中華民國第 63 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030415

精誠所至金石為開

學校名稱： 金門縣立金湖國民中學

作者：	指導老師：
國三 黃以樂	何志斌
國一 盧柔蒨	尤信彭
國三 楊子萱	

關鍵詞： 數列、整數分割、組合

摘要

將 n 個礦石分成 m 袋，每袋礦石數分別為 $a_1, a_2, \dots\dots, a_m$ 個，每一輪調換或不調換順序放入 m 袋中，放若干輪後使得各袋礦石數相等，那麼最少放幾輪即可使各袋礦石數相等？

首先用窮舉法尋找 n, m 較小的情形，之後將其一般化，得到任意 n 個礦石分成任意 m 袋後，可以放的輪數，及該輪數下各袋礦石的數量。接著，將情形分為 $m|n$ 及 $m \nmid n$ 兩種，探討在該情形下任意 $a_1, a_2, \dots\dots, a_m$ 最少放幾輪相等，研究後得到至多放幾輪即可相等以及在特定條件下，能找到最少輪數。最後在研究 $m \nmid n$ 的過程中，從重複組合的觀點，得到有趣的結論，將 n 個礦石分成 m 袋後，放 $\frac{m}{s}$ 輪總共會有幾套。

壹、研究動機與文獻

一、研究動機

在科學月刊「森棚教官的數學題」專欄中，我們對游森棚教官提出的問題感興趣，因而進一步研究，題目如下：阿冠拿三個袋子撿礦石；他認定「一套」是分成 1,2,4 個的七個礦石。每湊一套，他就把七個礦石放在袋子裡。但是 1,2,4 分別放到不同的袋子，才叫做「放一套」，而放三套，$(1,2,4) + (4,1,2) + (2,4,1) = (7,7,7)$，礦石數目一樣，而且只放一套或兩套，不可能讓每袋礦石數一樣。於是我們先完成森棚教官提出的問題，從中得到研究此題目的方向，透過手寫及程式反覆試作修正，研究出一般化的成果。

二、文獻回顧

決定研究問題後，我們首先上網查詢是否有人做過相關研究，找到在 110 學年度台中市中小學科學展覽會中，其中一組便是探究此問題。他們研究出：**放 1 輪的一套礦石各袋礦石數都是 $\frac{n}{m}$ 個**；**分 2 袋的礦石放 1 輪或放 2 輪的一套礦石**；**以及分 3 袋的放 1 至 3 輪的一套礦石**。

研究過程中，使用了窮舉法，但在使用此方法的討論下，會出現重複的情形，因此在進行更深入的研究時，所需時間較多，研究的袋數也有所侷限，而本次科展試著改良此方法，建立於台中科展的研究結果上，研究出任意 n, m 將其一般化的結果，並進行推展與延伸，試著解決任意 $a_1, a_2, \dots\dots, a_m$ 的最少輪數。

貳、研究目的

一、完成科學月刊上的問題。

二、將 n 個礦石分成 m 袋後，可以放幾輪使得各袋礦石數相等以及各袋礦石數的數量。

三、將 n 個礦石分成 m 袋，任意 $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m$ 的最少輪數。

(一) 當 $m|n$ 時的至多輪數及特定條件下的最少輪數。

(二) 當 $m \nmid n$ 時的至多輪數及特定條件下的最少輪數。

四、當 $m \nmid n$ 時，將 n 個礦石分成 m 袋後，放 $\frac{m}{s}$ 輪的總共套數。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Python。

肆、研究過程及方法

對於此次研究的問題，以下定義名詞與符號：

名詞定義

分 m 袋：將 n 分為 $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m)$，且 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_m$。

例：將 12 分 4 袋，代表將 12 分為 $(1,2,3,6)$，$n = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$。

放 c 輪：將 $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m)$ 調換順序或不調換順序放入袋子中，放一次稱為放 1 輪。

一套：將 $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m)$ 調換順序或不調換順序放袋子中，最少輪數可讓各袋礦石數相等，則 $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m)$ 稱為放該輪數的一套。

各袋礦石數 k：將 $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m)$ 調換順序或不調換順序放袋子中，放一定輪數後讓每個袋子的礦石數相等，稱為 k。

例：16 分 4 袋，將 16 分為 $(1,2,6,7)$，$(1,2,6,7) + (7,6,2,1) = (8,8,8,8)$，$k = 8$。

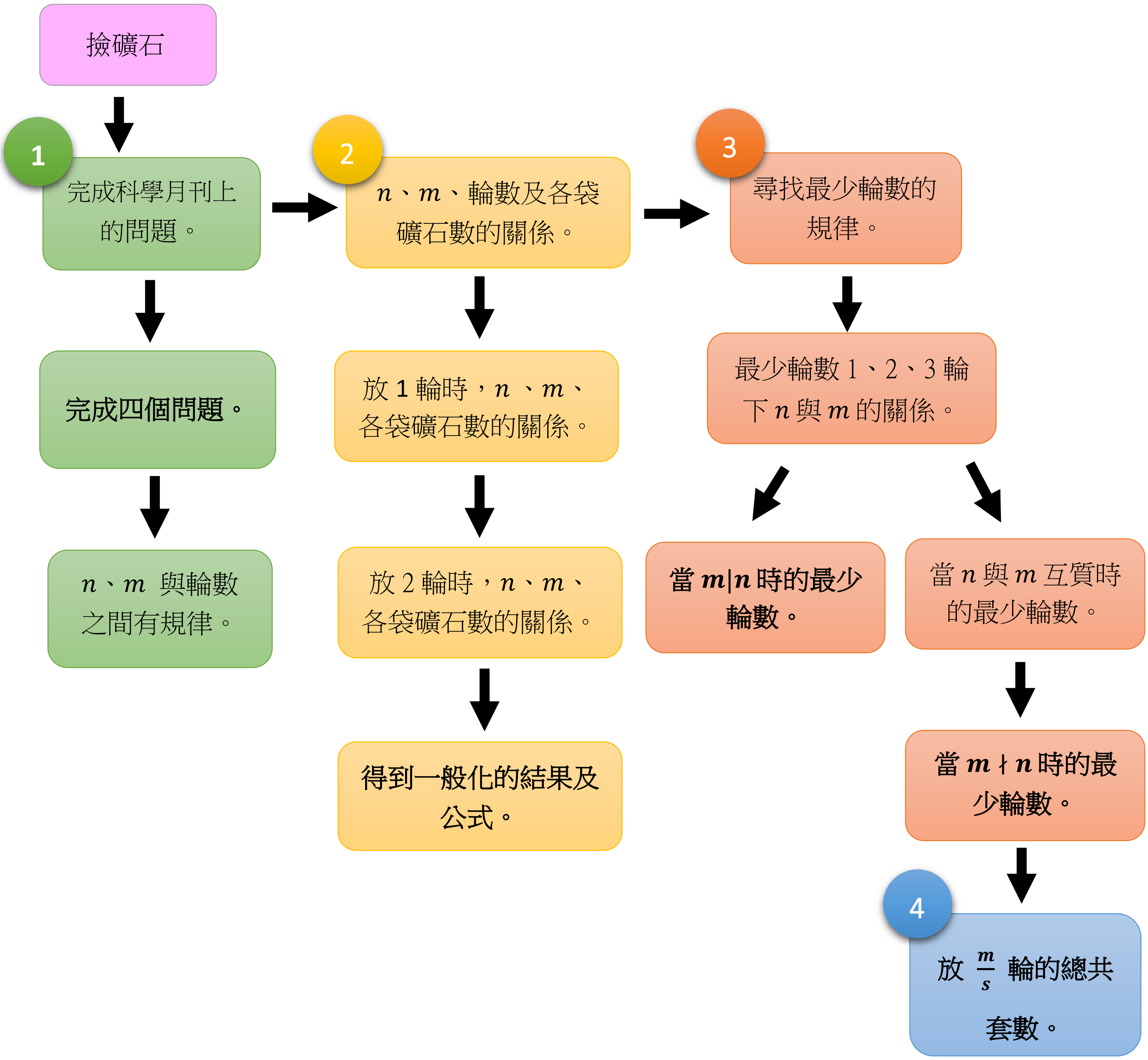
符號定義

$T(n, m, c)$：將 n 個礦石分成 m 袋，放 c 輪，各袋礦石數。$(n, m, c \in \mathbb{Z}, n > m > 0, c > 0)$

$< a_{(n,m)} >$：將 n 個礦石分成 m 袋，放第 1 輪的 $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m)$ 數列。

$< a_m >$：若 n、m 於計算過程中無改變，簡稱為 $< a_m >$ 。
$P(n,m,c)$：將 n 礦石分成 m 袋，放 c 輪總共有的套數。

研究架構



一、完成科學月刊上的問題。

天下大事當於大處著眼，小處下手。因此我們先研究在科學月刊上的問題，再進行歸納和延伸。

(一)如果有四個袋子，希望放 3 輪才能讓礦石數相同， 1,3,4,4 能否可以稱為一套。

經過研究我們發現： (1,3,4,4) 最少 3 輪可以相同，因此 (1,3,4,4) 為放 3 輪的一套。

詳細情形如表(1)：

輪序	第 1 袋	第 2 袋	第 3 袋	第 4 袋
第 1 輪	1	3	4	4
第 2 輪	4	3	1	4
第 3 輪	4	3	4	1
k	9	9	9	9

表(1)

(二) 1,3,4,4 中一套有 1 + 3 + 4 + 4 = 12 個，能否設計出個數更少的一套？

我們發現 (1,1,2,4) 的個數小於 12，$1+1+2+4=8$，$8<12$ ，放 3 輪即可讓每袋數量為 6 個。

輪序	第 1 袋	第 2 袋	第 3 袋	第 4 袋
第 1 輪	1	1	2	4
第 2 輪	4	1	2	1
第 3 輪	1	4	2	1
k	6	6	6	6

表(2)

除表(2)之外我們試了其他情形都不符合，因此個數更少的一套為 (1,1,2,4)。

(三) 1,3,4,4 中有相同的數字，能否設計出四個數字都不一樣的一套？

根據研究我們發現 (1,2,3,6) 的四個數字皆不同，放 3 輪後各袋礦石數相等。

詳細情形如表(3)：

輪序	第 1 袋	第 2 袋	第 3 袋	第 4 袋
第 1 輪	1	2	3	6
第 2 輪	2	6	3	1
第 3 輪	6	1	3	2
k	9	9	9	9

表(3)

(四)如果有七個袋子，希望一直要到放第 5 輪，才能讓各袋礦石數相同，有沒有可能？

如果不可能，為什麼？如果可能，一套礦石最少有幾個？要怎麼分？

輪序	第 1 袋	第 2 袋	第 3 袋	第 4 袋	第 5 袋	第 6 袋	第 7 袋
第 1 輪	1	1	1	1	2	2	6
第 2 輪	1	1	1	6	2	2	1
第 3 輪	1	1	6	1	2	2	1
第 4 輪	1	6	1	1	2	2	1
第 5 輪	6	1	1	1	2	2	1
k	10	10	10	10	10	10	10

表(4)

輪序	第 1 袋	第 2 袋	第 3 袋	第 4 袋	第 5 袋	第 6 袋	第 7 袋
第 1 輪	1	1	3	3	4	4	12
第 2 輪	1	3	3	12	4	4	1
第 3 輪	3	3	12	1	4	4	1
第 4 輪	3	12	1	1	4	4	3
第 5 輪	12	1	1	3	4	4	3
k	20	20	20	20	20	20	20

表(5)

經過研究我們發現有可能完成題目的目標，且一套礦石最少為 14 個。

$n=7$ 時， 1 輪便相等，因此不符合條件。在表(4)中，$n=14$ 時，$(1,1,1,1,2,2,6)$ 最少放 5 輪可以讓各袋礦石數相等，每袋都有 10 個礦石。在表(5)中，$n=28$時，$(1,1,3,3,4,4,12)$ 放 5 輪可以讓各袋礦石數相等，每袋都有 20 個礦石。

從中我們發現到不只有一種可能性可以完成題目的目標，值得注意的是，其中的數字有特別的關係：$14\div 7=2$，若使 5 輪相等，2 在一套中重複出現 2 次；$n=28$ 時，$28\div 7=4$，若使 5 輪相等，4 在一套中重複出現 2 次，另外 n 與 m 和 c 其中有一定的規律，因此我們展開以下的研究，首先探討 n,m,c 的關係。

二、將 n 個礦石分成 m 袋後，可以放幾輪使得各袋礦石數相等以及各袋礦石數的數量。

(一) $T(n,m,1)$ 的規律

完成科學月刊問題的同時，我們找到 n,m,c 的關係存在某個規律，我們認為若得到此規律，定能進一步推展此研究，因此先從較簡單的情形 $T(n,m,1)$ 探討：

1. 將 12 分 3 袋，放 1 輪 k 相等的一套為 (4,4,4)

詳細情形如表(6)：

輪數	第 1 袋	第 2 袋	第 3 袋
1 輪	4	4	4
k	4	4	4

表(6)

2. 將 15 分 5 袋，放 1 輪 k 相等的一套為 (3,3,3,3,3)

詳細情形如表(7)：

輪數	第 1 袋	第 2 袋	第 3 袋	第 4 袋	第 5 袋
1 輪	3	3	3	3	3
k	3	3	3	3	3

表(7)

經由以上例子，以及其他紀錄在研究紀錄上的例子，我們發現 m 都能整除 n ，另外我們發現 $T(n,m,1)$ 可由 $\frac{n}{m}$ 得到，因此我們猜測：

$$\boldsymbol{m|n}\text{，且 }\boldsymbol{T(n,m,1)=\frac{n}{m}}\text{。}$$

以下為證明：

定理一：將 n 個礦石分成 m 袋，若 m 袋中的礦石是放 1 輪的一套礦石，

則 $m|n$，且 $T(n,m,1)=\frac{n}{m}$。

證：由題目可知 m 袋的礦石 $< a_m >$ 是放 1 輪的一套礦石，

則 $a_1=a_2=\cdots=a_m$

設 $a_1=a_2=\cdots=a_m=k\ (k\epsilon\mathbb{Z})$，則 $mk=n$，得到 $k=\frac{n}{m}$ 。

$\because k\in\mathbb{Z}$

$\therefore m|n$

故得證 $m|n$ 且 $T(n,m,1)=\frac{n}{m}$。

由定理一的發現，提供了之後研究的方向。

(二) $\boldsymbol{T(n,m,2)}$ 的規律

經由 $T(n,m,1)$ 所得到的發現，更加肯定 n,m,c 之間一定有關係，但還需要做更多的驗證，因此我們將 c 固定，探討 $T(n,m,2)$ 的情形 。

以森棚教官給予的線索出發，先尋找 4 到 20 顆礦石，分 4 袋的情形。

從中發現一些特別的例子：

◎某些 $<a_m>$ 中，若袋數為偶數時，$<a_m>$ 中的數字特別的排列方式時，$<a_m>$ 會是放 2 輪的一套。

引理一：若 $\boldsymbol{m}$ 為偶數，且 $\boldsymbol{\frac{m}{2}}$ 個數字數值為 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{\frac{m}{2}}$ 個數字數值為 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a \neq b}$，則最少放 2 輪使得各袋礦石數相等。

以下為證明：

設 n 個礦石分 m 袋(m 為偶數)，若 $\frac{m}{2}$ 袋中有 a 個礦石，$\frac{m}{2}$ 袋中有 b 個礦石，$a \neq b$。

輪數	第 1 袋	第 2 袋	$\cdots$	第 $\frac{m}{2}$ 袋	第 $\frac{m}{2}+1$ 袋	$\cdots$	第 m 袋
1 輪	a	a	$\cdots$	a	b	$\cdots$	b
2 輪	b	b	$\cdots$	b	a	$\cdots$	a
k	$a+b$	$a+b$	$\cdots$	$a+b$	$a+b$	$\cdots$	$a+b$

表(8)

由表(8)得證。

除了以上引理一的情形，我們另外發現當 $<a_m>$ 為公差不為 0 的等差數列時，就會是放 2 輪的一套礦石。

以表(9)、表(10)為例：

(1)將 10 分 4 袋，放 2 輪相等的一套為 (1,2,3,4)

詳細情形如表(9)：

輪數	第 1 袋	第 2 袋	第 3 袋	第 4 袋
1 輪	1	2	3	4
2 輪	4	3	2	1
k	5	5	5	5

表(9)

(2)將 36 分 6 袋，放 2 輪相等的一套為 (1,3,5,7,9,11)

詳細情形如表(10)下：

輪數	第 1 袋	第 2 袋	第 3 袋	第 4 袋	第 5 袋	第 6 袋
1 輪	1	3	5	7	9	11
2 輪	11	9	7	5	3	1
k	12	12	12	12	12	12

表(10)

經由表(9)、表(10)，以及其他紀錄在研究紀錄上的例子，發現 m 整除 $2n$ ，並且 $T(n,m,2)=\frac{2n}{m}$，因此我們猜測：

若 $<a_m>$ 為等差數列，則 $m|2n$，且 $T(n,m,2)=\frac{2n}{m}$

在證明這個猜測之前，我們首先證明：將 n 個礦石分成 m 袋，若 $<a_m>$ 為等差數列，則 $<a_m>$ 是放 2 輪的一套礦石。

引理二：若 $<a_m>$ 為等差數列，則 $<a_m>$ 為放 2 輪的一套礦石。

證：

$\because <a_m>$ 為等差數列，

設 $a_1=a_1, a_2=a_1+d, \ldots\ldots, a_m=a_1+(m-1)d$

情況一：若 m 是偶數，如表(11)：

輪數	第 1 袋	第 2 袋	…	第 $\frac{m}{2}$ 袋	第 $\frac{m}{2}+1$ 袋	…	第 m 袋
1 輪	a_1	a_1+d	…	$a_1+(\frac{m}{2}-1)d$	$a_1+\frac{m}{2}d$	…	$a_1+(m-1)d$
2 輪	$a_1+(m-1)d$	$a_1+(m-2)d$	…	$a_1+\frac{m}{2}d$	$a_1+(\frac{m}{2}-1)d$	…	a_1
k	$2a_1+md-d$	$2a_1+md-d$	…	$2a_1+md-d$	$2a_1+md-d$	…	$2a_1+md-d$

表(11)

最少放 2 輪便可讓每袋礦石數皆為 $2a_1+md-d$

情況二：若 m 是奇數，如表(12)：

輪數	第 1 袋	第 2 袋	⋯	第 $\frac{m+1}{2}$ 袋	⋯	第 m 袋
1 輪	a_1	a_1+d	⋯	$a_1+(\frac{m+1}{2}-1)d$	⋯	$a_1+(m-1)d$
2 輪	$a_1+(m-1)d$	$a_1+(m-2)d$	⋯	$a_1+(\frac{m+1}{2}-1)d$	⋯	a_1
k	$2a_1+md-d$	$2a_1+md-d$	⋯	$2a_1+md-d$	⋯	$2a_1+md-d$

表(12)

最少放 2 輪便可讓每袋礦石數皆為 $2a_1+md-d$

由情況一及情況二得證 $< a_m >$ 為等差數列，則 $< a_m >$ 為放 2 輪的一套礦石。

利用引理二，我們證明：

引理三：將 n 個礦石分成 m 袋，若 m 袋中的礦石 $< a_m >$ ，且 $< a_m >$ 為等差數列，

則 $m|2n$ 且 $T(n,m,2)=\frac{2n}{m}$ 。

證：由題目可知 $< a_m >$ 為等差數列，利用引理二，得知 $< a_m >$ 為放 2 輪的一套礦石，且 $n=a_1+a_2+\cdots+a_m=a_1+a_1+d+\cdots+a_1+(m-1)d=\frac{m\times[2a_1+(m-1)d]}{2}$

設每袋礦石數為 k ， $k=2a_1+(m-1)d$

得 $mk=m\times[2a_1+(m-1)d]=2n$

則 $mk=2n$ 且 $k=\frac{2n}{m}$，故得證。

除等差數列此特殊狀況符合外，另發現許多非等差數列也符合，像是將 16 分 4 袋，放 2 輪相等的一套為 (1,2,6,7)

詳細情形如表(13)：

輪數	第 1 袋	第 2 袋	第 3 袋	第 4 袋
1 輪	1	2	6	7
2 輪	7	6	2	1
k	8	8	8	8

表(13)

從等差數列的例子與其他放 2 輪的例子我們發現：

若 m 為偶數，則 $\boldsymbol{a_1+a_m=a_2+a_{m-1}=a_3+a_{m-2}=\cdots=a_{\frac{m}{2}}+a_{\frac{m}{2}+1}=\frac{2n}{m}}$

若 m 為奇數，則 $\boldsymbol{a_1+a_m=a_2+a_{m-1}=a_3+a_{m-2}=\cdots=a_{\frac{m+1}{2}}+a_{\frac{m+1}{2}}=\frac{2n}{m}}$

因此我們猜測：若 $\boldsymbol{a_1+a_m=a_2+a_{m-1}=\cdots=\frac{2n}{m}}$，則 $<a_m>$ 為放 2 輪的一套礦石，則 $m|2n$ 且 $T(n,m,2)=\boldsymbol{\frac{2n}{m}}$。

定理二：將 n 個礦石分成 m 袋，若 $<a_m>$ 中 $a_1+a_m=a_2+a_{m-1}=\cdots=\frac{2n}{m}$，

則 $<a_m>$ 為放 2 輪的一套礦石， $m|2n$ 且 $T(n,m,2)=\frac{2n}{m}$。

證：由引理一、引理二及引理三得知，若 $<a_m>$ 為等差數列時得證。
若 $<a_m>$ 不是等差數列，利用引理二的想法證明 $<a_m>$ 為放 2 輪的一套礦石。設 $a_1+a_m=a_2+a_{m-1}=\cdots=\frac{2n}{m}$ 。

情況一：若 m 是偶數，如表(14)：

輪數	第 1 袋	第 2 袋	…	第 $\frac{m}{2}$ 袋	第 $\frac{m}{2}+1$ 袋	…	第 m 袋
1 輪	a_1	a_2	…	$a_{\frac{m}{2}}$	$a_{\frac{m}{2}+1}$	…	a_m
2 輪	a_m	a_{m-2}	…	$a_{\frac{m}{2}+1}$	$a_{\frac{m}{2}}$	…	a_1
k	$a_1+a_m=\frac{2n}{m}$	$a_2+a_{m-2}=\frac{2n}{m}$		$a_{\frac{m}{2}}+a_{\frac{m}{2}+1}=\frac{2n}{m}$	$a_{\frac{m}{2}+1}+a_{\frac{m}{2}}=\frac{2n}{m}$		$a_m+a_1=\frac{2n}{m}$

表(14)

最少放 2 輪便可讓每袋礦石數皆為 $\frac{2n}{m}$。

情況二：若 m 是奇數，如表(15)：

輪數	第 1 袋	第 2 袋	…	第 $\frac{m+1}{2}$ 袋	…	第 m 袋
1 輪	a_1	a_2	…	$a_{\frac{m+1}{2}}$	…	a_m
2 輪	a_m	a_{m-2}	…	$a_{\frac{m+1}{2}}$	…	a_1
k	$a_1+a_m=\frac{2n}{m}$	$a_2+a_{m-2}=\frac{2n}{m}$	…	$a_{\frac{m+1}{2}}+a_{\frac{m+1}{2}}=\frac{2n}{m}$	…	$a_m+a_1=\frac{2n}{m}$

表(15)

最少放 2 輪便可讓每袋礦石數皆為 $\frac{2n}{m}$。

由情況一及情況二得證 $< a_m >$ 為放 2 輪的一套礦石。

由引理三的想法證明 $m|2n$ 且 $T(n,m,2)=\frac{2n}{m}$：

由上述證明可知 $< a_m >$ 為放 2 輪的一套礦石，且 $n=a_1+a_2+\cdots+a_m$。

設每袋礦石數為 k，放 2 輪後總礦石數為 $2n$，

得 $mk=2n$，則 $k=\frac{2n}{m}$

$\because k\in\mathbb{Z}$

$\therefore m|2n$

故得證 $m|2n$ 且 $T(n,m,2)=\frac{2n}{m}$。

(三) $T(n,m,c)$ 的規律

結合定理一、二的發現，我們探討 $T(n,m,c)$ 的情形，發現不同 n,m,c 下皆符合：

n 個礦石 $\times$ c 輪 $\div$ m 袋 $=$ 各袋礦石數 k

因此我們猜測 $T(n,m,c)$ 的規律為：

$$\boldsymbol{T(n,m,c)=\frac{cn}{m}}$$

以下為證明：

定理三：將 n 個礦石分成 m 袋，若 $< a_m >$ 為放 c 輪的礦石，則 $m|cn$ 且 $T(n,m,c)=\frac{cn}{m}$。

證：由定理二的證明想法延伸，

設每袋礦石數為 k，放 c 輪後總礦石數為 cn，

得 $mk=cn$ 則 $k=\frac{cn}{m}$

$\because k\in\mathbb{Z}$

$\therefore m|cn$

故得證 $m|cn$ 且 $T(n,m,c)=\frac{cn}{m}$。

由此我們證明了此次的研究重點之一，並繼續深入研究。

(四) n,m,c 的關係

從定理三得到的結果，我們可以去推測幾個礦石，分成幾袋，最少幾輪可以讓各袋礦石數相等，但在嘗試的過程中，我們發現 n,m,c 有一些限制，其中：

1. $m>1$
2. $n>m$
3. $m\geq c$

第 1 點跟第 2 點明顯正確，$m=1$ 時，只分為 1 袋，數量為 n 顆，只需 1 輪即可完成；$n=m$ 時，每袋皆為 1 顆，也只需 1 輪即可完成，其中第三點需要證明。

以下為證明過程：

引理四：將 n 個礦石分成 m 袋，若 $<a_m>$ 最少 c 輪讓各袋礦石數相等，則 $c \le m$。

證：$<a_m>$ 中 $a_1+a_2+\cdots+a_m=n$

設放的輪數 $c>m$

但是

輪數	第 1 袋	第 2 袋	⋯	第 m 袋
1 輪	a_1	a_2	⋯	a_m
2 輪	a_2	a_3	⋯	a_1
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
m 輪	a_m	a_1	⋯	a_{m-1}
k	$a_1+\cdots+a_m=n$	$a_1+\cdots+a_m=n$	⋯	$a_1+\cdots+a_m=n$

表(16)

在表(16)中，最多 m 輪即可使每袋總數皆為 n，得 $c=m$ (→←)。

故得證 $c \le m$。

此外，在嘗試的過程中，我們發現找符合限制的 n,m,c，只要 $\frac{cn}{m}\in\mathbb{Z}$，就一定能找到一套礦石，因此我們猜測：

若 $T(n,m,c)=\frac{cn}{m}\in\mathbb{Z}$，則可將 n 個礦石分成 m 袋，且放 c 輪。

以下為證明：

定理四：若 $T(n,m,c)\in\mathbb{Z}$，則可將 n 個礦石分成 m 袋，且放 c 輪。

證：由引理四可知 $c \le m$

設 $\frac{cn}{m}\notin\mathbb{Z}$，則可將 n 個礦石分成 m 袋，放 c 輪可讓每袋礦石數相等，且每袋礦石數為 k。

$\because \frac{cn}{m}\notin\mathbb{Z}$

$\therefore k\notin\mathbb{Z}$

表示各袋總礦石數不是整數，但討論的情境中每一顆礦石皆不可分割，因此不會出現各袋總礦石數非整數的情形。

因此 $\frac{cn}{m}\notin\mathbb{Z}$ 不成立。故得證。

結合定理三與定理四，得到此次研究的重點之一：

定理五：將 n 個礦石分成 m 袋，若且為若 $< a_m >$ 為放 c 輪的礦石，則 $m|cn$

且 $T(n,m,c)=\frac{cn}{m}$。

三、將 n 個礦石分成 m 袋，任意 $a_1,a_2,\dots\dots,a_m$ 的最少輪數。

觀察完 $T(n,m,c)$ 的規律以及哪些 n,m,c 可以使得 n 個礦石分成 m 袋放 c 輪有可能，但此時 c 不是最少輪數，因此我們開始研究是否能在任意 $< a_m >$ 中，找到 $< a_m >$ 最少放幾輪。首先探究最少輪數 1 輪、2 輪、3 輪下的情形。

(一) 最少輪數 1 輪的關係

我們先從簡單的情形進行探討，尋找最少輪數 1 輪的關係，而結合定理一的證明能夠知道：當 $< a_m >$ 數列的公差為 0 時，放 1 輪便相等。

定理六：將 n 個礦石分 m 袋，若且為若 $< a_m >$ 中 $a_1=a_2=\cdots=a_m=\frac{n}{m}$，

則 $< a_m >$ 為最少放 1 輪的一套礦石。

證：$< a_m >$ 中 $a_1=a_2=\cdots=a_m=\frac{n}{m}$

輪數	第 1 袋	第 2 袋	…	第 m 袋
1 輪	a_1	a_2	…	a_m
k	$a_1=\frac{n}{m}$	$a_2=\frac{n}{m}$	…	$a_m=\frac{n}{m}$

表(17)

由表(17)得知，放 1 輪後，各袋礦石數皆為 $\frac{n}{m}$，故得證。

(二) 最少輪數 2 輪的關係

找到最少輪數 1 輪的關係，我們開始思考，是否最少輪數 2 輪也有規律，因此開始找最少輪數 2 輪的關係，在定理二時，已經證明有關係，且關係為：**將 n 個礦石分成 m 袋，若且為若 $< a_m >$ 中 $a_1+a_m=a_2+a_{m-1}=\cdots=\frac{2n}{m}$，則 $< a_m >$ 為放 2 輪的一套礦石。**

由定理二、定理三得證。

(三) 最少輪數 3 輪的關係

找完最少輪數 2 輪的關係，接著我們繼續找下去，看看最少輪數 3 輪有沒有關係：由定理六證明出最少輪數 1 輪的 $< a_m >$ 中值皆為 $\frac{n}{m}$；由定理二、定理三證明最少輪數 2 輪的 $< a_m >$ 中 $a_1+a_m=a_2+a_{m-1}=\cdots=\frac{2n}{m}$；從一項值為 $\frac{n}{m}$，拓展到兩項值相加為為 $\frac{2n}{m}$，

利用此想法，我們猜測：若$< a_m >$中$a_1 + a_m \neq a_2 + a_{m-1} \neq \cdots \neq \frac{2n}{m}$，且有三項的值相加為 $\frac{3n}{m}$，則$< a_m >$為放 3 輪的一套礦石。

接下來我們試著找放 3 輪的例子嘗試猜想是否正確，我們發現：

1. 當$m = 4$時，我們的猜想成立，並且發現到剩下的一項值為$\frac{n}{4}$，原因如下：

   排除 1 輪、2 輪的情形，不失一般性，假設$< a_4 >$ 中$a_1 + a_2 + a_4 = \frac{3n}{4}$，$a_3 = \frac{n}{4}$

   $\because a_1 + a_2 + a_4 = \frac{3n}{4}$

   若 a_3 放 3 輪皆放入同一袋中，則 3 輪後$k = \frac{3n}{4}$

   $\therefore < a_4 >$為放 3 輪的一套礦石 (By定理五)
   故得證。

2. 接著我們繼續嘗試，當$m = 5$時，猜想成立，並且剩下的兩項值皆為$\frac{2n}{5}$，原因如下：

   排除 1 輪、2 輪的情形，不失一般性，

   假設$< a_5 >$ 中$a_1 + a_2 + a_5 = \frac{3n}{5}$，$a_3 = a_4 = \frac{n}{5}$

   $\because a_1 + a_2 + a_5 = \frac{3n}{5}$

   若a_3、a_4放 3 輪皆放入同一袋中，則 3 輪後$k = \frac{3n}{5}$

   $\therefore < a_5 >$為放 3 輪的一套礦石(By 定理五)
   故得證。

3. 利用以上的方法，我們繼續試$m = 6$時的情形，猜想仍成立，但此時會出現三種情形

   (1) 當$6|n$時，會有三項相加為$\frac{3n}{6}$，其於三項皆為 $\frac{n}{6}$，原因如上述證明方式。

   (2) 當$6|n$時，會有三項相加為$\frac{3n}{6}$，另外三項皆$\neq \frac{n}{6}$，但三項相加仍為$\frac{3n}{6}$。

   (3) 當$6 \nmid n$時，會有三項相加為$\frac{3n}{6}$，另外三項皆$\neq \frac{n}{6}$，但三項相加仍為$\frac{3n}{6}$。

利用這個發現，嘗試了更多種情況，當$m|n$時，有較複雜的情況；當$m \nmid n$時，符合我們的猜測，因此之後的研究分成$m|n$與$m \nmid n$ ，兩個方向討論。

(四) 當 $\boldsymbol{m|n}$ 時的最少輪數

1.利用程式輔助

剛開始研究此問題時，透過手邊的資料我們沒有找到特別的規律，因此希望能透過更多例子幫助研究。由於找到 $<a_m>$ 的最少輪數所需的檢查工作繁雜，我們希望能藉由電腦程式輔助，但目前所學的程式語言不足以寫出程式，於是我們求助指導老師、學校資訊老師、在職的程式工程師，得到的回應都相同：如果沒有規律，要寫出此程式只能利用窮舉法，但隨著數字變多，窮舉法的計算過程會太過龐大，電腦可能會無法運行，因此決定換另一個方向。

既然無法利用程式直接找到 $<a_m>$ 的最少輪數，我們轉而尋找將 n 分成 m 袋的所有情形，像是： 7 個礦石分成 3 袋的所有情形為 (5,1,1)、(4,2,1)、(3,3,1)、(3,2,2)這四種，利用 Python 寫出了以下程式：

```
def part(n, m):
    def _part(n, m, pre):
        if n <= 0:
            return []
        if m == 1:
            if n <= pre:
                return [[n]]
            return []
        ret = []
        for i in range(min(pre, n), 0, -1):
            ret += [[i] + sub for sub in _part(n-i, m-1, i)]
        return ret
    return _part(n, m, n)
```

讓程式運行後，輸入 part(n,m)，n 與 m 填入要尋找的礦石數與袋數，即可找到所有的情形。

寫出此程式的過程中，有利用到整數分割的想法，似乎我們的研究與整數分割有所相關。

2.尋找輪數的上限

透過觀察最少輪數 1 輪、2 輪、3 輪下的情形，我們繼續延伸討論，首先利用利用定理五，$T(n,m,c)=\frac{cn}{m}$ 的方法找出 $<a_m>$ 的最少輪數，但費時費力，後來在尋找的過程中，發現到 $<a_m>$ 中值為 $\frac{n}{m}$ 的項數量，似乎與最小輪數有關係，像是：

當一套礦石中恰有一項值為 $\frac{n}{m}$ 時，最少輪數為 $m-1$ 輪；

當一套礦石中恰有兩項值為 $\frac{n}{m}$ 時，最少輪數為 $m-2$ 輪；

當一套礦石中恰有三項值為 $\frac{n}{m}$ 時，最少輪數為 $m-3$ 輪；

這些例子中，$<a_m>$ 中值為 $\frac{n}{m}$ 的數量，似乎決定了最少的輪數。

因此我們猜測：

猜測：將 n 個礦石分 m 袋，$m|n$，若且為若 $<a_m>$ 中有 r 項的值為 $\frac{n}{m}$，則 $<a_m>$ 為放 $m-r$ 輪的一套礦石。$(0<r\leq m-2)$

但在試著證明此猜測時，證明到一半皆無法進行下去，如：

$(\Rightarrow)$

假設 $<a_m>$ 中 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{m-r-1}+a_m=\frac{(m-r)n}{m}$，

則 $a_{m-r}+\cdots+a_{m-1}=\frac{rn}{m}$，但沒有定理能確定 $a_{m-r}=\cdots=a_{m-1}=\frac{n}{m}$

$(\Leftarrow)$

$\because <a_m>$ 為放 $m-r$ 輪的一套礦石

$\therefore\ T(n,m,m-r)=\frac{(m-r)n}{m}$(By 定理五)

$\because\ <a_m>$ 為放 $m-r$ 輪的一套礦石

$\therefore\ <a_m>$ 中有 $m-r$ 項的值相加為 $T(n,m,m-r)=\frac{(m-r)n}{m}$

$\therefore$ 剩下的 r 項值相加為 $n-\frac{(m-r)n}{m}=\frac{rn}{m}$

但也沒有定理能說明這 r 項的值分別為多少。

不過利用此猜測，我們發現 $<a_m>$ 中值為 $\frac{n}{m}$ 的數量，決定了尋找 $<a_m>$ 最少輪數時的上限，因此我們有了較快的找法：

定理七：將 n 分為 m 袋，當 $m|n$ 時，若 $<a_m>$ 中有 r 項的值為 $\frac{n}{m}$，則 $<a_m>$ 為至多放 $m-r$ 輪的礦石。$(0<r\leq m-2)$。

證：

不失一般性，假設 $<a_m>$ 中 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{m-r-1}+a_m=\frac{(m-r)n}{m}$，

則 $a_{m-r}+\cdots+a_{m-1}=\frac{rn}{m}$，

由定理五可知：$(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{m-r-1},a_m)$ 為放 $m-r$ 輪的礦石

若 $a_{m-r}=\cdots=a_{m-1}=\frac{n}{m}$

將 a_{m-r}、 … 、a_{m-1} 每輪都放在原本的袋子，$m-r$ 輪每袋皆有 $\frac{(m-r)n}{m}$

故至多放 $m-r$ 輪即可讓每袋礦石數相等。

3. 尋找最少輪數

利用定理七，確定輪數的上限後，接著利用定理五尋找最少輪數，方法是：

在定理五中得知 $T(n,m,m-r)=\frac{(m-r)n}{m}$，找到 n、m 下可能的所有輪數 $m-r$ 再代入檢查 $<a_m>$ 最少幾輪。

驗證的過程中，我們發現有趣的情形：當 n 為奇數：若輪數少於 m 輪，且其中沒有 $\frac{n}{m}$，則剩餘 v 個數字可分為 j 組，且 $j\mid m$。

接著解釋 n 為奇數時的情況：

說明：

$\because m\mid n$

$\therefore n$ 為奇數時，m 為奇數。

若 $<a_m>$ 輪數為 $m-v$ 輪，則其中 $m-v$ 個數相加 $=\frac{(m-v)n}{m}$，剩餘 v 個數相加 $=\frac{vn}{m}$。

當 $m-v$ 為偶數時，v 為奇數，$\therefore \frac{(m-v)n}{m}$ 為偶數。

剩餘 v 個數放 $m-v$ 輪後 $=\frac{(m-v)n}{m}$ 為偶數

若 v 個數中 h 個組成一組，共有 j 組，且 $h|m-v$，則 $v-hj$ 個數沒有分組。

如 $v=hj$，則此 h 個數相加為 $\frac{(m-v)n}{m}$ 的因數，且其中沒有 $\frac{n}{m}$。

如 $v\neq hj$，則 $v-hj$ 個數沒有分組，此 $v-hj$ 個數要放 $m-v$ 輪後 $=\frac{(m-v)n}{m}$，

則 $v-hj$ 個數 $=\frac{n}{m}$。

當 $m-v$ 為奇數時，v 為偶數，$\therefore \frac{(m-v)n}{m}$ 為奇數。

剩餘 v 個數放 $m-v$ 輪後 $=\frac{(m-v)n}{m}$ 為奇數

若 v 個數中 h 個組成一組，共有 j 組，且 $h|m-v$，則 $v-hj$ 個數沒有分組。

如 $v = hj$，則此 h 個數相加為 $\frac{(m-v)n}{m}$ 的因數，且其中沒有 $\frac{n}{m}$。

如 $v \neq hj$，則 $v - hj$ 個數沒有分組，此 $v - hj$ 個數要放 $m - v$ 輪後 $= \frac{(m-v)n}{m}$，

則 $v - hj$ 個數 $= \frac{n}{m}$。

(五) 當 $\boldsymbol{m \nmid n}$ 時的最少輪數

1. $\boldsymbol{n}$ 為質數的規律

在研究 $m \nmid n$ 時的最少輪數，先從容易的情形探討，當礦石總數 n 為質數時，最少放幾輪。經過研究我們證明出：當 n 為質數時，最少放 m 輪才會相等。

以下為證明：

引理五：將 $\boldsymbol{n}$ 個礦石分成 $\boldsymbol{m}$ 袋，若 $\boldsymbol{n}$ 為質數，則 $< \boldsymbol{a_m} >$ 為放 $\boldsymbol{m}$ 輪的一套。

證：由定理五可知， $m|cn$

$\because n$ 為質數

$\therefore m|c$

$\because c \leq m$ (By 引理四)

$\therefore c = m$，即最少 m 輪才使每袋的礦石數相同，故得證。

2. $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 互質

證明引理五時，除了 n 是質數的情況，我們也證明出：只要 n 與 m 互質，將 n 個礦石分成 m 袋，則 $< a_m >$ 為放 m 輪的一套礦石。

以下為證明：

定理八：將 $\boldsymbol{n}$ 個礦石分成 $\boldsymbol{m}$ 袋，若 $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{1}$，則 $< \boldsymbol{a_m} >$ 為放 $\boldsymbol{m}$ 輪的一套礦石。

證：$\because (m, n) = 1$

$\therefore m \nmid n$

由定理五可知，$m|cn$

$\therefore m|c$

$\because c \leq m$ (By 引理四)

$\therefore c = m$

故得證 $< a_m >$ 放 m 輪的一套礦石。

3. $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{1})$

接下來我們將情形一般化，討論 $(m, n) = s(s \neq 1)$ 的狀況，尋找的方法為：

(1) 利用定理五，$T(n,m,c)=\frac{cn}{m}$，首先尋找 n、m 下可能的所有輪數 c。

將 $<a_m>$ 中的數字慢慢配對：找一數與其他數個數字相加符合 c 輪每袋 k 個礦石後，剩餘的數以 m 除 n 及 m 的最大公因數為單位分組。

以 20 分 12 袋為例：

$(12,20)=4$，$12\div 4=3$

12 輪的情況：$\frac{cn}{m}=20$ ； 9 輪的情況：$\frac{cn}{m}=15$ ； 6 輪的情況：$\frac{cn}{m}=10$ ；

3 輪的情況：$\frac{cn}{m}=5$ 。

利用這些 $\frac{cn}{m}$，看到一個 20 分 12 袋的 $<a_m>$，便能找到最少輪數，像是：

$<a_m>=(9,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$，$9+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=20$ ，

故 (9,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1) 最少放 12 輪。

$<a_m>=(7,3,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$，$7+1+1+1+1+1+1+1+1=15$，剩餘數字三個一組→ (3,1,1)，放 9 輪後可以讓各袋皆為 15 ，故 (7,3,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)最少放 9 輪。

$<a_m>=(5,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1)$，$5+1+1+1+1+1=10$，剩餘數字三個一組→ (2,2,1)(2,2,1)，放 6 輪後可以讓各袋皆為 10 ，故 (5,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1) 最少放 6 輪

$<a_m>=(2,2,2,2,2,2,2,2,1,1,1,1)$，$2+1+1=5$，剩餘數字三個一組→ (2,2,1)(2,2,1)(2,2,1)(2,2,1)，放 3 輪後可以讓各袋皆為 5 ，故 (2,2,2,2,2,2,2,2,1,1,1,1) 最少放 3 輪。

以下為尋找過程：

n 分 m 袋	$(m,n)=s$	$<a_m>$	輪數	$<a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})}>$ 出現次數 r
5 分 3 袋	1	(3,1,1)	3	1
5 分 3 袋	1	(2,2,1)	3	1
10 分 6 袋	2	(5,1,1,1,1,1)	6	0
10 分 6 袋	2	(4,2,1,1,1,1)	6	0
10 分 6 袋	2	(3,3,1,1,1,1)	3	2

10 分 6 袋	2	(3,2,2,1,1,1)	3	2
10 分 6 袋	2	(2,2,2,2,1,1)	3	2
15 分 9 袋	3	(7,1,1,1,1,1,1,1,1)	9	0
15 分 9 袋	3	(6,2,1,1,1,1,1,1,1)	9	0
15 分 9 袋	3	(5,3,1,1,1,1,1,1,1)	6	1
15 分 9 袋	3	(5,2,2,1,1,1,1,1,1)	6	1
15 分 9 袋	3	(4,4,1,1,1,1,1,1,1)	9	0
15 分 9 袋	3	(4,3,2,1,1,1,1,1,1)	6	1
15 分 9 袋	3	(4,2,2,2,1,1,1,1,1)	6	1
15 分 9 袋	3	(3,3,3,1,1,1,1,1,1)	3	3
15 分 9 袋	3	(3,3,2,2,1,1,1,1,1)	3	3
15 分 9 袋	3	(3,2,2,2,2,1,1,1,1)	3	3
15 分 9 袋	3	(2,2,2,2,2,2,1,1,1)	3	3
20 分 12 袋	4	(9,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	12	0
20 分 12 袋	4	(8,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	12	0
20 分 12 袋	4	(7,3,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	9	1
20 分 12 袋	4	(7,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	9	1
20 分 12 袋	4	(6,4,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	12	0
20 分 12 袋	4	(6,3,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	9	1
20 分 12 袋	4	(6,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1)	9	1
20 分 12 袋	4	(5,5,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	6	0
20 分 12 袋	4	(5,4,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	6	0
20 分 12 袋	4	(5,3,3,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	6	2
20 分 12 袋	4	(5,3,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1)	6	2
20 分 12 袋	4	(5,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1)	6	2

20 分 12 袋	4	(4,4,3,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	9	1
20 分 12 袋	4	(4,4,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1)	6	1
20 分 12 袋	4	(4,3,3,2,1,1,1,1,1,1,1,1)	6	2
20 分 12 袋	4	(4,3,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1)	6	2
20 分 12 袋	4	(4,2,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1)	6	2
20 分 12 袋	4	(3,3,3,3,1,1,1,1,1,1,1,1)	3	4
20 分 12 袋	4	(3,3,3,2,2,1,1,1,1,1,1,1)	3	4
20 分 12 袋	4	(3,3,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1)	3	4
20 分 12 袋	4	(3,2,2,2,2,2,2,1,1,1,1,1)	3	4
20 分 12 袋	4	(2,2,2,2,2,2,2,2,1,1,1,1)	3	4

表(18)

在表(18)中，雖然利用此方法可以找到 $< a_m >$ 的最少輪數，但過程十分繁雜且容易出錯。而在利用此方法的過程中，值得注意的是，當輪數少於 12 輪時，幾乎都會有一組數字為 (3,1,1) 或是 (2,2,1)，並且因為輪數都是 3 的倍數關係，因此 (3,1,1) 以及 (2,2,1) 一定可以讓各袋礦石數相等，且 (3,1,1) 和 (2,2,1) 皆是 5 分 3 袋的一套，因此我們開始研究 $a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})}$ 與 $a_{(n,m)}$ 之間的關係。

(2) 因為利用上述的方法十分麻煩，我們開始研究表(18)裡面的關係：若 $(m,n)=s$，先將 $< a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})} >$ 找出，則 $< a_m >$ 的最少輪數與 $< a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})} >$ 的組數有關係，若出現 r 組，那麼 $m-r$ 個數相加值為 $\frac{n}{m}\times\left(m-\frac{m}{s}\times r\right)$，如上表上色部分。

以 20 分 12 袋為例：

12 輪的情況：$\frac{20}{12}\times(12-0)=20$

9 輪的情況：$\frac{20}{12}\times(12-3\times1)=15$

6 輪的情況：$\frac{20}{12}\times(12-3\times2)=10$

3 輪的情況：$\frac{20}{12}\times(12-3\times3)=5$

利用這些 $\frac{n}{m}\times\left(m-\frac{m}{s}\times r\right)$，看到任一個 20 分 12 袋的 $<a_m>$，便能找到最少輪數，像是：

$<a_m>=(9,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$，沒有 $(3,3,1)$ 或 $(2,1,1)$，故 $(9,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ 最少放 12 輪。

$<a_m>=(7,3,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$，有一組 $(3,3,1)$，故 $(7,3,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ 最少放 9 輪。

$<a_m>=(5,3,3,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$，有二組 $(3,3,1)$，故 $(5,3,3,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ 最少放 6 輪。

$<a_m>=(3,3,3,3,1,1,1,1,1,1,1,1)$，有四組 $(3,3,1)$，故 $(3,3,3,3,1,1,1,1,1,1,1,1)$ 最少放 3 輪。

由上述的例子我們推論：將 n 分成 m 袋，先找到 $(m,n)=s$，將 n 與 m 同除 s，用 $\frac{n}{s}$ 分 $\frac{m}{s}$ 袋的 $<a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})}>$ 當基準，沒有 $\frac{n}{s}$ 分 $\frac{m}{s}$ 袋的 $<a_m>$ 時，最少放 m 輪；有一個 $\frac{n}{s}$ 分 $\frac{m}{s}$ 袋的 $<a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})}>$ 時，最少放 $m-\frac{m}{s}$ 輪，有兩個 $\frac{n}{s}$ 分 $\frac{m}{s}$ 袋的 $<a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})}>$ 時，最少放 $m-\frac{2m}{s}$ 輪；有三個 $\frac{n}{s}$ 分 $\frac{m}{s}$ 袋的 $<a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})}>$ 時，最少放 $m-\frac{3m}{s}$ 輪；⋯；有 $s-2$ 個 $\frac{n}{s}$ 分 $\frac{m}{s}$ 袋的 $<a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})}>$ 時，最少放 $m-\frac{m}{s}\times(s-2)$ 輪；有 s 個 $\frac{n}{s}$ 分 $\frac{m}{s}$ 袋的 $<a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})}>$ 時，最少放

$m-\frac{m}{s}\times(s-1)=\frac{m}{s}$ 輪。

以下證明有 s 個 $\frac{n}{s}$ 分 $\frac{m}{s}$ 袋的 $<a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})}>$ 時，最少放 $\frac{m}{s}$ 輪：

定理九：將 n 分 m 袋，當 $m\nmid n$，$(m,n)=s$，若 $<a_m>$ 中出現 s 組 $<a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})}>$，

則 $<a_m>$ 為放 $\frac{m}{s}$ 輪的一套。

證：將 $<a_m>$ 分成 s 組，每組皆為 $<a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})}>$

$\because (\frac{n}{s},\frac{m}{s})=1$

$\therefore <a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})}>$ 為放 $\frac{m}{s}$ 輪的一套礦石 (By 定理八)

$\because s$ 組皆為放 $\frac{m}{s}$ 輪的一套。

$\therefore <a_m>$ 為放 $\frac{m}{s}$ 輪的一套

此外從觀察中我們發現不會出現 $s-1$ 組 $<a_{\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s}\right)}>$，原因為：

若 $<a_m>$ 中有 $s-1$ 組 $<a_{\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s}\right)}>$，則剩餘礦石為 $n-\frac{n}{s}\times(s-1)=\frac{n}{s}$，剩餘袋數為 $m-\frac{m}{s}(s-1)=\frac{m}{s}$，分成 $<a_{\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s}\right)}>$ 的一套，故不會出現 $s-1$ 組。

接著從表(18)中可以看到有兩組特例：

$<a_m>=(5,5,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$，其中沒有 $(3,1,1)$ 和 $(2,2,1)$ 卻是最少放 6 輪的一套；

$<a_m>=(5,4,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$，其中沒有 $(3,1,1)$ 和 $(2,2,1)$ 卻是最少放 6 輪的一套；

我們開始研究什麼情況下沒有 $<a_{\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s}\right)}>$ 放的輪數卻少於 m 輪，得到若 $m|c$ 時，即便沒有 $<a_{\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s}\right)}>$ 放的輪數仍可能少於 m 輪，原因為：若 $m|c$ 且 $c\leq\frac{m}{2}$，則有可能將 m 個數字拆成 c 個一組，此時會有 $\frac{m}{c}$ 組放 c 輪的一套，此時最少輪數會少於 m 輪。

如果能確認剩下的數字中沒有以上的情形，能夠快速找到最少輪數，如定理十：

定理十：將 n 分為 m 袋，當 $m\nmid n$，$(m,n)=s$，若 $<a_m>$ 中出現 r 組 $<a_{\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s}\right)}>$ $(0\leq r\leq s-2)$，且剩下的 $<a_m>$ 中，不能組成 $<a_{\left(b\times\frac{n}{s},b\times\frac{m}{s}\right)}>$ $(b\leq\frac{s}{2}$ 且 $\frac{bm}{s}|m)$，則 $<a_m>$ 為放 $\frac{m(s-r)}{s}$ 輪的一套。

證：首先證明 $<a_m>$ 可能的輪數

$\because T(n,m,c)=\frac{cn}{m}$ 且 $(m,n)=s$

$\therefore \frac{cn}{m}=\frac{c\frac{n}{s}}{\frac{m}{s}}$

為使 $\frac{c\frac{n}{s}}{\frac{m}{s}}$ 有解，則 $\frac{c\frac{n}{s}}{\frac{m}{s}}\in\mathbb{Z}$

$\because (\frac{m}{s},\frac{n}{s})=1$

$\therefore c$ 只能為 $\frac{m}{s}$ 的倍數

$\therefore <a_m>$ 可能放 $\frac{m}{s},\frac{2m}{s},\frac{3m}{s},\ldots,m$ 輪

其中 $\frac{m}{s}=m-\frac{m(s-1)}{s},\frac{2m}{s}=m-\frac{m(s-2)}{s},\frac{3m}{s}=m-\frac{m(s-3)}{s},\dots,m=m-\frac{m(s-s)}{s}$

$\therefore T(n,m,c)$ 可為 $\frac{n}{s},\frac{2n}{s},\frac{3n}{s},\dots,\frac{(s-1)n}{s},n$

若 $<a_m>$ 中有 r 組 $<a_{\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s}\right)}>$，則剩餘礦石為 $n-\frac{n}{s}\times r=\frac{n(s-r)}{s}$，

剩餘袋數為 $m-\frac{m}{s}\times r=\frac{m(s-r)}{s}$ ，將 $\frac{n(s-r)}{s}$ 分 $\frac{m(s-r)}{s}$ 袋

$\because$ 其中不含 $<a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})}>$

$\therefore$ 任選 $\frac{m}{s}$ 個一組，放 $\frac{m}{s}$ 輪後不可能為 $\frac{n}{s}$

設剩餘 $<a_m>$ 任取 $\frac{m(s-r-g)}{s}$ 一組放 $\frac{m(s-r-g)}{s}$ 輪後，

此 $\frac{m(s-r-g)}{s}$ 袋組數為 $\frac{m(s-r-g)}{s}(1\le g\le r)$

最後剩餘礦石為 $\frac{n(s-r)}{s}-\frac{n(s-r-g)}{s}=\frac{gn}{s}$，最後剩餘袋數為 $\frac{gm}{s}$，當 $g=1$ 時 $(\rightarrow\leftarrow)$

當 g 為其他數時，皆可依此類推，得到 $\frac{n}{s}$ 分 $\frac{m}{s}$ 袋此矛盾的結果

所以 $<a_{(\frac{n(s-r)}{s},\frac{m(s-r)}{s})}>$ 最少放 $\frac{m(s-r)}{s}$ 輪。

故得證。

藉由特例及定理十，如果能夠找出 $<a_{\left(b\times\frac{n}{s},b\times\frac{m}{s}\right)}>$ 的所有情形，便能夠利用 $<a_{\left(b\times\frac{n}{s},b\times\frac{m}{s}\right)}>$ 快速找到 $<a_m>$ 的最少輪數。

四、當 $m \nmid n$ 時，將 n 個礦石分成 m 袋後，放 $\frac{m}{s}$ 輪的總共套數。

透過表(18)，有有趣的發現，我們開始研究 $\frac{n}{s}$ 分 $\frac{m}{s}$ 袋放 $\frac{m}{s}$ 輪的套數，其中跟整數分割有關係，因整數分割目前在數學上是一大難題，並且非此次科展重點，所以我們上網參閱歷屆科展，只有找到討論整數分割的主題，沒有研究將一數 n 做整數分割時，表示成 m 個數之和的數量關係，以下用 $P(n,m,c)$ 表示將 n 分成 m 袋，放 c 輪總共套數。上網查詢資料找到 $P(n,m)=P(n-1,m-1)+P(n-m,m)$，但沒有直接表示的公式，因此我們將研究目標聚焦在將 n 分成 m 袋，放 $\frac{m}{s}$ 輪總共有多少套。

研究過後得到：將 n 與 m 化為最簡的 $\frac{n}{s}$ 與 $\frac{m}{s}$，接著找出 $P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)$，利用$P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)$ 能夠找出 $P\left(u\times\frac{n}{s},u\times\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)$ 的套數，原因是：從定理九可知，$<a_m>$ 若為放 $\frac{m}{s}$ 輪的一套，那麼 $<a_m>$ 可以拆解成 s 組的 $<a_{\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s}\right)}>$；也就是說將 $<a_{\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s}\right)}>$ 放兩組，能夠得到 $<a_{\left(2\times\frac{n}{s},2\times\frac{m}{s}\right)}>$ 放 $\frac{m}{s}$ 輪的一套，若將 $<a_{\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s}\right)}>$ 全部輪放過一次，出現過的刪掉，統計最後有幾種可能性，便是 $P\left(2\times\frac{n}{s},2\times\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)$；依此類推能夠得到 $P\left(u\times\frac{n}{s},u\times\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)$。

像是：

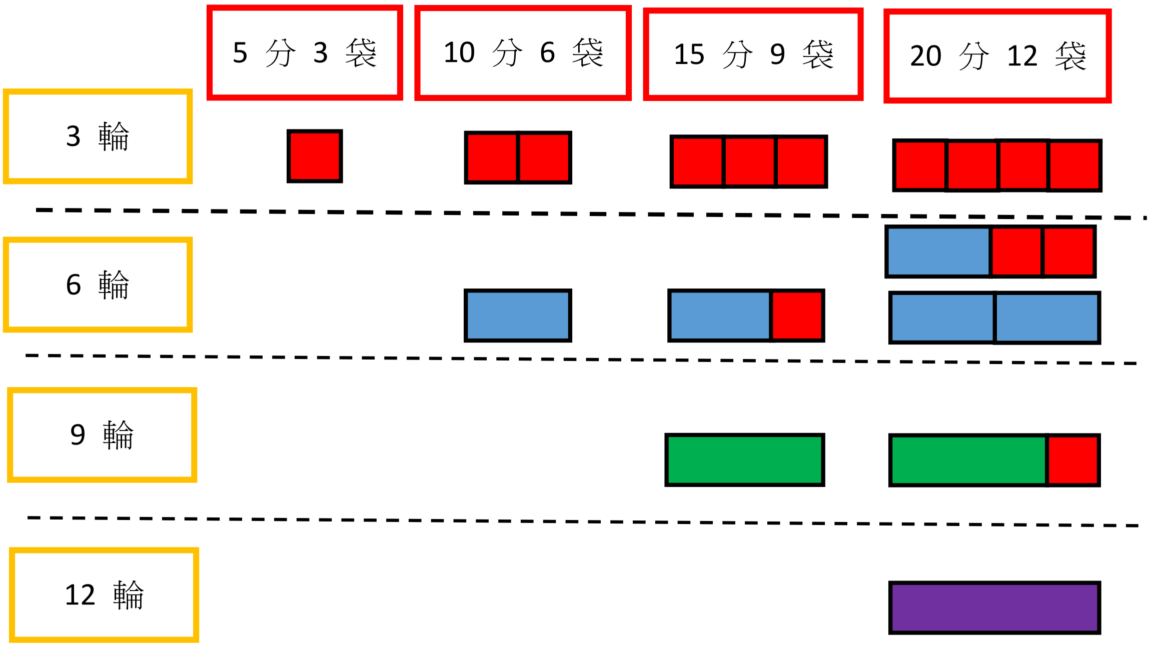
$(14,6)=2$，找 14 分為 6 袋放 3 輪有幾套時，先找到 $<a_{(7,3)}>$，接著輪放，便能找到 $<a_{(14,6)}>$ 放 3 輪有哪些，如表(19)：

$<a_{(7,3)}>$	$<a_{(14,6)}>$放 3 輪的一套
(5,1,1)	(5,1,1,5,1,1)
(4,2,1)	(5,1,1,4,2,1)
(3,3,1)	(5,1,1,3,3,1)
(3,2,2)	(5,1,1,3,2,2)
	(4,2,1,4,2,1)
	(4,2,1,3,3,1)
	(4,2,1,3,2,2)

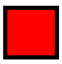
	(3,3,1,3,3,1)
	(3,3,1,3,2,2)
	(3,2,2,3,2,2)

表(19)

雖然發現了這個關係，但要統整成數學表示十分困難，老師提供重複組合的想法，跟我們的發現一模一樣：可以想像成將 $< a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})} >$ 放入 u 個空格中，可以重複放入，那麼可以表示為：$H_u^{P(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s})}$，便可找出 $< a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})} >$ 任意 u 倍放 $\frac{m}{s}$ 輪的數量。而單純以數字表示不太容易去進行研究，因此我們將數字轉換為圖形，如圖(1)，能更好的去解釋，也更方便研究。



圖(1)

 ：5 分 3 袋放 3 輪的情形用 1 × 1 紅色正方形表示。

 ：10 分 6 袋放 6 輪的情形用 1 × 2 藍色長方形表示。

 ：15 分 9 袋放 9 輪的情形用 1 × 3 綠色長方形表示。

 ：20 分 12 袋放 12 輪的情形用 1 × 4 紫色長方形表示。

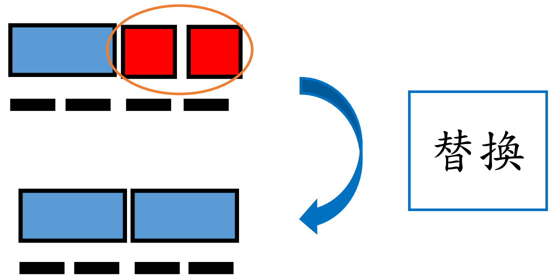
由圖(1)我們得到定理十一：

定理十一：將 n 分 m 袋，當 $m\nmid n$，$(m,n)=s$，則 $P\left(n,m,\frac{m}{s}\right)=H_s^{P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)}$，

且 $P\left(u\times\frac{n}{s},u\times\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)=H_u^{P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)}$。

接著從圖(1)我們觀察到：除了 $P\left(n,m,\frac{m}{s}\right)$ 有關係， $P\left(n,m,2\times\frac{m}{s}\right)$ 也有關係，以 20 分 12 袋放 6 輪為例，如圖(2)：

從圖(2)中可以看到：原先 $P(5,3,3)$ 所佔的兩格(如紅色正方形)，可被 $P(10,6,6)$ 替換(如藍色長方形)，亦即每兩個 $P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)$ 可替換成一個 $P\left(\frac{2n}{s},\frac{2m}{s},\frac{2m}{s}\right)$，透過此方法，我們可以將 20 分 12 袋放 6 輪看成兩種情形，第一種為放入一個 $P(10,6,6)$ 配上兩個 $P(5,3,3)$，第二種為放入兩個 $P(10,6,6)$，轉換成數學式子，得到一般化的結果：



圖(2)

$$H_2^{P(5,3,3)}\times H_1^{P(10,6,6)}+H_2^{P(10,6,6)}=\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{4}{2}\right\rfloor}H_{4-2i}^{P(5,3,3)}\times H_i^{P(10,6,6)}\rightarrow\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor}H_{s-2i}^{P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)}\times H_i^{P\left(\frac{2n}{s},\frac{2m}{s},\frac{2m}{s}\right)}$$

由此得到定理十二：

定理十二：$P\left(n,m,2\times\frac{m}{s}\right)=\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor}H_{s-2i}^{P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)}\times H_i^{P\left(\frac{2n}{s},\frac{2m}{s},\frac{2m}{s}\right)}$。

伍、研究結果

一、完成科學月刊上的問題：

透過窮舉法我們順利解決森棚教官提出的四個問題，從中發現 n,m,c 有關係，並開始尋找其中的關係。

二、將 n 個礦石分成 m 袋後，可以放幾輪使得各袋礦石數相等以及各袋礦石數的數量：

首先研究最少輪數為 1 輪的時候，證明出 $T(n,m,1)=\frac{n}{m}$；接著研究最少輪數為 2 輪時的情形，透過等差數列的想法思路，證明出 $T(n,m,2)=\frac{2n}{m}$；結合以上兩點想法，將其一般化，最終得到此次研究的重要定理：**將 n 個礦石分成 m 袋，若且為若 $<a_m>$ 為放 c 輪的礦石，則 $m|cn$ 且 $T(n,m,c)=\frac{cn}{m}$。**

三、將 n 個礦石分成 m 袋，任意 $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m$ 的最少輪數：

(一) 當 $m|n$ 時的至多輪數及特定條件下的最少輪數：

利用定理五，能夠將任意 $< a_m >$ 慢慢的找出最少輪數，因此我們探究是否有更快速的方法找出 $< a_m >$ 的最少輪數，研究的過程中，目前證明出 $< a_m >$ 的至多輪數：**將 n 分為 m 袋，當 $m|n$ 若 $< a_m >$ 中有 r 項的值為 $\frac{n}{m}$，則 $< a_m >$ 為至多放 $m-r$ 輪的礦石。$(0 < r \leq m-2)$。**

(二) 當 $m \nmid n$ 時的至多輪數及特定條件下的最少輪數：

從 n 為質數此容易的狀況開始研究，連結 m 與 n 互質的情形，得到 $(m,n)=1$ 時，則 $< a_m >$ 為放 m 輪的一套礦石。以此為基礎，探究 $(n,m)=s(s \neq 1)$ ，從特例中繼續研究，得到重要定理：**將 n 分為 m 袋，當 $m \nmid n$，$(m,n)=s$，若 $< a_m >$ 中出現 r 組 $< a_{\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s}\right)} >$ $(0 \leq r \leq s-2)$，且剩下的 $< a_m >$ 中，不能組成 $< a_{\left(b\times\frac{n}{s}, b\times\frac{m}{s}\right)} >$ $(b \leq \frac{s}{2}$ 且 $\frac{bm}{s}|m)$，則 $< a_m >$ 為放 $\frac{m(s-r)}{s}$ 輪的一套。**

四、當 $m \nmid n$ 時，將 n 個礦石分成 m 袋後，放 $\frac{m}{s}$ 輪的總共套數：

探究 $m \nmid n$ 的最少輪數時，其中有有趣的研究方向，我們將研究目標聚焦於將 n 分成 m 袋，放 $\frac{m}{s}$ 輪總共有多少套。透過圖像化的思考，結合重複組合，證明出**將 n 分 m 袋時，當 $m \nmid n$，$(m,n)=s$，則 $P\left(n,m,\frac{m}{s}\right)=H_s^{P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)}$ 且 $P\left(u\times\frac{n}{s},u\times\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)=H_u^{P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)}$**，可以快速找出 n 個礦石分成 m 袋後，放 $\frac{m}{s}$ 輪的總共套數，在此基礎上，繼續研究 $P\left(n,m,2\times\frac{m}{s}\right)$，得到 $P\left(n,m,2\times\frac{m}{s}\right)=\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor} H_{s-2i}^{P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)} \times H_i^{P\left(\frac{2n}{s},\frac{2m}{s},\frac{2m}{s}\right)}$ 。

陸、討論與未來展望

這次科展完成預設的研究目標：

一、$T(n,m,c)=\frac{cn}{m}$ 。

二、找到 $< a_m >$ 的最少輪數。

除此之外還發現 $P\left(u\times\frac{n}{s},u\times\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)=H_u^{P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)}$ ；不過還有一些地方可以努力，像是將

$P\left(u \times \frac{n}{s}, u \times \frac{m}{s}, w \times \frac{m}{s}\right)(u \geq w > 1)$，以及當 $m|n$ 時的最少輪數，用數學式子表示出來。

這次科展的題目在生活以及課堂中都不曾接觸過，但有趣的題目燃起我們的好奇心，我們相信只要有這份熱情，定能有所收穫。但隨著我們進行深入的探討及研究，發現沒有任何一件事情是光靠滿腔熱血就能迎刃而解的，更需要恆心、靈活的運用數學知識以及對未知領域勇敢探索的精神，在這數學題背後還藏著更多的新關卡等待我們去探索。

探討的過程使我們耗費了大量的精神與時間，例如：一開始毫無頭緒到尋找 $T(n, m, c)$ 的規律、到尋找的結論被推翻、到撰寫證明…，這對於我們來說是平常不會接觸到的，相對來說我們必須花費更多的時間及精力來完成這次的科展，過程中當然有許多困惑、迷茫、手足無措，使我們焦頭爛額，但我們亦深知「自古好事多磨難，從來佳期不易得」之理，經過不少付出後，我們不但從陌生到一定程度的了解，更從中有了發現，這些定理、引理不再是毫無生氣的文字，而是有著重要、深遠的意義，也是通往知識的大門。

在數學的道路上，學習到許多偉大的數學家們終其一生都在研究數學，不僅僅是為了在數學界享有聲名，更多的是在讓數學應用在生活之中，這些也造就了如今深奧且神祕的數學世界，雖然我們在數學界這個浩瀚的宇宙中是渺小無比的存在，可若是未來有機會且有能力的條件下，希望本次研究可以被使用在其他的研究中。

柒、參考資料

[1] 游森棚(2021)。森棚教官的數學題，撿礦石。《科學研習月刊》，60-01。

[2] 明道中學(2021)。110 學年度台中市中小學科學展覽會，撿礦石。

[3] Herbert S. Wilf.(2000). *Lectures on Integer Partitions*, p13,

from https://www2.math.upenn.edu/~wilf/PIMS/PIMSLectures.pdf

【評語】030415

作品考慮n個礦石分成 m 個部分($a1, a2, \cdots\cdots, am$)，$a1 \leq a2 \leq \cdots \leq am$。將($a1, a2, \cdots\cdots, am$)調換次序或不調換次序放入 m 個袋子中，稱為放置 1 輪，放置若干輪後使得各袋礦石個數相等，作者探討將n個礦石分成任意m個部分($a1, a2, \cdots\cdots, am$)，在特定條件下所需放置最少輪數的條件。因為這樣的問題很難找到一個固定的規律性，因此前半段作者現列舉了一些較簡單的情況，而後半段探討當 m不是n的因數時，將 n 個礦石分成 m個部分並且放置 m/s 輪後使得各袋礦石個數相等，與整數分拆有關，作者得到一個重複組合數的公式。整體而言，整個作品作者使用窮舉的方式來完成問題，可以感覺出作者的用心，以及對數學的熱忱，但比較可惜的是在後半部的組合公式，並沒有給一個比較清楚的論述。

作品海報

精誠所至金石為開

壹、研究動機

本研究源自於科學研習月刊 60－01 期中「撿礦石」的問題。節錄重點，$(1,2,4)$是放三套的礦石，原因為：$(1,2,4)+(4,1,2)+(2,4,1)=(7,7,7)$，礦石數目才一樣，而且只放一套或兩套，不可能讓每袋礦石數一樣。換句話說，有 n 個礦石分成 m 袋，每袋礦石數分別為 $a_1,a_2,\dots\dots,a_m$，每一輪調換或不調換順序放入 m 袋中，放若干輪後使得各袋礦石數相等。那麼 $a_1,a_2,\dots\dots,a_m$ 最少放幾輪即可相等?我們研究這個問題得到**至多放幾輪即可相等及以知某些條件下的最少輪數。**

貳、研究目的

一、名詞定義及符號定義

名詞定義

（一）分 m 袋：將 n 分為 $(a_1,a_2,\dots\dots,a_m)$，且 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_m$。
（二）放 c 輪：將 $(a_1,a_2,\dots\dots,a_m)$ 調換順序或不調換順序放入袋子中，放一次稱為放 1 輪。
（三）一套：將 $(a_1,a_2,\dots\dots,a_m)$ 調換順序或不調換順序放袋子中，最少輪數可讓各袋礦石數相等。
（四）各袋礦石數 k：將 $(a_1,a_2,\dots\dots,a_m)$ 調換順序或不調換順序放入袋子中，放一定輪數後讓每個袋子的礦石數相等，稱為 k。

符號定義

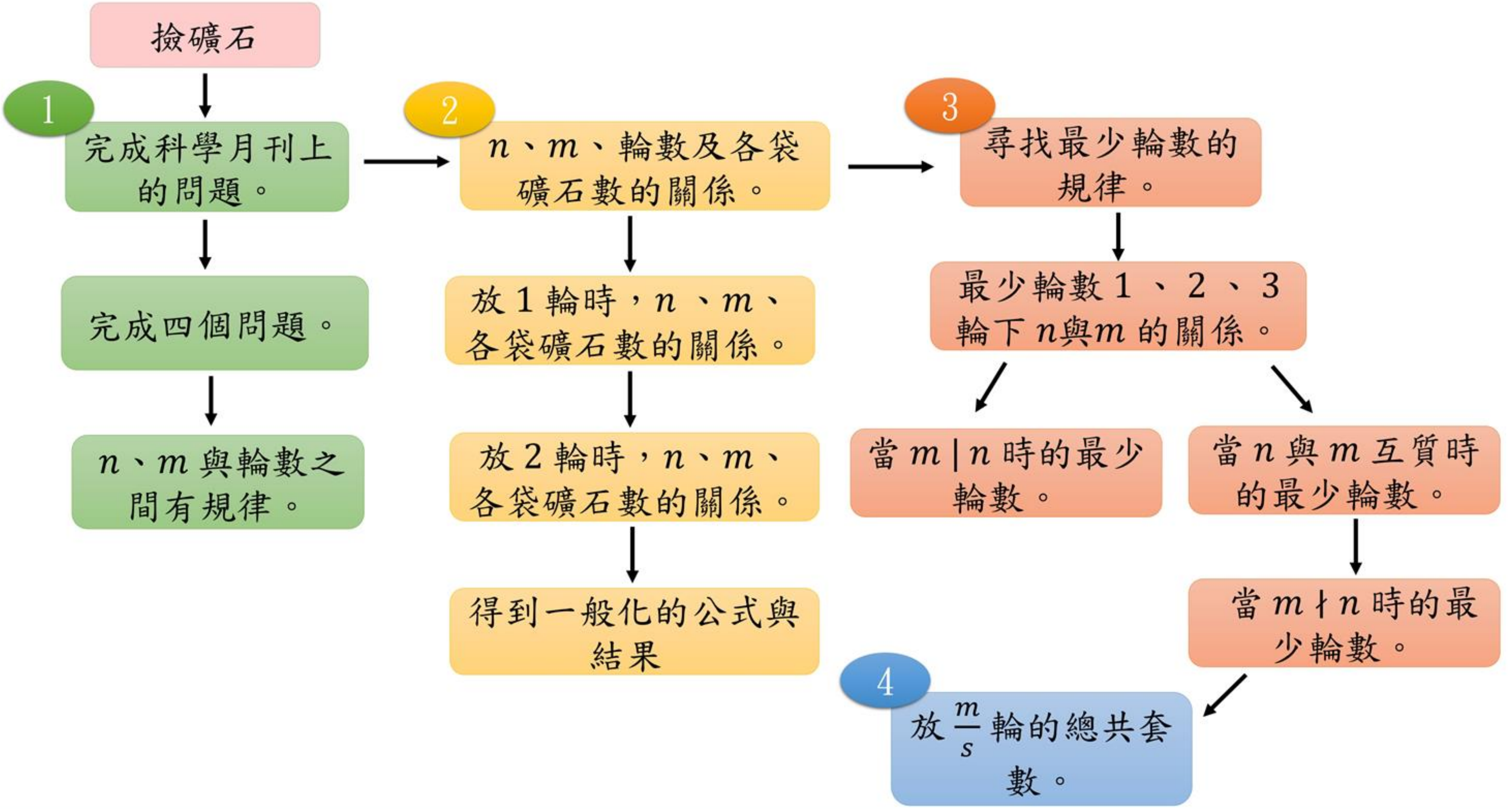
（一）$T(n,m,c)$：將 n 個礦石分成 m 袋，放 c 輪，各袋礦石數。(n,m,c 皆 $\in\mathbb{N},n>m$)
（二）$<a_{(n,m)}>$：將 n 個礦石分成 m 袋，放第 1 輪的 $(a_1,a_2,\dots\dots,a_m)$ 數列。
（三）$<a_m>$：若 n、m 於計算過程中無改變，簡稱為 $<a_m>$。
（四）$P(n,m,c)$：將 n 個礦石分成 m 袋，放 c 輪總共有的套數。

二、研究問題與架構

研究問題

（一）完成科學月刊上的問題。
（二）將 n 個礦石分成 m 袋後，可以放幾輪使得各袋礦石數相等以及各袋礦石數的數量。
（三）將 n 個礦石分成 m 袋，任意 $a_1,a_2,\dots\dots,a_m$ 的最少輪數。
（四）當 $m\nmid n$ 時，將 n 個礦石分成 m 袋後，放 $\frac{m}{s}$ 輪的總共套數。

研究架構



參、研究結果

一、完成科學月刊上的問題。

（一）$(1,3,4,4)$ 為放 3 輪的一套。
（二）$(1,1,2,4)$ 的礦石總數為 8 個，少於 12 個。
（三）$(1,2,3,6)$ 的四個數字皆不同，放 3 輪後各袋礦石數相等。
（四）$(1,1,1,1,2,2,6)$ 最少放 5 輪可以讓各袋礦石數相等，每袋都有 10 個礦石。

二、將 n 個礦石分成 m 袋後，可以放幾輪使得各袋礦石數相等以及各袋礦石數的數量。

（一）將 n 個礦石分成 m 袋，放一輪的各袋礦石數：

$T(n,m,1)$：將 n 個礦石分成 m 袋，若 m 袋中的礦石是放 1 輪的一套礦石，則 $m|n$ 且 $T(n,m,1)=\frac{n}{m}$。

（二）將 n 個礦石分成 m 袋，放兩輪的各袋礦石數：

$T(n,m,2)$：將 n 個礦石分成 m 袋，若 $<a_m>$ 中 $a_1+a_m=a_2+a_{m-1}=\cdots=\frac{2n}{m}$，則 $<a_m>$ 為放 2 輪的一套礦石，$m|2n$ 且 $T(n,m,2)=\frac{2n}{m}$。

（三）將 n 個礦石分成 m 袋，放c輪的各袋礦石數：

將 n 個礦石分成 m 袋，若且為若 $<a_m>$ 為放 c 輪的礦石，則 $m|cn$ 且 $T(n,m,c)=\frac{cn}{m}$。

定理五：將 n 個礦石分成 m 袋，若且為若 $<a_m>$ 為放 c 輪的礦石，則 $m|cn$ 且 $T(n,m,c)=\frac{cn}{m}$。

三、將 n 個礦石分成 m 袋，任意 $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m$ 的最少輪數：

(一)當 $m|n$ 時的至多輪數及特定條件下的最少輪數：

利用定理五，探究更快速的方法找出最少輪數：

1. 透過表(1)猜測：
   當 $< a_m >$ 中有 n 項 $\frac{n}{m}$ 時，會是 $m-r$ 輪的一套礦石。
2. 有些 $< a_m >$ 中沒有 $\frac{n}{m}$ 卻不是 m 輪，利用定理五中進一步研究，發現有趣的情形：
   若輪數少於 m 輪，且其中沒有 $\frac{n}{m}$，則 q 項相加值為 $\frac{n}{m}$ 的倍數，且 $q|m-q$。
3. 由此證明出 $< a_m >$ 的至多輪數：

n 分 m 袋	$< a_m >$	輪數	$\frac{n}{m}$ 出現次數
30 分 6 袋	(25,1,1,1,1,1)	6	0
30 分 6 袋	(21,5,1,1,1,1)	5	1
30 分 6 袋	(17,5,5,1,1,1)	4	2
30 分 6 袋	(17,9,1,1,1,1)	4	0
30 分 6 袋	(13,13,1,1,1,1)	3	0
30 分 6 袋	(11,5,5,5,3,1)	3	3

表(1)

定理七：將 n 分為 m 袋，當 $m|n$ 時，若 $< a_m >$ 中有 r 項的值為 $\frac{n}{m}$，則 $< a_m >$ 為至多放 $m-r$ 輪的礦石。$(0 < r \leq m-2)$

(二) 當 $m \nmid n$ 時的至多輪數及特定條件下的最少輪數：

1、n 和 m 互質的最少輪數

從 n 為質數此較容易的狀況開始研究，證明出將 n 個礦石分成 m 袋，若 n 為質數，則 $< a_m >$ 為放 m 輪的一套。並連結 m 與 n 互質的情形，得到定理八：

將 n 個礦石分成 m 袋，若 $(n,m)=1$，則 $< a_m >$ 為放 m 輪的一套礦石。

2、$(n,m)=s\ (s \neq 1)$ 的最少輪數

(1)將情形一般化，探究 $(n,m)=s(s \neq 1)$ 。

(2) $< a_m >$ 中每 $\frac{m}{s}$ 個一組分為 s 組， s 組皆為 $< a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})} >$ ，便會是 $\frac{m}{s}$ 輪。

(3)若 $(m,n)=s$，先將 $< a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})} >$ 找出，則 $< a_m >$ 的最少輪數與 $< a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})} >$ 的組數有關係，若出現 r 組，那麼剩下的數相加值為 $\frac{n}{m} \times \left(m - \frac{m}{s} \times r\right)$。

(4)定理九：將 n 分為 m 袋，當 $\boldsymbol{m \nmid n}$，$\boldsymbol{(m,n)=s}$，**若** $\boldsymbol{< a_m >}$ **中有** $\boldsymbol{r}$ **組** $\boldsymbol{< a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})} >}$

$\boldsymbol{(0 \leq r \leq s-2)}$，**則** $\boldsymbol{< a_m >}$ 為放 $\boldsymbol{\frac{m(s-r)}{s}}$ 輪的一套。

3、$< a_m >$ 中沒有 $< a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})} >$ 的最少輪數

研究過程中有些 $< a_m >$ 中沒有 $< a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})} >$ ，放的輪數卻少於 m 輪。

進一步研究後得知，若 $m|c$ 且 $c \leq \frac{m}{2}$，則有可能將 m 個數字拆成 c 個一組，此時會有 $\frac{m}{c}$ 組放 c 輪的一套，此時最少輪數會少於 m 輪。

經由以上研究，得到重要定理：

定理十：將 n 分為 m 袋，當 $m \nmid n$，$(m,n)=s$，若 $< a_m >$ 中有 r 組 $< a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})} >$ $(0 \leq r \leq s-2)$，且剩下的 $< a_m >$ 中，不能組成 $< a_{(b\times\frac{n}{s},b\times\frac{m}{s})} >$ $(b \leq \frac{s}{2}$ 且 $\frac{bm}{s}|m)$，則 $< a_m >$ 為放 $\frac{m(s-r)}{s}$ 輪的一套。

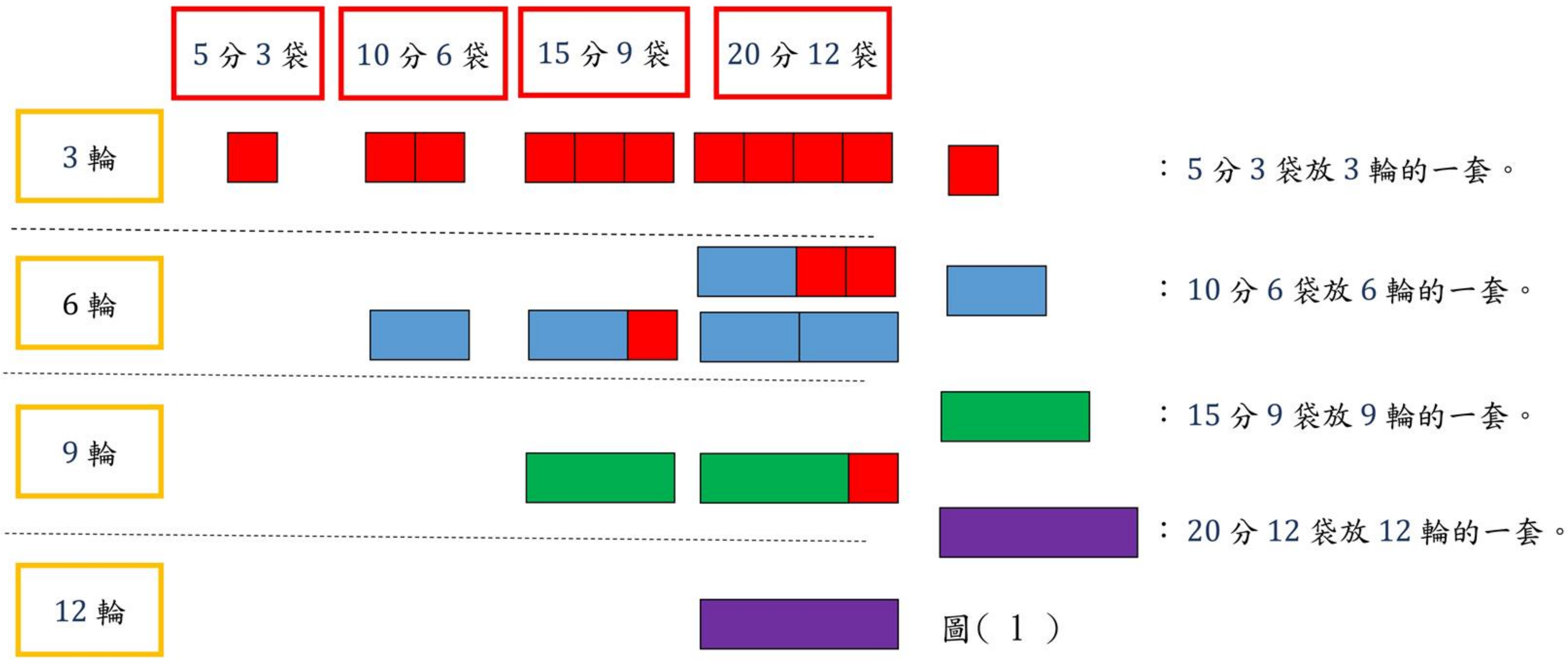
表(2)

n 分 m 袋	$(m,n)=s$	$< a_m >$	輪數	$< a_{(\frac{n}{s},\frac{m}{s})} >$ 出現次數 r
20 分 12 袋	4	(8,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	12	0
20 分 12 袋	4	(7,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	9	1
20 分 12 袋	4	(5,5,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	6	0
20 分 12 袋	4	(5,4,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	6	0
20 分 12 袋	4	(5,3,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1)	6	2
20 分 12 袋	4	(3,3,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1)	3	4

四、當 $m \nmid n$ 時，將 n 個礦石分 m 袋後，放 $\frac{m}{s}$ 輪的總共套數：

（一）$P\left(n,m,\frac{m}{s}\right)=H_s^{P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)}$

透過圖像化的思考，結合重複組合：



圖（ 1 ）

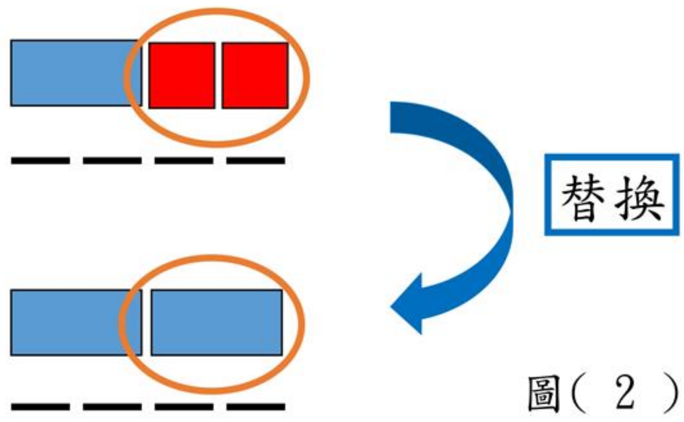
定理十一：$P\left(n,m,\frac{m}{s}\right)=H_s^{P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)}$ 且 $P\left(u\times\frac{n}{s},u\times\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)=H_u^{P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)}$

（二）$P\left(n,m,2\times\frac{m}{s}\right)=\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor}H_{s-2i}^{P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)}\times H_i^{P\left(\frac{2n}{s},\frac{2m}{s},\frac{2m}{s}\right)}$

如圖（ 2 ）：
原先 $P(5,3,3)$ 所佔的兩格(如紅色正方形)，可被 $P(10,6,6)$ 替換(如藍色長方形)，亦即每兩個 $P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)$ 可替換成一個 $P\left(\frac{2n}{s},\frac{2m}{s},\frac{2m}{s}\right)$，透過此方法，我們可以將 20 分 12 袋放 6 輪看成兩種情形，第一種為放入一個 $P(10,6,6)$ 配上兩個 $P(5,3,3)$，第二種為放入兩個 $P(10,6,6)$。將想法轉換成數學式子，得到一般化的結果：

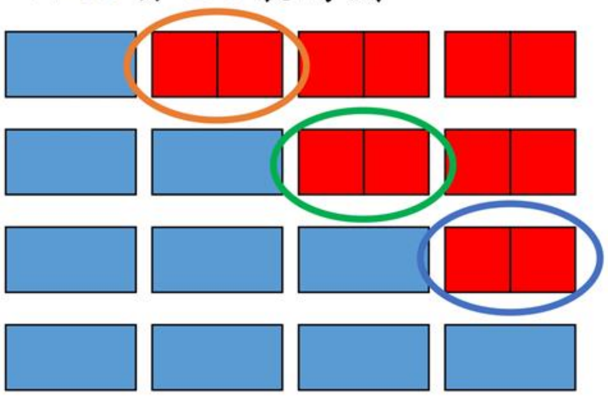
$$H_2^{P(5,3,3)}\times H_1^{P(10,6,6)}+H_2^{P(10,6,6)}=\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{4}{2}\right\rfloor}H_{4-2i}^{P(5,3,3)}\times H_i^{P(10,6,6)}\rightarrow\quad\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor}H_{s-2i}^{P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)}\times H_i^{P\left(\frac{2n}{s},\frac{2m}{s},\frac{2m}{s}\right)}$$

定理十二：$P\left(n,m,2\times\frac{m}{s}\right)=\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor}H_{s-2i}^{P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)}\times H_i^{P\left(\frac{2n}{s},\frac{2m}{s},\frac{2m}{s}\right)}$



圖（ 2 ）

以 40 分 24 袋為例：



圖（ 3 ）

肆、討論及未來展望

這次科展完成預設的研究目標：
一、$T(n,m,c)=\frac{cn}{m}$。
二、找到 $<a_m>$ 的最少輪數。
除此之外還發現 $P\left(u\times\frac{n}{s},u\times\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)=H_u^{P\left(\frac{n}{s},\frac{m}{s},\frac{m}{s}\right)}$
還有地方可以繼續研究，像是將 $P\left(u\times\frac{n}{s},u\times\frac{m}{s},w\times\frac{m}{s}\right)(u\geq w>1)$，以及當 $m|n$ 時的最少輪數，用數學式子表示出來。

伍、參考資料

[1] 游森棚(2021)。森棚教官的數學題，撿礦石。《科學研習月刊》，60-01。
[2] 明道中學(2021)。110學年度台中市中小學科學展覽會，撿礦石。
[3] Herbert S. Wilf.(2000). *Lectures on Integer Partitions*, p13,