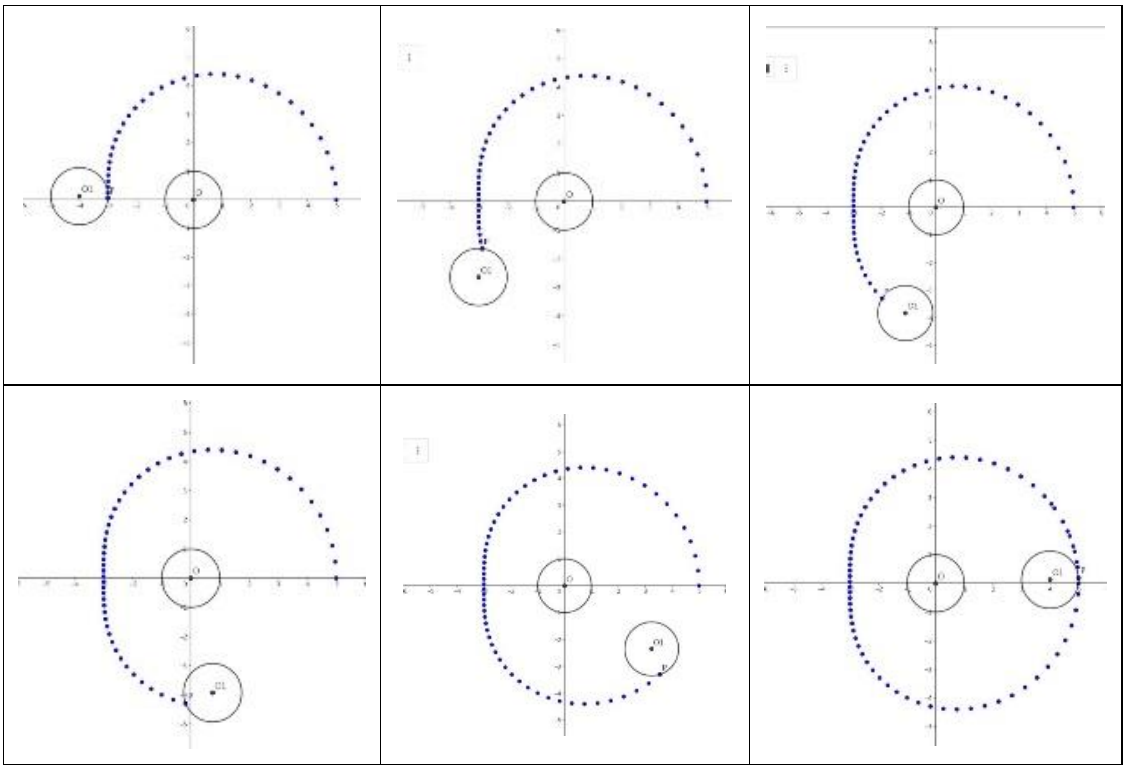


註：以上軌跡圖由左至右，由上而下依序呈現。

四、當動圓 O_1 與定圓 O 外離時，其中 θ_1 和 θ 有何關係，以及動點 P 的軌跡參數式，以下逐項討論。首先我們以動畫了解其大概樣式如下表 3 所示，再進行推演。

表格 3 圓 O 與圓 O_1 外離，P 點的軌跡截圖表





註：以上軌跡圖由左至右，由上而下依序呈現。

當動圓 O_1 與定圓 O 外離時，如圖 7 所示，因為最終須研究三圓的繞行與滾動關係，所以我們先選定兩等圓，半徑為 R，連心線=4R。

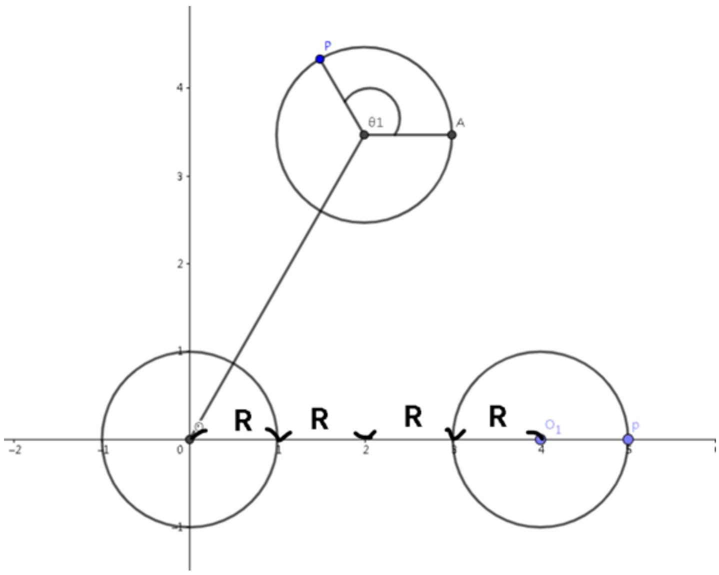


圖 7：動圓 O_1 與定圓 O 外離繞行圖

如圖，因為當兩圓外切時，$\theta_1=\frac{R+r}{r}\theta$，(其中固定圓半徑為 R，繞行滾動圓半徑為 r)

考慮目前狀況是兩圓外離，假設兩等圓半徑皆為 R，連心線段長為 4R，

因此可推得繞行半徑為 4R-R=3R，如下圖 8 所示：

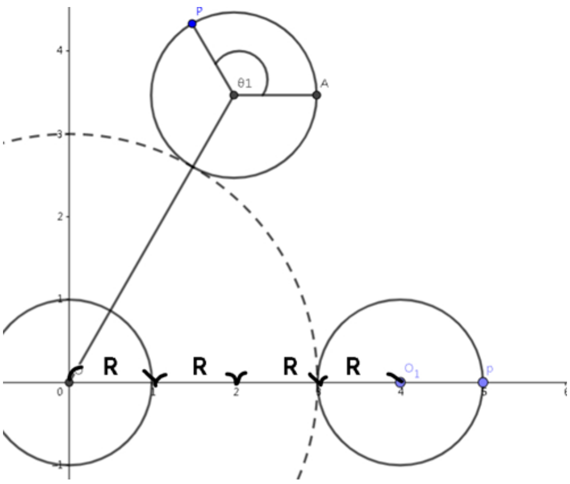


圖 8：動圓 O_1 與定圓 O 繞行虛線圖

因此，可以推得θ_1=$\frac{3R+R}{R}\theta = \frac{\text{連心線長}}{\text{自轉圓半徑}}$=$4\theta$，(其中固定圓半徑為 3R，繞行滾動圓半徑為 R)

連心線段長為 4R，

動點 O_1=$(4R\cos\theta, 4R\sin\theta)$

動點 P=$(4R\cos\theta + R\cos\theta_1, 4R\sin\theta + R\sin\theta_1)$

=$(4R\cos\theta + R\cos 4\theta, 4R\sin\theta + R\sin 4\theta)$

五、如圖 9 和圖 10 所示，圓 O_1 繞著圓 O 公轉並自轉，圓 O_2 沿著圓 O_1 滾動，我們先假設圓 O_1 繞到圓 O 的正上方，意即與 x 軸夾角 90 度時，進行模擬研究。

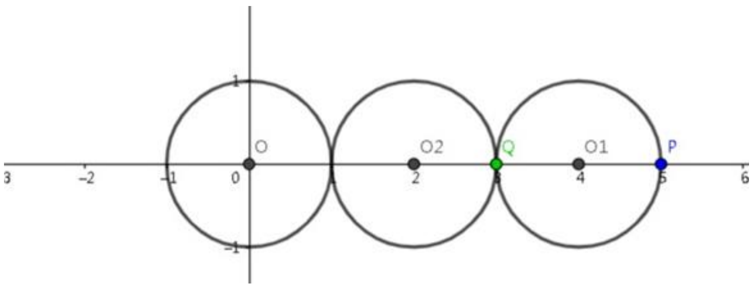


圖 9：圓 O 與圓 O_1 與圓 O_2 三圓位置圖

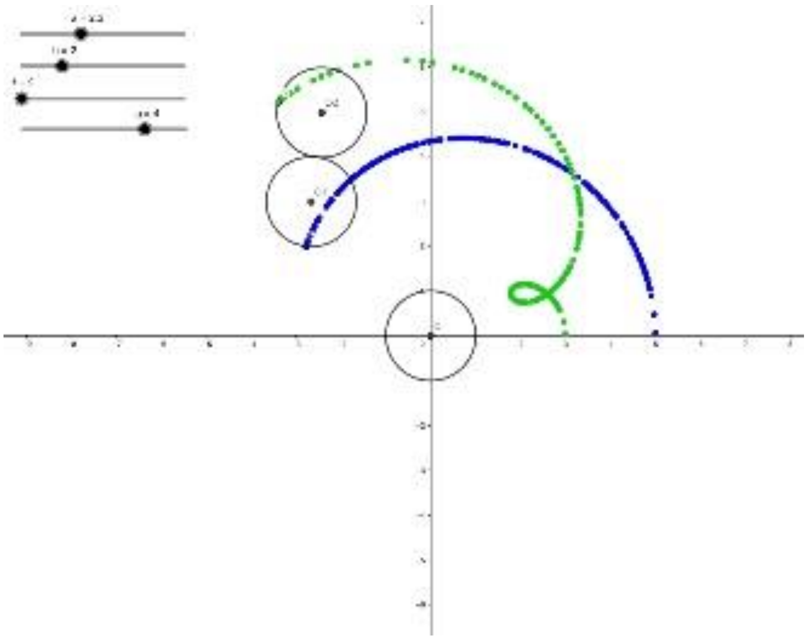


圖 10：圓 O_1 及圓 O_2 繞行圖

若點 O_1 移動$\frac{1}{4}$ 圓周，半徑 4R，點 O_1 軌跡移動 $2\pi(4R)\times\frac{1}{4}$=2πR，

因為點 O_2 移動速率與點 O_1 移動速率相等，

所以，點 O_2 軌跡移動=2πR，

我們可以利用相對運動的概念，假設圓 O_1 靜止不動，

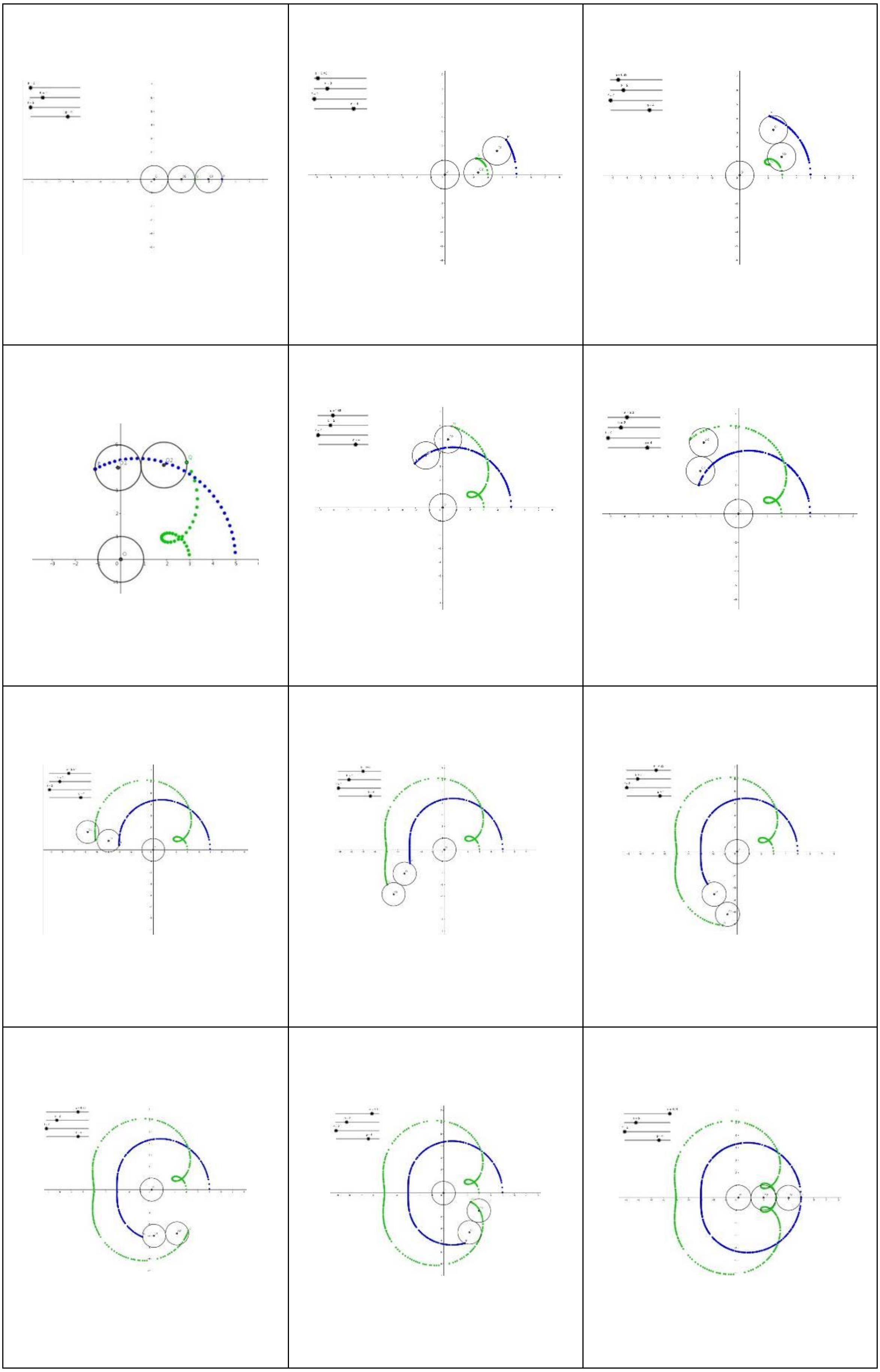
而圓 O_2 繞圓 O_1 一周，點 O_2 軌跡移動=$2\pi\times(R+R)=4\pi R$，

推得：圓 O_2 繞圓 O_1=$\frac{2\pi R}{4\pi R}$=$\frac{1}{2}$ 周

如圖 11 所示，當圓 O_1 由 0°公轉到 90°，即點 O_1 在 y 軸上，亦即原點的正上方時，

點 O_2 從原本在點 O_1 的左方滾動到圓 O_1 的右方，亦即圓 O_2 的圓心點 O_2 由-180°自轉到 0°，以下將其動畫截圖呈現於表 4。

表格 4　圓 O_1 繞著圓 O 公轉並自轉，圓 O_2 沿著圓 O_1 滾動截圖表



由上表 4，我們觀察動點 O_2 的軌跡。

同時定義圓 O_2 上的動點 Q，其起始位置如圖 9。因為：

圓 O_2 的圓心點 O_2，從原本在點 O_1 的-180°方向以θ的 $\frac{R+R}{R}$ 倍繞行圓 O_1，

$\overrightarrow{OO_2}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}$

$=(4R\cos\theta, 4R\sin\theta)+(2R\cos(-180+2\theta), 2R\sin(-180+2\theta))$

$=(4R\cos\theta-2R\cos 2\theta, 4R\sin\theta-2R\sin 2\theta)$

同時，由四、五：

$\theta_1=4\theta$，$\theta_2=2\theta_1$，推得 $\theta_2=8\theta$

$\overrightarrow{O_2Q}=(R\cos\theta_2, R\sin\theta_2)=(R\cos 8\theta, R\sin 8\theta)$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OO_2}+\overrightarrow{O_2Q}=(4R\cos\theta-2R\cos 2\theta+R\cos 8\theta, 4R\sin\theta-2R\sin 2\theta+R\sin 8\theta)$

由以上式子，我們代入θ=90 度，圓心 O_1 坐標 $(4R\cos\theta, 4R\sin\theta)$ 恰位於 y 軸上，坐標為(0，4R)，而圓心 O_2 坐標 $(4R\cos\theta-2R\cos 2\theta, 4R\sin\theta-2R\sin 2\theta)$ 位於圓心 O_1 的右方且距離為 2R，坐標(2R，4R)。

此時，再透過動畫驗證式子是否符合 90 度的函數值，發現剛好符合如下圖 11 所示。

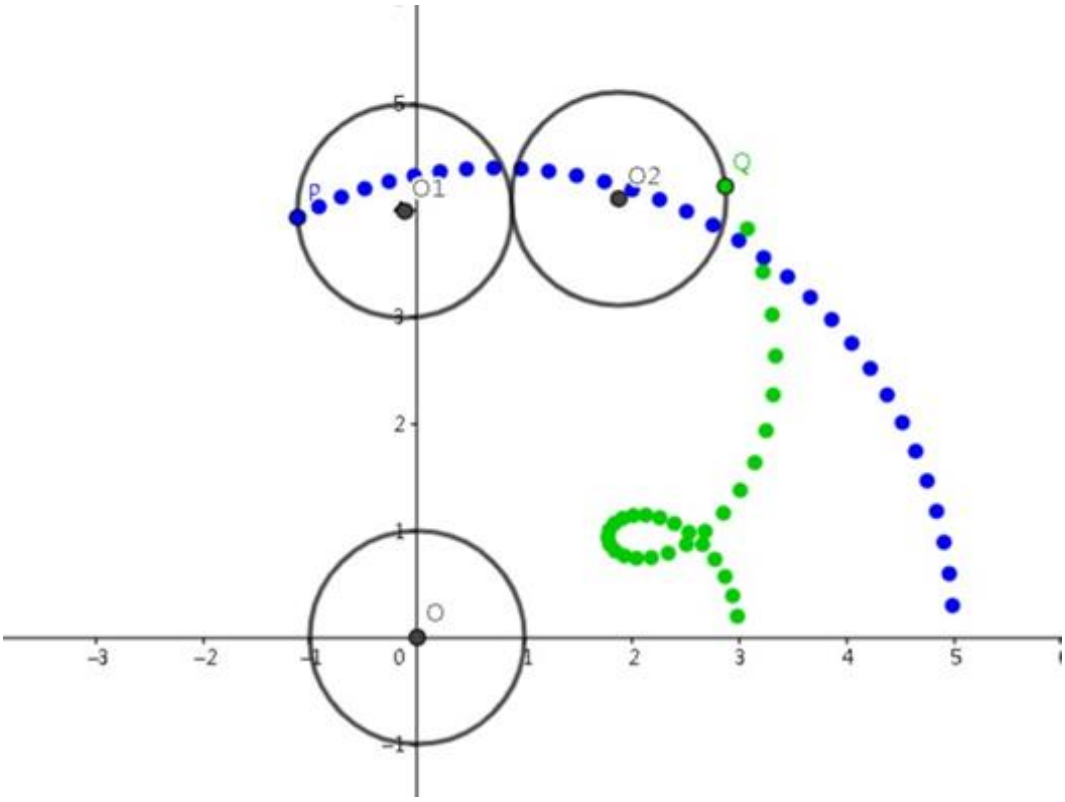


圖 11：圓心 O_1 恰位於 y 軸上

六、因為 P 點坐標=$(4R\cos\theta + R\cos 4\theta, 4R\sin\theta + R\sin 4\theta)$

Q 點坐標=$(4R\cos\theta - 2R\cos 2\theta + R\cos 8\theta, 4R\sin\theta - 2R\sin 2\theta + R\sin 8\theta)$

當 O、P、Q 三點在同一直線上，其坡度 OP 與坡度 OQ 相等，

因此我們可以下列式子表示：

$$\frac{4R\sin\theta + R\sin 4\theta}{4R\cos\theta + R\cos 4\theta} = \frac{4R\sin\theta - 2R\sin 2\theta + R\sin 8\theta}{4R\cos\theta - 2R\cos 2\theta + R\cos 8\theta}$$

消去R，

$$\frac{4\sin\theta + \sin 4\theta}{4\cos\theta + \cos 4\theta} = \frac{4\sin\theta - 2\sin 2\theta + \sin 8\theta}{4\cos\theta - 2\cos 2\theta + \cos 8\theta}$$

若上式等號成立時，欲解出方程式中的θ並非容易，且

動點 P $(4R\cos\theta + R\cos 4\theta, 4R\sin\theta + R\sin 4\theta)$

和動點 Q$(4R\cos\theta - 2R\cos 2\theta + R\cos 8\theta, 4R\sin\theta - 2R\sin 2\theta + R\sin 8\theta)$

皆不可能繞至原點，所以不可能為(0，0)，

亦即：

$$\frac{4\sin\theta + \sin 4\theta}{4\cos\theta + \cos 4\theta} \text{和} \frac{4\sin\theta - 2\sin 2\theta + \sin 8\theta}{4\cos\theta - 2\cos 2\theta + \cos 8\theta}$$

皆不可能為$\frac{0}{0}$，因此，若$\frac{4\sin\theta+\sin 4\theta}{4\cos\theta+\cos 4\theta}=\frac{4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta}{4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta}$等號成立時，

即

$$(4\sin\theta+\sin 4\theta)(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)-(4\cos\theta+\cos 4\theta)(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)=0$$

此時，我們可以判定**坡度 OP 與坡度 OQ 相等**。

即使$\frac{4\sin\theta+\sin 4\theta}{4\cos\theta+\cos 4\theta}$和$\frac{4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta}{4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta}$的分母皆為 0，

代表 P、Q 二點同在 y 軸上，這個方式也可以判斷 O、P、Q 三點在同一直線上。

於是，我們令

$$y_1=(4\sin\theta+\sin 4\theta)(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)-(4\cos\theta+\cos 4\theta)(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)$$

若 $y_1=0$，我們可判定坡度 OP 與坡度 OQ 相等，即 O、P、Q 三點共線。

我們藉由繪圖軟體繪出上式函數圖形，且如圖 12，其中橫軸的單位為π亦即 180 度。

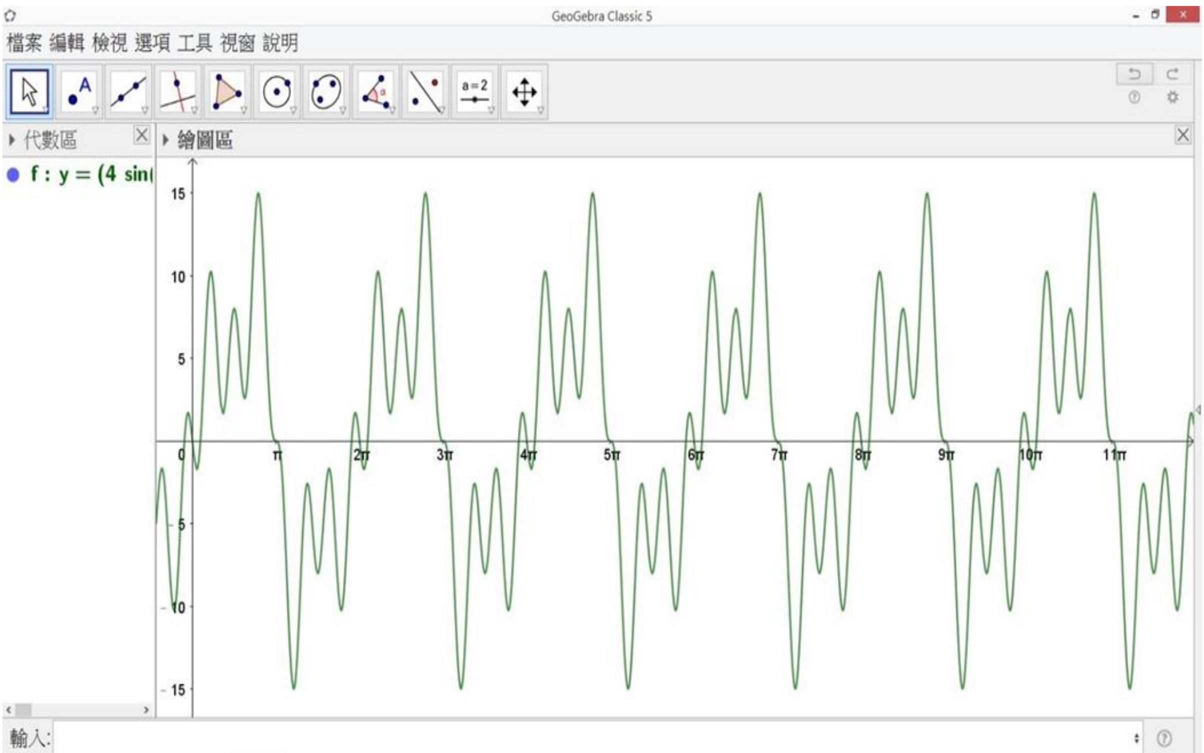


圖 12：函數圖形

由上圖 12 可知，當θ為π、2π、3π…時，函數圖形與 x 軸相交，即函數值為 0，

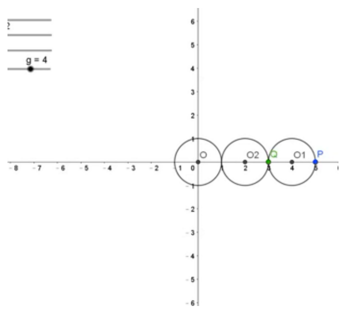
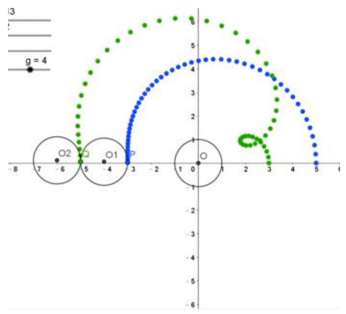
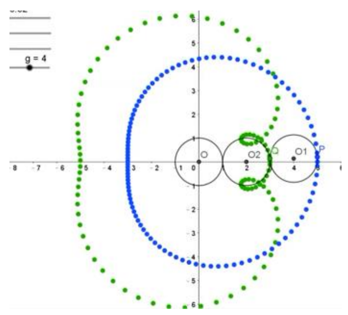
亦即

$\dfrac{4\sin\theta+\sin 4\theta}{4\cos\theta+\cos 4\theta}$和$\dfrac{4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta}{4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta}$相等，

因此坡度 OP 與坡度 OQ 相等，推得 O、P、Q 三點共線。

我們將動畫截圖呈現如下表 5：

表格 5 函數圖形與 x 軸相交截圖表

			………
θ = π	θ =2π	θ =3π	………

七、當$\overline{OP}$坡度與$\overline{OQ}$坡度相等，O、P、Q 三點在同一直線上，但三點的位置關係仍不能確定，因此我們可藉由$\overline{OP}$與$\overline{OQ}$的長度比較，判斷三點位置關係。因為本研究與天體的運行相關，因此我們以：

(一)O $_{日}$-Q $_{月}$-P $_{地}$定義，O、P、Q 三點在同一直線上，且 Q 點介於 O、P 二點之間。

(二) O $_{日}$-P $_{地}$-Q $_{月}$定義，O、P、Q 三點在同一直線上，且 P 點介於 O、Q 二點之間。

因此，若要比較 OP 與 OQ 的長度，可由以下式子判斷

因為 O 點坐標=(0,0)

P 點坐標=(4R$\cos\theta+R\cos 4\theta, 4R\sin\theta+R\sin 4\theta$)

Q 點坐標=($4R\cos\theta-2R\cos 2\theta+R\cos 8\theta$, $4R\sin\theta-2R\sin 2\theta+R\sin 8\theta$)

所以

$\overline{OP}$-$\overline{OQ}$=$\sqrt{(4R\cos\theta+R\cos 4\theta)^2+(4\,\mathrm{R}\sin\theta+R\sin 4\theta)^2}$

$-\sqrt{(4R\cos\theta-2R\cos 2\theta+R\cos 8\theta)^2+(4R\sin\theta-2R\sin 2\theta+R\sin 8\theta)^2}$

=R$\sqrt{(4\cos\theta+\cos 4\theta)^2+(4\sin\theta+\sin 4\theta)^2}$

$-$R$\sqrt{(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)^2+(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)^2}$

=R

$$\left(\sqrt{(4\cos\theta+\cos 4\theta)^2+(4\sin\theta+\sin 4\theta)^2}-\sqrt{(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)^2+(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)^2}\right)$$

於是，令 $y_2=\sqrt{(4\cos\theta+\cos 4\theta)^2+(4\sin\theta+\sin 4\theta)^2}$

$$-\sqrt{(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)^2+(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)^2}$$

(一)若 $y_2>0$，則$\overline{OP}>\overline{OQ}$，

(二)若 $y_2<0$，則$\overline{OP}<\overline{OQ}$。

(三)若 $y_2=0$，則$\overline{OP}=\overline{OQ}$。

因此我們利用電腦繪圖製作函數 y_2 如圖 13 所示：

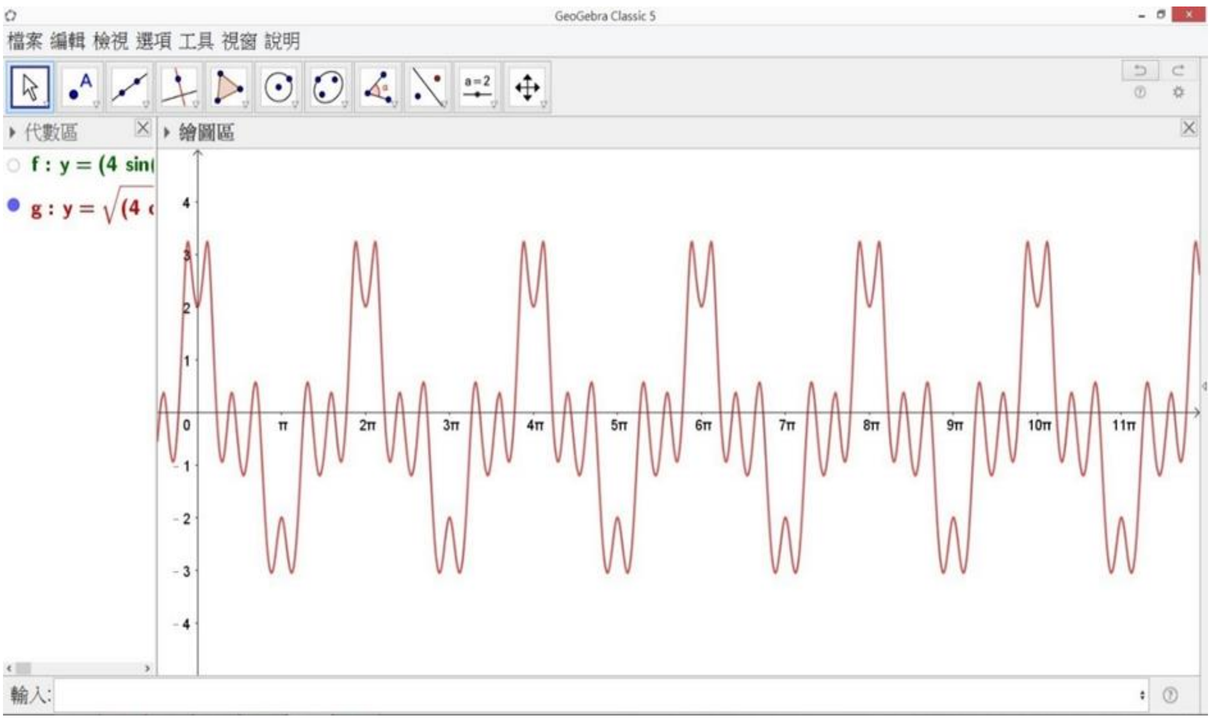


圖 13：函數 y_2 圖

由上圖 13 觀察，可推得：

若**圖形在 x 軸上方時 $y_2>0$**，則$\overline{OP}>\overline{OQ}$，

反之，若**圖形在 x 軸下方時 $y_2<0$**，則$\overline{OP}<\overline{OQ}$。

八、將圖 12 及圖 13 兩個函數圖形結合如圖 14 所示：

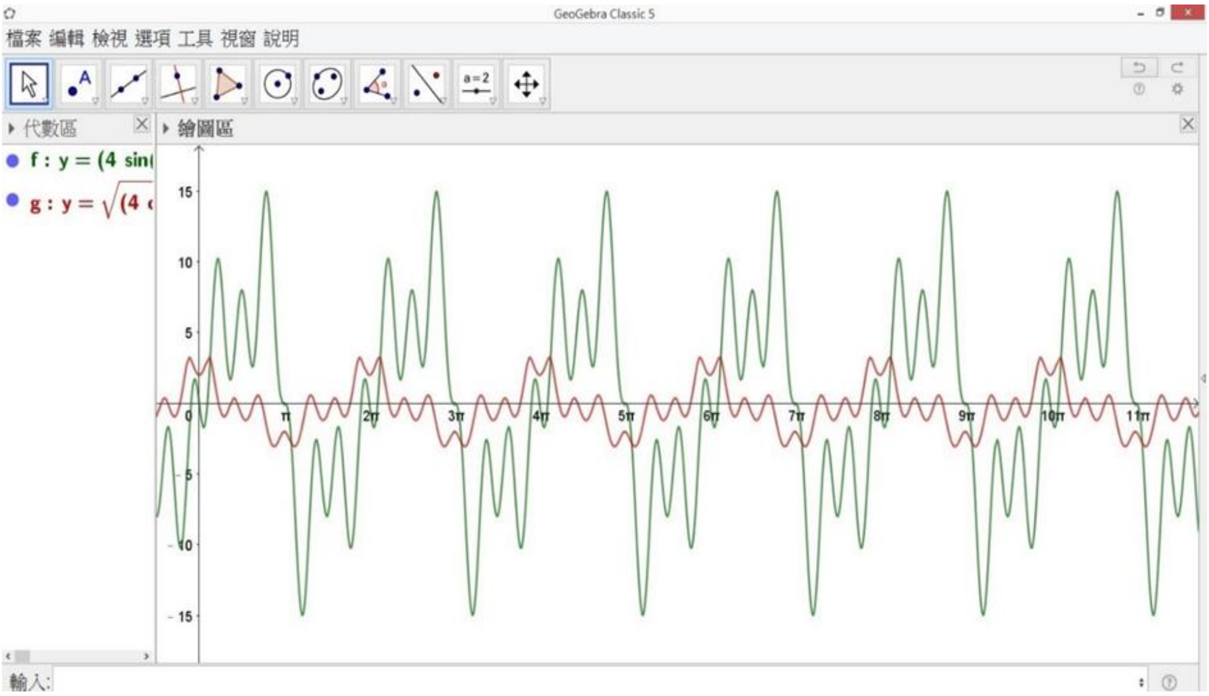


圖 14：兩函數結合圖

$y_1=$

$$(4\sin\theta+\sin 4\theta)(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)-(4\cos\theta+\cos 4\theta)(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)$$

若 $y_1=0$，則$m_{\overline{OP}}=m_{\overline{OQ}}$，則三點共線。

$$y_2=\sqrt{(4\cos\theta+\cos 4\theta)^2+(4\sin\theta+\sin 4\theta)^2}-\sqrt{(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)^2+(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)^2}$$

(一)若 $y_1=0$，$y_2>0$，則$\overline{OP}>\overline{OQ}$，三點共線，**位置關係為 O 日-Q 月-P 地**，

(二)若 $y_1=0$，$y_2<0$，則$\overline{OP}<\overline{OQ}$，三點共線，**位置關係為 O 日-P 地-Q 月**。

因此，我們可以由函數圖形，將三點共線的情況彙整如表 6：

表格 6　三點共線的情況彙整表

θ	π	2π	3π	4π
位置關係	O 日-P 地-Q 月	O 日-Q 月-P 地	O 日-P 地-Q 月	O 日-Q 月-P 地

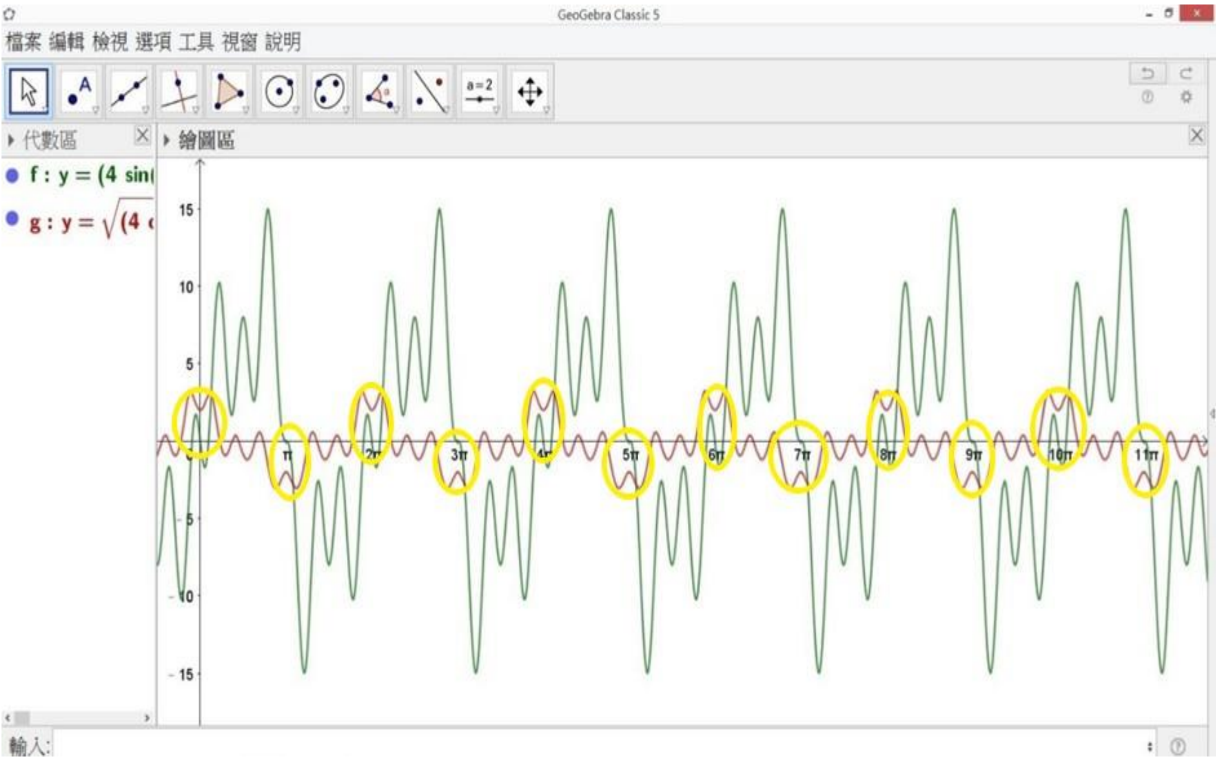


圖 15：y_1的函數圖形與 x 軸交點標記圖

如上圖，我們可由 y_1的函數圖形與 x 軸交點，得到 O、P、Q 三點共線時的θ，例如π、2π、3π、4π、⋯，再由 θ=π、2π、3π、4π、⋯，對應 y_2函數圖形的 y 坐標，若為正，則$\overline{OP}$>$\overline{OQ}$，三點共線，位置關係為 O 日-Q 月-P 地，

若為負，則$\overline{OP} < \overline{OQ}$，三點共線，位置關係為O 日-P 地-Q 月。

肆、研究成果

一、 當兩圓外切時，假設固定圓圓 O 半徑為 R，繞行且滾動圓圓 O_1半徑為 r，圓 O_1滾動定圓 O 一周時，動圓 O_1自轉=$\frac{R+r}{r}$圈。

二、 當兩圓外切時，假設固定圓圓 O 半徑為 R，繞行且滾動圓圓 O_1半徑為 r，當圓 O_1上的 P 點自轉θ_1， 則 圓 O_1公轉θ，且$\theta_1=\frac{R+r}{r}$ θ。

三、 當兩圓外切時，假設固定圓圓 O 半徑為 R，繞行且滾動圓圓 O_1半徑為 r， 圓 O_1公轉θ，動點 O_1坐標參數式=$((R+r)\cos\theta,(R+r)\sin\theta)$。

四、　當兩圓外切時，假設固定圓圓 O 半徑為 R，繞行且滾動圓圓 O_1 半徑為 r，圓 O_1 公轉 θ，

圓 O_1 上動點 P 坐標參數式=$\boldsymbol{((R+r)\cos\theta+r\cos\frac{R+r}{r}\theta,\ (R+r)\sin\theta+r\sin\frac{R+r}{r}\theta)}$ 。

五、　當動圓 O_1 與定圓 O 外離時，假設固定圓圓 O 的半徑為 R，繞行且滾動圓圓 O_1 半徑為 R，當圓 O_1 公轉 θ，圓 O_1 上的 P 點自轉 θ_1，連心線 4R，其中 $\theta_1=4\theta$。其中 圓 O_1 上動點 P 坐標參數式

=$(4R\cos\theta+R\cos\theta_1, 4R\sin\theta+R\sin\theta_1)$=$(4R\cos\theta+R\cos 4\theta, 4R\sin\theta+R\sin 4\theta)$。

六、　圓 O_1 繞著圓 O 公轉並自轉，圓 O_2 沿著圓 O_1 滾動，三圓的半徑皆為 R。動點 O_2 坐標參數式=$(4R\cos\theta-2R\cos 2\theta, 4R\sin\theta-2R\sin 2\theta)$。

七、　圓 O_1 繞著圓 O 公轉並自轉，圓 O_2 沿著圓 O_1 滾動，三圓的半徑皆為 R。圓 O_2 上動點 Q 坐標參數式=$\boldsymbol{(4R\cos\theta-2R\cos 2\theta+R\cos 8\theta, 4R\sin\theta-2R\sin 2\theta+R\sin 8\theta)}$。

八、　當

$$(4\sin\theta+\sin 4\theta)(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)-(4\cos\theta+\cos 4\theta)(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)$$

=0，則 O、P、Q 三點在同一直線上。

九、　令

y_1=

$$(4\sin\theta+\sin 4\theta)(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)-(4\cos\theta+\cos 4\theta)(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)$$

$$y_2=\sqrt{(4\cos\theta+\cos 4\theta)^2+(4\sin\theta+\sin 4\theta)^2}-\sqrt{(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)^2+(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)^2}$$

(一)若 $y_1=0$，$y_2>0$，則 $\overline{OP}>\overline{OQ}$，三點共線，位置關係為 $O_{日}$-$Q_{月}$-$P_{地}$，

(二)若 $y_1=0$，$y_2<0$，則 $\overline{OP}<\overline{OQ}$，三點共線，位置關係為 $O_{日}$-$P_{地}$-$Q_{月}$。

伍、討論

由以上研究成果，可歸納三圓半徑不同外離的情況如下：

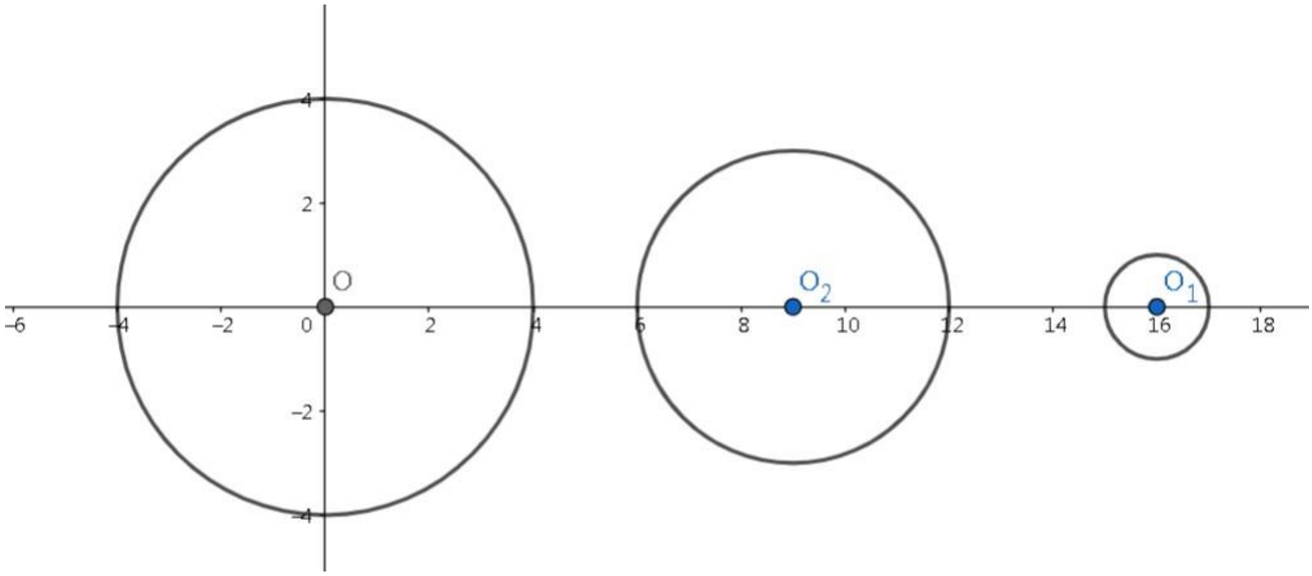


圖 16：三圓半徑不同外離位置關係圖

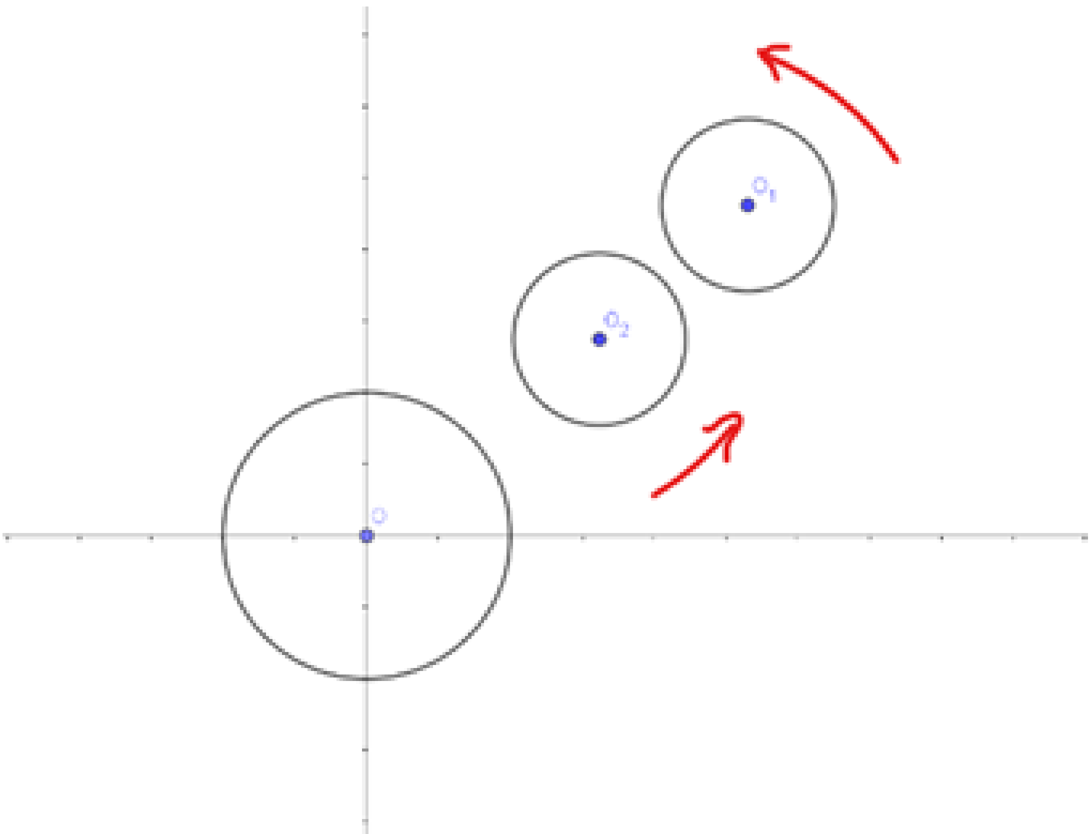


圖 17：三圓半徑不同外離繞行圖

假設這三圓中，圓 O 固定，半徑 aR，

圓 O_1 繞行圓 O 自轉且公轉，半徑 bR，

圓 O_2 繞行圓 O_1 自轉且公轉，半徑 R，

連心線$\overline{OO_1}$為 cR，

連心線$\overline{O_1O_2}$為 dR，

因此可得動點 O_1 坐標參數式=($\overline{OO_1}\cos\theta$, $\overline{OO_1}\sin\theta$)=(cR$\cos\theta$, cR$\sin\theta$)

當圓 O_1 公轉θ時，圓 O_1 自轉=$\frac{連心線長}{自轉圓半徑}\theta = \frac{\overline{OO_1}}{bR}\theta = \frac{cR}{bR}\theta = \frac{c}{b}\theta$

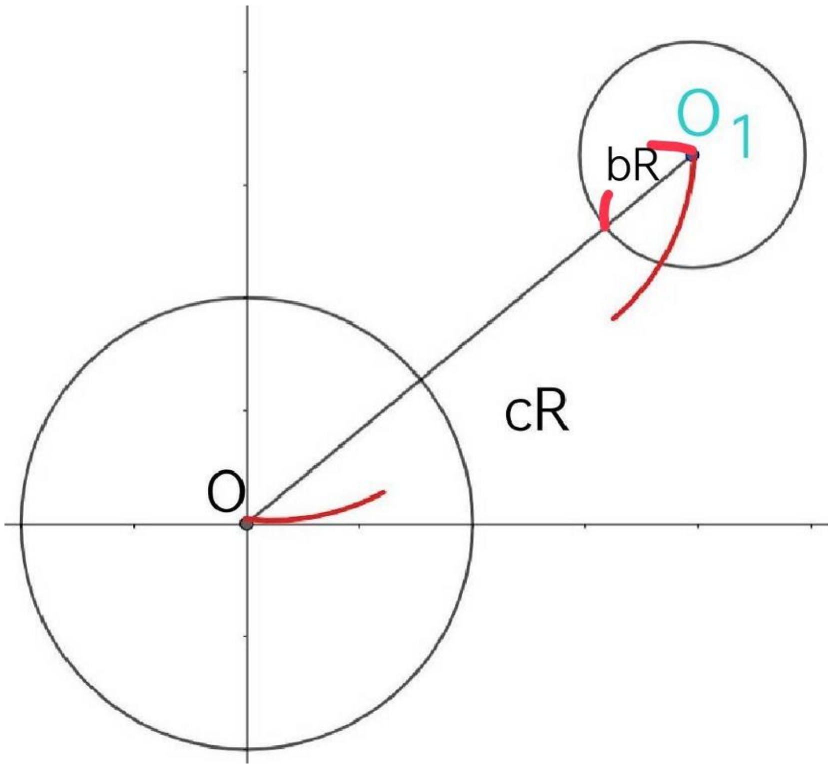


圖 18：圓 O_1 公轉θ時圖形

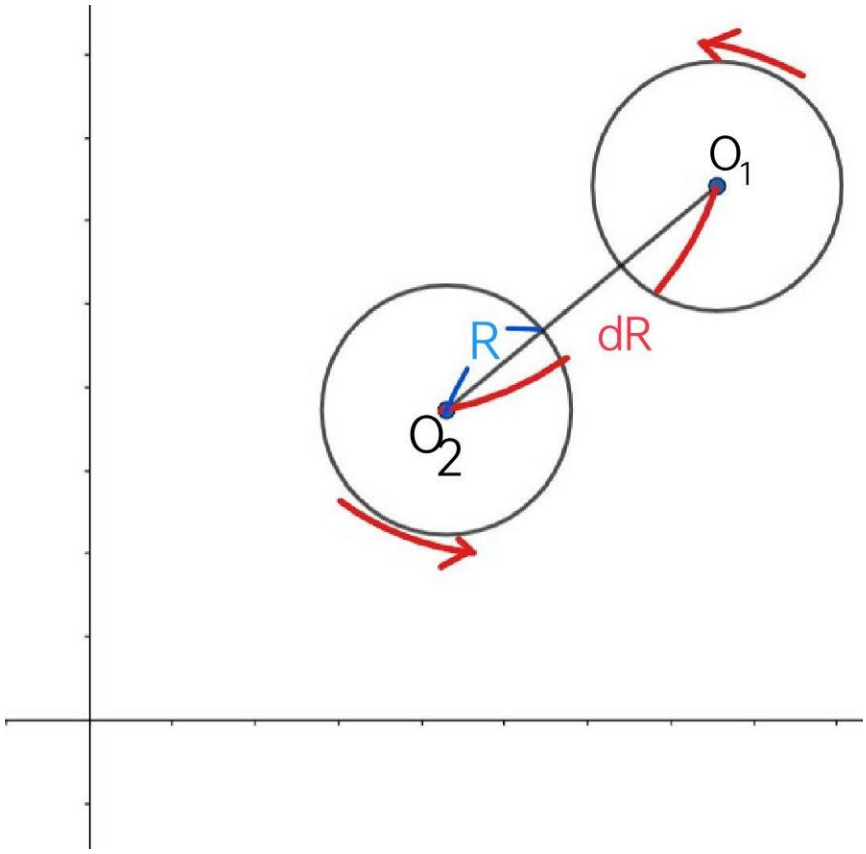


圖 19：圓 O_1 與圓 O_2 繞行圖

圓 O_1 上的動點 P 坐標參數式=($cR\cos\theta + bR\cos\theta_1$, $cR\sin\theta + bR\sin\theta_1$)

$$=(cR\cos\theta + bR\cos\tfrac{c}{b}\theta,\ cR\sin\theta + bR\sin\tfrac{c}{b}\theta)$$

因為$\overline{O_1O_2}$ =dR，當圓 O_1 轉 θ_1時，則圓 O_2 自轉θ_2=$\frac{dR}{R}\theta_1$=$d\theta_1$

所以動點 O_2 坐標參數式=$\overrightarrow{OO_1}$ +$\overrightarrow{O_1O_2}$ =($cR\cos\theta - \overline{O_1O_2}\cos d\theta_1$, $cR\sin\theta - \overline{O_1O_2}\sin d\theta_1$)

$$=(cR\cos\theta - dR\cos d\theta_1 ,\ cR\sin\theta - dR\sin d\theta_1)$$

圓 O_2 上的 Q 點坐標=$\overrightarrow{OO_2}$ +$\overrightarrow{O_2Q}$

$$=(cR\cos\theta - dR\cos d\theta_1 ,\ cR\sin\theta - dR\sin d\theta_1)+(R\cos\theta_2 ,\ R\sin\theta_2)$$

$$=(cR\cos\theta - dR\cos d\theta_1 + R\cos\theta_2 ,\ cR\sin\theta - dR\sin d\theta_1 + R\sin\theta_2)$$

$$=(cR\cos\theta - dR\cos\tfrac{cd}{b}\theta + R\cos\tfrac{cd}{b}\theta ,\ cR\sin\theta - dR\sin\tfrac{cd}{b}\theta + R\sin\tfrac{cd}{b}\theta)$$

於是推得：**P($\boldsymbol{cR\cos\theta + bR\cos\tfrac{c}{b}\theta,\ cR\sin\theta + bR\sin\tfrac{c}{b}\theta}$)**

$$Q(\mathrm{cR}\cos\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{dR}\cos\frac{\boldsymbol{cd}}{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{\theta}+\mathrm{R}\cos\frac{\boldsymbol{cd}}{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{\theta}\,,\mathrm{cR}\sin\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{dR}\sin\frac{\boldsymbol{cd}}{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{R}\sin\frac{\boldsymbol{cd}}{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{\theta})$$

因此，若要求坡度$\overline{OP}$=坡度$\overline{OQ}$時的θ 值，可以仿照先前方式，

$$\text{令 } y_1=(\mathrm{cR}\sin\theta+bR\sin\frac{c}{b}\theta)(\mathrm{cR}\cos\theta-dR\cos\frac{cd}{b}\theta+\mathrm{R}\cos\frac{cd}{b}\theta)$$

$$-(\mathrm{cR}\cos\theta+bR\cos\frac{c}{b}\theta)(\mathrm{cR}\sin\theta-dR\sin\frac{cd}{b}\theta+R\sin\frac{cd}{b}\theta)$$

在將函數式輸入電腦程式以求得θ 值。當然，我們也可以令

$$y_2=\sqrt{\left(\mathrm{c}\cos\theta+b\cos\frac{c}{b}\theta\right)^2+\left(\mathrm{c}\sin\theta+b\sin\frac{c}{b}\theta\right)^2}$$

$$-\sqrt{\left(\mathrm{c}\cos\theta-d\cos\frac{cd}{b}\theta+\cos\frac{cd}{b}\theta\right)^2+\left(\mathrm{c}\sin\theta-d\sin\frac{cd}{b}\theta+\sin\frac{cd}{b}\theta\right)^2}$$

仿照前述的方式，將函數式輸入電腦繪圖程式，判斷 O、P、Q 三點的位置關係。

在此，特別說明，整個參數式中，僅有θ是變數，其他 a, b, c, d 代表常數。並且數據 a 無出現在數據的結論中。

例如：我們可以查出太陽半徑 70 萬公里，地球半徑 6371 公里，月球半徑 1738 公里，

太陽到地球的距離為 1.5 億公里，地球到月球的距離為 384400 公里，再將月球半徑設為 R，其他分別設為 aR, bR, cR, dR,而 a, b, c, d 就是已知的常數。

陸、結論

本研究是針對平面上一定圓、二動圓的關係作討論。事實上，星體的運行是存在於空間中，且相關的變數非常多，例如星球之間的距離、星球的質量直接影響了引力與轉速；其次星球的運轉是傾斜某個角度自轉，且運行的軌道是類似於橢圓，因此我們的地球上各個角落才有可能接受到日照和月光，晝夜不斷的輪迴。因此，若要進行更進階的研究，除了要繼續扎實的學習數學，也要充實物理及天文科學，才能理解大自然的奧妙，創造人類的文明和福祉。

柒、參考文獻資料

1. 翰林版高中數學 3A， 游森棚主編，2021。
2. 93 年數學乙指定考科試題，大考中心 2004。
3. 硬幣悖論（英語：coin rotation paradox）是一種反直覺的現象，即當一枚硬幣繞著另一枚相同大小的硬幣的邊緣滾動時，移動的硬幣在繞著靜止的硬幣一圈後完成兩個完整的轉動。
4. 維基百科
5. 地球科學 OOO
6. 天體運行論(復刻精裝版)(二版) - 博客來

【評語】030416

一個有趣的圓繞另一個圓轉動問題，在相切相離的情形之下得到一些通式，再加入第三圓繞第二圓轉動，第一圓的圓心與第二圓的 P 點及第三圓上一點 Q 在何時會共線的問題作了分析，作者將恆星、行星、衛星間之關係作了一些說明，是一個有意思的結果，對於任意給定的圓半徑與連心線長，可再多些著墨，探討更多些的問題。

作品海報

天文密碼

摘要

本研究主要在探討平面中三圓的關係，其中圓O固定不動，圓O_1以逆時針方向，滾動且繞行圓O；而圓O_2同時也以逆時針方向，滾動且繞行動圓圓O_1。其中圓O_1與圓O_2上各自有一動點P、Q。而三圓一開始的關係為圓O_2分別與圓O和圓O_1外切，且O 、Q、P三點成一直線，Q點介於O 、P兩點之間。當$\overline{OO_1}$與x軸夾角為θ時，首先以繪圖軟體了解動點的軌跡；其次再以三角比的概念求得P、Q兩點的坐標；最後再以電腦繪圖軟體，製作當三點共線時求其θ值，並且藉由函數圖形，了解三點之中何者介於其他兩點之間。本研究由原本的三圓外切的情形，邁向討論三圓外離的情況，猶如恆星、行星、衛星三者的運行，進而以各圓半徑、兩圓連心距、繞行角度為變數，歸納出合理的數學式，以利日後進行更廣泛的研究。

壹、前言

一、研究動機

這個學期我們學習了「三角比」，數學老師提出一個升大學考試的題目，它是一個有關摩天輪轉動的題目，其所求為「摩天輪運轉時間」與「車廂離地面高度」的函數關係。此外，在三年級學兩圓關係時，老師又提了一個題目，就是一個十元硬幣，滾動繞行另一個十元硬幣，當繞行一周的時候，求繞轉硬幣自轉幾周。於是我們就把這兩個問題聯想在一起，設計了一個題目。「當一個圓滾動繞行另一個固定不動的圓的時候，繞行圓周上的動點與固定圓圓心，其距離與繞行角度的函數關係式」。後來又衍生了一些想法，類似恆星、行星、衛星運行的概念，因而展開了一連串的探究之旅。

二、研究目的

當一個動圓滾動繞行另一個定圓的時候，若動圓半徑：定圓半徑=m：n，探討圓上動點的軌跡作圖法則及基本性質。此外，若兩圓同時是動圓且滾動時，探討兩圓圓周上各自動點的相對位置。分為以下三大主題：

第一：導出動圓O_1上的P點，其繞行固定圓O的軌跡參數式。
第二：導出動圓O_2上的Q點，其繞行動圓O_1的軌跡參數式。
第三：當O、P、Q三點共線時，θ的解即稱為「天文密碼」，探討此狀況在天文上的意義。

貳、研究器材與設備

硬幣、繪圖軟體。

叁、研究過程及方法

一、首先我們找出93年的大學考試題目，試著去了解題意從中體會有關三角比的應用。

遊樂區有一個摩天輪，中心軸高22公尺，直徑40公尺，逆時針方向運轉一圈需費時15分鐘。當摩天輪開始運轉時，阿美恰坐在離地最近的位置上，x分鐘後，阿美離地的高度可表為 y=asin(bx+c)+d，a>0且b>0。試問下列選項有哪些是正確的？(多選題)________【93年指考數乙(補)】

(1)a=20 (2) a=40 (3) b=$\frac{2\pi}{15}$ (4) c=0 (5) d=2

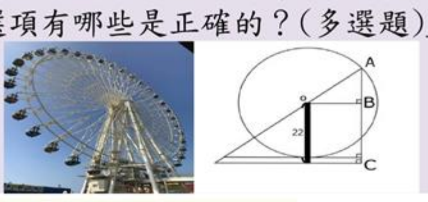


圖1：摩天輪與摩天輪相對位置示意圖

由題意： 摩天輪一分鐘轉$360°\div 15=24°$ 假設摩天輪轉了x分鐘，因此轉$24x°$

因為**高度** $y=\overline{AB}+\overline{BC}$ $=r\sin(24x-90)+22$ $=20\sin(24x-90)+22$ **所以 a=20, b=24, c=-90, d=22。**

以這個題目而言，變因「時間」以x表示，乘以每分鐘轉的角度b，再減去90度，即為「摩天輪車廂中心與轉軸中心連線段」和y軸負向的夾角。由此正弦函數值乘以繞行半徑，可得車廂中心與轉軸中心的相對高度。當然，我們也可以餘弦函數值來推得水平的相對位置，即其x坐標。

二、數學老師提供另一個問題，題意如下：

有兩個10圓硬幣緊靠在一起，其中一個不動，另一個繞著不動的那一個硬幣圓周滾動一圈，請問滾動的那個硬幣自轉幾圈？

圖2：右方硬幣滾動繞行左方固定不動硬幣

一般來說，我們稱硬幣轉動的問題為硬幣悖論，所謂「悖論」就是一般情況很容易誤解。面對這個問題，我們很可能輕意的回答：「1圈」，原因是因為我們覺得兩個硬幣的圓周長相等。因此我們要實際來研究兩個半經相等的兩個圓，一個固定不動，另一個則繞著它的圓周滾動一周，則滾動的圓會自轉幾圈。

事實上，這個問題並沒有這麼單純，如圖1所示，我們先假設圓O由左滾動至右，由以下的軌跡圖所示，動點由P移動至Q，即圓O自轉一圈。

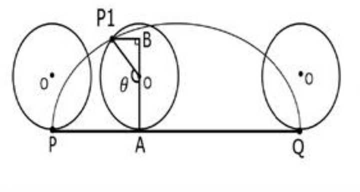


圖3：圓O滾動圖

當圓O在直線上的切點P, 若沿著直線向前滾動$\overline{AP}$距離，旋轉θ度，此時P點到達P_1點, A為切點， $\angle P_1OA=\theta$度。

$\widehat{AP_1}=\overline{AP}=2\pi r\times\frac{\theta}{360}=\frac{\theta\pi r}{180}$，其次在$\Delta P_1BO$中,$\angle P_1OB=180-\theta$,$\angle B=90°$, $\overline{OB}=r\cos(180-\theta)°=-r\cos\theta°$, $\overline{BP_1}=r\sin(180-\theta)°=r\sin\theta°$,

設P點坐標(0,0) ,則$P_1=(\frac{\theta\pi r}{180}-r\sin\theta, r-r\cos\theta)$,當圓O滾動一圈和直線相切於Q點時，$\theta=360°$，此時，Q點坐標為$(\frac{360\pi r}{180}-r\sin 360°, r-r\cos 360°)=(2\pi r, 0)$，所以$\overline{PQ}$=圓心O所走的距離=圓O的周長=$2\pi r$ ，因此推得：**圓O滾動所經的距離心移=圓動的路徑長**。

於是，我們先以電腦繪製了一動圓繞行另一固定圓如表1所示，對其圓心的軌跡圖進行初步了解。

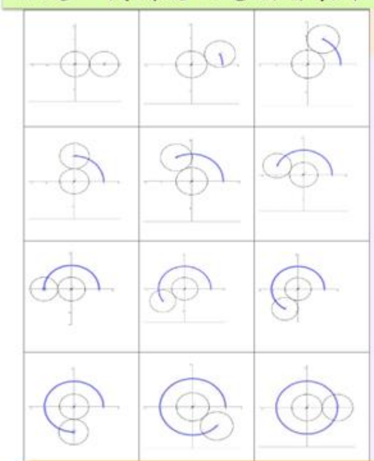


表1：圓O_1繞行圓O時，圓心O_1點的軌跡圖表

如左表1所示，定圓O的半徑=動圓O_1的半徑=r，動圓O_1繞著定圓O逆時針滾動，當動圓O_1滾動定圓O達1周時，動圓O_1的圓心路徑長=$2\pi\times 2r=4\pi r$，而動圓O_1的圓周長=$2\pi r$。

所以推得：動圓O_1滾動定圓O一周時，動圓O_1自轉=$\frac{4\pi r}{2\pi r}$=2圈。

若固定圓圓O半徑R，繞行滾動圓圓O_1半徑r，動圓O_1繞著定圓O逆時針滾動。

動圓O_1滾動定圓O達1周時，動圓O_1的圓心O_1點行經軌跡路徑長=$2\pi\times(R+r)$，而動圓O_1的圓周長=$2\pi r$ ，因此，O_1點行經軌跡路徑長是動圓O_1圓周長的=$\frac{2\pi(R+r)}{2\pi r}$倍， 所以推得：動圓O_1滾動定圓O一周時，動圓O_1自轉=$\frac{R+r}{r}$圈。

三、我們繼續探討圓O1繞行圓O，連心線與x軸的角度為θ，稱之為公轉θ，此時圓O1自轉θ1，其中θ1和θ的關係，以及動點P的軌跡參數式。

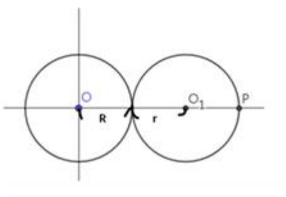


圖4：圓O及圓01相切

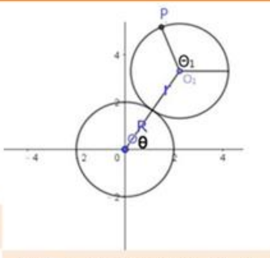


圖5：圓01則公轉θ

如左圖4及圖5所示，圓01上的P點自轉θ1，圓01則公轉θ，首先假設固定圓圓O半徑為R，繞行且滾動圓，圓半徑為r，因為圓01滾動所經的距離=圓心01移動的路徑長，

所以 $2\pi r\times\frac{\theta_1}{360}=2\pi(R+r)\times\frac{\theta}{360}$ ， $r\theta_1=(R+r)\theta$ ， $\theta:\theta_1=r:(R+r)$ ，$\theta_1=\frac{R+r}{r}\theta$

我們先定義圓O_1上的動點P，其起始位置如圖4。

由於**P點的坐標與$\overrightarrow{OP}$的坐標表示法相同**，O_1點的坐標與$\overrightarrow{OO_1}$ 的坐標表示法相同，因此，我們可先求動點O_1的軌跡參數式，再藉由動點P與動點O_1的相對位置，即$\overrightarrow{O_1P}$，求得動點P的軌跡參數式。

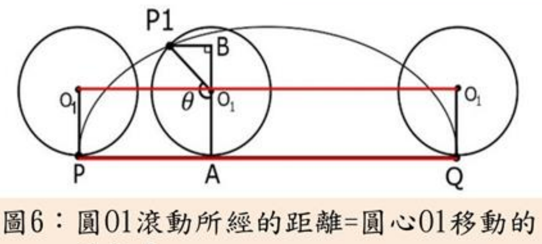


圖6：圓01滾動所經的距離=圓心01移動的路徑長

即$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1P}$。 因為連心線$\overline{OO_1}$=R+r， 所以動點$O_1((R+r)\cos\theta,(R+r)\sin\theta)$，

$\overrightarrow{OO_1}$=O_1坐標=$((R+r)\cos\theta,(R+r)\sin\theta)$。

其次，假設O固定不動，動點P繞行O點逆時針滾動，圓O_1公轉θ，則圓O_1上的P點自轉θ_1，利用 $\theta_1=\frac{R+r}{r}\theta$ 的概念， 可推得P點以θ為變數的軌跡參數式。

於是考慮動點P與O_1的相對位置，可得$\overrightarrow{O_1P}=(r\cos\theta_1, r\sin\theta_1)$ $=(r\cos\frac{R+r}{r}\theta, r\sin\frac{R+r}{r}\theta)$，

綜合上述

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1P}$ $=((R+r)\cos\theta, (R+r)\sin\theta)+(r\cos\theta_1, r\sin\theta_1)=((R+r)\cos\theta+r\cos\theta_1, (R+r)\sin\theta+r\sin\theta_1)$

$=((R+r)\cos\theta+r\cos\frac{R+r}{r}\theta, (R+r)\sin\theta+r\sin\frac{R+r}{r}\theta)$。所以動點**P坐標=$((R+r)\cos\theta+r\cos\frac{R+r}{r}\theta, (R+r)\sin\theta+r\sin\frac{R+r}{r}\theta)$** 。

➢ 倘若等圓的情況，則R=r，因此推得：當兩圓半徑相等時，動點**P軌跡參數式** $(2R\cos\theta + R\cos 2\theta\ ,\ 2R\sin\theta + R\sin 2\theta)$，並以軌跡圖的動畫截圖呈現如下表2：

表2：圓O_1上動點P的軌跡截圖表

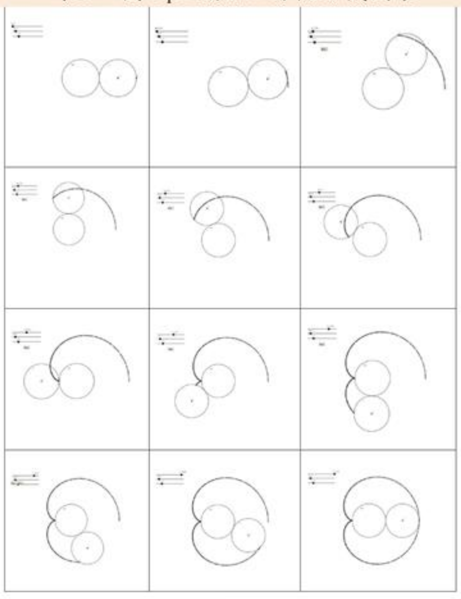


表3：圓O與圓O_1外離，P點的軌跡截圖表

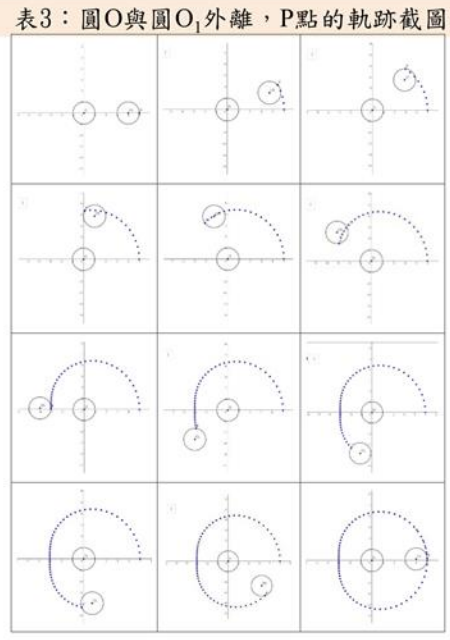
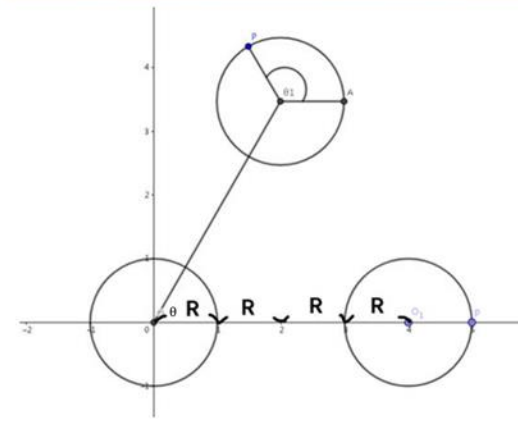


圖7：動圓O_1與定圓O外離繞行圖



四、當動圓O1與定圓O外離時，其中θ1和θ有何關係，以及動點P的軌跡參數式，以下逐項討論。

首先我們以動畫了解其大概樣式如上表3所示，再進行推演。

當動圓O_1與定圓O外離時，如上圖7所示，因為最終須研究三圓的繞行與滾動關係，所以我們先選定兩等圓，半徑為R，連心線=4R。

如圖7，因為當兩圓外切時，$\theta_1=\frac{R+r}{r}\theta$，(其中固定圓半徑為R，繞行滾動圓半徑為r)，考慮目前狀況是兩圓外離，假設兩等圓半徑皆為R，連心線段長為4R，因此可推得繞行半徑為4R-R=3R，如下圖8所示：

圖8：動圓O_1與定圓O繞行虛線圖

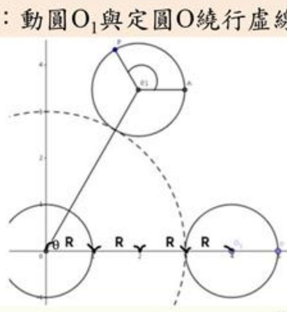


圖9：圓O與圓O_1與圓O_2三圓位置圖

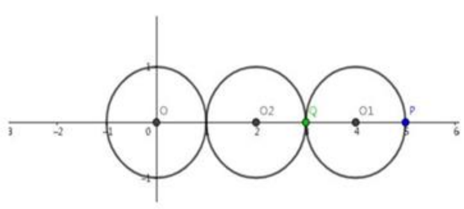


圖10：圓O與圓O_1與圓O_2三圓位置圖

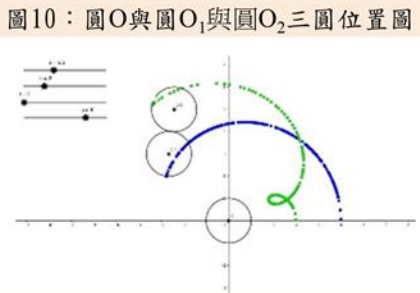
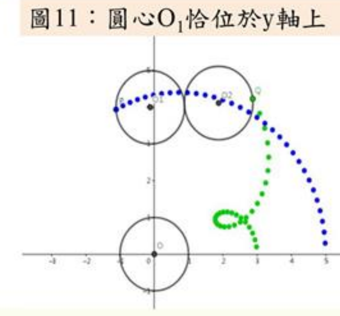


圖11：圓心O_1恰位於y軸上



因此，可以推得$\theta_1=\frac{3R+R}{R}\theta=\frac{\text{連心線長}}{\text{自轉圓半徑}}=4\theta$，(其中固定圓半徑為3R，繞行滾動圓半徑為R)，連心線段長為4R，

動點 $O_1=(4R\cos\theta, 4R\sin\theta)$ ，動點 $P=(4R\cos\theta + R\cos\theta_1\ ,4R\sin\theta + R\sin\theta_1\ ) =(4R\cos 4\theta\ldots)$

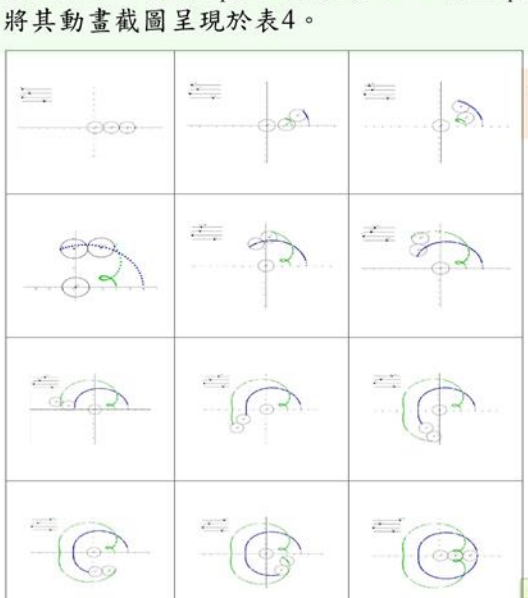
動點 $O_1=(4R\cos\theta, 4R\sin\theta)$ ，動點 $P=(4R\cos\theta + R\cos\theta_1, 4R\sin\theta + R\sin\theta_1) =(4R\cos\theta + R\cos 4\theta, 4R\sin\theta + R\sin 4\theta)$

五、如上圖9和圖10所示，圓O1繞著圓O公轉並自轉，圓O2沿著圓O1滾動，我們先假設圓O1繞到圓O的正上方，意即與x軸夾角90度時，進行模擬研究。

若點O_1移動$\frac{1}{4}$ 圓周，半徑4R，點O_1軌跡移動$2\pi(4R)\times\frac{1}{4}=2\pi R$，因為點$O_2$移動速率與點$O_1$移動速率相等，所以點$O_2$軌跡移動=2πR，我們可以利用相對運動的概念，假設圓O_1靜止不動，而圓O_2繞圓 O_1一周，點O_2軌跡移動$=2\pi\times(R+R)=4\pi R$，

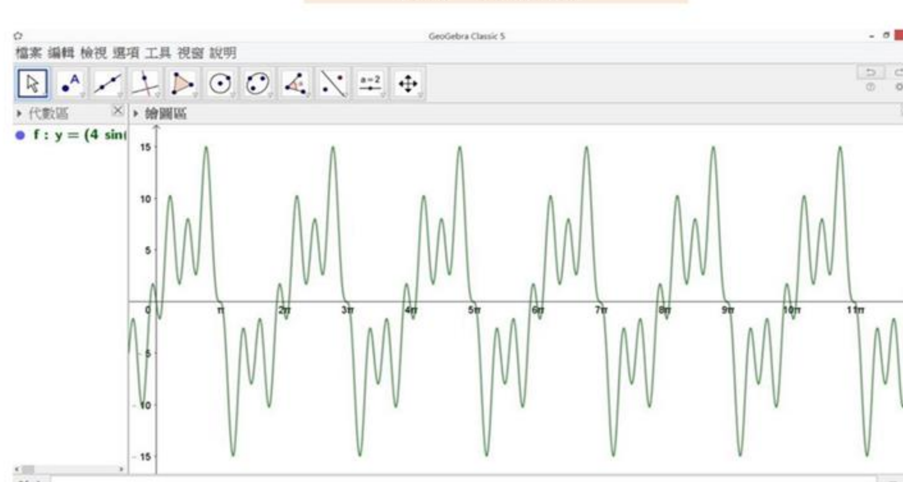
推得：圓O_2 繞圓 $O_1=\frac{2\pi R}{4\pi R}=\frac{1}{2}$ 周。

如下圖11所示，當圓O_1由0°公轉到90°，即點O_1在y軸上，亦即原點的正上方時，點O_2從原本在點O_1的左方滾動到圓O_1的右方，亦即圓O_2的圓心點O_2由-180°自轉到0°。以下將其動畫截圖呈現於表4。



表格4　圓O_1繞著圓O公轉並自轉，圓O_2沿著圓O_1滾動截圖表

圖12：函數圖形



由表4，我們觀察動點O_2的軌跡。

同時定義圓O_2上的動點Q，其起始位置如圖9。因為：圓 O_2的圓心點O_2，從原本在點O_1的-180°方向以θ的$\frac{R+R}{R}$倍繞行圓O_1，$\overrightarrow{OO_2}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}$

$=(4R\cos\theta\ ,4R\sin\theta)+(2R\cos(-180+2\theta), 2R\sin(-180+2\theta))$

$=(4R\cos\theta - 2R\cos 2\theta, 4R\sin\theta - 2R\sin 2\theta)$

同時，由四、五：$\theta_1=4\theta$ ，$\theta_2=2\theta_1$ ，推得$\theta_2=8\theta$ ，$\overrightarrow{O_2Q}=(R\cos\theta_2\ ,R\sin\theta_2)=(R\cos 8\theta\ ,R\sin 8\theta)$ ，

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OO_2}+\overrightarrow{O_2Q}=(4R\cos\theta - 2R\cos 2\theta + R\cos 8\theta\ ,4R\sin\theta - 2R\sin 2\theta + R\sin 8\theta)$

由以上式子，我們代入θ=90度，圓心O_1坐標$(4R\cos\theta\ ,4R\sin\theta)$恰位於y軸上，坐標為(0，4R)，

而圓心O_2坐標$(4R\cos\theta - 2R\cos 2\theta,\ 4R\sin\theta - 2R\sin 2\theta)$位於圓心$O_1$的右方且距離為2R，坐標(2R，4R)。

此時，再透過動畫驗證式子是否符合90度的函數值，發現剛好符合如上圖11所示。

六、因為P點坐標=$(4R\cos\theta + R\cos 4\theta, 4R\sin\theta + R\sin 4\theta)$，Q點坐標=$(4R\cos\theta - 2R\cos 2\theta + R\cos 8\theta\ ,4R\sin\theta - 2R\sin 2\theta + R\sin 8\theta)$

當O、P、Q三點在同一直線上，其坡度OP與坡度OQ相等，因此我們可以下列式子表示：

$\frac{4R\sin\theta+R\sin 4\theta}{4R\cos\theta+R\cos 4\theta}=\frac{4R\sin\theta-2R\sin 2\theta+R\sin 8\theta}{4R\cos\theta-2R\cos 2\theta+R\cos 8\theta}$ 消去R，$\frac{4\sin\theta+\sin 4\theta}{4\cos\theta+\cos 4\theta}=\frac{4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta}{4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta}$若上式等號成立時，欲解出方程式中的θ並非容易，

且動點 P $(4R\cos\theta + R\cos 4\theta, 4R\sin\theta + R\sin 4\theta)$和動點Q$(4R\cos\theta - 2R\cos 2\theta + R\cos 8\theta\ ,4R\sin\theta - 2R\sin 2\theta + R\sin 8\theta)$

皆不可能繞至原點，所以不可能為(0，0)，亦即：$\frac{4\sin\theta+\sin 4\theta}{4\cos\theta+\cos 4\theta}$和$\frac{4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta}{4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta}$ ，皆不可能為$\frac{0}{0}$，

因此，若$\frac{4\sin\theta+\sin 4\theta}{4\cos\theta+\cos 4\theta}=\frac{4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta}{4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta}$ 等號成立時，

即$(4\sin\theta + \sin 4\theta)(4\cos\theta - 2\cos 2\theta + \cos 8\theta) - (4\cos\theta + \cos 4\theta)(4\sin\theta - 2\sin 2\theta + \sin 8\theta)=0$ ，此時，我們可以判定**坡度OP與坡度OQ相等**。

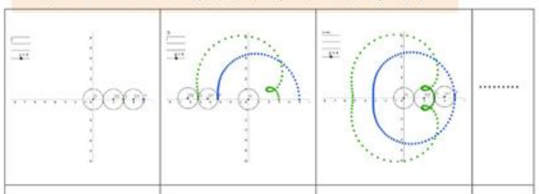
即使$\frac{4\sin\theta+\sin 4\theta}{4\cos\theta+\cos 4\theta}$和$\frac{4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta}{4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta}$ 的分母皆為0，代表P、Q二點同在y軸上，這個方式也可以判斷O、P、Q三點在同一直線上。

於是我們令 $y_1=(4\sin\theta + \sin 4\theta)(4\cos\theta - 2\cos 2\theta + \cos 8\theta) - (4\cos\theta + \cos 4\theta)(4\sin\theta - 2\sin 2\theta + \sin 8\theta)$

若$y_1=0$，我們可判定坡度OP與坡度OQ相等，即O、P、Q三點共線。

我們將動畫截圖呈現如下表5：

表格5 函數圖形與x軸相交截圖表



$\theta=0$	$\theta=\pi$	$\theta=2\pi$	……

圖13：函數y_2圖

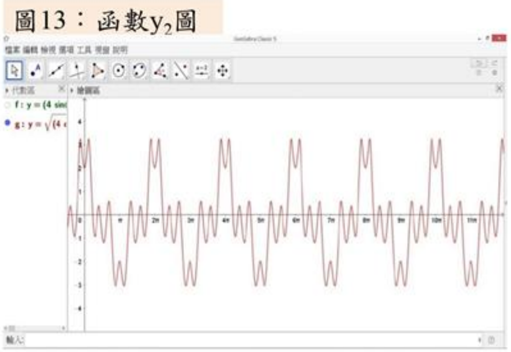
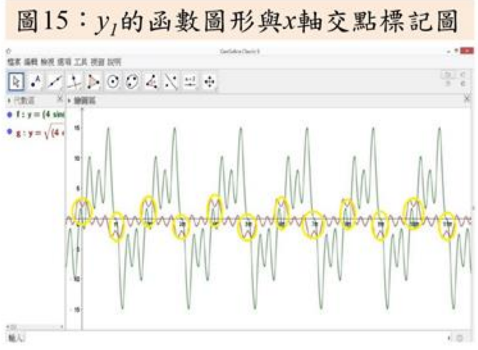


圖14：兩函數結合圖

圖15：y_1的函數圖形與x軸交點標記圖



七、當$\overline{OP}$坡度與$\overline{OQ}$坡度相等，O、P、Q三點在同一直線上，但三點的位置關係仍不能確定，因此我們可藉由$\overline{OP}$與$\overline{OQ}$的長度比較，坡度判斷三點位置關係。

因為本研究與天體的運行相關，因此我們以：

(一)$O_日$-$Q_月$-$P_地$定義，O、P、Q三點在同一直線上，且Q點介於O、P二點之間。

(二)$O_日$-$P_地$-$Q_月$定義，O、P、Q三點在同一直線上，且P點介於O、Q二點之間。

因此，若要比較OP與OQ的長度，可由以下式子判斷，因為O點坐標=(0,0)

P點坐標=$(4R\cos\theta+R\cos 4\theta, 4R\sin\theta+R\sin 4\theta)$

Q點坐標=$(4R\cos\theta-2R\cos 2\theta+R\cos 8\theta, 4R\sin\theta-2R\sin 2\theta+R\sin 8\theta)$

所以: $\overline{OP}$-$\overline{OQ}$=$\sqrt{(4R\cos\theta+R\cos 4\theta)^2+(4R\sin\theta+R\sin 4\theta)^2}-\sqrt{(4R\cos\theta-2R\cos 2\theta+R\cos 8\theta)^2+(4R\sin\theta-2R\sin 2\theta+R\sin 8\theta)^2}$

$=R\sqrt{(4\cos\theta+\cos 4\theta)^2+(4\sin\theta+\sin 4\theta)^2}-R\sqrt{(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)^2+(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)^2}$

$=R\left(\sqrt{(4\cos\theta+\cos 4\theta)^2+(4\sin\theta+\sin 4\theta)^2}-\sqrt{(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)^2+(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)^2}\right)$

於是，令$y_2=\sqrt{(4\cos\theta+\cos 4\theta)^2+(4\sin\theta+\sin 4\theta)^2}-\sqrt{(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)^2+(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)^2}$

(一)若$y_2>0$，則$\overline{OP}>\overline{OQ}$ 。(二)若$y_2<0$，則$\overline{OP}<\overline{OQ}$。(三)若$y_2=0$，則$\overline{OP}=\overline{OQ}$。

因此我們利用電腦繪圖製作函數y_2如上圖13所示：

由上圖13觀察，可推得：若**圖形在x軸上方時$y_2>0$**，則$\overline{OP}>\overline{OQ}$，反之，若**圖形在$x$軸下方時$y_2<0$**，則$\overline{OP}<\overline{OQ}$。

八、將圖12及圖13兩個函數圖形結合如上圖14所示：

$y_1=(4\sin\theta+\sin 4\theta)(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)-(4\cos\theta+\cos 4\theta)(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)$ ，若$y_1=0$，則$m_{\overline{op}}=m_{\overline{oQ}}$，則三點共線。

$y_2=\sqrt{(4\cos\theta+\cos 4\theta)^2+(4\sin\theta+\sin 4\theta)^2}-\sqrt{(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)^2+(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)^2}$

(一)若$y_1=0$，$y_2>0$，則$\overline{OP}>\overline{OQ}$，三點共線，**位置關係為:$O_日$-$Q_月$-$P_地$**，

(二)若$y_1=0$，$y_2<0$，則$\overline{OP}<\overline{OQ}$，三點共線，**位置關係為:$O_日$-$P_地$-$Q_月$**。

因此，我們可以由函數圖形，將三點共線的情況彙整如表6：

表格6 三點共線的情況彙整表

θ	π	2π	3π	4π
位置關係	$O_日$-$P_地$-$Q_月$	$O_日$-$Q_月$-$P_地$	$O_日$-$P_地$-$Q_月$	$O_日$-$Q_月$-$P_地$

圖16：三圓半徑不同外離位置關係圖

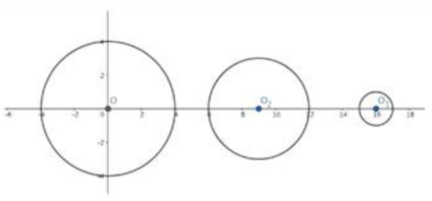


圖17：三圓半徑不同外離繞行圖

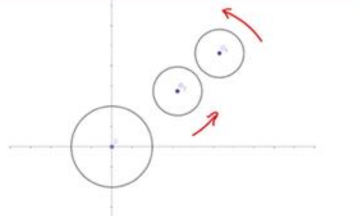


圖18：圓O_1公轉θ時圖形

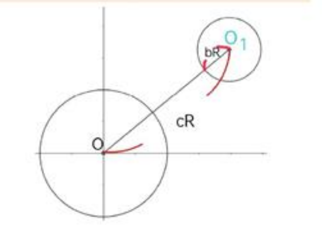
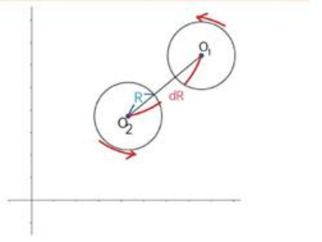


圖19：圓O_1與圓O_2繞行圖



如上圖15，可由y_1的函數圖形與x軸交點，得到O、P、Q三點共線時的θ，例如π、2π、3π、4π、…，再由 θ=π、2π、3π、4π、…，對應y_2函數圖形的y坐標，若為正，則$\overline{OP}>\overline{OQ}$，三點共線，位置關係為$O_日$-$Q_月$-$P_地$，若為負， 則$\overline{OP}<\overline{OQ}$，三點共線，位置關係為$O_日$-$P_地$-$Q_月$。

肆、 研究成果

一. 當兩圓外切時，假設固定圓圓O半徑為R，繞行且滾動圓圓O_1半徑為r，圓O_1滾動定圓O一周時，動圓O_1自轉=$\frac{R+r}{r}$圈。

二. 當兩圓外切時，假設固定圓圓O半徑為R，繞行且滾動圓圓O_1半徑為r，當圓O_1上的P點自轉θ_1， 則 圓O_1公轉θ，且$\theta_1=\frac{R+r}{r}$ θ。

三. 當兩圓外切時，假設固定圓圓O半徑為R，繞行且滾動圓圓O_1半徑為r， 圓O_1公轉θ，動點O_1坐標參數式=$((R+r)\cos\theta, (R+r)\sin\theta)$。

四. 當兩圓外切時，假設固定圓圓O半徑為R，繞行且滾動圓圓O_1半徑為r，圓O_1公轉θ，圓O_1上動點P坐標參數式=$\left((R+r)\cos\theta+r\cos\frac{R+r}{r}\theta, (R+r)\sin\theta+r\sin\frac{R+r}{r}\theta\right)$ 。

五. 當動圓O_1與定圓O外離時，假設固定圓圓O的半徑為R，繞行且滾動圓圓O_1半徑為R，當圓O_1公轉θ，圓O_1上的P點自轉θ_1，連心線4R，其中$\theta_1=4\theta$。其中 圓O_1上動點P坐標參數式=$(4R\cos\theta+R\cos\theta_1, 4R\sin\theta+R\sin\theta_1)=(4R\cos\theta+R\cos 4\theta, 4R\sin\theta+R\sin 4\theta)$。

六. 圓O_1繞著圓O公轉並自轉，圓O_2沿著圓O_1滾動，三圓的半徑皆為R。動點O_2坐標參數式=$(4R\cos\theta-2R\cos 2\theta, 4R\sin\theta-2R\sin 2\theta)$。

七. 圓O_1繞著圓O公轉並自轉，圓O_2沿著圓O_1滾動，三圓的半徑皆為R。圓O_2上動點Q坐標參數式=$(4R\cos\theta-2R\cos 2\theta+R\cos 8\theta, 4R\sin\theta-2R\sin 2\theta+R\sin 8\theta)$。

八. 當$(4\sin\theta+\sin 4\theta)(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)-(4\cos\theta+\cos 4\theta)(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)=0$，則O、P、Q三點在同一直線上。

九. 令$y_1=(4\sin\theta+\sin 4\theta)(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)-(4\cos\theta+\cos 4\theta)(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)$

$y_2=\sqrt{(4\cos\theta+\cos 4\theta)^2+(4\sin\theta+\sin 4\theta)^2}-\sqrt{(4\cos\theta-2\cos 2\theta+\cos 8\theta)^2+(4\sin\theta-2\sin 2\theta+\sin 8\theta)^2}$

(一)若$y_1=0$，$y_2>0$，則$\overline{OP}>\overline{OQ}$，三點共線，位置關係為$O_日$-$Q_月$-$P_地$， (二)若$y_1=0$，$y_2<0$，則$\overline{OP}<\overline{OQ}$，三點共線，位置關係為$O_日$-$P_地$-$Q_月$。

伍、討論

由以上研究成果，可歸納三圓半徑不同外離的情況如下：

假設這三圓中，圓O固定，半徑aR，圓O_1繞行圓O自轉且公轉，半徑bR，圓O_2繞行圓O_1自轉且公轉，半徑R，連心線$\overline{OO_1}$為cR，連心線$\overline{O_1O_2}$為dR，因此可得動點O_1坐標參數式=$(\overline{OO_1}\cos\theta, \overline{OO_1}\sin\theta)=(cR\cos\theta, cR\sin\theta)$，當圓$O_1$公轉θ時，圓$O_1$自轉=$\frac{連心線長}{自轉圓半徑}\theta=\frac{\overline{OO_1}}{bR}\theta=\frac{cR}{bR}\theta=\frac{c}{b}\theta$ 。

圓O_1上的動點P坐標參數式=$(cR\cos\theta+bR\cos\theta_1, cR\sin\theta+bR\sin\theta_1)=(cR\cos\theta+bR\cos\frac{c}{b}\theta, cR\sin\theta+bR\sin\frac{c}{b}\theta)$

因為$\overline{O_1O_2}$=dR，當圓O_1轉θ_1時，則圓O_2自轉$\theta_2=\frac{dR}{R}\theta_1=d\theta_1$

所以動點O_2坐標參數式=$\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}=(cR\cos\theta-\overline{O_1O_2}\cos d\theta_1, cR\sin\theta-\overline{O_1O_2}\sin d\theta_1)=(cR\cos\theta-dR\cos d\theta_1, cR\sin\theta-dR\sin d\theta_1)$ 。

圓O_2上的Q點坐標=$\overrightarrow{OO_2}+\overrightarrow{O_2Q}$ =$(cR\cos\theta-dR\cos d\theta_1, cR\sin\theta-dR\sin d\theta_1)+(R\cos\theta_2, R\sin\theta_2)=(cR\cos\theta-dR\cos d\theta_1+R\cos\theta_2, cR\sin\theta-dR\sin d\theta_1+R\sin\theta_2)$

$=(cR\cos\theta-dR\cos\frac{cd}{b}\theta+R\cos\frac{cd}{b}\theta, cR\sin\theta-dR\sin\frac{cd}{b}\theta+R\sin\frac{cd}{b}\theta)$

於是推得：**P$(cR\cos\theta+bR\cos\frac{c}{b}\theta, cR\sin\theta+bR\sin\frac{c}{b}\theta)$ ， Q$(cR\cos\theta-dR\cos\frac{cd}{b}\theta+R\cos\frac{cd}{b}\theta, cR\sin\theta-dR\sin\frac{cd}{b}\theta+R\sin\frac{cd}{b}\theta)$**

因此，若要求坡度$\overline{OP}$=坡度$\overline{OQ}$時的θ值，可以仿照先前方式，

令$y_1=(cR\sin\theta+bR\sin\frac{c}{b}\theta)(cR\cos\theta-dR\cos\frac{cd}{b}\theta+R\cos\frac{cd}{b}\theta)-(cR\cos\theta+bR\cos\frac{c}{b}\theta)(cR\sin\theta-dR\sin\frac{cd}{b}\theta+R\sin\frac{cd}{b}\theta)$

在將函數式輸入電腦程式以求得θ值。當然，我們也可以令在將函數式輸入電腦程式以求得θ值。當然，我們也可以令$y_2=\sqrt{\left(c\cos\theta+b\cos\frac{c}{b}\theta\right)^2+\left(c\sin\theta+b\sin\frac{c}{b}\theta\right)^2}$

$-\sqrt{\left(c\cos\theta-d\cos\frac{cd}{b}\theta+\cos\frac{cd}{b}\theta\right)^2+\left(c\sin\theta-d\sin\frac{cd}{b}\theta+\sin\frac{cd}{b}\theta\right)^2}$

仿照前述的方式，將函數式輸入電腦繪圖程式，判斷O、P、Q三點的位置關係。在此，特別說明，整個參數式中，僅有θ是變數，其他a, b, c, d代表常數。並且數據a無出現在數據的結論中。例如：我們可以查出太陽半徑70萬公里，地球半徑6371公里，月球半徑1738公里，太陽到地球的距離為1.5億公里，地球到月球的距離為384400公里，再將月球半徑設為R，其他分別設為aR, bR, cR, dR,而a, b, c, d就是已知的常數。

陸、結論

本研究是針對平面上一定圓、二動圓的關係作討論。事實上，星體的運行是存在於空間中，且相關的變數非常多，例如星球之間的距離、星球的質量直接影響了引力與轉速；其次星球的運轉是傾斜某個角度自轉，且運行的軌道是類似於橢圓，因此我們的地球上各個角落才有可能接受到日照和月光，晝夜不斷的輪迴。因此，若要進行更進階的研究，除了要繼續扎實的學習數學，也要充實物理及天文科學，才能理解大自然的奧妙，創造人類的文明和福祉。

柒、參考文獻

請看作品說明書