

中華民國第 63 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

030414

三足鼎立-探討三角形不變心的切割模式

學校名稱：彰化縣立彰泰國民中學

作者： 國二 李定鴻 國二 陳彥宇 國二 吳昀禧	指導老師： 陳曉煒 林佑寰
---	-----------------------------

關鍵詞：三角形、重心、重心不變

摘要

本研究探討原三角形掉落一角後重心產生偏移後，要如何透過截去另兩角的方式才能使剩餘六邊形重心能回復到原三角形重心。文中依據原三角形、掉落三角形、校正三角形分成六類探討不變心的切割方式及是否存在唯一性，並透過水平、垂直分量建立數學模型來說明作用在物體上的力矩平衡，達成重心不會產生偏移。

本研究利用水平、垂直分量不發生轉動的條件，列出數學式求出不變心裁切的位置，並利用 *GeoGebra* 軟體繪圖驗證；且得知僅需【結論 3】的做法，就可以解決所有缺角三角形保持重心不變的問題。更進一步發現維持不變心的三塊頂點三角形面積並不需要相等，打破了 49 屆全國科展《剪不斷，理還亂-我就是不變心》的結論。

壹、研究動機

在資優班數學專題課程中遇到了一道有關重心的問題：「在 $\triangle ABC$ 中(G 為重心)，如果掉落一塊 $\triangle ADE$ ，是否能透過切割另外兩個角來使剩餘六邊形的重心維持在 G 呢？」根據物理學平衡的概念我們可以知道：①如果原 $\triangle ABC$ 和掉落 $\triangle ADE$ 都是正三角形，只要從剩餘兩角中分別截去和掉落正 $\triangle ADE$ 全等的兩個正三角形(圖 1.1)即可。②如果原 $\triangle PQR$ 掉落一塊非正三角形時(圖 1.2)，又該如何切割才能使剩餘六邊形重心維持在原重心 G 呢？

在正式探討這個問題前我們查閱了相關文獻，發現這個問題曾經有人做過研究，並且找到一種通過等面積切割解決任意缺角三角形問題的方式。但是針對其研究結論的部份我們產生了質疑：要使重心不變，三塊頂點三角形的面積一定要相等嗎？面積相等是重心不變的充分條件嗎？切割方式真的只有一種嗎？如果回到重心的本質思考，只要使得面積相等的等面積平分線就一定會通過重心嗎？就在帶著許多疑問和好奇的心態下展開了科展研究之旅。

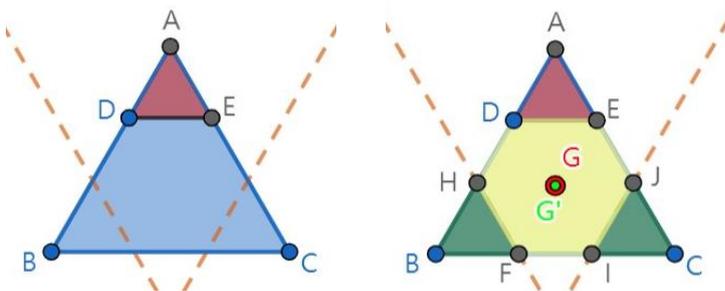


圖 1.1 正三角形的掉落與切割

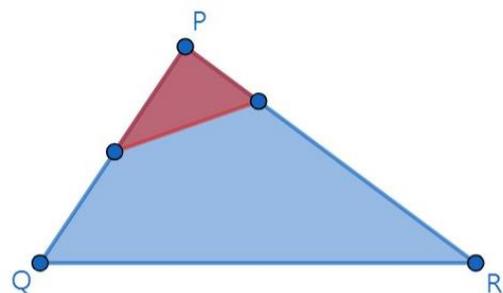


圖 1.2 非正三角形的缺角問題

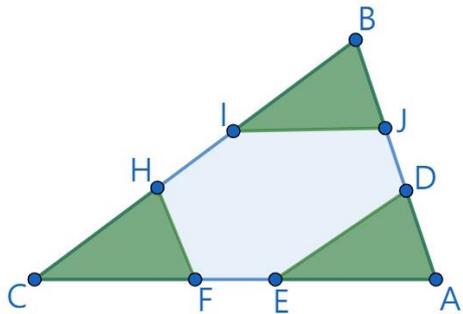
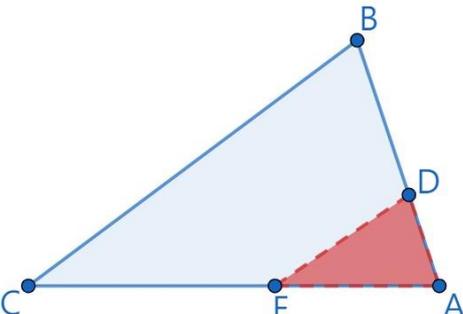
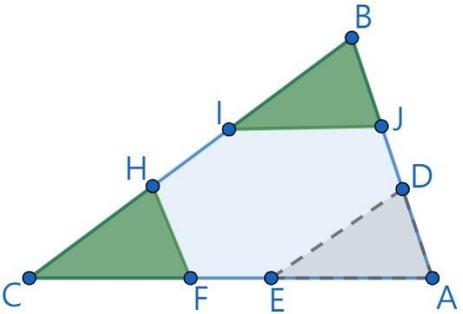
貳、研究目的與名詞釋義

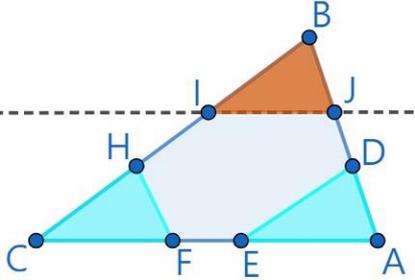
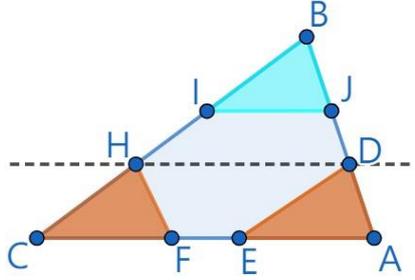
一、研究目的

- (一)探討缺角三角形重心不變的分類(Case1~ Case6) 中，切割方式是否**存在與唯一性**。
- (二)探討不同限制條件的分類中，三個頂點三角形**面積不完全相等**時，缺角三角形不變心切割的數學性質推導。
- (三)探討三個頂點三角形**面積完全不相等**時，缺角三角形不變心切割的存在性與切割方式。

二、名詞釋義

(一)圖形名詞定義：在研究中，因應研究的需要，我們先將會使用的名詞定義如下。

名稱	說明	圖例
頂點三角形	三角形的三個頂點所切割出的三角形 $\triangle ADE$ 、 $\triangle BIJ$ 、 $\triangle CHF$ 稱之。 其中兩頂點三角形和原三角形重合在同一邊上的邊長相加需小於原三角形邊長。	
掉落三角形	為原始問題中，一開始所掉落的頂點三角形如 $\triangle ADE$ 稱之。 (文中掉落三角形以紅色表示)	
校正三角形	為了使得重心保持不變，我們所切割的另外兩個頂點三角形如 $\triangle BIJ$ 、 $\triangle CHF$ 稱之。	

<p>平行截角 三角形</p>	<p>在$\triangle ABC$中，令$IJ \parallel \overline{CA} \Rightarrow \triangle BIJ \sim \triangle ABC$。由平行線所截之頂點三角形如$\triangle BIJ$稱之。</p>	
<p>等底等積 三角形</p>	<p>令$\overline{CF} = \overline{EA}$、且在$H$點作平行於$\overline{CA}$之線段相交於$D$點，所截等面積之頂點三角形如$\triangle CHF$、$\triangle ADE$稱之(等底等高)。</p>	

(二)符號設定：

為了研究的方便，我們統一研究中符號的使用。

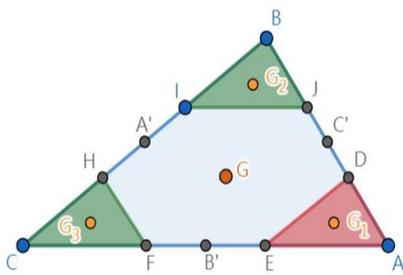


圖 4.2.1

- g_1 ：四邊形 $FHIJ$ 之重心
- g_2 ：四邊形 $DEFJ$ 之重心
- g_3 ：四邊形 $DEIJ$ 之重心
- g_4 ：四邊形 $EFHI$ 之重心
- W_1 ：頂點三角形 $\triangle ADE$ 之面積
- W_2 ：頂點三角形 $\triangle BIJ$ 之面積
- W_3 ：頂點三角形 $\triangle CHF$ 之面積

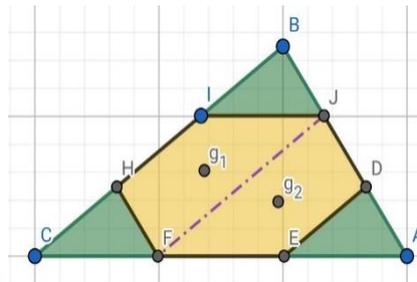


圖 4.2.2

- G ：原三角形 $\triangle ABC$ 之重心
- G_1 ：頂點三角形 $\triangle ADE$ 之重心
- G_2 ：頂點三角形 $\triangle BIJ$ 之重心
- G_3 ：頂點三角形 $\triangle CHF$ 之重心
- A' ：原三角形 \overline{BC} 邊長之中點
- B' ：原三角形 \overline{CA} 邊長之中點
- C' ：原三角形 \overline{AB} 邊長之中點

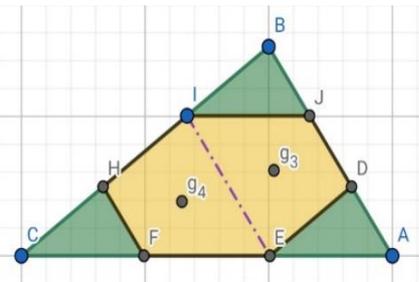


圖 4.2.3

(三)其他定義：

- 1.不變心切割：意指在本研究中，缺角三角形的三個角都被移除後，能保持剩餘六邊形的重心 g 維持在原三角形中心 G 不改變的狀態。
- 2.研究環境設定為均勻平面：本研究將實驗定義在均勻平面上，因此研究中將面積視同為質量(重量)來進行探討。

參、研究設備與器材

(一)電腦、平板、紙、筆

(二)GeoGebra 軟體

肆、研究過程與方法



圖 4.1 研究思考流程圖

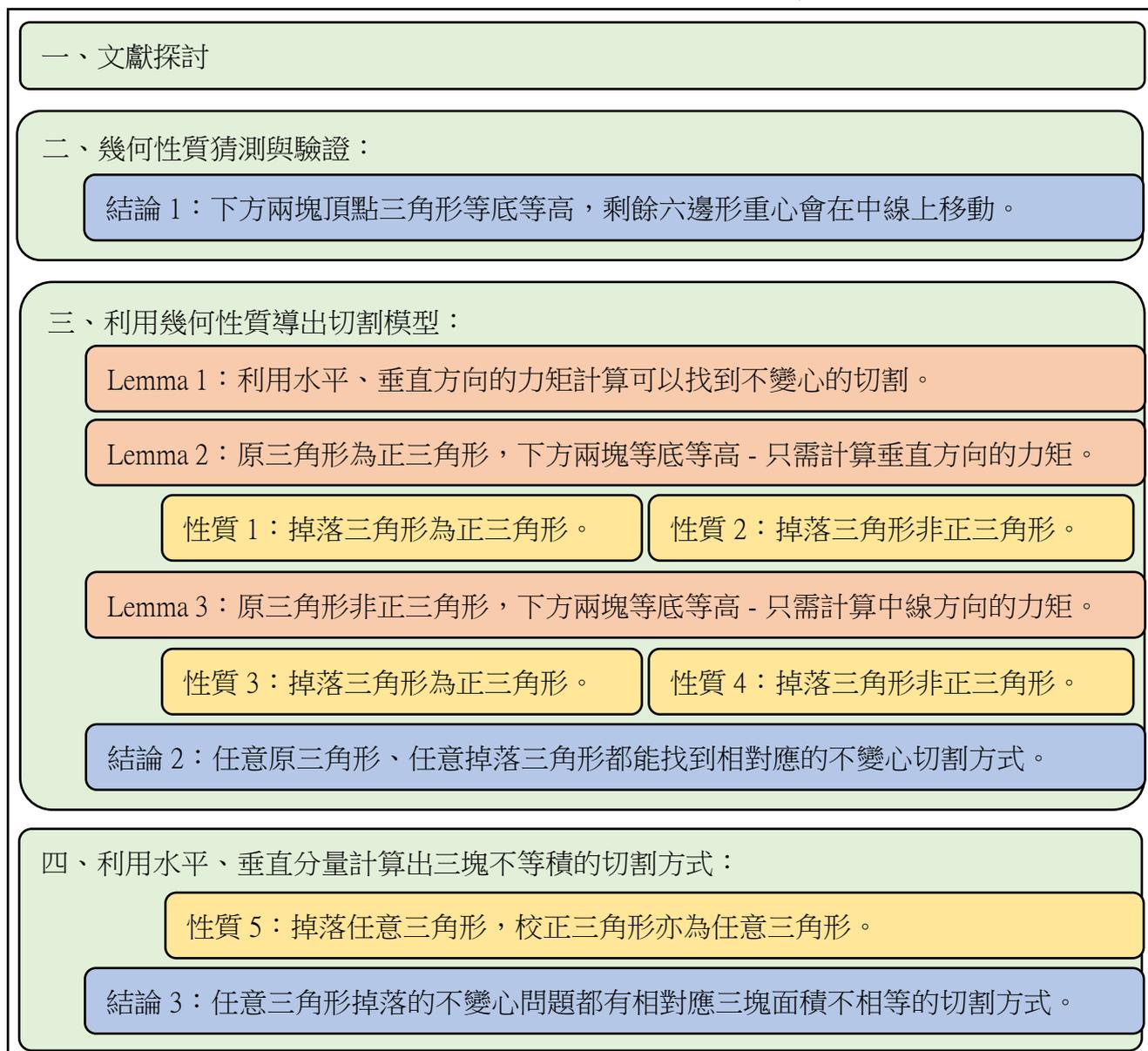


圖 4.2 研究架構脈絡圖

一、文獻探討

(一)第 31 屆中小學科展《尋找多邊形重心》，利用三角形重心為中線交點的性質，發展出找尋凸多邊形重心的方法。其中巧妙的進行不同方向的兩次切割並求得交點(圖 4.1.1)，來省去其他文獻中需要不斷計算三角形面積的麻煩。本研究中使用其找六邊形重心的方法(圖 4.1.2)，對不變心作圖的結果進行驗證。

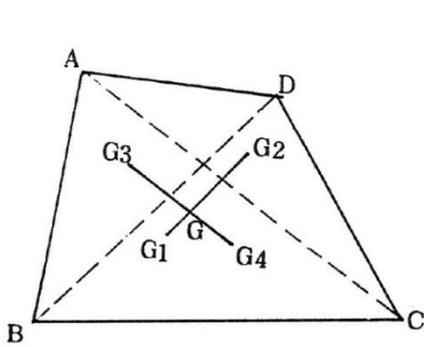


圖 4.1.1 四邊形重心作圖

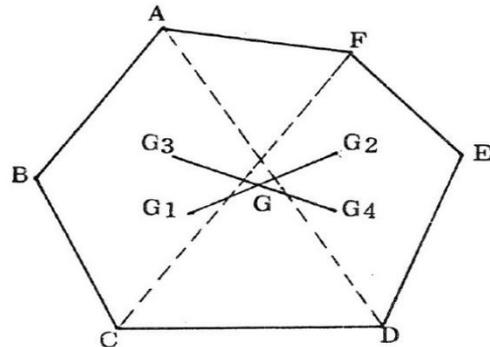


圖 4.1.2 六邊形重心作圖

圖片來源：王哲麒、翁士傑(1991)

(二)第 49 屆全國中小學科展《剪不斷，理還亂 - 我就是不變心》，利用平行的概念說明同底等高的兩相異三角形其重心會在平行底邊的直線上移動(圖 4.1.3)，並利用重心平行轉移定理，透過同底等高的正(等腰)三角形作為媒介，找出一種可以解決缺角三角形重心不變的方法(圖 4.1.4)。

我們質疑文獻中所提到，若使三塊頂點三角形面積相等並且使用特定的切割方式，就可以完成不變心作圖，其中切法是唯一的；我們很好奇面積相同是否為三角形不變心切割的必要條件？若頂點三角形的面積不相等是否就無法完成不變心切割？其中的切法又是否唯一？

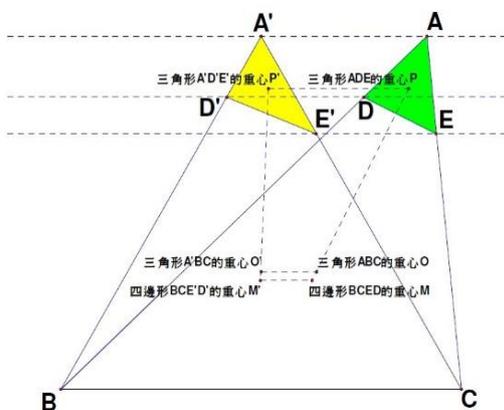


圖 4.1.3 重心平行轉移

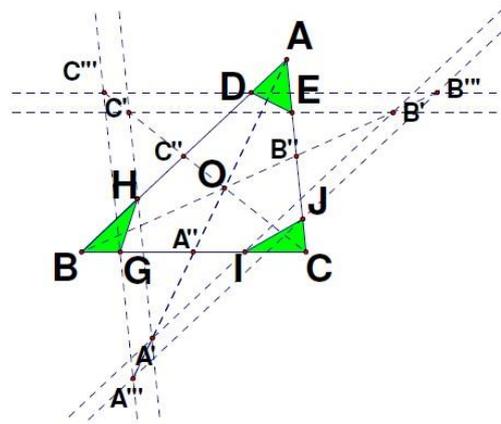
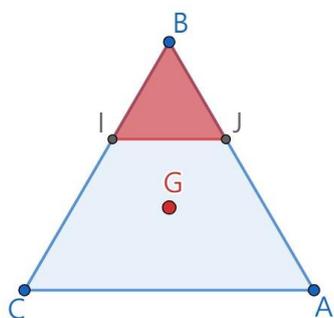


圖 4.1.4 不變心作圖

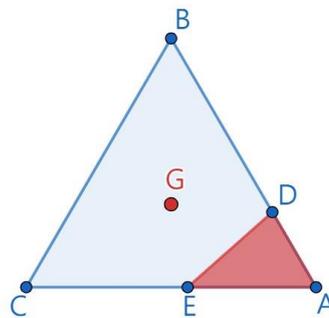
圖片來源：張君瑋、王文彥、林羿旻、謝秉耕(2009)

二、缺角三角形不變心切割的分類中，存在性與唯一性的探討

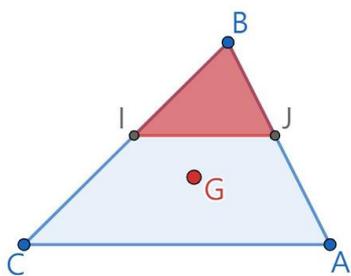
依據不變心切割的原始問題，我們將原三角形分為正三角形和非正三角形、掉落三角形分成正三角形(平行截角三角形)及非正三角形(非平行截角三角形)，一共四種類型來做全面性的討論：



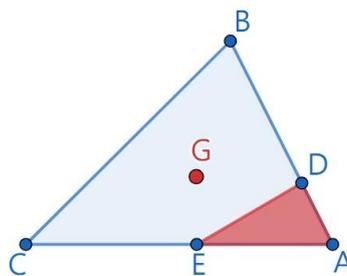
原三角形為正三角形，
掉落三角形亦為正三角形。



原三角形為正三角形，
掉落三角形非正三角形。



原三角形非正三角形，
掉落三角形為平行截角三角形。



原三角形非正三角形，
掉落三角形非平行截角三角形。

根據上述之分類，我們利用 *GeoGebra* 軟體繪圖並進行拖曳，從中發現了通過裁切另外兩個校正三角形，不變心作圖的方式是存在的。

分類	原三角形	掉落三角形	校正三角形	切法唯一
Case1	正三角形	正三角形	2 全等正三角形	是
Case2			2 等底等積三角形	否
Case3		非正三角形	等底等積三角形 平行截角三角形	是
Case4	非正三角形	平行截角三角形	2 平行截角三角形 (2 全等三角形)	是
Case5			2 等底等積三角形	否
Case6		任意三角形	等底等積三角形 平行截角三角形	是

(一)原三角形為正三角形，掉落三角形亦為正三角形之不變心切割。

其中又可分為兩類，依據校正三角形和掉落三角形是否全等分為以下兩種情形：

1.二校正三角形和掉落三角形全等。 < Case1 >

原三角形 $\triangle ABC$ 為正三角形，掉落了一塊正 $\triangle BIJ$ 後，若二校正 $\triangle CHF$ 、 $\triangle ADE$ 和掉落 $\triangle BIJ$ 全等(正三角形)，則剩餘六邊形之重心 g 的位置不會發生偏移(和原三角形重心 G 重合)。

因為校正三角形和掉落三角形為全等之正三角形，因此切割的方式是唯一的。

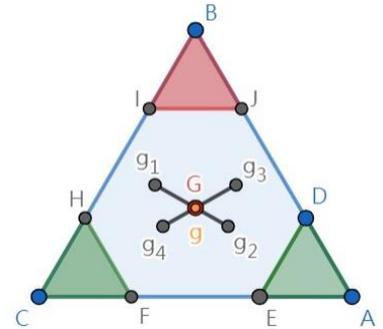


圖 4.2.1 重心保持不變

2.二校正三角形和原掉落三角形非全等。 < Case2 >

原 $\triangle ABC$ 為正三角形，掉落了一塊正 $\triangle BIJ$ 後，若校正 $\triangle CHF$ 、 $\triangle ADE$ 為等底等積三角形(將 F 點固定時 E 點也同時被固定)，則在拖曳動點 H 時可以發現，六邊形的重心 g 會在原 $\triangle ABC$ 之中線 $\overline{BB'}$ 上移動(圖 4.2.2)。

因此我們可以得知：若 $\overline{CF} = \overline{EA}$ 且長度在某個範圍之內，則在移動點 H 的過程中一定可以找到一個點(圖 4.2.4)，恰巧使得六邊形重心 g 和原三角形的重心 G 重合。此外重心的移動位置應該存在極大極小值的限制，在後續的研究中會做詳細的探討。

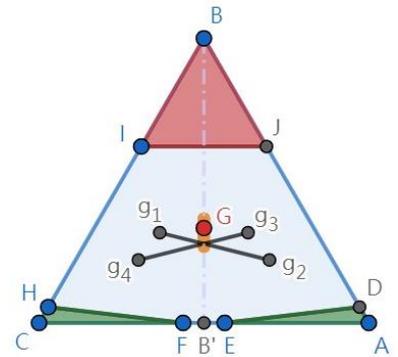


圖 4.2.2 重心移動軌跡

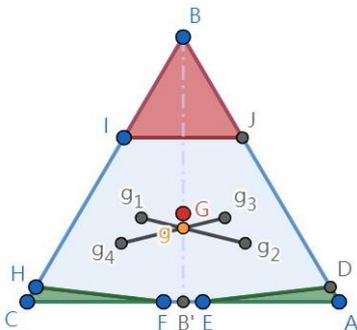


圖 4.2.3

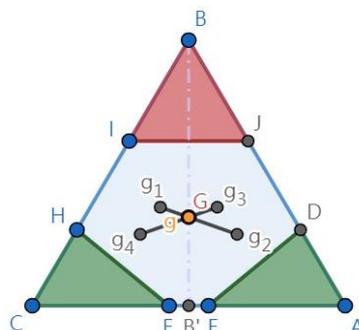


圖 4.2.4

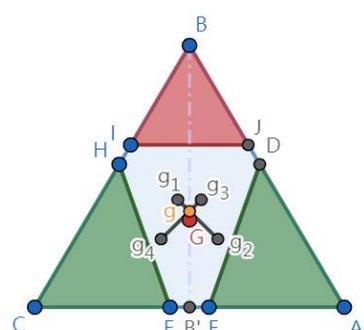


圖 4.2.5

其次，因為 $\overline{CF}(\overline{EA})$ 的長度可以改變，因此使得 $G = g$ 的切割方式並不唯一，而我們也可以將 Case1 歸類為 Case2 的一種特例。

(二)原三角形為正三角形，掉落三角形非正三角形之不變心切割。 < Case3 >

原 $\triangle ABC$ 為正三角形，掉落了一塊任意 $\triangle ADE$ 後，由於有了 Case2 的結論，我們可以進行反向切割。先切出一塊和掉落三角形等底等高的 $\triangle CHF$ ，接著再切一個正 $\triangle BIJ$ ，並且透過點 I 來控制正 $\triangle BIJ$ 的大小。在移動的過程我們發現，六邊形的重心 g 會在原 $\triangle ABC$ 之中線 $\overline{BB'}$ 上上下下移動(圖 4.2.6)。

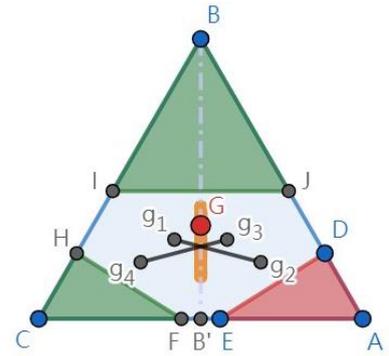


圖 4.2.6 重心移動軌跡

因此我們可以得知，在移動點 I 來改變校正 $\triangle BIJ$ 大小的過程中一定可以找到一個點(圖 4.2.8)，恰巧使得六邊形重心 g 和原三角形的重心 G 重合。

和 Case2 發現的不同是，由於校正 $\triangle CHF$ 的切割方式已經被掉落 $\triangle ADE$ 給固定，因此我們所找到的切割方式是**唯一**的。

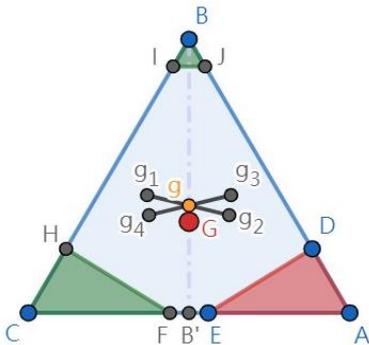


圖 4.2.7

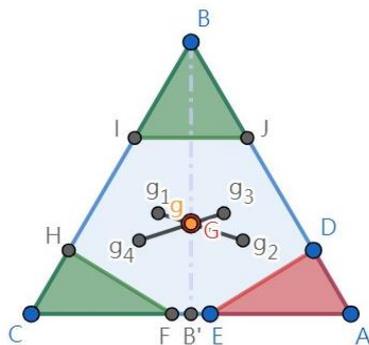


圖 4.2.8

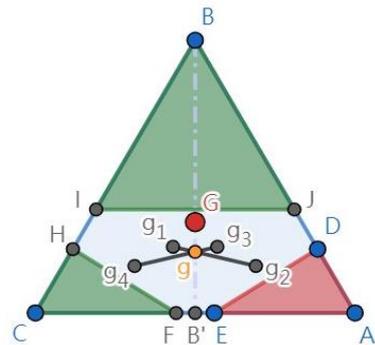


圖 4.2.9

(三)原三角形非正三角形，掉落三角形為平行截角三角形之不變心切割。

其中又可分為兩類，依據校正三角形和掉落三角形是否全等分為以下兩種情形：

1.二校正三角形和原掉落三角形**全等**。 < Case4 >

原 $\triangle ABC$ 為任意三角形(非正三角形)，掉落一塊平行截角 $\triangle BIJ$ ，若校正 $\triangle CHF$ 、 $\triangle ADE$ 和掉落 $\triangle BIJ$ 全等(皆為平行截角三角形)，則剩餘六邊形之重心 g 位置不會發生偏移(和原三角形重心 G 重合)。

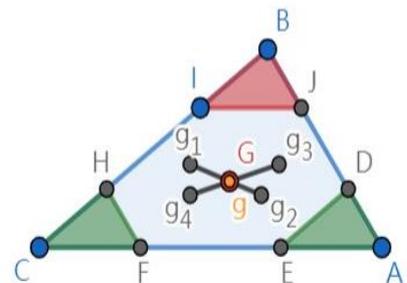


圖 4.2.10 重心保持不變

由於校正三角形和掉落三角形全等，因此切割的方式是**唯一**的。

2.二校正三角形和原掉落三角形不全等。 < Case5 >

原 $\triangle ABC$ 為任意三角形(非正三角形)，掉落了一塊平行截角 $\triangle BIJ$ 後，若校正 $\triangle CHF$ 、 $\triangle ADE$ 為等底等積三角形(固定點 F 時 E 點也同時被固定)，則在拖曳動點 H 時可以發現，六邊形的重心會在原 $\triangle ABC$ 之中線 $\overline{BB'}$ 上移動(圖 4.2.11)。因此我們可以得知，若 $\overline{CF} = \overline{EA}$ 且長度在某個範圍內，則在拖曳動點 H 的過程中一定可以找到一個點(圖 4.2.13)恰巧使得六邊形重心 g 和原三角形的重心 G 重合。

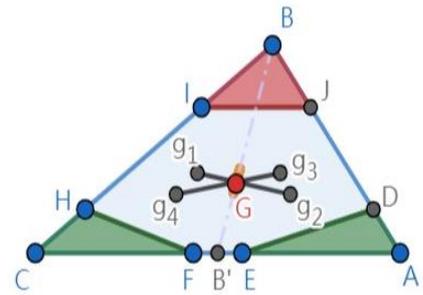


圖 4.2.11 重心移動軌跡

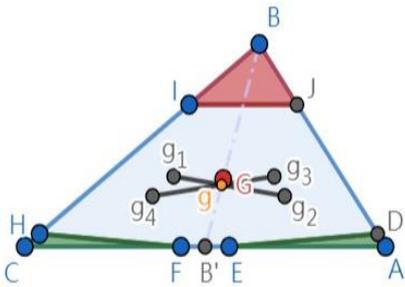


圖 4.2.12

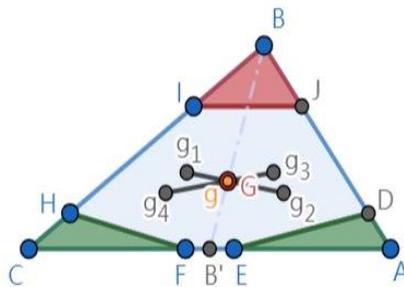


圖 4.2.13

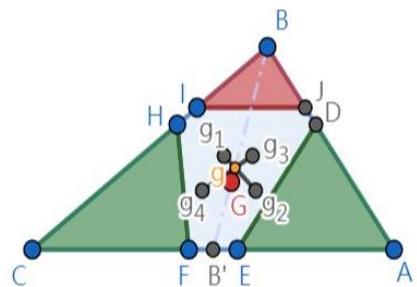


圖 4.2.14

其次，因為 \overline{CF} 的長度可以改變，因此可以使得 $G = g$ 的切割方式不唯一，而我們也可以將 Case4 歸類為 Case5 的一種特例。

(四)原三角形非正三角形，掉落三角形非平行截角三角形之不變心切割。 < Case6 >

原 $\triangle ABC$ 為任意三角形(非正三角形)，掉落了一塊任意 $\triangle DEA$ ，由於有了 Case5 的結論，我們可以進行反向切割，先切出一塊和 $\triangle ADE$ 等底等高的 $\triangle CHF$ ，接著再切一個平行截角 $\triangle BIJ$ ，並且透過點 I 來控制 $\triangle BIJ$ 的大小。在移動的過程我們發現，六邊形的重心 g 會在原 $\triangle ABC$ 之中線 $\overline{BB'}$ 上移動(圖 4.2.15)。

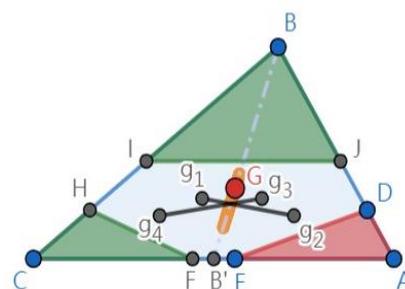


圖 4.2.15 重心移動軌跡

因此我們可以得知，在移動點 I 來改變校正 $\triangle BIJ$ 大小的過程中，一定可以找到一個點(圖 4.2.17)，恰巧使得六邊形重心 g 和原三角形的重心 G 重合。

和 Case5 發現的不同是，由於校正 $\triangle HCF$ 的切割方式已經被掉落 $\triangle DEA$ 給固定，因此我們所找到的切割方式是**唯一**的。

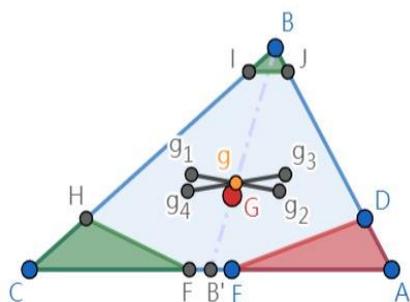


圖 4.2.16

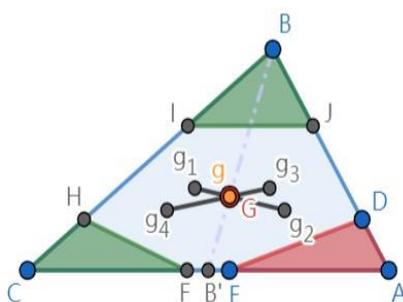


圖 4.2.17

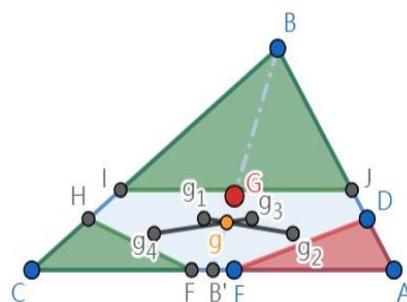


圖 4.2.18

從上述 Case1-Case6 的討論中，我們可以得到下方的結論：

【結論 1】

若在原 $\triangle ABC$ 底邊的兩個頂點三角形($\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$)為等底等積三角形，則剩餘六邊形的重心 g 會在原 $\triangle ABC$ 的中線上移動。因此在任意原三角形掉落任意頂點三角形的命題中，必定**存在**能使得 $G = g$ 的另外兩個校正三角形，且切割方式在掉落三角形為平行截角三角形時(Case2、Case5)並不**唯一**。

三、不同限制條件的分類中，三個頂點三角形面積不完全相等時，缺角三角形不變心切割的數學性質推導。

【Lemma 1】

若在原 $\triangle ABC$ 上移除的三塊頂點三角形 $\triangle ADE$ 、 $\triangle BIJ$ 、 $\triangle CHF$ 滿足：

$$\overrightarrow{GG_1} \times \triangle ADE \text{面積}(W_1) + \overrightarrow{GG_2} \times \triangle BIJ \text{面積}(W_2) + \overrightarrow{GG_3} \times \triangle CHF \text{面積}(W_3) = \vec{0}$$

則剩餘六邊形重心 g 和原 $\triangle ABC$ 重心 G 重合($g = G$)。

本研究討論均勻平面上原 $\triangle ABC$ 移除三個頂點三角形後，剩餘六邊形重心 g 是否能維持在原 $\triangle ABC$ 重心 G 。若使作用在物體上的力矩平衡，便可說明物體不發生轉動，在本研究中將其定義為重心不會產生偏移。

我們從力矩平衡的概念來計算重心是否產生偏移(圖 4.3.1)，若三塊頂點三角形對於原 $\triangle ABC$ 重心 G 能達成力矩平衡(圖 4.3.2)，則我們可以直觀的推論出剩餘六邊形的重心 g 必定會和 G 重合(圖 4.3.3)，因此在計算上我們只需要考慮 $\triangle ADE$ 、 $\triangle BIJ$ 、 $\triangle CHF$ 對於 G 所產生的力矩，因此可將不變心的條件列為：

$$\overrightarrow{GG_1} \times \triangle ADE \text{面積}(W_1) + \overrightarrow{GG_2} \times \triangle BIJ \text{面積}(W_2) + \overrightarrow{GG_3} \times \triangle CHF \text{面積}(W_3) = \vec{0}$$

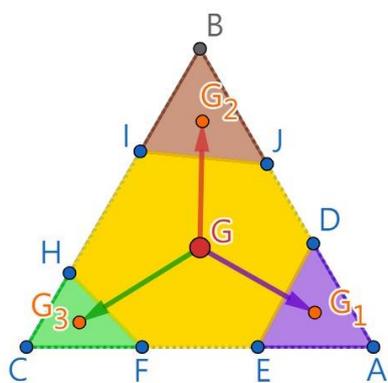


圖 4.3.1

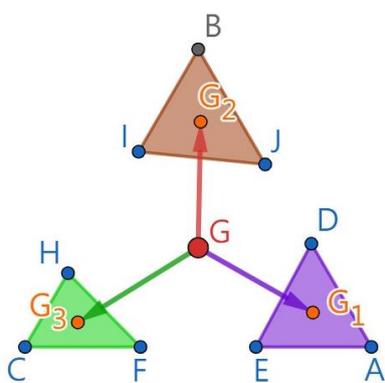


圖 4.3.2

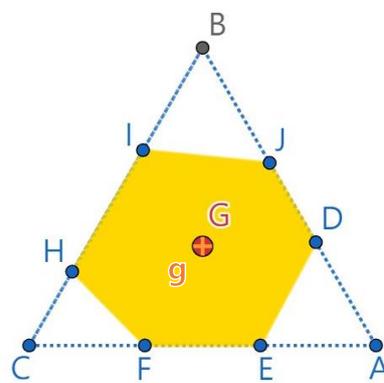


圖 4.3.3

在第二點的分類中，我們已經將原三角形、掉落與校正三角形分為六大類型，以下我們依據前述分類對裁切原理與切割方式依序進行研究如下。

(一) **Case 1**，原三角形及掉落三角形為正三角形，校正三角形亦為正三角形的切割：

因為校正三角形是三塊全等三角形(面積相等)，在文獻《剪不斷，理還亂-我就是不變心》中已經透過重心平行轉移定理找出其作法，加上三塊面積相等的切割並非本研究所期望的結果，因此本研究不對其做深入的探討證明，僅引用文獻中的做法來完成。

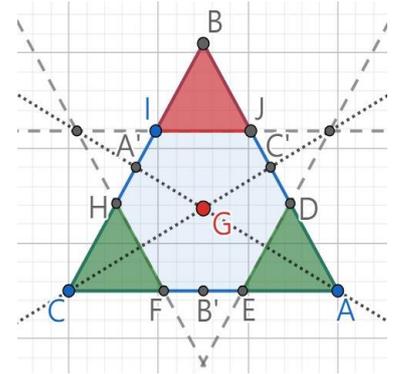


圖 4.3.4

【Lemma 2】

若原 $\triangle ABC$ 為正三角形，且兩個在原 $\triangle ABC$ 底邊上的 $\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$ 為等底等積三角形，另一 $\triangle BIJ$ 為正三角形，則三個頂點三角形對於原 $\triangle ABC$ 在水平(x 軸)方向的合力矩為0。

我們將 **Lemma 1** 中的力矩拆成水平(x 軸)、垂直(y 軸)方向來考慮。其中 $\overline{G_3G_1}$ 交 $\overline{BB'}$ 於點 P 且 $\overline{G_3G_1} \perp \overline{BB'}$ ，因此水平方向的力矩平衡可以表示成：

$$\overline{PG_1} \times W_1 + 0 + \overline{PG_3} \times W_3 = \vec{0}$$

$$(\because \overline{GG_2} \perp x \text{ 軸} \therefore W_2 \text{ 產生水平方向的力矩} = 0)$$

$$\Rightarrow \overline{PG_1} \cdot W_1 = \overline{PG_3} \cdot W_3 \quad (\text{方向相反})$$

$$(1) \because \triangle ADE, \triangle CHF \text{ 為等底等積三角形} \therefore W_1 = W_3。$$

$$(2) \because \overline{ST} = \overline{RQ}, \overline{PT} = \overline{PQ} \therefore \overline{PG_1} = \overline{PG_3} ; \because \text{點} P \text{ 在 } \overline{G_3G_1} \text{ 上} \therefore \overline{PG_1} = -\overline{PG_3}。$$

由(1)、(2)故得證三個頂點三角形對於原 $\triangle ABC$ 在水平(x 軸)方向的合力矩為0。

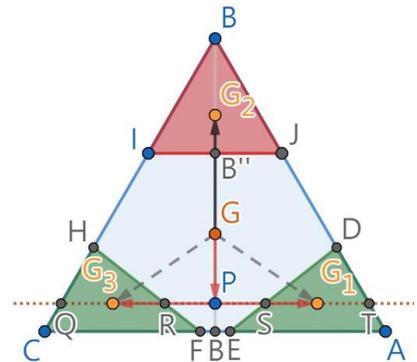


圖 4.3.5

(二) **Case2**，原三角形及掉落三角形為正三角形，但校正三角形非正三角形的切割：

【性質 1】

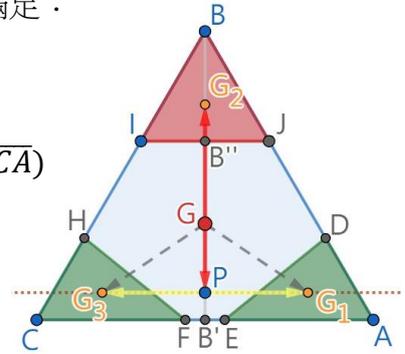
假設原 $\triangle ABC$ 與掉落 $\triangle BIJ$ 是正三角形且 $2\overline{BI} < \overline{BC}$ ，若在中線上給定一點 P (兩校正三角形重心到底邊的距離)， P 點和校正 $\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$ 滿足：

(1) $\triangle ADE$ 和 $\triangle CHF$ 為等底等積三角形

$$(2) \overline{EA} = \frac{\overline{GG_2} \times W_2}{\overline{GP} \times 3\overline{PB'}} \quad \left(\frac{4 \cdot \overline{GG_2} \cdot W_2}{3(\overline{GB'})^2} < \overline{EA} < \frac{1}{2}\overline{CA} \right)$$

$$(3) \frac{2 \cdot \overline{GG_2} \times W_2}{3 \cdot \overline{GP} \times \overline{CA}} < \overline{PB'} < \frac{1}{3}\overline{B''B'}$$

則剩餘六邊形重心維持在原三角形重心($g = G$)。



1. 切割原理：

根據 **Lemma 1**、**Lemma 2** 我們可以知道，若要在 Case2 中完成不變心作圖，只要找到使得垂直方向(y軸)達到力矩平衡即可，而其達到力矩平衡的條件為：

$$\overline{GG_2} \times W_2 + (\overline{GP} \times W_1 + \overline{GP} \times W_3) = 0$$

$$\Rightarrow \overline{GG_2} \times W_2 = \overline{GP} \times W_1 + \overline{GP} \times W_3 \quad (\overline{GP} \cdot \overline{GG_2} \text{方向相反})$$

$$\Rightarrow \overline{GG_2} \times W_2 = \overline{GP} \times 2 \cdot W_1$$

$$\Rightarrow \overline{GG_2} \times W_2 = \overline{GP} \times 2 \left(\frac{1}{2} \times \overline{EA} \times 3\overline{PB'} \right)$$

因此我們只要使得 \overline{EA} 符合：

$$\overline{EA} = \frac{\overline{GG_2} \times W_2}{\overline{GP} \times 3\overline{PB'}}$$

便可以使得去除三個頂點三角形後，原三角形在 y 方向達到力矩平衡；那麼將三塊頂點三角形去除後，剩餘六邊形的重心 g 就會和原三角形的重心 G 重合。

2. P 點限制：

由於題目最初的限制，切割後所剩下的必須為六邊形，因此我們所求出的頂點三角形，必須滿足 $\overline{BJ} + \overline{DA} < \overline{BA}$ 、 $\overline{BI} + \overline{HC} < \overline{BC}$ 、 $\overline{CF} + \overline{EA} < \overline{CA}$ 。所以在一開始找 P 點時會受到一些條件的限制：

$$(1) \overline{BJ} + \overline{DA} < \overline{BA}, \overline{BI} + \overline{HC} < \overline{BC}$$

$$\Rightarrow \overline{BB''} + 3 \cdot \overline{PB'} < \overline{BB'} \quad (3\overline{PB'} \text{ 為校正三角形的高})$$

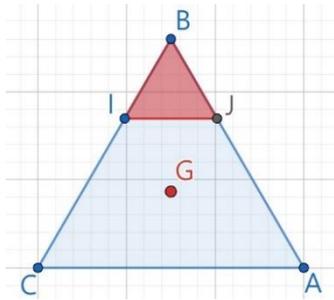
$$\Rightarrow (\overline{BB'} - \overline{B''B'}) + 3 \cdot \overline{PB'} < \overline{BB'}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \overline{PB'} < \overline{B''B'} \Rightarrow \overline{PB'} < \frac{1}{3} \cdot \overline{B''B'}$$

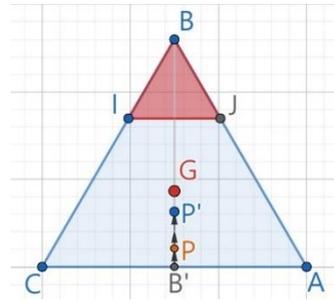
$$(2) \overline{CF} + \overline{EA} < \overline{CA} \Rightarrow 2 \cdot \overline{EA} < \overline{CA} \Rightarrow 2 \cdot \frac{\overline{GG_2} \times W_2}{\overline{GP} \times 3\overline{PB'}} < \overline{CA} \Rightarrow \frac{2 \cdot \overline{GG_2} \times W_2}{3 \cdot \overline{GP} \times \overline{CA}} < \overline{PB'}$$

所以取P點時有解的範圍為 $\frac{2 \cdot \overline{GG_2} \times W_2}{3 \cdot \overline{GP} \times \overline{CA}} < \overline{PB'} < \frac{1}{3} \overline{B''B'}$ 。

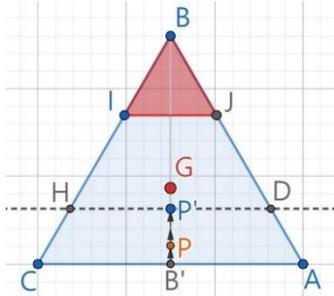
3.切割方式：



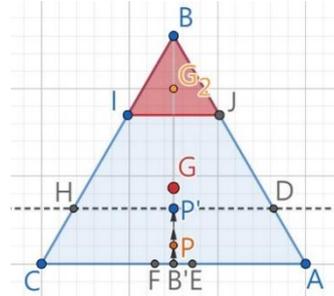
原始正三角形掉落了一塊正三角形



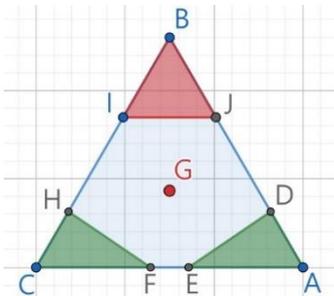
在 $\overline{BB'}$ 上找一點 P' ，作 $\overline{B'P'} : \overline{B'P} = 3 : 1$



過點 P' 作平行於 \overline{AC} 的直線
交 \overline{BA} 、 \overline{BC} 於 D 、 H 二點

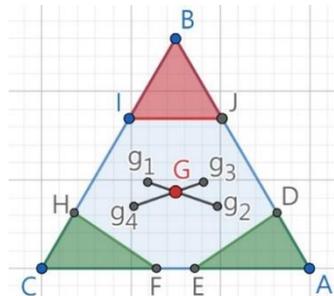


計算 $\overline{EA} = \frac{\overline{G_2G} \times W_2}{\overline{GP} \times 3\overline{PB'}}$ 取 E 點
並取點 F 使得 $\overline{AE} = \overline{FC}$



連接 \overline{DE} 、 \overline{FH}

$\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$ 即為所求



利用六邊形重心作圖進行驗證

在 Case2 的切割中，我們只要在給定範圍內取一個的 P 點，就可以找到相對應的切割方式，因此在 Case2 中所能找到的切割方式有很多種。

(三) **Case3**，原三角形是正三角形但掉落三角形不是正三角形的切割：

【性質 2】

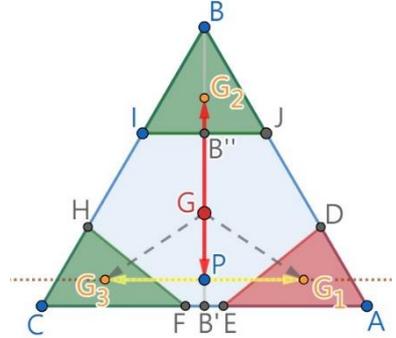
假設原 $\triangle ABC$ 是正三角形、掉落 $\triangle ADE$ 為任意三角形且 $W_1 < \frac{1}{4} \triangle ABC$ 面積，若校正

$\triangle CHF$ 、 $\triangle BIJ$ (正 \triangle)滿足：

(1) $\triangle ADE$ 和 $\triangle CHF$ 為等底等積三角形

$$(2) (\overline{BB'} - \overline{BB''}) \times \overline{BB''}^2 = \frac{3\sqrt{3} \cdot 2\overline{GP} \times W_1}{2}$$

則剩餘六邊形重心維持在原三角形重心($g = G$)。



1.切割原理：

根據**性質 1** (Case2)的結論我們可以知道，若掉落 $\triangle ADE$ 為任意三角形時，我們可以通過反向的切割，先找到一塊等底等積三角形，在反推上方的正 $\triangle BIJ$ 即可。

在反推正 $\triangle BIJ$ 時，根據 **Lemma 1**、**Lemma 2** 我們只需要垂直方向(y軸)的力矩：

$$(\overline{GP} \times W_1 + \overline{GP} \times W_3) + \overline{GG_2} \times W_2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overline{GP} \times W_1 + \overline{GP} \times W_3 = \overline{GG_2} \times W_2 \quad (\overline{GP} \cdot \overline{GG_2} \text{方向相反})$$

$$\Rightarrow 2\overline{GP} \times W_1 = \left(\frac{2}{3}\overline{BB'} - \frac{2}{3}\overline{BB''}\right) \times \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{IJ} \cdot \overline{BB''}\right)$$

$$\Rightarrow 2\overline{GP} \times W_1 = \frac{2}{3}(\overline{BB'} - \overline{BB''}) \times \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{BB''} \cdot \overline{BB''}\right)$$

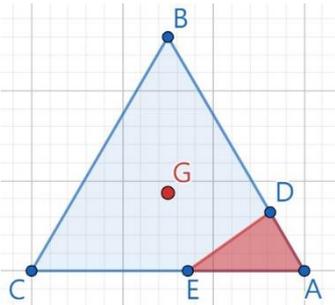
$$\Rightarrow 2\overline{GP} \times W_1 = \frac{2}{3}(\overline{BB'} - \overline{BB''}) \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{BB''}^2\right)$$

$$\Rightarrow 2\overline{GP} \times W_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}(\overline{BB'} - \overline{BB''}) \times \overline{BB''}^2$$

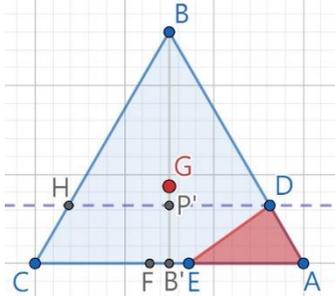
$$\Rightarrow (\overline{BB'} - \overline{BB''}) \times \overline{BB''}^2 = \frac{3\sqrt{3} \cdot 2\overline{GP} \times W_1}{2}$$

接著將 $\overline{BB''}$ 的一元三次方程式代入 *GeoGebra* 進行繪圖與運算，在計算結果中我們發現方程式會有三解，其中 $(\overline{BB''})_1 < 0$ (不合)， $(\overline{BB''})_3 > \frac{1}{2}\overline{BB''} \Rightarrow \overline{BI} + \overline{HC} > \overline{BC}$ (不合)，因此可能的解只剩下唯一一組 $(\overline{BB''})_2$ ，在圖形上找到點 B'' 並通過平行線作圖找到點 I 、 J ，就可以完成不變心作圖。

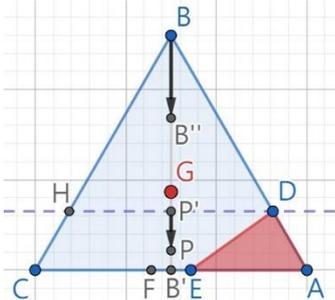
2.切割方式：



原始正三角形掉落了一塊小三角形

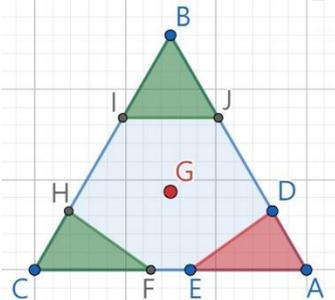


過點D作平行於AC的直線
交BC、BB'於H、P'二點



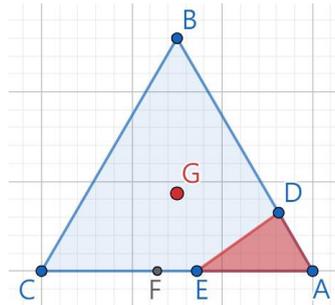
通過下方算式計算 BB'' 後找到點 B''

$$(BB' - BB'') \cdot BB''^2 = \frac{3\sqrt{3} \cdot 2GP \cdot W_2}{2}$$

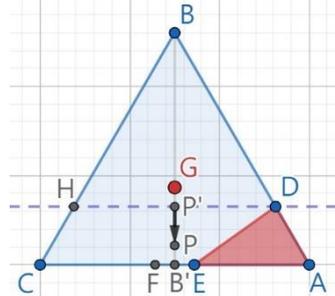


連接 DE 、 FH

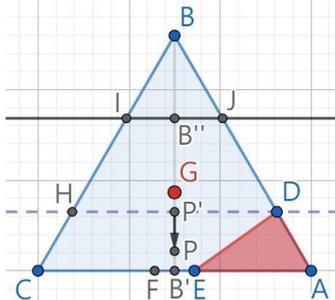
$\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$ 即為所求



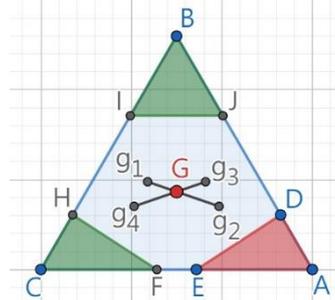
取點F使得 $\overline{AE} = \overline{FC}$



取點P使得 $\overline{P'P} = \frac{2}{3} \overline{P'B'}$



過 B'' 作平行於 AC 的直線
交 BC 、 BA 於 I 、 J 二點



利用六邊形重心作圖進行驗證

(四) **Case4**，原三角形非正三角形且掉落三角形為平行截角三角形，校正三角形和掉落三角形全等的切割：

因為移除的是三塊和原三角形相似的全等三角形(面積相等)，同於 Case1 的原因，在本研究中直接引用文獻中的做法來完成切割。

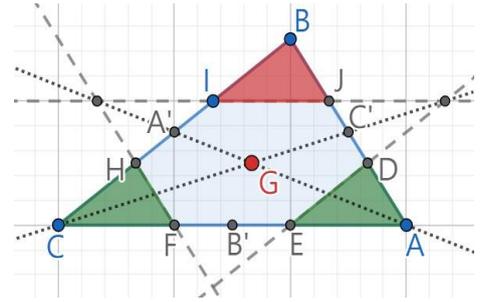


圖 4.3.6

【Lemma 3】

假設原 $\triangle ABC$ 為任意三角形、 $\triangle BIJ$ 為平行截角三角形，且兩個在原 $\triangle ABC$ 底邊上的 $\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$ 為等底等積三角形，則三個頂點三角形對於原 $\triangle ABC$ 的合力矩，必會使剩餘六邊形重心 g 在原 $\triangle ABC$ 的中線上移動。

同 Lemma 2 我們將 Lemma 1 中的力矩折成水平(x軸)、中線方向的力矩來考慮。其中 $\overline{G_3G_1}$ 交 $\overline{BB'}$ 於點 P 且 P 為 $\overline{G_3G_1}$ 之中點，故水平方向的力矩平衡(對中線)可以表示成(圖 4.3.7)：

$$\overrightarrow{PG_1} \times W_1 + \overrightarrow{GG_2} \times W_2 + \overrightarrow{PG_3} \times W_3$$

- (1) $\because \overline{GG_2}$ 在 $\overline{BB'}$ 上 $\therefore \overrightarrow{GG_2} \times W_2$ 必定會在中線上。
- (2) $\because \overline{ST} = \overline{RQ}$ 、 $\overline{PT} = \overline{PQ}$ $\therefore \overline{PG_1} = \overline{PG_3}$ ，點 P 為 $\overline{G_3G_1}$ 之中點 $\Rightarrow \overrightarrow{PG_1} = -\overrightarrow{PG_3}$
 $\therefore P$ 點為 $\overline{BB'}$ 上一點 $\therefore \overrightarrow{PG_1} \times W_1 + \overrightarrow{PG_3} \times W_3$ 的平衡點必定會 P 點(中線)上。

由(1)、(2)得證三個頂點三角形對於原 $\triangle ABC$ 在水平(x軸)方向的力矩，必定會使重心在中線上移動，故我們在研究的過程只需要考慮中線方向上的力矩(圖 4.3.8)即可。

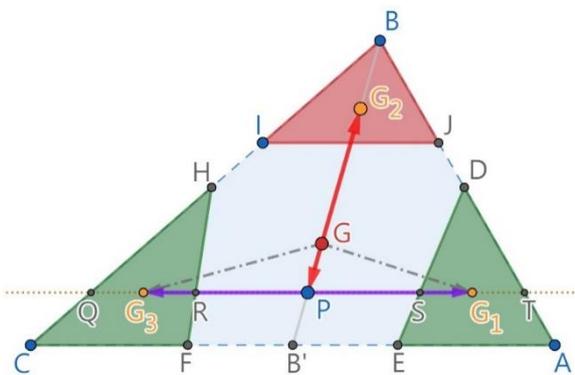


圖 4.3.7

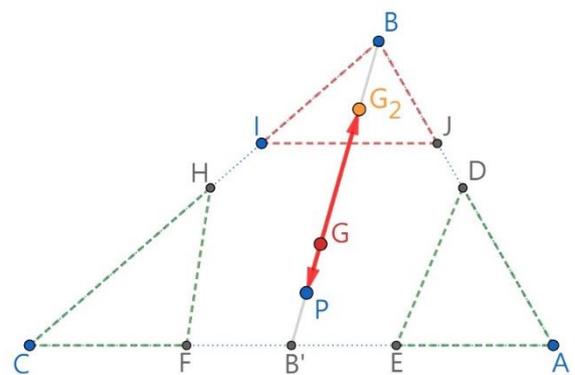


圖 4.3.8

(五) **Case5**，原三角形非正三角形且掉落三角形為平行截角三角形，校正三角形和掉落三角形非全等的切割：

【性質 3】

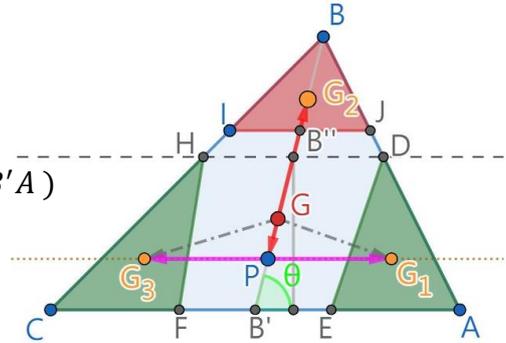
假設原 $\triangle ABC$ 為任意三角形、掉落 $\triangle BIJ$ 為平行截角三角形，且 $2\overline{BI} < \overline{BC}$ ，若在中線上給定一點 P ， P 點和校正 $\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$ 滿足：

(1) $\triangle ADE$ 和 $\triangle CHF$ 為等底等積三角形

$$(2) \overline{EA} = \overline{CF} = \frac{\overline{GG_2} \cdot W_2}{\overline{GP} \times 3\overline{PB'} \cdot \sin \theta} \quad (\theta = \angle BB'A)$$

$$(3) \frac{2 \cdot \overline{GG_2} \times W_2}{3 \cdot \overline{GP} \times \overline{CA} \cdot \sin \theta} < \overline{PB'} < \frac{1}{3} \overline{B''B'}$$

則剩餘六邊形重心維持在原三角形重心($g = G$)。



1.切割原理：

根據 **Lemma 1**、**Lemma 3** 我們可以知道，若要在 Case5 中完成不變心作圖，只要使在中線上以原 $\triangle ABC$ 重心 G 為支點時，所產生的力矩達到平衡即可：

$$\overline{GG_2} \times W_2 + \overline{GP} \times (W_1 + W_3) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overline{GG_2} \times W_2 = \overline{GP} \times (W_1 + W_3) \quad (\overline{GP} \cdot \overline{GG_2} \text{方向相反})$$

$$\Rightarrow \overline{GG_2} \times W_2 = \overline{GP} \times 2 \cdot W_1$$

$$\Rightarrow \overline{GG_2} \times W_2 = \overline{GP} \times 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \times \overline{EA} \times (\overline{P'B'} \cdot \sin \theta) \right]$$

$$\Rightarrow \overline{GG_2} \times W_2 = \overline{GP} \times 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \overline{EA} \cdot (3\overline{PB'} \cdot \sin \theta) \right]$$

$$\Rightarrow \overline{GG_2} \times W_2 = \overline{GP} \cdot \overline{EA} \cdot (3\overline{PB'} \cdot \sin \theta)$$

因此我們只要使得 \overline{EA} 符合：

$$\overline{EA} = \frac{\overline{GG_2} \times W_2}{\overline{GP} \times 3\overline{PB'} \cdot \sin \theta}$$

便能在去除三個頂點三角形後，在中線上以原 $\triangle ABC$ 重心 G 為支點所產生的力矩平衡；那麼將三塊頂點三角形去除後，剩餘六邊形的重心 g 就會和原三角形的重心 G 重合。

2. P點限制：

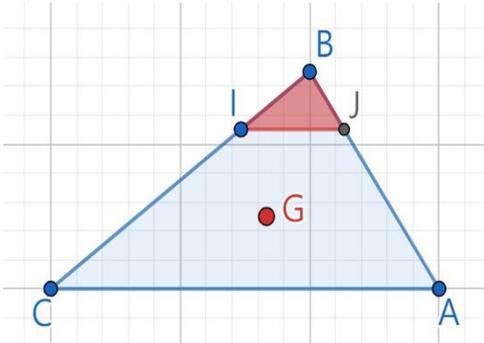
由於題目最初的限制，切割後所剩下的必須為六邊形，因此我們所求出的頂點三角形，必須滿足 $\overline{BJ} + \overline{DA} < \overline{BA}$ 、 $\overline{BI} + \overline{HC} < \overline{BC}$ 、 $\overline{CF} + \overline{EA} < \overline{CA}$ 。所以在一開始找P點時會受到一些條件的限制：

$$(1) \text{同性質 1} \Rightarrow \overline{PB'} < \frac{1}{3} \cdot \overline{B''B'}$$

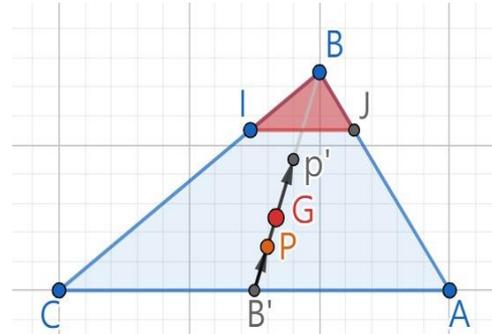
$$(2) \overline{CF} + \overline{EA} < \overline{CA} \Rightarrow 2 \cdot \overline{EA} < \overline{CA} \Rightarrow 2 \cdot \frac{\overline{GG_2} \cdot W_2}{\overline{GP} \times 3\overline{PB'} \cdot \sin \theta} < \overline{CA} \Rightarrow \frac{2 \cdot \overline{GG_2} \times W_2}{3 \cdot \overline{GP} \times \overline{CA} \cdot \sin \theta} < \overline{PB'}$$

所以取P點時有解的範圍為 $\frac{2 \cdot \overline{GG_2} \times W_2}{3 \cdot \overline{GP} \times \overline{CA} \cdot \sin \theta} < \overline{PB'} < \frac{1}{3} \overline{B''B'}$ 。

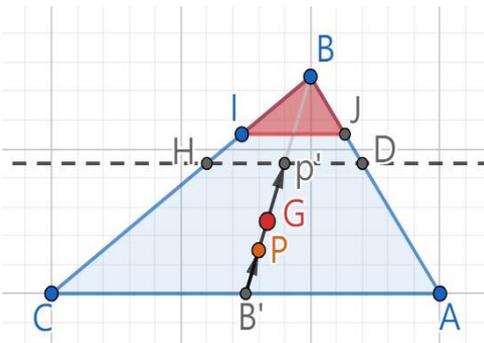
3.切割方式：



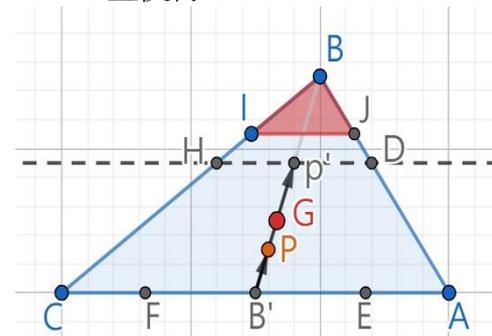
原始三角形掉落了一塊相似的小三角形



在 $\overline{BB'}$ 上取適當點 P'
並使得 $\overline{B'P'} = 3 \cdot \overline{B'P}$

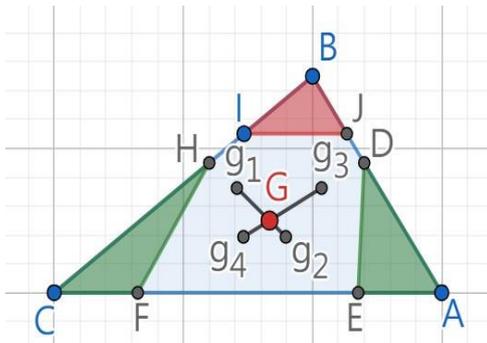


過點 P' 作平行於 \overline{AC} 的直線
交 \overline{BC} 、 \overline{BA} 於 H 、 D 二點



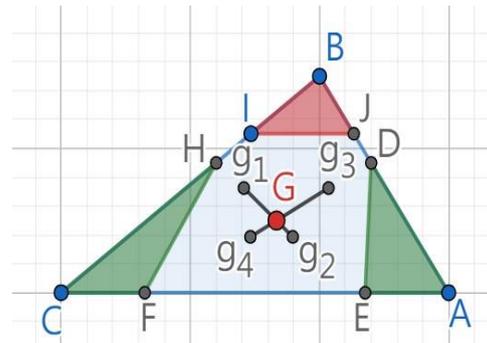
通過下方算式計算 \overline{AE} 後找到點 E
並透過 $\overline{EA} = \overline{CF}$ 找到點 F

$$\overline{EA} = \frac{\overline{G_2G} \cdot W_2}{\overline{GP} \cdot 3 \cdot \overline{PB'} \cdot \sin \theta}$$



連接 \overline{DE} 、 \overline{FH}

$\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$ 即為所求



利用六邊形重心作圖進行驗證

在 Case5 的切割中，我們只要在給定範圍內取一個的 P 點，就可以找到相對應的切割方式，因此在 Case5 中所能找到的切割方式有很多種。

(六) **Case6**，原三角形非正三角形且掉落三角形非平行截角三角形，校正三角形也非平行截角三角形的切割：

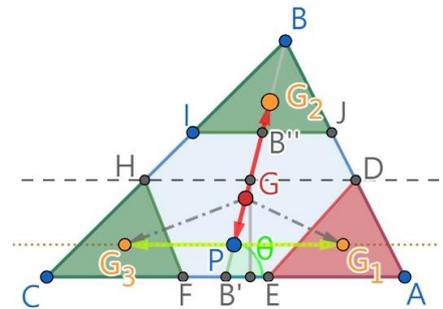
【性質 4】

假設原 $\triangle ABC$ 和掉落 $\triangle ADE$ 皆為任意三角形且 $W_1 < \frac{1}{4} \triangle ABC$ 面積，若校正 $\triangle CHF$ 、 $\triangle BIJ$ (平行截角 \triangle)滿足：

(1) $\triangle ADE$ 和 $\triangle CHF$ 為等底等積三角形

$$(2) (\overline{BB'} - \overline{BB''}) \cdot \overline{BB''}^2 = \frac{2\overline{GP} \cdot W_1 \cdot 3\overline{BB'}}{\overline{CA} \cdot \sin \theta}$$

則剩餘六邊形重心維持在原三角形重心($g = G$)。



1.切割原理：

根據性質 2 (Case5)的結論我們可以知道，若掉落 $\triangle ADE$ 為任意三角形時，我們可以通過反向的切割，先找到一塊等底等積三角形，在反推上方的正 $\triangle BIJ$ 即可。

在反推正 $\triangle BIJ$ 時，根據 Lemma 1、Lemma 3 我們只需要考慮中線方向上的力矩：

$$\overline{GP} \times (W_1 + W_3) + \overline{GG_2} \times W_2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overline{GP} \times (W_1 + W_3) = \overline{GG_2} \times W_2 \quad (\overline{GP} \cdot \overline{GG_2} \text{方向相反})$$

$$\Rightarrow \overline{GP} \times 2 \cdot W_1 = \overline{GG_2} \times W_2$$

$$\Rightarrow 2\overline{GP} \cdot W_1 = \left(\frac{2}{3}\overline{BB'} - \frac{2}{3}\overline{BB''}\right) \times \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \overline{IJ}\right) \cdot (\overline{BB''} \cdot \sin \theta)\right]$$

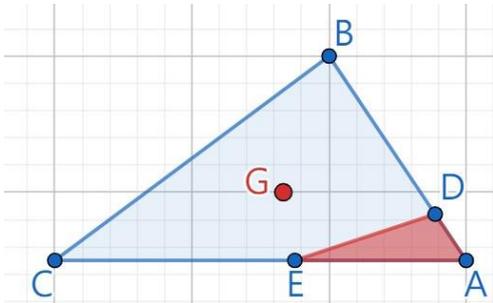
$$\Rightarrow 2\overline{GP} \cdot W_1 = \frac{2}{3}(\overline{BB'} - \overline{BB''}) \times \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{CA} \cdot \overline{BB''}}{\overline{BB'}} \cdot (\overline{BB''} \cdot \sin \theta) \right) \right]$$

$$\Rightarrow 2\overline{GP} \cdot W_1 = (\overline{BB'} - \overline{BB''}) \times \frac{\overline{CA} \cdot \overline{BB''}^2 \cdot \sin \theta}{3 \cdot \overline{BB'}}$$

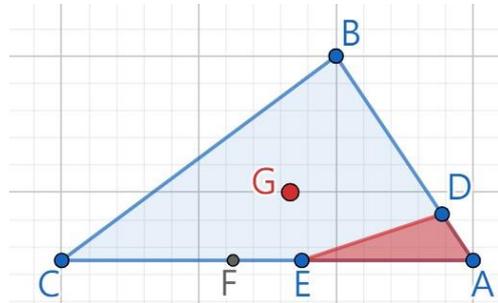
$$\Rightarrow (\overline{BB'} - \overline{BB''}) \cdot \overline{BB''}^2 = \frac{2\overline{GP} \cdot W_1 \cdot 3\overline{BB'}}{\overline{CA} \cdot \sin \theta}$$

接著將 $\overline{BB''}$ 的一元三次方程式輸入 *GeoGebra* 進行繪圖運算，在計算結果中我們發現方程式會有三解，其中 $(\overline{BB''})_1 < 0$ (不合)， $(\overline{BB''})_3 > \frac{1}{2}\overline{BB''} \Rightarrow \overline{BI} + \overline{HC} > \overline{BC}$ (不合)，因此可能的解只剩下唯一一組 $(\overline{BB''})_2$ ，在圖形上找到點 B'' 並通過平行線作圖找到點 I 、 J ，就可以完成不變心作圖。

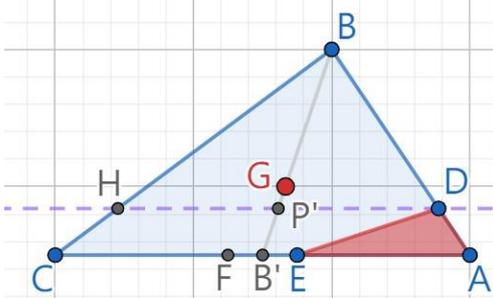
2.切割方式：



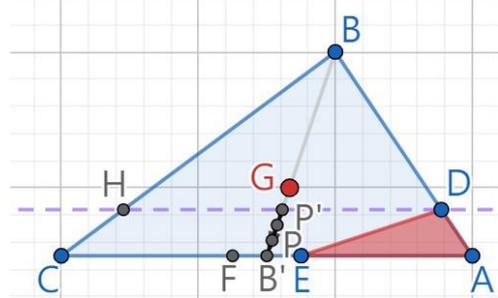
原始三角形掉落了一塊小三角形



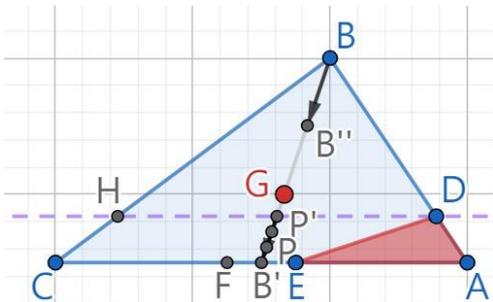
取點 F 使得 $\overline{AE} = \overline{FC}$



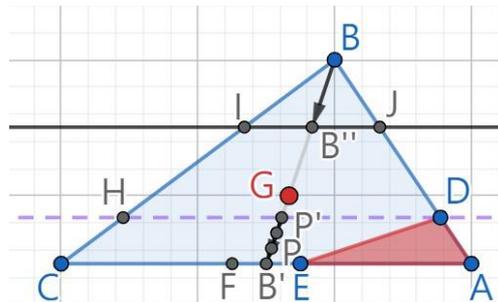
過點 D 作平行於 \overline{AC} 的直線
交 \overline{BC} 、 $\overline{BB'}$ 於 H 、 P' 二點



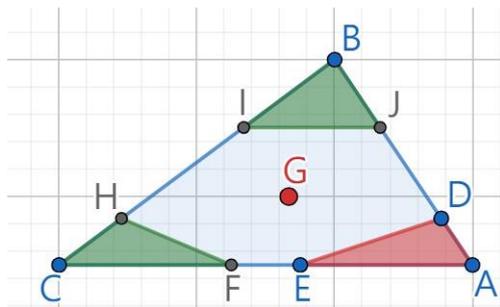
取點 P 使得 $\overline{P'P} = \frac{2}{3}\overline{P'B'}$



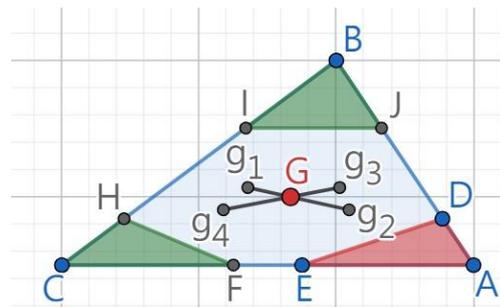
通過下方算式計算 $\overline{BB''}$ 後找到點 B''
 $(\overline{BB'} - \overline{BB''}) \times \overline{BB''}^2 = \frac{2\overline{GP} \cdot W_1 \cdot 3\overline{BB'}}{\overline{CA} \cdot \sin \theta}$



過 B'' 作平行於 \overline{AC} 的直線
交 \overline{BC} 、 \overline{BA} 於 I 、 J 二點



連接 \overline{IJ} 、 \overline{FH}
 $\triangle BIJ$ 、 $\triangle CHF$ 即為所求



利用六邊形重心作圖進行驗證

【結論 2】

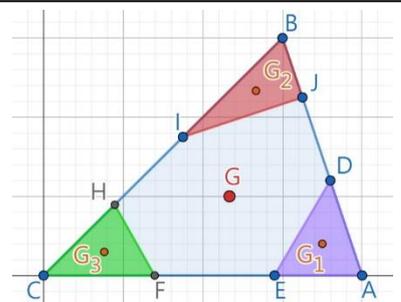
若在原 $\triangle ABC$ 底邊的兩個頂點三角形($\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$)為等底等積三角形，則在研究中給定的範圍內必定可以找到相對應不變心的切割方式，其中 $\triangle BIJ$ 和另外兩塊頂點三角形的面積不必相等，且切割方式在特定條件(Case2、Case5)中並不唯一。

四、用水平、垂直分量建立數學模型，找出三塊頂點三角形面積完全不相等時，缺角三角形重心不變的切割位置。

在前述研究中為了將兩個方向的簡化為只需考慮一個方向的計算，因此將在原 $\triangle ABC$ 底邊上的 $\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$ 限制為等底等積三角形，但本研究目的(三)希望找到三塊面積皆不相等的不變心切割方式，因此我們從 Lemma 1 的公式進行推導並希望能找到三塊不等積的不變心切割方式。

【猜想】

假設原 $\triangle ABC$ 和掉落 $\triangle BIJ$ 皆為任意三角形，若在適當範圍內給定校正 $\triangle ADE$ ，則可以通過 Lemma 1 找到關係式並計算出另一校正 $\triangle CHF$ 完成不變心作圖。



因應未知數的增加，我們以C點作為原點，並將所有的點進行坐標化來思考：

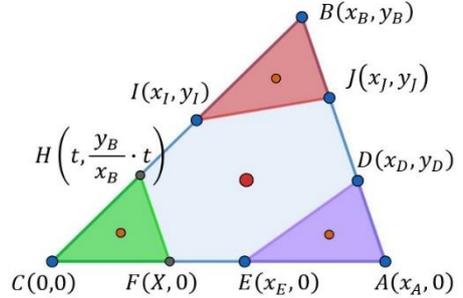
$$A(x_A, 0), B(x_B, y_B), C(0,0), D(x_D, y_D), E(x_E, 0), F(x_F, 0), H(x_H, y_H), I(x_I, y_I), J(x_J, y_J)$$

因為點 H 在 \overline{BC} 上，因此我們可以將其表示為 $H\left(x_H, \frac{y_B}{x_B}x_H\right)$ ，因此未知數只剩下 x_F 、 x_H ，故我們確信三塊三角形面積不相等的切割方式是存在的，我們只需要將 Lemma 1 的公式拆成水平、垂直分量來計算後，找到最後的校正 $\triangle CHF$ 即可完成。

【性質 5】

假設原 $\triangle ABC$ 和掉落 $\triangle BIJ$ 皆為任意三角形，先在適當範圍內給定校正 $\triangle ADE$ ，若校正 $\triangle CHF$ 的坐標

$F(X, 0)$ 、 $H\left(t, \frac{y_B}{x_B} \cdot t\right)$ (X 、 t 為未知數) 符合：



$$\begin{cases} (X + t - x_A - x_B) \cdot \left(X \cdot \frac{y_B}{x_B} \cdot t\right) = -[(x_D + x_E - x_B) \cdot (x_A - x_E) \cdot y_D + (x_I + x_J - x_A) \cdot (x_J - x_I) \cdot (y_B - y_I)] \\ \left(\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B\right) \cdot \left(X \cdot \frac{y_B}{x_B} \cdot t\right) = -[(y_D - y_B) \cdot (x_A - x_E) \cdot y_D + (y_I + y_J) \cdot (x_J - x_I) \cdot (y_B - y_I)] \end{cases}$$

其中 $0 < X < x_E$ ； $0 < t < x_I$ ，則剩餘六邊形重心維持在原三角形重心($g = G$)。

延續前述【猜想】，設 $C(0,0)$ 、 $x_F = X$ 、 $x_H = t$ ：

$A(x_A, 0)$ 、 $B(x_B, y_B)$ 、 $D(x_D, y_D)$ 、 $E(x_E, 0)$ 、 $F(X, 0)$ 、 $H\left(t, \frac{y_B}{x_B} \cdot t\right)$ 、 $I(x_I, y_I)$ 、 $J(x_J, y_J)$

$$G = \frac{(A + B + C)}{3} = \left(\frac{(x_A + x_B)}{3}, \frac{(y_B)}{3}\right)$$

$$G_1 = \frac{(A + D + E)}{3} = \left(\frac{(x_A + x_D + x_E)}{3}, \frac{(y_D)}{3}\right)$$

$$G_2 = \frac{(B + I + J)}{3} = \left(\frac{(x_B + x_I + x_J)}{3}, \frac{(y_B + y_I + y_J)}{3}\right)$$

$$G_3 = \frac{(C + F + H)}{3} = \left(\frac{(X + t)}{3}, \frac{\left(\frac{y_B}{x_B} \cdot t\right)}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{GG_1} = \left(\frac{(x_D + x_E - x_B)}{3}, \frac{(y_D - y_B)}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{GG_2} = \left(\frac{(x_I + x_J - x_A)}{3}, \frac{(y_I + y_J)}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{GG_3} = \left(\frac{(X + t - x_A - x_B)}{3}, \frac{\left(\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B\right)}{3}\right)$$

$$W_1 = \frac{(x_A - x_E) \cdot y_D}{2} \quad , \quad W_3 = \frac{X \cdot \left(\frac{y_B}{x_B} \cdot t\right)}{2}$$

$$W_2 = \frac{|x_I \cdot (y_J - y_B) + x_B \cdot (y_I - y_J) + x_J \cdot (y_B - y_I)|}{2}$$

接著將使用 **Lemma 1** 將其拆成水平、垂直兩個方向分開討論：

(1) 從水平(x軸)方向考慮：

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left(\frac{(x_D + x_E - x_B)}{3}, 0 \right) \times \frac{(x_A - x_E) \cdot y_D}{2} \\ & + \left(\frac{(x_I + x_J - x_A)}{3}, 0 \right) \times \frac{|x_I \cdot (y_J - y_B) + x_B \cdot (y_I - y_J) + x_J \cdot (y_B - y_I)|}{2} \\ & + \left(\frac{(X + t - x_A - x_B)}{3}, 0 \right) \times \frac{X \cdot \left(\frac{y_B}{x_B} \cdot t \right)}{2} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{1}{6} \cdot \left[(x_D + x_E - x_B) \times (x_A - x_E) \cdot y_D \right. \\ & \quad + (x_I + x_J - x_A) \times |x_I \cdot (y_J - y_B) + x_B \cdot (y_I - y_J) + x_J \cdot (y_B - y_I)| \\ & \quad \left. + (X + t - x_A - x_B) \times \left(X \cdot \frac{y_B}{x_B} \cdot t \right) \right] = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (X + t - x_A - x_B) \cdot \left(X \cdot \frac{y_B}{x_B} \cdot t \right)$$

$$= - \left[(x_D + x_E - x_B) \cdot (x_A - x_E) \cdot y_D \right.$$

$$\left. + (x_I + x_J - x_A) \times |x_I \cdot (y_J - y_B) + x_B \cdot (y_I - y_J) + x_J \cdot (y_B - y_I)| \right]$$

(2) 從垂直(y軸)方向考慮：

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left(0, \frac{(y_D - y_B)}{3} \right) \times \frac{(x_A - x_E) \cdot y_D}{2} \\ & + \left(0, \frac{(y_I + y_J)}{3} \right) \times \frac{|x_I \cdot (y_J - y_B) + x_B \cdot (y_I - y_J) + x_J \cdot (y_B - y_I)|}{2} \\ & + \left(0, \frac{\left(\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B \right)}{3} \right) \times \frac{X \cdot \left(\frac{y_B}{x_B} \cdot t \right)}{2} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{1}{6} \cdot \left[(y_D - y_B) \times (x_A - x_E) \cdot y_D + (y_I + y_J) \times |x_I \cdot (y_J - y_B) + x_B \cdot (y_I - y_J) + x_J \cdot (y_B - y_I)| \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B \right) \times \left(X \cdot \frac{y_B}{x_B} \cdot t \right) \right] = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B \right) \cdot \left(X \cdot \frac{y_B}{x_B} \cdot t \right)$$

$$= - \left[(y_D - y_B) \cdot (x_A - x_E) \cdot y_D \right.$$

$$\left. + (y_I + y_J) \times |x_I \cdot (y_J - y_B) + x_B \cdot (y_I - y_J) + x_J \cdot (y_B - y_I)| \right]$$

因此我們得到了兩個方程式：

$$\begin{cases} (X + t - x_A - x_B) \cdot \left(X \cdot \frac{y_B}{x_B} \cdot t\right) = -[(x_D + x_E - x_B) \cdot (x_A - x_E) \cdot y_D + (x_I + x_J - x_A) \times |x_I \cdot (y_J - y_B) + x_B \cdot (y_I - y_J) + x_J \cdot (y_B - y_I)|] \\ \left(\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B\right) \cdot \left(X \cdot \frac{y_B}{x_B} \cdot t\right) = -[(y_D - y_B) \cdot (x_A - x_E) \cdot y_D + (y_I + y_J) \times |x_I \cdot (y_J - y_B) + x_B \cdot (y_I - y_J) + x_J \cdot (y_B - y_I)|] \end{cases}$$

將兩式相除得到：

$$\begin{aligned} & \frac{(X + t - x_A - x_B)}{\left(\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B\right)} \\ &= \frac{(x_D + x_E - x_B) \cdot (x_A - x_E) \cdot y_D + (x_I + x_J - x_A) \times |x_I \cdot (y_J - y_B) + x_B \cdot (y_I - y_J) + x_J \cdot (y_B - y_I)|}{(y_D - y_B) \cdot (x_A - x_E) \cdot y_D + (y_I + y_J) \times |x_I \cdot (y_J - y_B) + x_B \cdot (y_I - y_J) + x_J \cdot (y_B - y_I)|} = \frac{A}{B} \\ &\Rightarrow (X + t - x_A - x_B) = \frac{A}{B} \cdot \left(\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X = \frac{A}{B} \cdot \left(\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B\right) - t + x_A + x_B \quad , \text{ 代入第二式後得到}$$

$$\left(\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B\right) \cdot \left\{ \left[\frac{A}{B} \cdot \left(\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B\right) - t + x_A + x_B \right] \cdot \frac{y_B}{x_B} \cdot t \right\} = -B$$

得到了 t 的一元三次方程式後，用和【性質4】相同的方式就可以找到符合標準的唯一解

T_2 ，代回後解出 X ，即可標示最後校正 $\triangle CHF$ 中 H 、 F 的點坐標並完成不變心作圖。

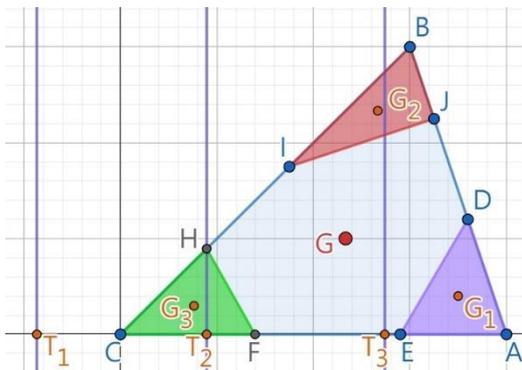


圖 4.4.1

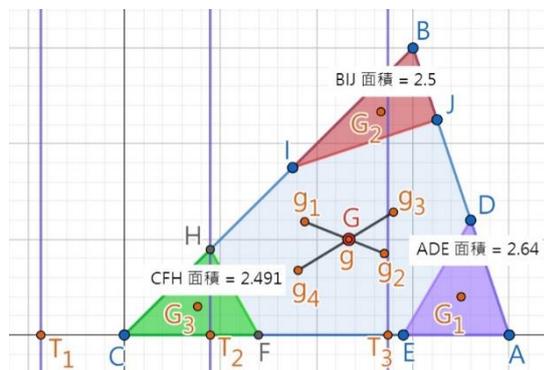


圖 4.4.2

【結論 3】

原 $\triangle ABC$ 掉落任意一個頂點三角形後，我們一定可以通過力矩平衡的計算，來找到相對應的兩個校正三角形來完成不變心作圖，其中更證明了三個三角形面積不相同的不變心切割方式是存在的。

伍、研究結果

以下整理出本研究之重要發現：

一、正三角形和非正三角形中發生所有可能的掉落方式，在本研究 Case1~Case6 中發現其不變心的切割方式都是存在的，並且在 Case2、Case5 中的解法不唯一。

二、正三角形和非正三角形中發生所有可能的掉落方式，皆存在切割的方法能使得重心保持不變。

※切割分類與切割方式：

分類	校正三角形	作圖方式 / 計算公式	唯一性
Case1	2 全等正三角形	平行線作圖	唯一
Case2	2 等底等積三角形	高：於適當範圍取點 P 底邊： $\overline{EA} = \frac{\overline{GG_2} \times W_2}{\overline{GP} \times 3\overline{PB'}}$	P 可以改變 不唯一
Case3	等底等積三角形 平行截角三角形	等底等積三角形：平行線 + 底邊 \overline{EA} 平行截角三角形：計算 $\overline{BB''}$ $(\overline{BB'} - \overline{BB''}) \cdot \overline{BB''}^2 = \frac{3\sqrt{3} \cdot 2\overline{GP} \cdot W_1}{2}$	唯一
Case4	2 平行截角三角形 (2 全等三角形)	平行線作圖	唯一
Case5	2 等底等積三角形	高：於適當範圍取點 P 底邊： $\overline{EA} = \frac{\overline{G_2G} \cdot W_2}{\overline{GP} \cdot 3 \cdot \overline{PB'} \cdot \sin \theta}$	P 可以改變 不唯一
Case6	等底等積三角形 平行截角三角形	等底等積三角形：平行線 + 底邊 \overline{EA} 平行截角三角形：計算 $\overline{BB''}$ $(\overline{BB'} - \overline{BB''}) \times \overline{BB''}^2 = \frac{2\overline{GP} \cdot W_1 \cdot 3\overline{BB'}}{\overline{CA} \cdot \sin \theta}$	唯一

三、在任意三角形缺角的問題中，我們都可以通過力矩平衡的計算，找到任意頂點三角形 (面積不受限制)，使缺角三角形掉落三個頂點三角形後重心保持不變。

陸、討論

【結論 3】中我們找到原三角形為任意三角形且掉落三角形為任意三角形時的不變心切割方式，並且切割方式並不唯一。接著我們就開始思考，【結論 3】的做法是否完全能夠將

【結論 2】中的 6 種 Case 的情形完全取代呢？於是我們進行了以下的討論：

一、可將任意三角形切割的方式退化成→Case1、Case4

假設將【結論 3】的做法應用於中 Case1、Case4 的限制條件時，我們發現其結果依然成立，並且在相同限制條件下切法唯一，因此我們可以將 Case1、Case4 用

【結論 3】的方式來取代。

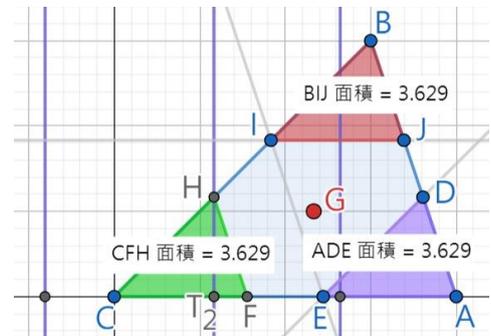


圖 6.1 結論 3--Case4

二、可將任意三角形切割的方式退化成→Case2、Case5

假設將【結論 3】的做法套用在 Case2、Case5 的限制條件時，我們發現其結果依然成立，並且原本的任意一組切割方式在【結論 3】的做法中結果都會成立，並且在相同限制條件下切法唯一，因此我們可以將

Case2、Case5 用【結論 3】來取代。

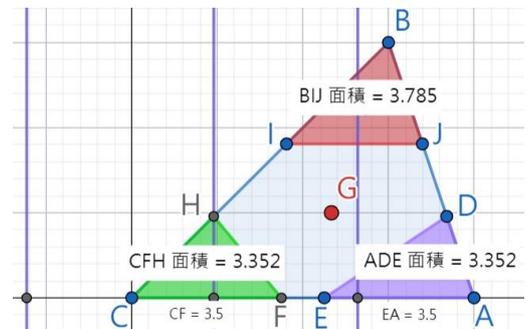


圖 6.2 結論 3--Case5

三、可將任意三角形切割的方式退化成→Case3、Case6

假設將【結論 3】的做法應用於 Case3、Case6 的限制條件時，我們發現其結果依然成立，並且在相同限制條件下切法唯一，因此我們可以將 Case3、Case6 用【結論 3】

來取代。

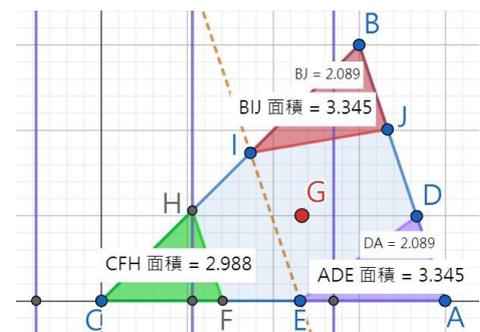


圖 6.3 結論--Case6

經過上述的討論，我們可以將【結論 2】中的 6 個 Case 視為【結論 3】中的特例，換句話說，我們只需要【結論 3】的做法，即可完成所有缺角三角形不變心的切割。

【總結】

【結論 3】中的做法，可視為所有缺角三角形不變心切割的通解。

柒、結論

一、指出文獻錯誤：影響重心偏移的並非面積，而是力矩(槓桿)：

在研究過程中我們也發現了文獻中的錯誤以及常見的迷思：若一條直線通過三角形的重心，則必定能保持左右的平衡，但此時三角形的面積不一定會相同(圖 7.2.1)，因為會影響重心的是力矩，而非僅僅是面積。也就是說，王哲麒、翁士傑(1991)在文獻中提到：「重心在面積之平分線交點上」的性質是錯誤的(圖 7.2.2)，只有在三角形中通過頂點的面積平分線才會通過重心(圖 7.2.3)，因此在本研究中皆使用力矩來計算重心的變化。

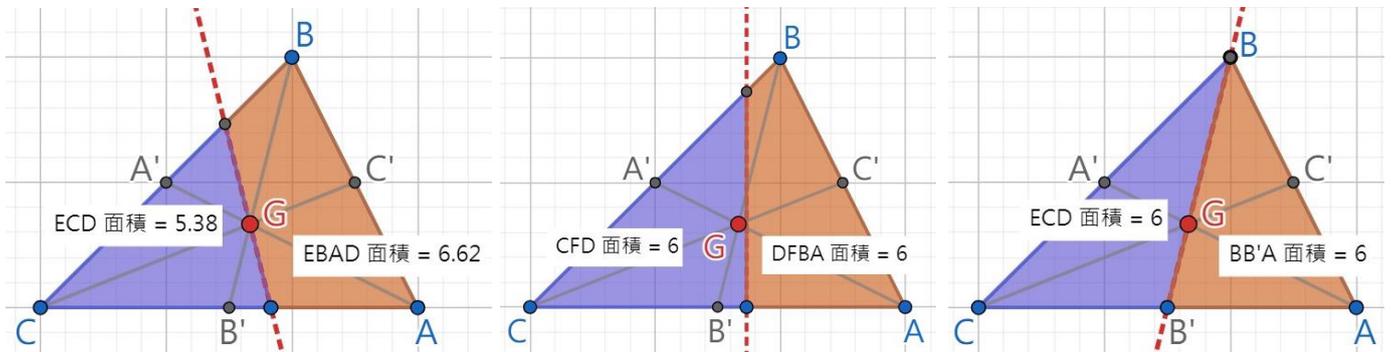


圖 7.1.1 過重心直線面積不相等 圖 7.1.2 等面積平分線不過重心 圖 7.1.3 等面積平分線過重心

二、超越文獻的突破：不再受限於等積切割

本研究透過等底等積三角形會使重心在中線上下移動，再加上力矩的計算，找到了頂點三角形面積不相同的切割方式(圖 7.1.1、圖 7.1.2)，突破了文獻《剪不斷，理還亂-我就是不變心》中，只能透過等面積切割來保持重心不變的方式。

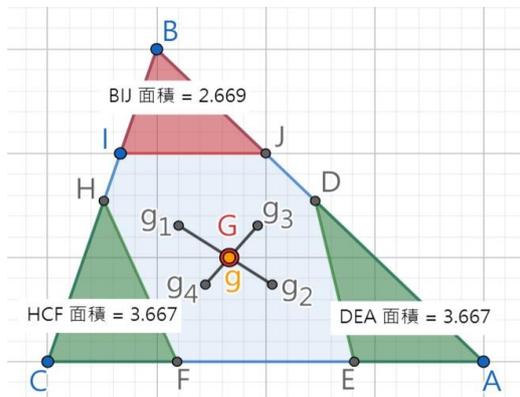


圖 7.2.1 結論 2 的面積不完全相等切割

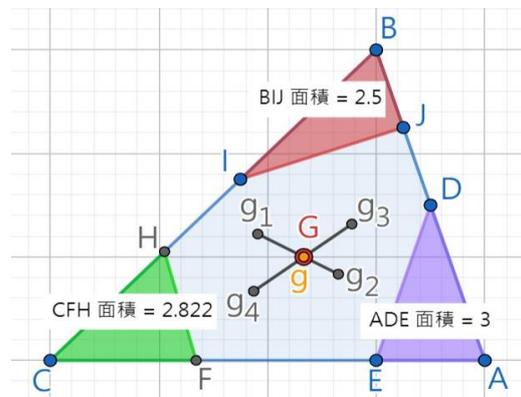


圖 7.2.2 結論 3 的面積完全不相等切割

三、未來展望：

(一)任意缺角多邊形的不變心切割：

期望未來能夠延續水平、垂直分量不發生轉動的想法，將本研究中找到數學式解決不變心問題的方式延伸應用於缺角四、五、六...N 多邊形上，並從中得出更完整的一般式以應用於任意多邊形的缺角問題。

(二)研究結果的應用：

重心維持不變在生活中是時常發生需要考慮的問題，例如輪胎的轉動是否保持平衡、吊扇的葉片重量不均時的解決方式等等，期望未來有機會能將本研究的研究解果，應用在生活中解決問題。

捌、參考資料及其他

- 一、王哲麒、翁士傑(1991)。尋找多邊形重心。中華民國第 31 屆中小學科學展覽會參展作品專輯。
- 二、張君瑋、王文彥、林羿旻、謝秉耕(2009)。剪不斷，理還亂-我就是不變心。中華民國第四十九屆中小學科學展覽會國中組數學科。

【評語】 030414

1. 本作品考慮一個三角形在截去一角導致重心產生偏移後，如何透過剪去另外兩角使得剩餘六邊形重心能回復到原三角形重心的問題。
2. 作者使用面積當作參數，結合力矩平衡的觀念來建立數學模型，並依據原三角形、掉落三角形、裁剪校正三角形等不同類形的情況，探討保持重心不變的切割方式。

作品海報

三足鼎立 -

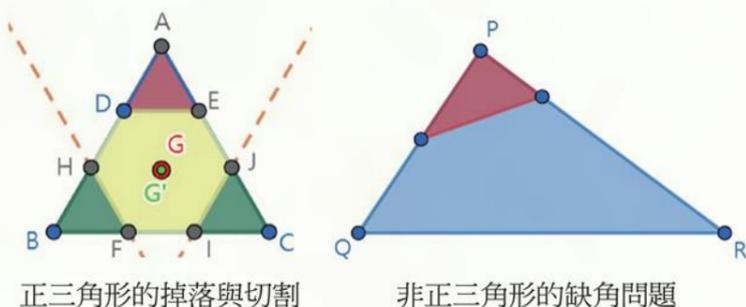
探討三角形不變心的切割模式

摘要

本研究探討原三角形掉落一角後重心產生偏移，要如何透過截去另兩角的方式使得**剩餘六邊形**重心能回復到原三角形重心。本文依原三角形、掉落三角形、切割三角形分成六類探討不變心的切割模式及是否存在唯一性，並透過水平、垂直分量建立數學模式來說明作用在物體上的**力矩平衡**，達成**重心不會產生偏移**。

壹、研究動機

正式探討缺角三角形重心不變的問題之前，我們查閱了相關文獻，發現這個問題曾經有人做過研究，並且有找到一種通過**等面積切割**解決任意缺角三角形不變心問題的方式。但是針對其研究結論的部份我們產生了**質疑**：要使重心不變，三塊頂點三角形的**面積一定要相等**嗎？面積相等是重心不變的**充分條件**嗎？切割方式真的只有一**種**嗎？如果回到重心的本質思考，只要使得面積相等的**等面積平分線**就一定會通過重心嗎？就在帶著許多疑問和好奇的心態下展開了科展研究之旅。



正三角形的掉落與切割

非正三角形的缺角問題

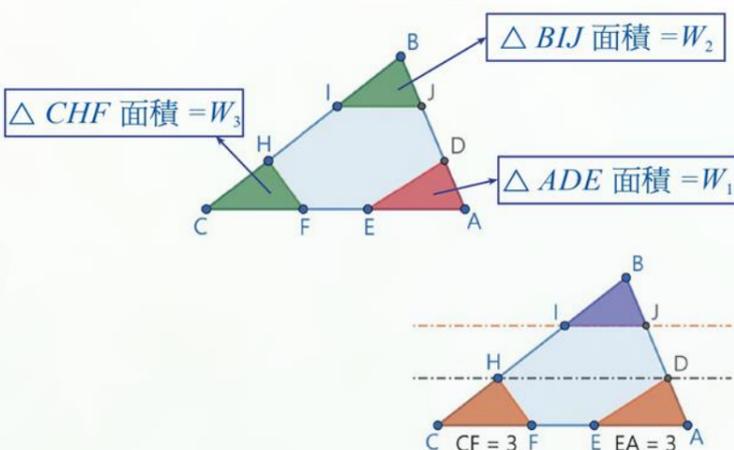
貳、研究目的與名詞釋義

一、研究目的

- (一) 探討缺角三角形重心不變的切割分類以及切割方式是否存在與**唯一性**。
- (二) 探討不同限制條件的分類中，三個頂點三角形**面積不完全相等**時，缺角三角形不變心切割的數學性質推導。
- (三) 探討三個頂點三角形**面積完全不相等**時，缺角三角形不變心切割的存在性與切割方式。

二、名詞釋義

- (一) 頂點三角形 ($\triangle ADE$ 、 $\triangle BIJ$ 、 $\triangle CHF$)
- (二) 掉落三角形 ($\triangle ADE$)
- (三) 校正三角形 ($\triangle BIJ$ 、 $\triangle CHF$)



- (四) 平行截角三角形 ($\triangle BIJ$)
- (五) 等底等積三角形 ($\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$)

參、研究設備與器材

- (一) 電腦、平板、紙、筆。
- (二) GeoGebra 軟體。

肆、研究過程或方法

- 發現問題 → 確認問題 定義分類 → 提出想法 與猜測 → GGB作圖 驗證猜想 → 解決思路 公式推導

一、文獻探討

二、幾何性質猜測與驗證：

結論 1：下方兩塊頂點三角形等底等高，剩餘六邊形重心會在中線上移動。

三、利用幾何性質導出切割模型：

Lemma 1：利用水平、垂直方向的力矩計算可以找到不變心的切割。

Lemma 2：原三角形為正三角形，下方兩塊等底等高 - 只需計算垂直方向的力矩。

性質 1：掉落三角形為正三角形。

性質 2：掉落三角形非正三角形。

Lemma 3：原三角形非正三角形，下方兩塊等底等高 - 只需計算中線方向的力矩。

性質 3：掉落三角形為正三角形。

性質 4：掉落三角形非正三角形。

結論 2：任意原三角形、任意掉落三角形都能找到相對應的不變心切割方式。

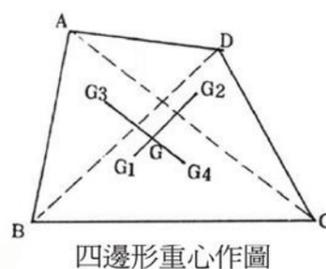
四、利用水平、垂直分量計算出三塊不等積的切割方式：

性質 5：掉落任意三角形，校正三角形亦為任意三角形。

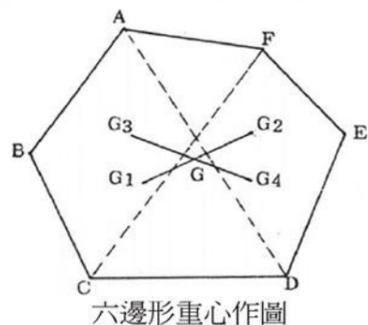
結論 3：任意三角形掉落的不變心問題，都有相對應三塊面積不相等的切割方式。

一、文獻探討

(一) 第 31 屆中小學科展《尋找多邊形重心》，利用三角形重心為中線交點的性質，發展出找尋凸多邊形重心的方法。其中巧妙的進行不同方向的兩次切割並求得交點，來省去其他文獻中需要不斷計算三角形面積的麻煩。本研究中使用其找六邊形重心的方法，對不變心作圖的結果進行驗證。

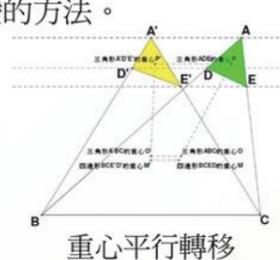


四邊形重心作圖

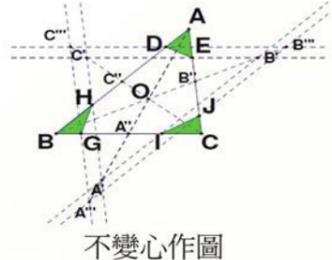


六邊形重心作圖

(二) 第 49 屆全國中小學科展《剪不斷，理還亂 - 我就是不變心》利用平行的概念說明，當兩同底等高的兩相異三角形其重心會在平行底邊的直線上移動，並利用重心平行轉移定理，透過同底等高的正（等腰）三角形作為媒介，找出一種**等面積切割**能解決缺角三角形重心不變的方法。

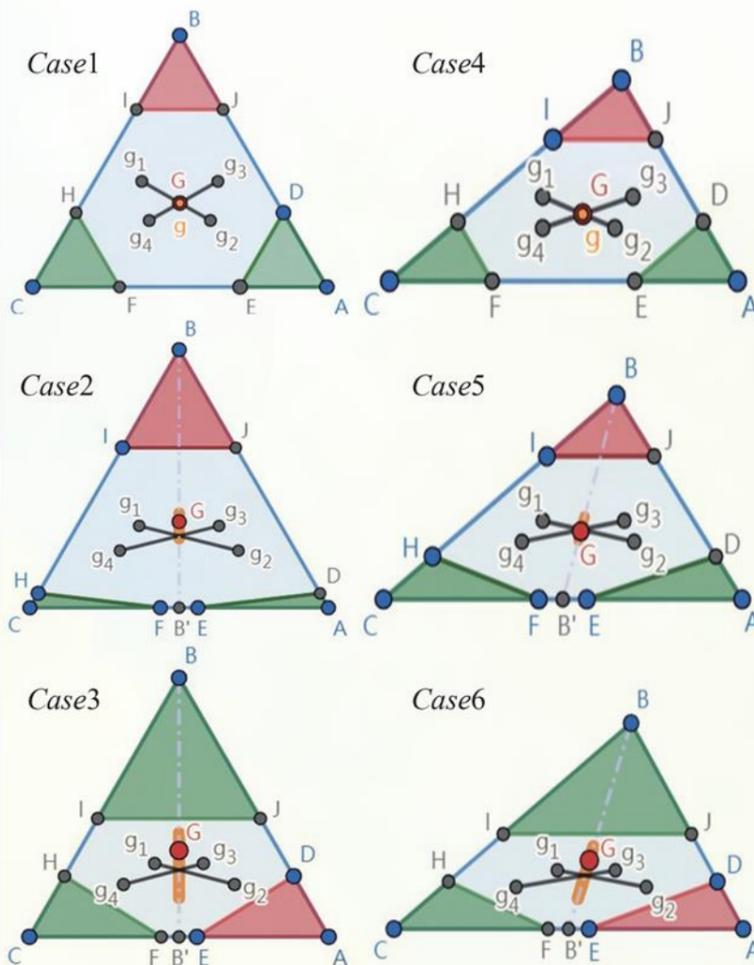


重心平行轉移



不變心作圖

二、缺角三角形不變心切割的分類中，存在性與唯一性的探討



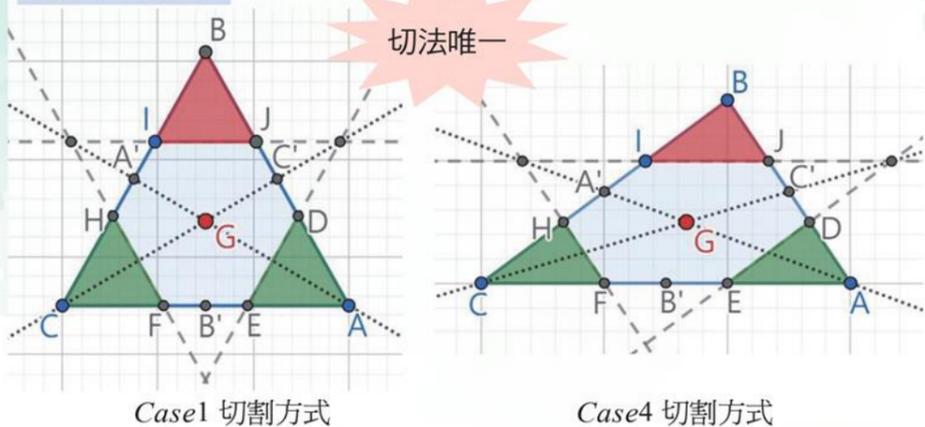
分類	原三角形	掉落三角形	校正三角形	切法唯一
Case1	正三角形	正三角形	2 全等正三角形	是
Case2			2 等底等積三角形	否
Case3		非正三角形	等底等積三角形 平行截角三角形	是
Case4	非正三角形	平行截角三角形	2 平行截角三角形 (2 全等三角形)	是
Case5			2 等底等積三角形	否
Case6		任意三角形	等底等積三角形 平行截角三角形	是

【結論 1】

若在原 $\triangle ABC$ 底邊的兩個頂點三角形 ($\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$) 為等底等積三角形，則剩餘六邊形的重心 g 會在原 $\triangle ABC$ 的中線上移動。因此在任意原三角形掉落任意頂點三角形的命題中，必定存在能使得 $G=g$ 的另外兩個校正三角形，且切割方式在掉落三角形為平行截角三角形時 (Case2、Case5) 並不唯一。

三、不同限制條件的分類中，三個頂點三角形面積不完全相等時，缺角三角形不變心切割的數學性質推導

Case1、Case4

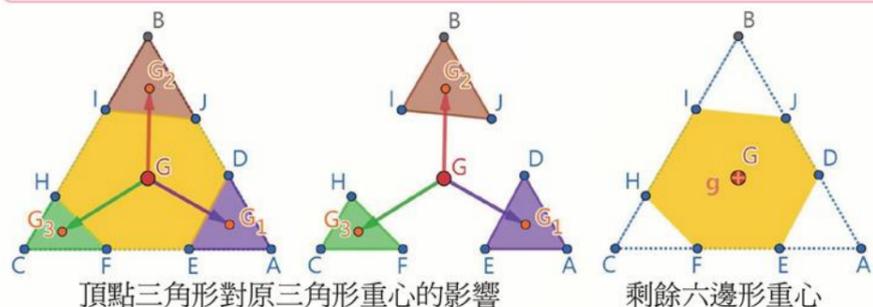


Case1 切割方式

Case4 切割方式

【Lemma 1】

若在原 $\triangle ABC$ 上移除的三塊頂點三角形 $\triangle ADE$ 、 $\triangle BIJ$ 、 $\triangle CHF$ 滿足： $\overrightarrow{GG_1} \times W_1 + \overrightarrow{GG_2} \times W_2 + \overrightarrow{GG_3} \times W_3 = \vec{0}$ 則剩餘六邊形重心 g 和原 $\triangle ABC$ 重心 G 重合 ($g=G$)。

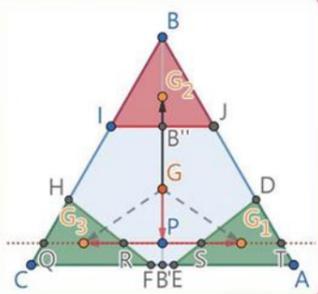


頂點三角形對原三角形重心的影響

剩餘六邊形重心

【Lemma 2】

若原 $\triangle ABC$ 為正三角形，且兩個在原 $\triangle ABC$ 底邊上的 $\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$ 為等底等積三角形，另一 $\triangle BIJ$ 為正三角形，則三個頂點三角形對於原 $\triangle ABC$ 在水平 (x 軸) 方向的合力矩為 0。



Case2

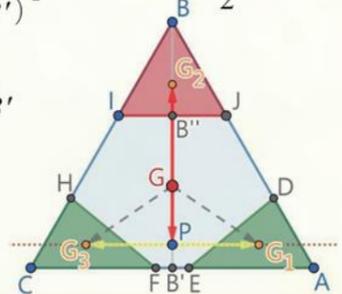
切法不唯一

【性質 1】

假設原 $\triangle ABC$ 與掉落 $\triangle BIJ$ 是正三角形且 $2\overline{BI} < \overline{BC}$ ，若在中線上給定一點 P ， P 點和校正 $\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$ 滿足：

- (1) $\triangle ADE$ 和 $\triangle CHF$ 為等底等積三角形
- (2) $\overline{EA} = \overline{CF} = \frac{\overline{GG_2} \times W_2}{\overline{GP} \times 3\overline{PB'}}$ ($\frac{4 \cdot \overline{GG_2} \cdot W_2}{3(\overline{GB'})^2} < \overline{EA} < \frac{1}{2}\overline{CA}$)
- (3) $\frac{2 \cdot \overline{GG_2} \times W_2}{3 \cdot \overline{GP} \times \overline{CA}} < \overline{PB'} < \frac{1}{3}\overline{B''B'}$

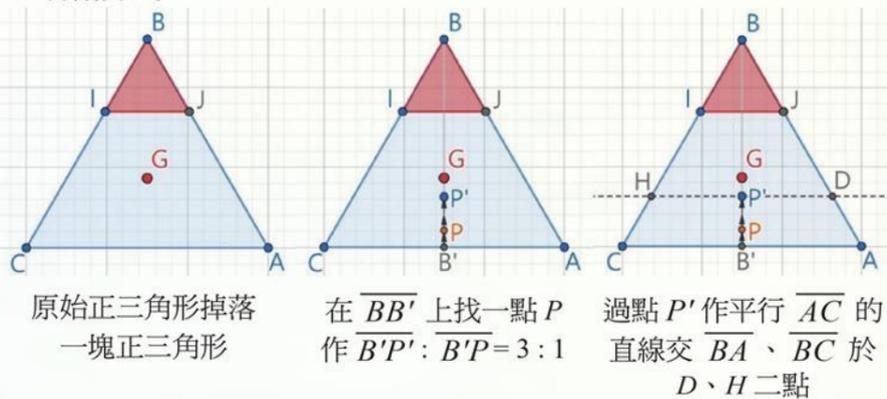
則剩餘六邊形重心維持在原三角形重心 ($g=G$)。



1. P 點限制：

取 P 點時有解的範圍為 $\frac{2 \cdot \overline{GG_2} \times W_2}{3 \cdot \overline{GP} \times \overline{CA}} < \overline{PB'} < \frac{1}{3}\overline{B''B'}$

2. 切割方式：



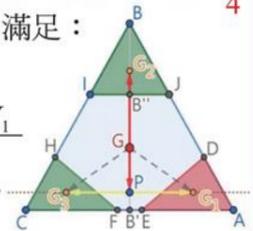
原始正三角形掉落一塊正三角形
在 $\overline{BB'}$ 上找一點 P 作 $\overline{B'P'} : \overline{B'P} = 3 : 1$
過點 P' 作平行 \overline{AC} 的直線交 \overline{BA} 、 \overline{BC} 於 D 、 H 二點
計算 $\overline{EA} = \frac{\overline{G_2G} \times W_2}{\overline{GP} \times 3\overline{PB'}}$ 連接 \overline{DE} 、 \overline{FH} 完成作圖
利用六邊形重心作圖進行驗證
取 E 、 F 點使得 $\overline{AE} = \overline{FC}$

Case3

切法唯一

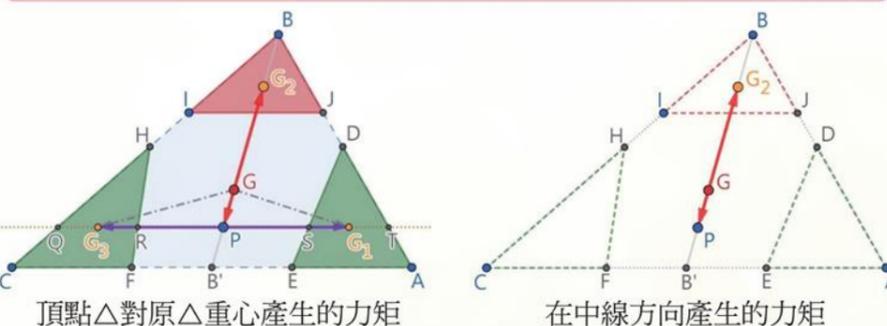
【性質 2】

假設原 $\triangle ABC$ 是正三角形、掉落 $\triangle ADE$ 為任意三角形且 $W_1 < \frac{1}{4}\triangle ABC$ 面積，若校正 $\triangle CHF$ 、 $\triangle BIJ$ (正 \triangle) 滿足：
(1) $\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$ 為等底等積三角形
(2) $(\overline{BB'} - \overline{BB''}) \times \overline{BB''}^2 = \frac{3\sqrt{3} \cdot 2\overline{GP} \times W_1}{2}$
剩餘六邊形重心維持在原三角形重心 ($g=G$)。



【Lemma 3】

假設原 $\triangle ABC$ 為任意三角形、 $\triangle BIJ$ 為平行截角三角形，且兩個在原 $\triangle ABC$ 底邊上的 $\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$ 為等底等積三角形，則三頂點三角形對於原 $\triangle ABC$ 的合力矩，必使剩餘六邊形重心 g 在原 $\triangle ABC$ 的中線上移動。



頂點 \triangle 對原 \triangle 重心產生的力矩

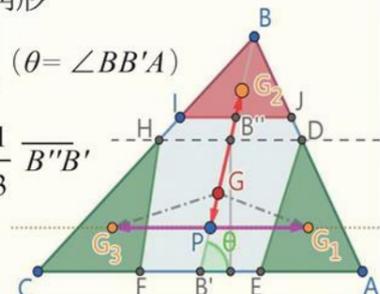
在中線方向產生的力矩

Case5

切法不唯一

【性質 3】

假設原 $\triangle ABC$ 為任意三角形、掉落 $\triangle BIJ$ 為平行截角三角形，且 $2\overline{BI} < \overline{BC}$ ，若在中線上給定一點 P ， P 點和校正 $\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$ 滿足：
(1) $\triangle ADE$ 和 $\triangle CHF$ 為等底等積三角形
(2) $\overline{EA} = \overline{CF} = \frac{\overline{GG_2} \cdot W_2}{\overline{GP} \times 3\overline{PB'} \cdot \sin\theta}$ ($\theta = \angle BB'A$)
(3) $\frac{2 \cdot \overline{GG_2} \times W_2}{3 \cdot \overline{GP} \times \overline{CA} \cdot \sin\theta} < \overline{PB'} < \frac{1}{3}\overline{B''B'}$
則剩餘六邊形重心維持在原三角形重心 ($g=G$)。



P 點限制：

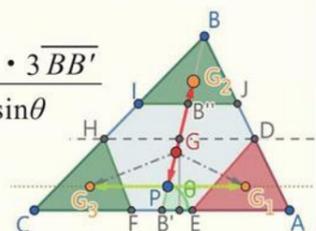
取 P 點時有解的範圍為 $\frac{2 \cdot \overline{GG_2} \times W_2}{3 \cdot \overline{GP} \times \overline{CA}} < \overline{PB'} < \frac{1}{3}\overline{B''B'}$

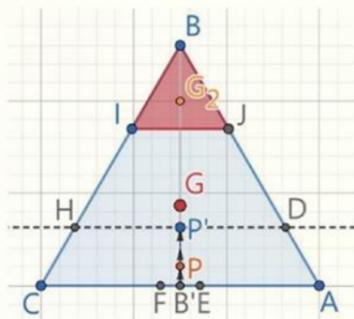
Case6

切法唯一

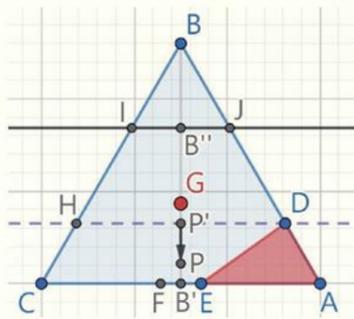
【性質 4】

假設原 $\triangle ABC$ 和掉落 $\triangle ADE$ 為任意三角形且 $W_1 < \frac{1}{4}\triangle ABC$ 面積，若校正 $\triangle CHF$ 、 $\triangle BIJ$ (平行截角 \triangle) 滿足：
(1) $\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$ 為等底等積三角形
(2) $(\overline{BB'} - \overline{BB''}) \times \overline{BB''}^2 = \frac{2\overline{GP} \cdot W_1 \cdot 3\overline{BB'}}{\overline{CA} \cdot \sin\theta}$
剩餘六邊形重心維持在原三角形重心 ($g=G$)。

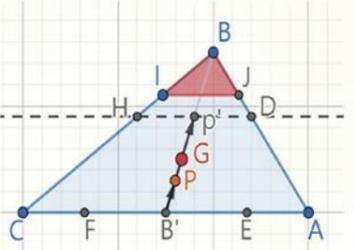




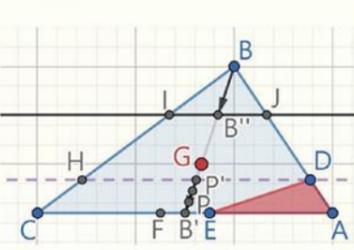
Case2 切割方式



Case3 切割方式



Case5 切割方式



Case6 切割方式

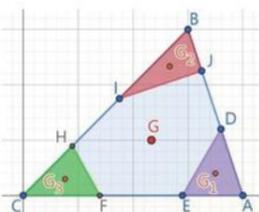
【結論 2】

若在原 $\triangle ABC$ 底邊的兩個頂點三角形 ($\triangle ADE$ 、 $\triangle CHF$) 為等底等積三角形，則在研究中給定的範圍內必定可以找到相對應不變心的切割方式，其中 $\triangle BIJ$ 和另外兩塊頂點三角形的面積不必相等，且切割方式在特定條件 (Case2、Case5) 中並不唯一。

四、用水平、垂直分量建立數學模型，找出三塊頂點三角形面積完全不相等時，缺角三角形重心不變的切割位置。

【猜想】

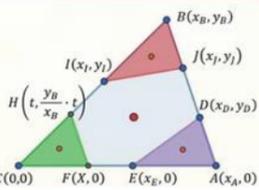
假設原 $\triangle ABC$ 和掉落 $\triangle BIJ$ 皆為任意三角形，若在適當範圍內給定校正 $\triangle ADE$ ，則可通過 Lemma 1 找到關係式並計算出另一校正 $\triangle CHF$ 完成不變心作圖。



【性質 5】

假設原 $\triangle ABC$ 和掉落 $\triangle BIJ$ 皆為任意三角形，先在適當範圍內給定校正 $\triangle ADE$ ，若校正 $\triangle CHF$ 的坐標 $F(X,0)$ 、 $H(t, \frac{y_B}{x_B} \cdot t)$ (X 、 t 為未知數) 符合：

$$\begin{cases} (X+t-x_A-x_B) \cdot (X \cdot \frac{y_B}{x_B} - t) = -(x_D+x_E-x_B) \cdot (x_A-x_E) \cdot y_D + (x_I+x_J-x_A) \cdot (x_I-x_J) \cdot (y_B-y_I) \\ (\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B) \cdot (X \cdot \frac{y_B}{x_B} - t) = -(y_D-y_B) \cdot (x_A-x_E) \cdot y_D + (y_I+y_J) \cdot (x_I-x_J) \cdot (y_B-y_I) \end{cases}$$
 其中 $0 < X < x_E$ ； $0 < t < x_I$ ，則剩餘六邊形重心維持在原三角形重心 ($g=G$)。



延續【猜想】，設 $C(0,0)$ 、 $x_F = X$ 、 $x_H = t$ 並將各頂點坐標化： $A(x_A,0)$ 、 $B(x_B,y_B)$ 、 $D(x_D,y_D)$ 、 $E(x_E,0)$ 、 $I(x_I,y_I)$ 、 $J(x_J,y_J)$ 、 $F(X,0)$ 、 $H(t, \frac{y_B}{x_B} \cdot t)$ 接著把 G 、 G_1 、 G_2 、 G_3 、 $\overrightarrow{GG_1}$ 、 $\overrightarrow{GG_2}$ 、 $\overrightarrow{GG_3}$ 、 W_1 、 W_2 、 W_3 寫出來，再將 Lemma 1 的公式拆成水平、垂直分量後得到兩個方程式。

設 $\overrightarrow{GG_1} = (x_1, y_1)$ 、 $\overrightarrow{GG_2} = (x_2, y_2)$ 、 $\overrightarrow{GG_3} = (x_3, y_3)$
 $\overrightarrow{GG_1} \times W_1 + \overrightarrow{GG_2} \times W_2 + \overrightarrow{GG_3} \times W_3 = \vec{0}$ (Lemma 1)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \times W_1 + x_2 \times W_2 + x_3 \times W_3 = 0 & (\text{水平分量}) \\ y_1 \times W_1 + y_2 \times W_2 + y_3 \times W_3 = 0 & (\text{垂直分量}) \end{cases}$$

【計算】將列出的兩式相除後得到：

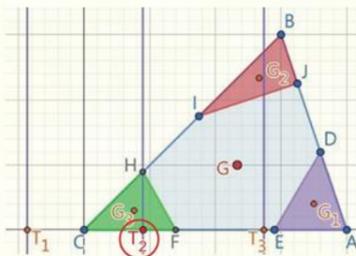
$$\frac{(X+t-x_A-x_B)}{(\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B)} = \frac{A}{B} \Rightarrow (X+t-x_A-x_B) = \frac{A}{B} \cdot (\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B)$$

$$\Rightarrow X = \frac{A}{B} \cdot (\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B) - t + x_A + x_B$$

代回第二式後得到

$$(\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B) \cdot \left\{ \left[\frac{A}{B} \cdot (\frac{y_B}{x_B} \cdot t - y_B) - t + x_A + x_B \right] \cdot \frac{y_B}{x_B} \cdot t \right\} = -B$$

得到了 t 的一元三次方程式後，再利用 GeoGebra 計算，就可以找到符合標準的唯一解 T_2 ，代回後解出 X ，即可標示最後校正 $\triangle CHF$ 中 H 、 F 的點坐標並完成不變心作圖。



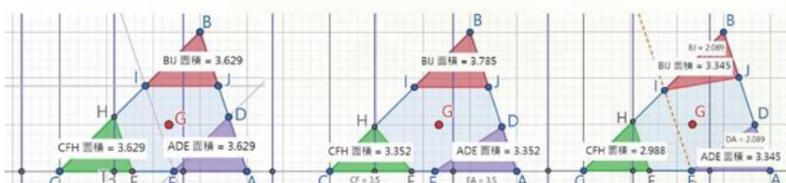
【結論 3】

原 $\triangle ABC$ 掉落任意一個頂點三角形後，我們一定可以通過力矩平衡的計算，來找到相對應的兩個校正三角形來完成不變心作圖，其中更證明了三個頂點三角形面積不相等的不變心切割方式是存在的。

伍、研究結果

- 一、正三角形和非正三角形中發生所有掉落的可能，在本研究中發現其不變心的切割方式都是存在的，並且在 Case2、Case5 中的解法不唯一。
- 二、正三角形和非正三角形中發生所有可能的掉落方式，皆存在切割的方法能使得重心保持不變。
- 三、在任意三角形缺角的問題中，我們都可以通過力矩平衡的計算，找到校正三角形 (面積不受限制)，使剩餘六邊形重心保持不變。

陸、討論



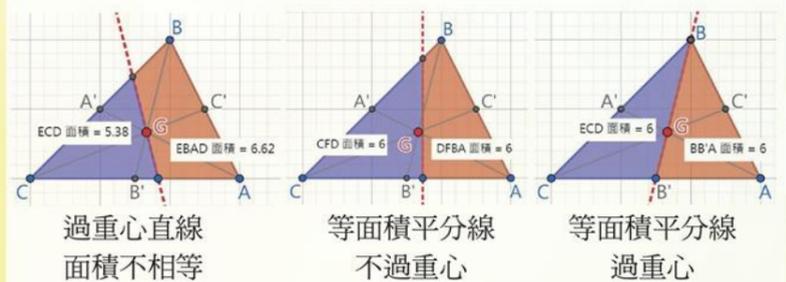
結論 3 → Case4

結論 3 → Case5

結論 3 → Case6

柒、結論

一、指出文獻錯誤 → 影響重心偏移的並非面積，而是力矩 (槓桿)：



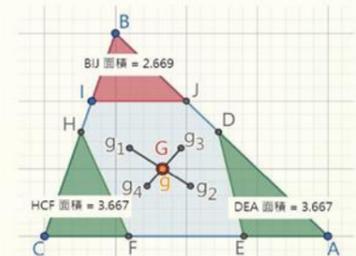
過重心直線
面積不相等

等面積平分線
不過重心

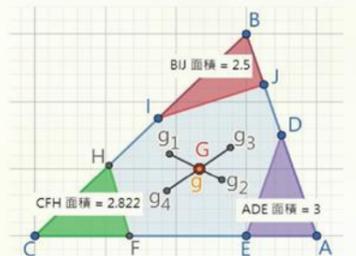
等面積平分線
過重心

二、超越文獻的突破 → 不再受限於等積切割：

本研究透過等底等積三角形會使重心在中線上下移動，再加上力矩的計算，找到了頂點三角形面積不相同的切割方式，突破了文獻《剪不斷，理還亂 - 我就是不變心》中，只能透過等面積切割來保持重心不變的限制。



結論 2：面積
不完全相等切割



結論 3：面積
完全不相等切割

三、未來展望：

- (一) 將研究結果延伸至任意缺角多邊形的不變心切割。
- (二) 研究結果的應用。(ex：吊扇的葉片重量不均時的解決方式)

捌、參考資料及其他

- 一、王哲麒、翁士傑 (1991)。尋找多邊形重心。中華民國第 31 屆中小學科學展覽會參展作品專輯。
- 二、張君瑋、王文彥、林羿旻、謝秉耕 (2009)。剪不斷，理還亂 - 我就是不變心。中華民國第四十九屆中小學科學展覽會國中組數學科。