中華民國第63屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030413

共邊三角形內心與等距共圓點之研究

學校名稱：高雄市立五福國民中學

作者：	指導老師：
國二 林睦鈞	余尚芸
國二 蔡振曄	歐志昌
國二 顧康禾	

關鍵詞：等距共圓點、雞爪定理、內心

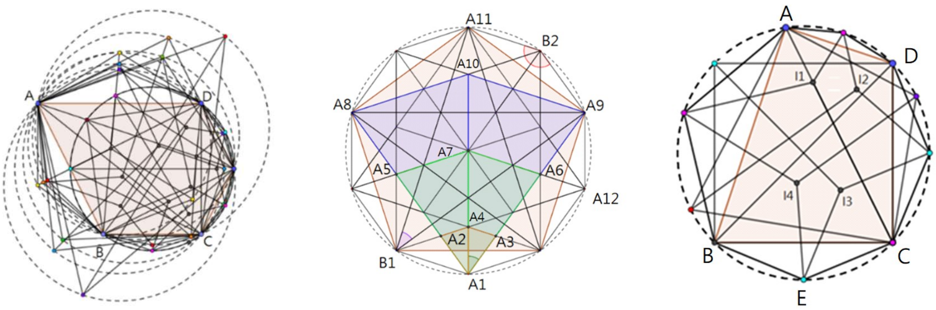
共邊三角形內心與等距共圓點之研究

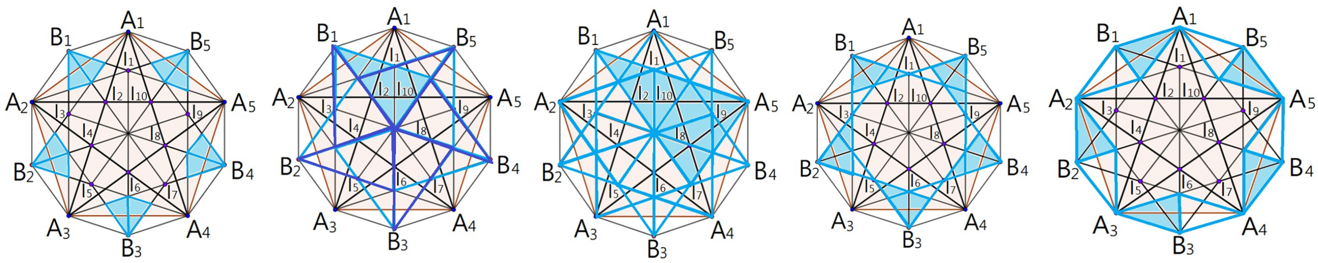
摘要

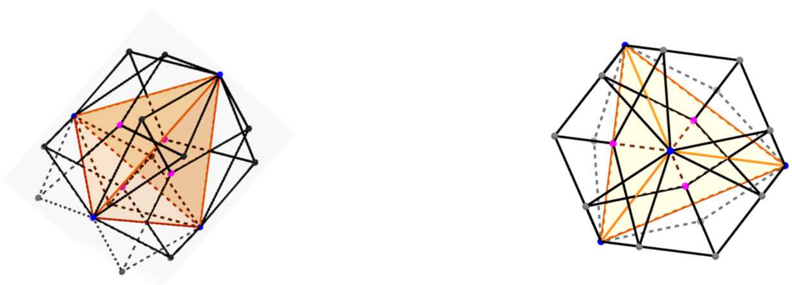
雞爪定理僅適用於任意三角形，好奇「此性質是否可適用在多邊形?多邊形在何條件下才能找到等距共圓點?」經探索後，發現「**雞爪定理不能適用在多邊形**」；證明得到若「**任意 n 邊形所有頂點共圓時，可形成等距共圓點及形成 n 組共邊三角形，存在 n-2 組 n 個等距線段。**」

接續，在等距共圓點的條件下，是否能在多邊形找到「**等距相關性質**」，如：等距△數量、等距△全等、相似種類……等，如：等角共圓 n 邊形、正奇數 n 邊形及正偶數 n 邊形中，形成最小頂角等距△的數量公式分別為$\left[\frac{(n-1)(n-4)}{2}+3\right]\times\frac{n}{2}$、$2n\left[\frac{n+5}{4}\times(n-3)\right]$及$2n\left[\frac{(n+4)(n-2)+8}{8}\right]$，並證明公式成立。

將研究推廣，發現**任意多面體所有平面皆形成等距共圓點之條件為「任意 n 面體所有平面的頂角共圓」**。並應用在夾娃娃機及網路基地台之建置。







壹、前言

在練習數學習題時，偶然發現了一個有趣的定理，如下取自維基百科資料所示:

雞爪定理

設$\triangle ABC$為任意三角形，I為其內心，$\angle ABC$的角平分線BI交外接圓$\odot ABC$於D。定理斷言，D到A, C, I三點等遠，即$DA = DC = DI$。

等價的說法有：

- 過A, C, I三點的圓，圓心位於D。這尤其說明該圓的圓心在於原三角形的外接圓上。[3][4]
- 諸三角形AID, CID, ACD皆為等腰，D為其頂角。

證明

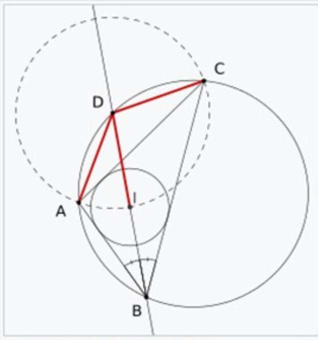
由於同弧所對的圓周角相等，有 $\angle IBA = \angle DCA, \quad \angle IBC = \angle DAC.$

又BI為角B的平分線，有 $\angle DCA = \angle DAC,$

故$DA = DC$得證（等圓周角對等弦）。

最後計角有：
$$\begin{aligned}\angle DIA &= 180^\circ - \angle AIB \\ &= \angle IAB + \angle IBA \\ &= \angle IAC + \angle DAC \\ &= \angle IAD.\end{aligned}$$

所以三角形DIA有兩底角相等，證畢$DA = DI$。



雞爪定理：三條紅色線段等長

查閱相關文獻後，發現雞爪定理只有少數的延伸性質(相關內容如附件或手稿)，而歷屆全國科展作品中，也沒有雷同之內容。

對此定理產生了興趣，上述內容中的雞爪定理僅適用於任意三角形，我們好奇～**像雞爪定理這樣的性質是否可以適用或延伸在多邊形呢?**回歸雞爪定理的初始條件，跟形成雞爪 (等距線段)的做法進行分析，**探討多邊形在何種條件下才能找到類似雞爪定理的等距線段?是否可形成「等距相關性質」?**

研究目的分列如下:

一、探討雞爪定理是否可以適用於多邊形。

二、探討任意 n 邊形在什麼條件下形成等距共圓點。

三、探討特殊 n 邊形等距相關性質。

(一) 正 n 邊形等距共圓點形成等距三角形圖形特徵及其數量公式之探討。

(二) 其他特殊多邊形等距共圓點形成等距三角形圖形特徵及其數量公式之探討。

貳、研究設備與名詞解釋

一、研究設備：GGB(GeoGebra)

二、名詞解釋：

(一)共邊△： 當 n 個△共用一條邊時，稱這 n 個△為共邊△。在本研究中若 n 邊形的其中一邊為共邊△的公共邊，其餘(n-2)個頂點與該公共邊形成(n-2)個共邊△。

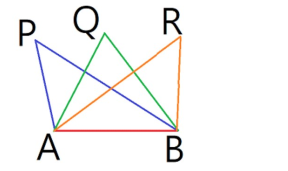


圖 2-2-1 共邊△

如圖 2-2-1 以 P、Q、R 為頂點的藍、綠、橘△為共$\overline{AB}$邊(紅色線段) 的共邊△。

如圖 2-2-2 以任意五邊形為例:$\overline{AB}$為共邊，則圖 2-2-3 之△ ABC、 △ ABD、 △ ABE為邊$\overline{AB}$之共邊△，分解圖 1、2、3 分別為共邊$\overline{AB}$的△ ABC、 △ ABD、 △ ABE。

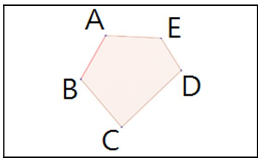
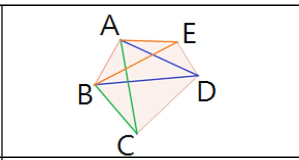
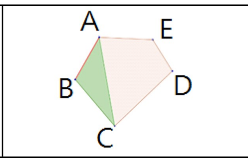
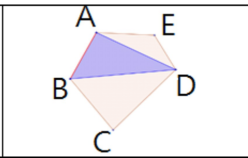
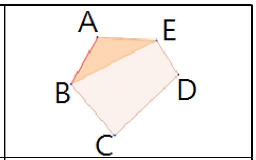
				

圖 2-2-2 任意五邊形	圖 2-2-3△ ABC、 △ ABD、 △ ABE為邊$\overline{AB}$之共邊△	圖 2-2-2 分解圖 1	圖 2-2-2 分解圖 2	圖 2-2-2 分解圖 3

(二)等距線段：

雞爪定理中長度相等之線段，即△內角角平分線與△外接圓之交點 F，①F 與△ABC 內心連線形成等距線段；②F 與相鄰 2 個頂點的連線段形成等距線段(如圖 2-2-4 中$\overline{FA}$、$\overline{FC}$、$\overline{FI}$)；在本研究中與雞爪定理中類似，長度相等的線段命名為等距線段。

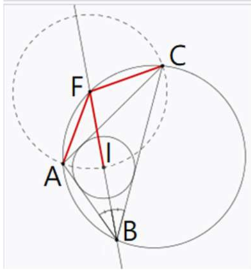


圖 2-2-4 等距線段圖

(三)共圓點：

△內角平分線與其外接圓之交點。

如圖 2-2-5△ABD 內角平分線$\overleftrightarrow{DF}$和△ABD 外接圓交點 G。

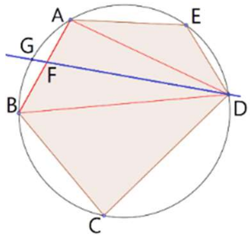


圖 2-2-5 共圓點圖

(四)等距共圓點：

雞爪定理中雞爪的踝部位置，△的內角平分線與該△外接圓的交點。本研究是指以 n 邊形中 3 個頂點形成△，該△的內角平分線與該△外接圓的交點，且須滿足該點是具有 n 個等距線段的共圓點稱為等距共圓點。

如圖 2-2-6，四邊形中 F 點有相鄰 2 個頂點 A、B、搭配共邊△的 2 個內心 I_1、I_2，共 4 條等距線段$\overline{FA}=\overline{FB}=\overline{FI_1}=\overline{FI_2}$，因此 F 滿足等距共圓點的條件。

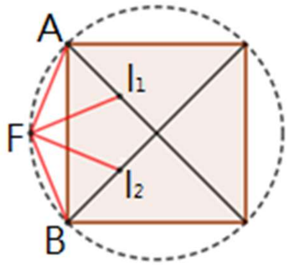


圖 2-2-6 等距共圓點圖

(五)等距△：

以等距共圓點為頂點之等腰△。(如圖 2-2-7 中的△BDE 為等距△，而△ADI_1因其頂點並非等距共圓點，因此並非等距△)

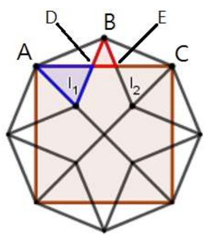
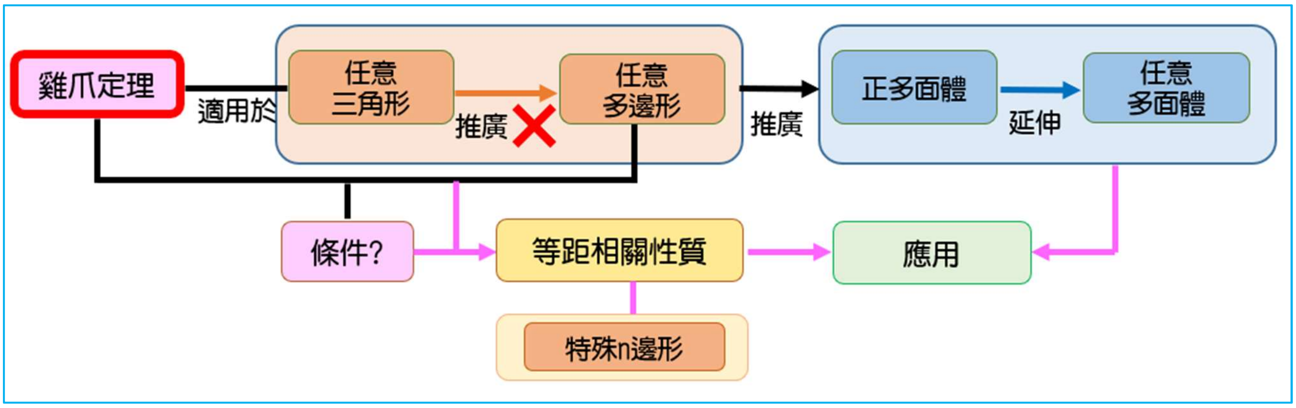


圖 2-2-7 等距△說明圖

參、研究過程

本研究整個研究架構圖如下：



一、探討雞爪定理是否可以適用於多邊形

思考與分析

∵雞爪定理的內容提及適用的圖形是△

好奇這樣的性質是否可以適用在多邊形?

分析要形成雞爪如果要能適用在多邊形需要達到基本條件可能有：

1.多邊形頂點共圓

2.多邊形需具內心

3.內角角平分線與多邊形外接圓之交點，與多邊形內心、相鄰 **2** 個頂點的連線段形成等距線段

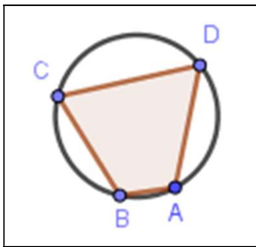


圖 3-1-1

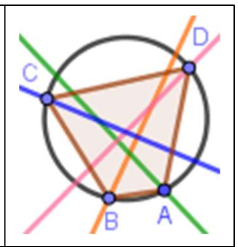


圖 3-1-2

嘗試：從任意四邊形開始

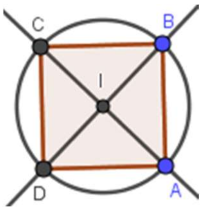
先做共圓四邊形 ABCD(圖 3-1-1)，

再分別做出橘色線為∠ABC角平分線、藍色線為∠BCD角平分線、粉色線為∠ADC角平分線、綠色線為∠BAD角平分線(圖 3-1-2)

困難：若要滿足上述，這四條角平分線(橘藍粉綠線)須交於一點，形成多邊形的內心，但若要達到這樣的條件，就必須是正多邊形，

因此接續探討雞爪定理在正 n 邊形的情形。

雞爪定理是否適用在正 n 邊形



探討雞爪定理在正多邊形的情形，

以正方形 ABCD 進行嘗試，

假設 ABCD 符合雞爪定理，則$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{IC}$，

∵ABCD 為正方形，∴ $\overline{BC}=\overline{CD}$

$\because \angle CID = 90°$， ∴ $\overline{CD} \neq \overline{IC}$， ∴ $\overline{BC}=\overline{CD} = \overline{IC}(\rightarrow\leftarrow)$，∴雞爪定理無法適用在正方形

同理可證，雞爪定理無法適用在正 n 邊形

雞爪定理是否適用在其他特殊多邊形

∵雞爪定理無法適用於正 n 邊形，

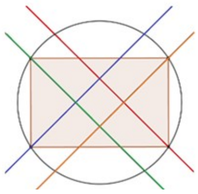
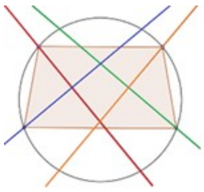
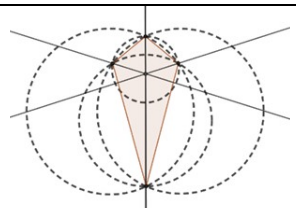
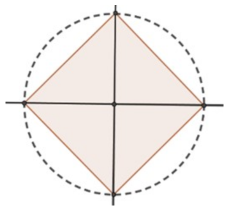
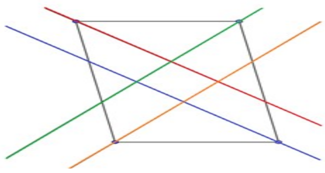
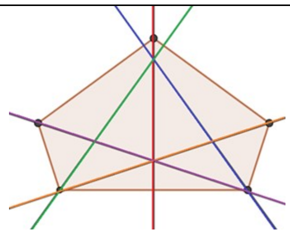
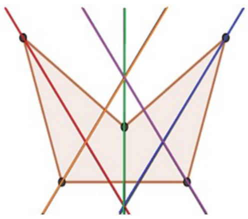
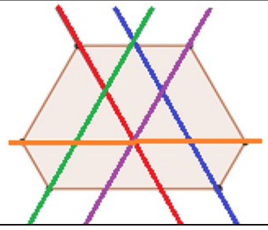
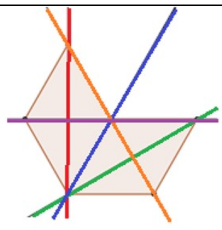
∴探討特殊多邊形，四邊形以長方形、等腰梯形、箏形、菱形、平行四邊形為例，

五邊形以上以等角五邊形、等邊五邊形、等角六邊形、等邊六邊形為例，

分別找圖形的內心跟做圖形的外接圓進行嘗試，

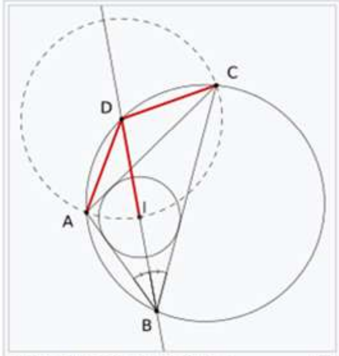
發現：原雞爪定理無法適用在正 n 邊形、特殊 n 邊形

說明如下表：

圖名	長方形	等腰梯形	箏形
圖			
不能理由	四內角平分線(紅、藍、綠、橘)無法交於一點 ⟹長方形沒有內心	四內角平分線(紅、藍、綠、橘)無法交於一點 ⟹梯形沒有內心	箏形不一定形成共圓 (對角互補時形成共圓)
圖名	菱形	平行四邊形	等角五邊形
圖			
不能理由	無法在圓周上找到一點使一未過圓心之弦與半徑等長	四內角平分線(紅、藍、綠、橘)無法交於一點 ⟹平行四邊形沒有內心	五內角平分線(紅、藍、綠、橘、紫)無法交於一點 ⟹等角共圓五邊形沒有內心
圖名	等邊五邊形	等角六邊形	等邊六邊形
圖			
不能理由	五內角平分線(紅、藍、綠、橘、紫)無法交於一點 ⟹等邊共圓五邊形沒有內心	六內角平分線(紅、藍、綠、橘、橘、紫)無法交於一點 ⟹等角共圓六邊形沒有內心	六內角平分線(紅、紅、藍、綠、橘、紫)無法交於一點 ⟹等邊共圓六邊形沒有內心

小結：雞爪定理不能延伸至多邊形，即無法由**多邊形內角角平分線與其外接圓之交點，與多邊形內心、相鄰 2 個頂點的連線段形成 n 個等距線段(雞爪的爪)**。

如果雞爪定理不能延伸至任意多邊形，
是否可加入什麼條件令任意多邊形成為類雞爪定理?



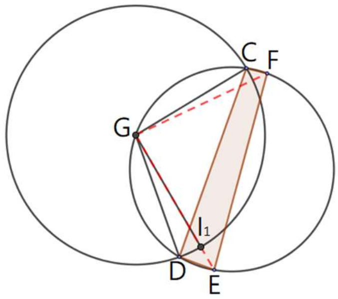
雞爪定理：三條紅色線段等長

預想的目標與遭遇的困難

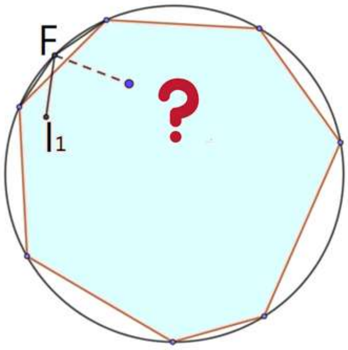
在△滿足等距線段(雞爪)的情形有 3 組，每一組等距線段有 3 個(右圖為其中一組等距線段)。

我們希望如果在 n 邊形同樣可以做到這樣的結果，
就要能夠①**在 n 邊形找到等距線段(雞爪)的情形有 n 組，**
②**每一組等距線段有 n 個。**

從四邊形嘗試，如右下圖



在已知 G 點與 C、D 兩頂點形成的線段$\overline{CG}$、$\overline{DG}$相等，
及△CDE 之內心I_1所形成的線段相等的前提下
(滿足原雞爪定理$\overline{DG}=\overline{I_1G}=\overline{CG}$)，
想找出滿足 2 個頂點 C、D 與 G 點連線段等長之外的第 3 個頂點，
但在嘗試過後發現怎麼樣都無法找到這第 3 個頂點(E、F 都不滿足)
即$\overline{DG}=\overline{I_1G}=\overline{CG}\neq\overline{FG}\neq\overline{EG}$。



∵目前滿足等距線段的點，除了相鄰 2 頂點，
還有 1 個就是某一△的內心，
∴與等距共圓點等距的點共有 3 個，
目標是:**在 n 邊形找到等距線段(雞爪)的情形有 n 組，**
每一組等距線段有 n 個
如右圖所示，如何找到其他滿足等距線段的點呢?

【以任意四邊形為例】

步驟 1. 見下頁圖 3-1-3

先依原雞爪定理的方式，
作共用 CD 的共邊△ACD 之內心 I_1(△ACD 三內角平分線)
並作過直線 AI_1 交圓於 F

步驟 2. 見下頁圖 3-1-4

連$\overline{FD}$、$\overline{FI_1}$、$\overline{FC}$，此時依原雞爪定理可證明$\overline{FD}$=$\overline{FI_1}$=$\overline{FC}$

如何找到其他滿足等距線段的點呢?

步驟 3. 見圖 3-1-5

此時以 F 為圓心，$\overline{CF}$為半徑，做一個圓通過 C、I_1、D，此時圓 F 上的點都會與 F 形成等距線段。

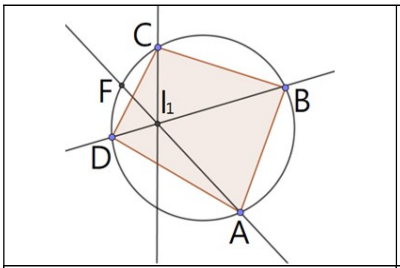
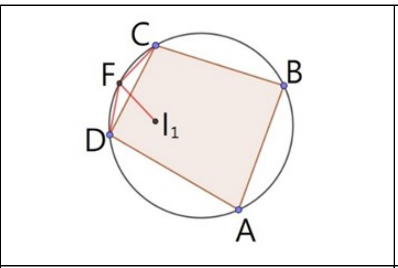
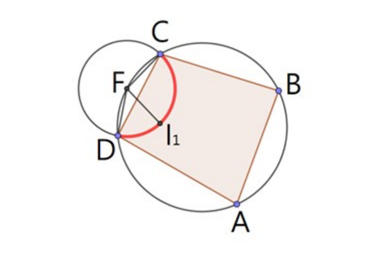
		

圖 3-1-3	圖 3-1-4	圖 3-1-5

發現：若像雞爪定理的等距線段點要在多邊形內部，

則要滿足等距線段的點必在弧$\widehat{CI_1D}$上(圖 3-1-5)，

此時弧$\widehat{CI_1D}$的範圍為∠CFD。

小結　：當多邊形內角角平分線與其外接圓之交點 F_1，與相鄰 2 頂點生衍的其中一個三角形內心會形成等距線段，若以 F_1 為圓心，該等距線段長為半徑畫弧，可在該弧上找到∞個點，形成∞個等距線段。

二、探討任意 n 邊形在什麼條件下形成等距共圓點

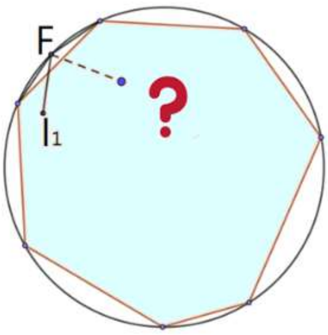
在滿足研究一結果時，可找到∞個等距線段，

但為了配合原雞爪定理(∆有 3 組 3 條等距線段)的前提下，延伸至多邊形，

此時希望能①在 n 邊形找到等距線段(雞爪)的情形有 n 組，

②每一組等距線段有 n 個。

思考與分析



目前滿足等距線段的點，除相鄰 2 頂點，

還有 1 個即為某 1∆內心，

這樣與**等距共圓點**等距的點共有 3 個，

∵一定找不到除了這 2 個頂點之外滿足條件的其他頂點，

故轉而尋找是否有滿足等距線段 n-3 個內心?

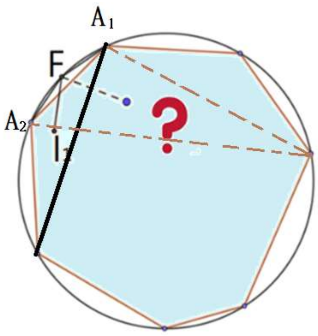
進而需要找到這些內心到底是哪些∆的內心?

也就是如果多邊形有外接圓，外接圓上有一個點，要滿足等距共圓點的條件，

除了**共圓**還需要什麼條件?

(一)探討圓內接多邊形上一點的共圓點如何找到其他條件使其成為等距共圓點

為何會想要找共邊∆



∵ 雞爪定理的等距線段為共圓點與兩頂點和內心所形成的線段

∴形成 n 條線段必有 2 頂點和 n-2 個內心與共圓點相連，

仔細觀察發現：

該共圓點與內心所形成的線段會等距，

該內心乃原共圓點相鄰兩頂點與另一頂點所形成∆的內心

若是**維持**原共圓點相鄰兩頂點共邊，**繼續**由其他頂點構成共邊△，

是否就有機會形成符合條件的 n-2 個內心

嘗試：以 GGB 作圖，猜想正確，

發現：n 邊形中△在共圓且共用一條邊的情況下(圖 3-2-1)，

根據等角對等弧性質，

可推得各△共用邊之對應角角平分線會與外接圓交於 G(圖 3-2-2)，

又根據雞爪定理可得 G 點與 n 個△內心及共用邊的 2 頂點距離相等(圖 3-2-3)，

而 n 邊形又可視為 n-2 個共邊△頂點相連而成(圖 3-2-4)，

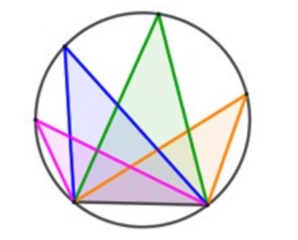
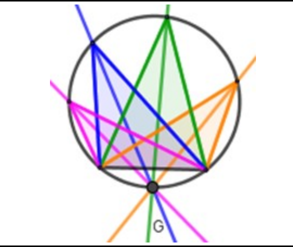
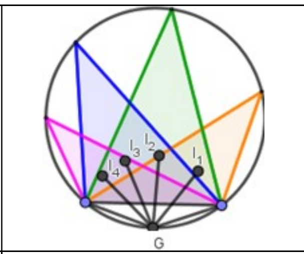
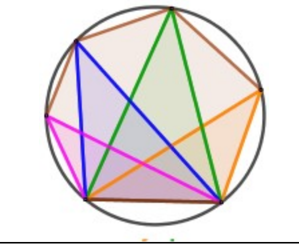
			

圖 3-2-1	圖 3-2-2	圖 3-2-3	圖 3-2-4

∴便選定了共邊△來進行探討。

得到引理 **1** 並證明如下：

引理 1

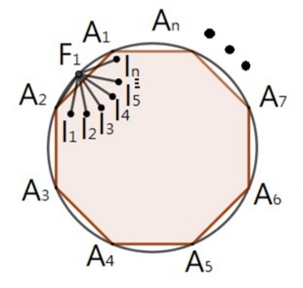
設圓內接任意 n 邊形($A_1A_2…A_n$)，

I_i(I_1)為【以該 n 邊形其中一邊(設為$\overline{A_1A_2}$)為共邊的】共邊△內心，

∠$A_2A_3A_1$ 的角平分線 A_3I_1 交外接圓於 F_i(F_1)，

則可找到另外(n-2)個以$\overline{A_1A_2}$為共邊配其餘頂點 A_i(i=3、…….、n)的共邊△內心 I_k，

使得$\overline{A_1F_1}$=$\overline{A_2F_1}$=$\overline{I_1F_1}$=……=$\overline{I_kF_1}$，此時 F_i 為等距共圓點。



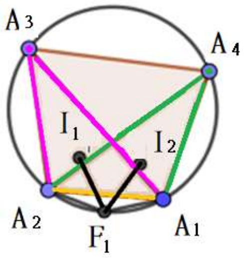
以圓內接任意 $A_1A_2A_3A_4$ 為例:

設圓內接任意 4 邊形($A_1A_2A_3A_4$)，I_1 為【以$\overline{A_1A_2}$為共邊的】共邊△$A_1A_2A_3$ 內心，

∠$A_2A_3A_1$ 的角平分線 A_3I_1 交外接圓於 F_1

則可找到另外 1 個【以$\overline{A_1A_2}$為共邊的】共邊△內心 I_2，

使得$\overline{A_1F_1}$=$\overline{A_2F_1}$=$\overline{I_1F_1}$=$\overline{I_2F_1}$，此時 F_1 為等距共圓點。



證明：在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中找到 2 個共$\overline{A_1A_2}$邊的共邊$\Delta A_1A_2A_3$、$\Delta A_1A_2A_4$，

(下頁接續證明)

標示$\Delta A_1A_2A_3$、$\Delta A_1A_2A_4$之內心為I_1、I_2，

將∠$A_2A_3A_1$和∠$A_2A_4A_1$角平分線與外接圓之交點設為F_1點，

(其中橘線為∠$A_2A_3A_1$之角平分線、

綠線為∠$A_2A_4A_1$之角平分線)

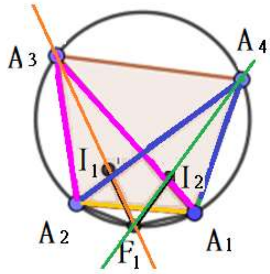
連接$\overline{A_1F_1}$、$\overline{A_2F_1}$、$\overline{I_1E}$、$\overline{I_2E}$，

此時可由雞爪定理可證得$\overline{A_1F_1}$=$\overline{A_2F_1}$=$\overline{I_1F_1}$，$\overline{A_1F_1}$=$\overline{A_2F_1}$=$\overline{I_2F_1}$，

∴$\overline{A_1F_1}$=$\overline{A_2F_1}$=$\overline{I_1F_1}$=$\overline{I_2F_1}$，

此時F_1點即稱為等距共圓點(滿足①在4邊形找到等距線段4個等距線段)。

由上另可得一延伸小性質，如下：

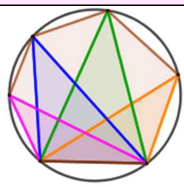


引理1延伸小性質：任意n邊形必存在n組(n-2)個共邊△。

如圖任意6邊形共一邊會形成4個共邊△，

∵有6個邊，

∴共有6組不同共邊△



(二) 探討任意n邊形形成等距共圓點的條件

思考與分析

∵任意△皆滿足雞爪定理，故任意△必滿足等距共圓點。

根據【引理1延伸小性質】可知任意n邊形必存在n組(n-2)個共邊△，此時這些共邊△都存在一內心。

這樣條件下，是否能形成等距共圓點?

試由任意偶邊形及任意奇邊形分開討論：

1.探討任意偶邊形形成等距共圓點的條件

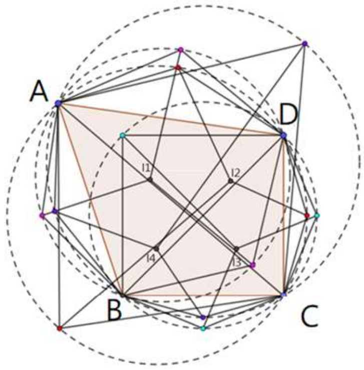
以【任意四邊形】為例說明

推導：做一任意四邊形$ABCD$，

並將其分成4個共邊△，

分別將其外接圓、共圓點與等距線段繪製出來，

此時4個共邊△有4個相異外接圓，如右上圖。



發現❶：任意4邊形4個共邊△有4個相異外接圓無法形成等距共圓點。

此時將右上圖將A點向右平移，直至四邊形每邊皆出現一等距共圓點。

發現❷：任意四邊形形成等距共圓點之條件為任意四邊形 **4** 頂點共圓。

證明:假設BCD三點共圓，但A不與其共圓，

設弧BC上之共圓點為E，則

∵ 雞爪定理僅於共圓時發生

$\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{I_3E}$(雞爪定理)

∴ $\overline{I_2E}\neq\overline{BE}$(非共圓)，

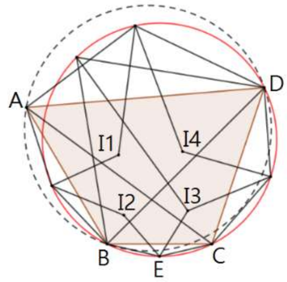
∴ 同理可證$\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{I_3E}=\overline{I_4E}$(→←)

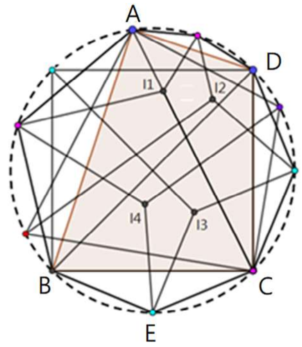
此時若兩共邊 △△ ABC 、△ BCD共圓共圓，

則$\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{I_3E}=\overline{I_4E}$

∴ 必須滿足$ABCD$四點共圓，

任意四邊形才可形成等距共圓點





2.探討任意奇邊形形成等距共圓點的條件

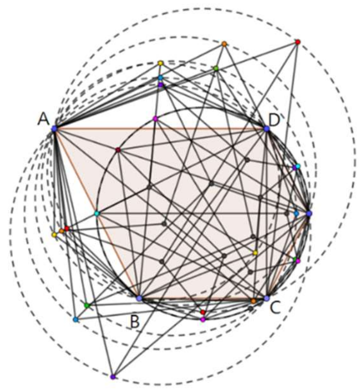
以【任意五邊形】為例說明

推導：做一任意邊形$ABCDE$，

並將其分成 10 個共邊△，

分別將其外接圓、共圓點與等距線段繪製出來，

發現❶：**任意 5 邊形 10 個共邊△有** 10 **個相異外接圓無法形成等距共圓點**。



此時將右上圖將A點向右平移，直至五邊形每邊皆出現一等距共圓點(右下圖)。

發現❷：任意五邊形形成等距共圓點之條件為任意五邊形 **5** 頂點共圓。

證明：假設$BCDE$四點共圓，但A不與其共圓，

設弧BC上之共圓點為F，則

∵ 雞爪定理僅於共圓時發生

$\overline{BF}=\overline{CF}=\overline{I_2E}$(雞爪定理)

$\overline{BF}=\overline{CF}=\overline{I_3F}$(雞爪定理)

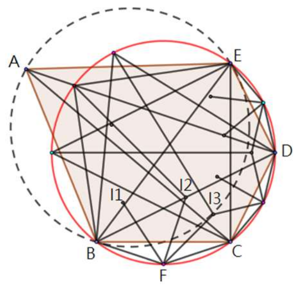
∴ $\overline{I_1F}\neq\overline{BF}$(非共圓)

∴ 同理可證$\overline{BF}=\overline{CF}=\overline{I_1F}=\overline{I_2F}=\overline{I_3F}$(→←)

此時若三共邊 △△ ABC 、△ BCD 、△ BCE共圓，

則$\overline{BF}=\overline{CF}=\overline{I_1F}=\overline{I_2F}=\overline{I_3F}$

∴ 必須滿足$ABCDE$五點共圓，任意五邊形才可形成等距共圓點(如右下圖)



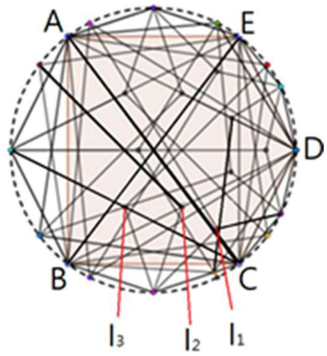
小結 ∵雞爪定理的等距線段為共圓點與兩頂點和內心所形成的線段

∴形成 n 條線段必有 2 頂點和 n-2 個內心與共圓點相連，

若要形成 n-2 個內心，必有 n-2 個共邊△

而任意 n 邊形可形成 n 組(n-2)個共邊△

由上述結果可知：不管偶邊形或奇邊形，任意 n 邊形形成等距共圓點之條件為需所有頂點共圓方能形成等距共圓點。



引理 2 ：當任意 n 邊形所有頂點共圓時，可形成等距共圓點。

引理 2 延伸性質 ：任意 n 邊形所有頂點共圓時，可形成 n 個等距共圓點，存在 n-2 組 n 個等距線段。

接續，在研究過程中我們看到在形成等距共圓點時，圖形出現了一些特性，我們想繼續探討，針對此，我們做了一些文獻探討，看看是否歷年科展作品是否有相關資料可參考?發現過去作品並無雷同的研究，但將相關研究可能對我們的啟發列如下表:

名稱	與研究相關的內容摘要	對本研究啟發與差異之處
平面上三點集中度判別法 (2002 國際科展)	以△的面積、周長，內心、外心和重心到頂點的距離，三點的標準差及平均差的概念，作為相異的判別方式，再利用統計學上的方法，找出何種最合適。	**1.啟發**：此文獻探討**內心、外心和重心至三頂點距離**，啟發我們對內心到特殊點的距離之研究。 **2.差異**本研究探討**△角平分線與外接圓的交點**而非△本身的特殊點。
共點圓、共圓點 (2008 國際科展)	將限制點延伸至多條交於一點直線並加入新的直線，尋找任意完全四邊形的限制點 P，使其形成四個不同的完全四邊形的限制點，而這些點會共圓，命名為一限制圓。找尋所有的限制圓，可以發現會共點。	**1.啟發**：此文獻探討**過圓直線之交點**，啟發我們對對圓之交點的研究。 **2.差異**：本研究探討**△延伸圓之共圓點**而非單純的過圓直線之交點。
求過任意點作多邊形面積平分線 (48 屆國中組)	運用中線性質、等角面積比定理和作相似形、作三點共圓、平行線交換面積等，求「過△邊上、內部、外部任意點」的△面積平分線。再探討出過△內部點的位置與面積平分線的數目。	**1.啟發**：此文獻探討了**相似形、作三點共圓**，啟發我們對對**相似性性質**的研究。 **2.差異**：本研究探討關於**等距△的全等性質**。

至此，繼續探討特殊多邊形等距共圓點之相關性質:

三、探討特殊 n 邊形等距相關性質

從研究二探討過程，

發現當多邊形具 n 組(n-2)個等距共圓點時，會出現許多形狀相同的△，特別是一些特殊多邊形會有不同特徵，

據此，針對等距△圖形特徵進行探討，並推導對應之等距△數量公式；

分成正 n 邊形與其他特殊 n 邊形進行探討：

(一)正 n 邊形等距共圓點形成等距△圖形特徵及其數量公式之探討

因為正偶數邊形對角線交點為該正偶邊形外接圓之圓心，但正奇數邊形不同；

此時觀察圖形形成的圖形特徵及等距△的數量結構不同，故以偶、奇數邊形分別作探討。

1.正偶數邊形等距共圓點所衍伸出等距△之圖形特徵與數量關係

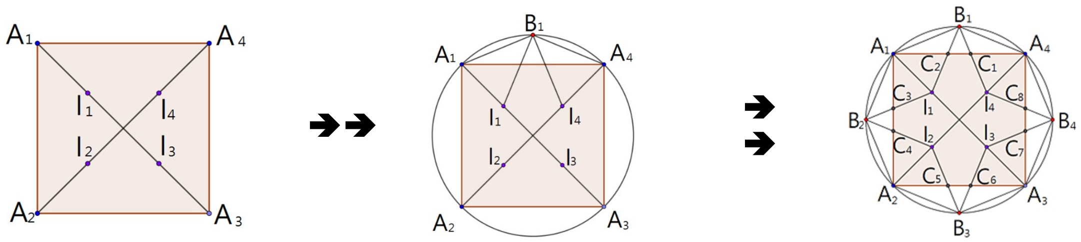
以【正四邊形】為例說明(其餘正偶數邊形詳見手稿及附件)

依據本研究定義之等距共圓點、等距△進行作圖：

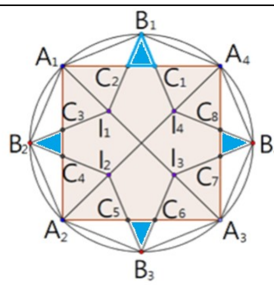
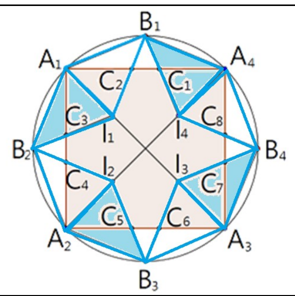
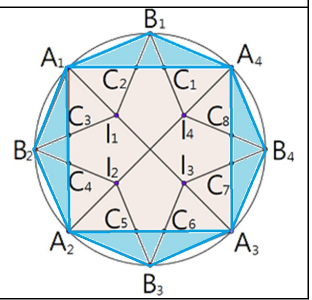
步驟 1 將此正方形形成 4 個共邊△之內心標示為內心標示為$I_1 \sim I_4$

步驟 2 將$\angle A_1A_2A_4$、$\angle A_1A_3A_4$之角平分線分別與△ $A_1A_2A_4$、△ $A_1A_3A_4$之外接圓的交點標示為B_1，其餘依此類推標示為B_2、B_3、B_4，並與相鄰兩頂點相連

步驟 3 將$B_1 \sim B_4$與其共邊△之內心相連，將連線段與正方形之交點標示為$C_1 \sim C_8$



發現：❶形成等距△有 2 類，頂角為 45^O 或 135^O，其數量分別為 12 和 4 個，圖形特徵為

圖形性質	全等	全等	全等
頂角度數	45^O	45^O	135^O
對應△	△ $B_1C_1C_2 \cong$△ $B_2C_3C_4$ $\cong$△ $B_3C_5C_6 \cong$△ $B_4C_7C_8$	△ $A_1B_1I_1 \cong$△ $A_1B_2I_1 \cong$△ $A_2B_2I_2$ $\cong$△ $A_2B_3I_2 \cong$△ $A_3B_3I_3 \cong$△ $A_3B_4I_3$ $\cong$△ $A_4B_4I_4 \cong$△ $A_4B_1I_4$	△ $A_1B_1A_4 \cong$△ $A_2B_2A_1$ $\cong$△ $A_3B_3A_2 \cong$△ $A_4B_4A_3$
數量	4	8	4
圖形觀察			

❷發現 45^O△具相似性質，△ $A_1B_1I_1 \approx$△ $B_1C_2C_1$，且面積比為

$$\triangle A_1B_1I_1:\triangle B_1C_2C_1=\frac{4}{(csc67.5°)^2}:\left\{\frac{9}{16}-\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)sec67.5°+\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)(sec67.5°)^2\right\}$$

證明: (1)等距△頂角角度為 45^O，有 2 種情形

<情形一>∵△BDE、△CFG 其頂角為正方形邊長與對角線之夾角(圖 3-1-1)

∴為$\frac{1}{2}$內角，

∵△BDE、△CFG 為全等，而其底角皆為 67.5^O

∵△ABC 與△BDE、△CFG 之底角互為對頂角

∴故△ABC 之底角皆為 67.5^O，頂角為 45^O

<情形二>∵由圓周角與圓心角關係可得知∠BAC=135^{O}(圖 3-1-2)

∴△AFG 之頂角為 45^{O}

∵對稱性質，△ABD、△ACE 之頂角相等

∴其頂角為 45^{O}

等距△頂角角度為 135^{O}，只有 1 種情形(圖 3-1-3)

∵圓周角與圓心角之關係∴$\angle ABC=\frac{1}{2}\widehat{AC}$=135^{O}

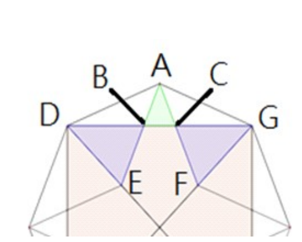
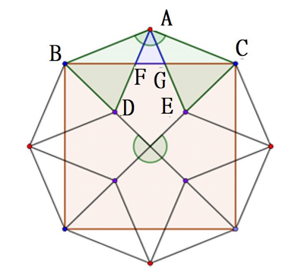
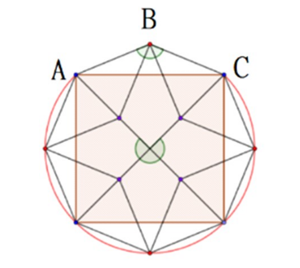
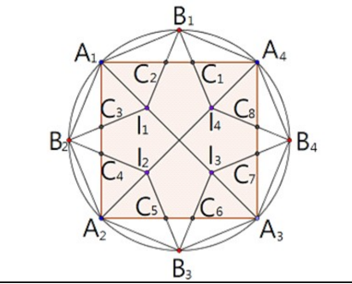
			

圖 3-1-1	圖 3-1-2	圖 3-1-3	圖 3-1-4

全等性質證明如下：

(2)在△ $A_1B_1I_1$ 、 △ $A_1B_2I_1$中(圖 3-1-4)，

∵ $\overline{A_1B_1}=\overline{A_4B_1}=\overline{B_1I_1}=\overline{B_1I_4}$(等距共圓點)

$\angle A_1B_1I_1=\angle A_4B_1I_4(45°)$

∴△ $A_1B_1I_1$ ≅△ $A_1B_2I_1$ ≅△ $A_2B_2I_2$ ≅△ $A_2B_3I_2$ ≅△ $A_3B_3I_3$ ≅△ $A_3B_4I_3$ ≅△ $A_4B_4I_4$ ≅△ $A_4B_1I_4$ (SAS 全等)

(3)在△ $A_1B_1A_4$ 、 △ $A_4B_4A_3$中，(圖 3-1-4)

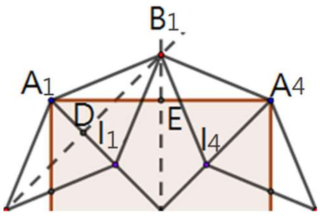
∵ $\overline{A_1B_1}=\overline{A_4B_1}=\overline{A_4B_4}=\overline{A_3B_4}$(等距共圓點)

$\angle A_1B_1A_4=\angle A_3B_4A_4(135°)$

∴ 同理可證 △ $A_1B_1A_4$ ≅△ $A_4B_4A_3$ ≅△ $A_3B_3A_2$ ≅△ $A_2B_2A_1$ (SAS 全等)

(4)$\angle A_1I_1B_1=\angle A_1I_1B_1$(相同角)，$\angle A_1B_1I_1=\angle I_1A_1C_2(45°)$

∴△ $A_1B_1I_1$ ≈△ $A_1C_2I_1$(AA 相似)



做一過I_1且垂直$\overline{A_1A_4}$的直線，並設其交點為 D，再做一過B_1且垂直$\overline{A_1I_1}$的直線，並設其交點為 E，$\overline{A_1\mathrm{D}}$之長度為x，

∴ $\overline{A_1I_1}=\sqrt{2}x$，$\overline{\mathrm{I_1C_2}}=csc67.5°x$

∴ $\overline{A_1I_1}:\overline{\mathrm{I_1C_2}}=\sqrt{2}:csc67.5°$

∴△ $A_1B_1I_1$:△ $A_1C_2I_1=2:(csc67.5°)^2$

∴△ $A_1B_1I_1$ ≈△ $A_1C_2I_1$且面積比為 $2:(csc67.5°)^2$

$\angle A_1C_2I_1=\angle B_1C_2C_1$(內錯角)，$\angle I_1A_1C_2=\angle B_1C_1C_2(45°)$

∴△ $A_1C_2I_1$ ≈△ $B_1C_2C_1$(AA 相似)

∴ $\overline{\mathrm{I_1E}}=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，$\overline{B_1I_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}sec67.5°\mathrm{x}$

∴ $\overline{B_1C_2}=\frac{3}{4}x+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)sec67.5°x$

$$\therefore \overline{A_1I_1}:\overline{B_1C_2}=\sqrt{2}:\frac{3}{4}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)sec67.5^\circ$$

$$\therefore \triangle A_1C_2I_1:\triangle B_1C_2C_1=2:\frac{9}{16}-\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)sec67.5^\circ+(\frac{3}{2}-\sqrt{2})(sec67.5^\circ)^2$$

$\therefore \triangle A_1C_2I_1 \approx \triangle B_1C_2C_1$且面積比為

$$2:\frac{9}{16}-\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)sec67.5^\circ+(\frac{3}{2}-\sqrt{2})(sec67.5^\circ)^2$$

2.正奇數邊形等距共圓點所衍伸出等距△之圖形特徵與數量關係

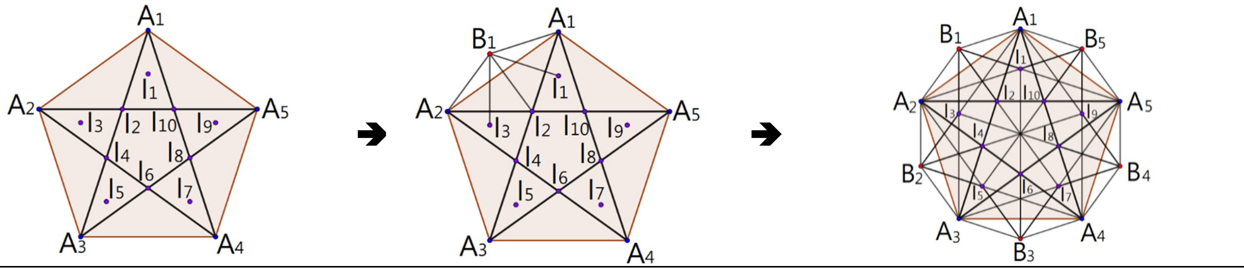
以【正五邊形】為例說明(其餘正奇數邊形詳見手稿及附件)

依據本研究定義之等距共圓點、等距△進行作圖：

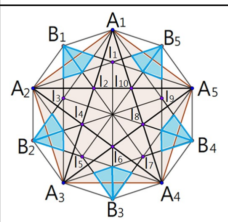
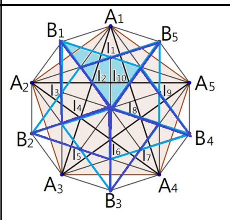
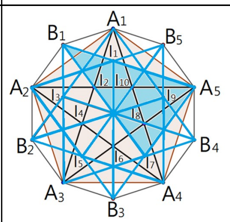
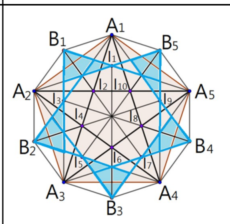
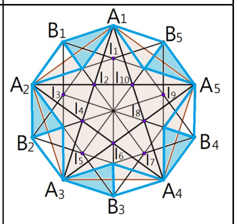
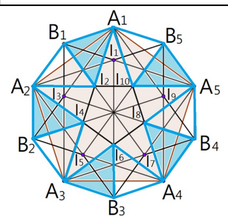
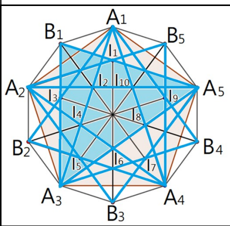
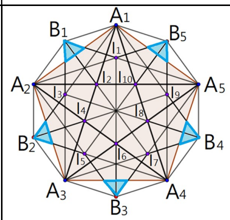
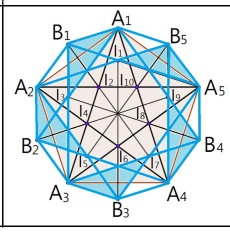
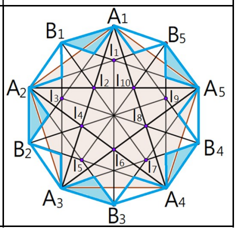
步驟 1 將此五邊形形成 10 個共邊△之內心標示為內心標示為$I_1 \sim I_{10}$

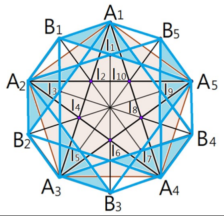
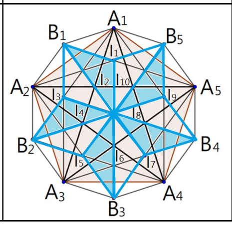
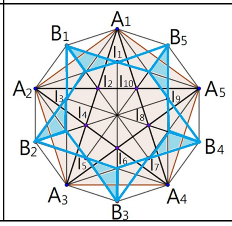
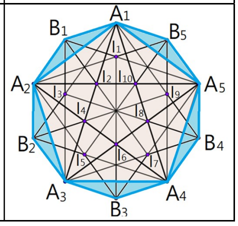
步驟 2 將$\angle A_1A_3A_2$、$\angle A_1A_4A_2$、$\angle A_1A_5A_2$之角平分線分別與$\triangle A_1A_3A_2$、$\triangle A_1A_4A_2$、$\triangle A_1A_5A_2$之外接圓的交點標示為B_1，其餘依此類推標示為B_2、B_3、B_4、B_5，並與相鄰兩頂點相連

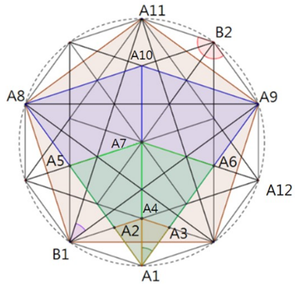
步驟 3 將$B_1 \sim B_5$與其共邊△之內心相連



發現：❶形成等距△有 4 類，頂角為 36°、 72°、108°或 144°，其數量分別為 50 個、20 個、50 個和 5 個，圖形特徵乃會依頂角不同形成不同類的全等△如下:

頂角度數	36°	36°	36°	36°	36°
數量	10	10	10	10	10
圖形觀察					
頂角度數	72°	72°	72°	108°	108°
數量	10	5	5	10	10
圖形觀察					

頂角度數	108°	108°	108°	144°
數量	10	10	10	5
圖形觀察				



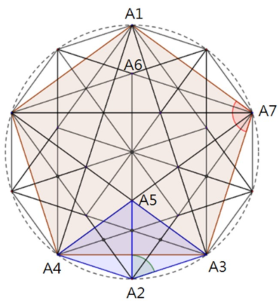
證明: (1)等距△頂角角度為 36°，有 2 種情形(舉 1 例其餘見手稿)

<情形一>∵$\angle A_9A_1A_{10}$與$\angle A_9B_2A_{11}$為互補關係

$\angle A_9B_2A_{11}$與$\angle A_9B_1A_{11}$也為互補關係

$\angle A_9B_1A_{11}$為$\frac{1}{3}$正五邊形內角

∴△$A_1A_8A_{10}$、△$A_1A_9A_{10}$、△$A_1A_5A_7$、△$A_1A_6A_7$、△$A_1A_2A_4$、△$A_1A_3A_4$之頂角角度皆為 36°，也為等距△，其餘則以此類推

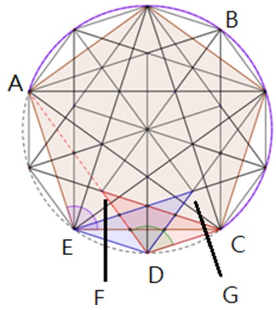


等距△頂角角度為 72°，有 2 種情形(舉一例其餘見手稿)

<情形一>∵$\angle A_3A_2A_6$與$\angle A_1A_7A_3$為互補關係

$\angle A_1A_7A_3$為正五邊形之內角

∴$\angle A_3A_2A_6$之頂角為 72°



等距△頂角角度為 108°，有 5 種情形

<情形一>做$\overline{DF}$之延長線$\overline{DA}$

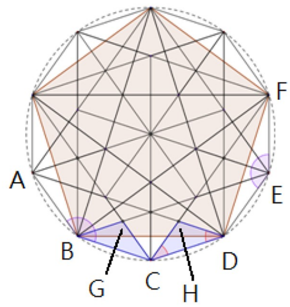
發現∠ADC 與∠AEC 皆是對到$\widehat{AC}$

∵此兩角皆為圓周角且夾同弧，∴角度相等

∵∠AEC 為正五邊形之內角，

∴△CDF 之頂角為 108°

△DEG 之頂角為 108°(對稱性質)



<情形二>∵∠ABC 與∠ADC；∠DCF 與∠DEF 互補

且紫色角為正十邊形之內角，

∴∠ADC、∠DCF 皆為 36°，

∵△內角和為 180°

∴△CDH 之頂角為 108°

△BCG 之頂角為 108°(對稱性質)

★★其餘情形與上面雷同，因版面有限，探討詳見手稿或補充資料。

3. 正 n 數邊形等距共圓點所衍伸出等距△數量公式推導

頂角公式觀察與推導，以此分類等距△

在探討數量公式前，以頂角角度大小分類等距△，其中$\theta=\frac{180°}{n}$，為等距△之最小頂角、2θ為第 2 小角、……、$(n-1)\theta$為最大角、$(n-2)\theta$為第 2 大角，……，其餘角度詳見手稿。最小角(圖 3-1-5)、第 2 小角(圖 3-1-6)、第 2 大角(圖 3-1-7)、最大角(圖 3-1-8)的圖例，以正六邊形等距△作為示例如下:

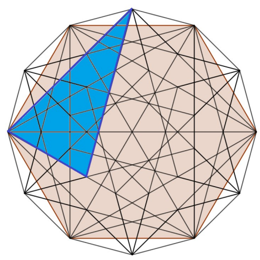


圖 3-1-5 頂角 30°

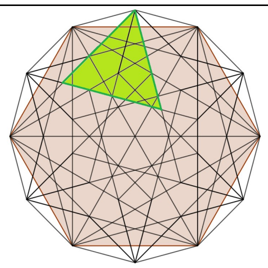


圖 3-1-6 頂角 60°

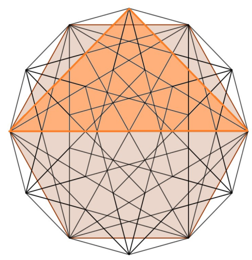


圖 3-1-7 頂角 120°

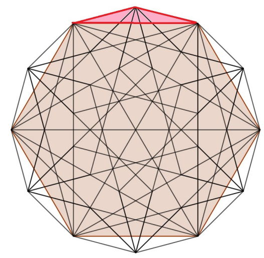


圖 3-1-8 頂角 150°

下表為正 n 邊形之等距△頂角角度及推導後得到的公式：

	正六邊形	正八邊形	正十邊形	…	等距△頂角角度公式
最小角 θ	30°	22.5°	18°	…	$\frac{180°}{n}\times1$
第 2 小角 2θ	60°	45°	36°	…	$\frac{180°}{n}\times2$
⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮
第 2 大角$(n-2)\theta$	120°	135°	144°	…	$\frac{180°}{n}\times(n-2)$
最大角$(n-1)\theta$	150°	157.5°	162°	…	$\frac{180°}{n}\times(n-1)$

正 n 邊形中等距△數量公式不僅和頂角角度相關，也和圖形的對稱性相關，探討如下：

圖形特徵決定正 n 邊形形成等距△數量權數

觀察正 n 邊形等距△的圖形特徵，以正五、六邊形最小角為例說明，算出等距△最基本數量需要乘以多少權數來得到最後全部的等距△數量，

權數加乘的情形因圖形特徵分類 4 種(搭配下頁圖)，如下：

正 n 邊形	5	6	權數
最小角等距△數量	0	1	×2
	3	2	×2
	0	2	×1
	2	0	×2

情形 1.如圖 3-1-9，最外層等距△有對稱的性質，當算出等距△數量後，權數×2。

情形 2.如圖 3-1-10，以對角線夾角為頂角之等距Δ具有對稱的性質，當算出等距△數量後，權數×2。

情形 3.如圖 3-1-11，底邊與正 n 邊形邊平行之等距Δ不具有對稱的性質，當算出等距△數量後，權數×1。

情形 4.如圖 3-1-12，底角為最小角倍數之等距Δ有對稱的性質，當算出等距Δ數量後，權數×2。

上頁情形 4 因正六邊形最小角沒有「底角為最小角倍數」的等距∆，另以正五邊形圖觀察。

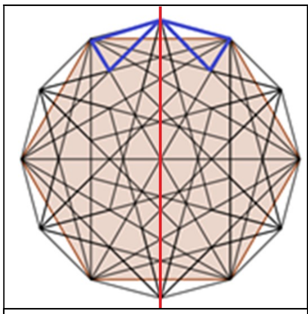
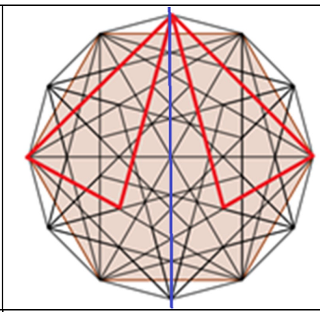
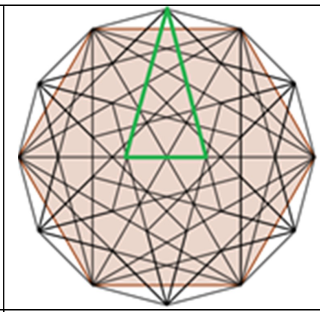
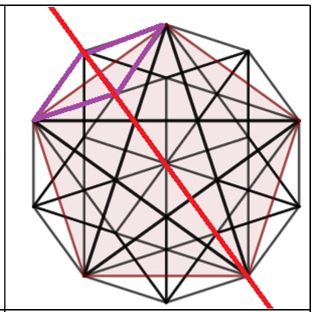
			

圖 3-1-9	圖 3-1-10	圖 3-1-11	圖 3-1-12

以下頂角角度為θ、2θ、……、(n − 3)θ、(n − 2)θ、(n − 1)θ之等距∆數量公式(其餘角度詳見手稿)，其中由上面推導$\theta = \frac{180°}{n}$。

∵圖形對稱特徵不同，正 n 邊形分成正偶邊形與正奇邊形進行探討。

A. 偶數邊形等距共圓點所衍伸出等距△數量公式推導

推倒過程

★表 1　正偶邊形以θ°為頂角之等距△數量整理表

正偶邊形	6	8	10	12	…		6	8	10	12	…	權數
頂角為θ°等距△數量	1	1	1	1	…	➔	1	1	1	1	…	×2
	2	5	9	14	…	分析	2	2+3	2+3+4	2+3+4+5	…	×2
	2	3	4	5	…	➔	2	2+1	2+1+1	2+1+1+1	…	×1
	0	0	0	0	…		0	0	0	0	…	×2

正偶邊形頂角為θ°時數量規律為

情形❶1、1+2、1+2+3、1+2+3+4、1+2+3+4+5、…、1+2+3+……+k 成等差級數

⇒首項為 1，公差為 1，項數為 k=$\frac{n-2}{2}$，$a_k=\frac{\frac{n-2}{2}(\frac{n-2}{2}+1)}{2}\times 2=\frac{n(n-2)}{4}$

情形❷2+1、3+1、4+1、5+1、…(k+1)+1⇒ $a_k=\frac{n-2}{2}$

∴公式為$\left[\frac{n(n-2)}{4}+\frac{n-2}{2}\right]\times n=\frac{(n+2)(n-2)}{4}\times n$

★表 2　正偶邊形以2θ°為頂角之等距△數量整理表

正偶邊形	6	8	10	12	…		6	8	10	12	…	權數
頂角為 2θ°等距△數量	0	0	0	0	…	➔	0	0	0	0	…	×2
	2	7	16	30	…	分析	2	2+5	2+5+9	2+5+9+14	…	×2
	0	0	0	0	…	➔	0	0	0	0	…	×1
	0	6	10	15	…		0	1+2+3	1+2+3+4	1+2+3+4+5	…	×2

正偶邊形頂角為2θ°時數量規律為

情形❶1+2+3、1+2+3+4、1+2+3+4+5、…、1+2+3+……+k

⇒$a_k=\frac{\frac{n-2}{2}(\frac{n-2}{2}+1)}{2}\times 2n=\frac{n(n-2)}{4}\times n$ (n≥8)

情形❷2、2+5、2+5+9、2+5+9+16、…⇒ $a_k=\sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}}\frac{(k^2+3k)}{2}\times 2n=\sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}}(k^2+3k)$

∴公式為: $\sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}}(k^2+3k)+\frac{n(n-2)}{4}$ (n≥8)

推導：令 $\{a_m\}$=2、2+5、2+5+9、2+5+9+14、…，$\{b_m\}=a_{m+1}-a_m$=2、5、9、14

b_1 為 2，b_2 為 2+3，b_3 為 2+3+4，…，b_m 為 2+3+4+5+…+(m+1)

∵ $\{b_m\}$為首項為 2，公差為 1 的等差級數

第 m 項(設 $m=\frac{n-4}{2}$)為 $\frac{m(4+m-1)}{2}=\frac{m^2+3m}{2}$

$\{a_m\}=b_1+b_2+\ldots+b_m=\sum_{k=1}^{m}\frac{k^2+3k}{2}\times 2n=\sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}}\frac{(k^2+3k)}{2}\times 2n=\sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}}(k^2+3k)$

∴公式為: $[\sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}}(k^2+3k)+\frac{n(n-2)}{4}]\times n$ (n≥8)

備註:其餘不同頂角之推導過程，若規律為等差之類較一般的過程，詳見手稿，不特別列出

★表 3 正偶邊形以(n − 1)θ°為頂角之等距△數量整理表

正偶邊形	6	8	10	12	…	權數
頂角為 (n − 3)θ° 等距△數量	0	0	0	0	…	×2
	0	0	0	0	…	×2
	1	1	1	1	…	×1
	0	0	0	0	…	×2

發現:
所有正偶邊形之頂角為 (n − 1)θ°時數量為 1

★表 4 正偶邊形以(n − 2)θ°為頂角之等距△數量整理表

正偶邊形	6	8	10	12	…		6	8	10	12	…	權數
頂角為 (n − 2)θ° 等距△數量	1	1	1	1	…	➔ 分析 ➔	1	1	1	1	…	×2
	0	0	6	0	…		0	0	0	0	…	×2
	0	0	0	0	…		0	0	0	0	…	×1
	4	9	13	17	…		2+1+1	2+4+2+1	2+8+2+1	2+12+2+1	…	×2

正偶邊形頂角為數量為(n − 2)θ°時規律為 9、13、17、…

⇒公式: 4n-12(n≥8)

★表 5 正偶邊形以(n − 3)θ°為頂角之等距△數量整理表

正偶邊形	6	8	10	12	…	權數
頂角為 (n − 3)θ° 等距△數量	1	1	1	1	…	×2
	0	0	0	0	…	×2
	2	2	2	2	…	×1
	0	0	0	0	…	×2

發現:
正偶邊形頂角為(n − 3)θ°時數量為 4

⇒公式: $n\times\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$

B.正奇數邊形等距共圓點所衍伸出等距△數量公式推導

★表 6　正奇邊形以θ°為頂角之等距△數量整理表

正偶邊形	5	7	9	11	…		5	7	9	11	…	權數
頂角為θ° 等距△數量	0	0	0	0	…	➔	0	0	0	0	…	×2
	3	8	15	24	…	分析	3	3+5	3+5+7	3+5+7+9	…	×2
	0	0	0	0	…	➔	0	0	0	0	…	×1
	2	4	6	8	…		1+1	1+3	1+5	1+7	…	×2

正奇邊形頂角為θ°時數量規律為

情形❶3、3+5、3+5+7、3+5+7+9、……、3+5+7+…+(2k+1)成等差級數

⇒首項為 3，公差為 2，項數為$\frac{n-3}{2}$，∴$a_k=\frac{\left[6+\left(\frac{n-3}{2}-1\right)\times2\right]\times\frac{n-3}{2}}{2}=\frac{(n+1)(n-3)}{4}$

情形❷1+1、1+3、1+5、1+7、…、1+(2k-1)⇒a_k=n-3

∴公式為:$\frac{(n+1)(n-3)}{4}+(n-3)=\left[\frac{n+5}{4}\times(n-3)\right]\times 2n$

★表 7　正奇邊形以2θ°為頂角之等距△數量整理表

正偶邊形	5	7	9	11	…		5	7	9	11	…	權數
頂角為 2θ° 等距△數量	1	1	1	1	…	➔	1	1	1	1	…	×2
	0	2	5	9	…	分析	0	2	2+3	2+3+4	…	×2
	2	3	4	5	…	➔	2	2+1	2+1+1	2+1+1+1	…	×1
	0	0	0	0	…		0	0	0	0	…	×2

正奇邊形頂角為2θ°時數量規律為 4、9、16、25、……

⇒公式:$\left\{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2、\left(\frac{n-3}{2}\right)^2、…、\left[\frac{n-(n-2)}{2}\right]^2\right\}\times n$

★表 8　正奇邊形以$(n-1)\theta$°為頂角之等距△數量整理表

正奇邊形	5	7	9	11	…	權數
頂角為 $(n-1)\theta$° 等距△數量	0	0	0	0	…	×2
	0	0	0	0	…	×2
	1	1	1	1	…	×1
	0	0	0	0	…	×2

發現:

所有正奇邊形之頂角為$(n-1)\theta$°時數量為 1

★表 9　正奇邊形以$(n-2)\theta$°為頂角之等距△數量整理表

正偶邊形	5	7	9	…		5	7	9	…	權數
頂角為 $(n-2)\theta$° 等距△數量	1	1	1	…	➔	1	1	1	…	×2
	0	0	0	…	分析	0	0	0	…	×2
	0	0	0	…	➔	0	0	0	…	×1
	4	8	12	…		2+2	2+4+2	2+4+4+2	…	×2

正奇邊形頂角為$(n-2)\theta°$時數量規律為 4、8、12……⇒公式:$2n[2(n-3)+1]$

★表 5 正奇邊形以$(n-3)\theta°$為頂角之等距△數量整理表

正奇邊形	5	7	9	…	權數
頂角為 $(n-3)\theta°$ 等距△數量	1	1	1	…	×2
	0	0	0	…	×2
	2	2	2	…	×1
	0	0	0	…	×2

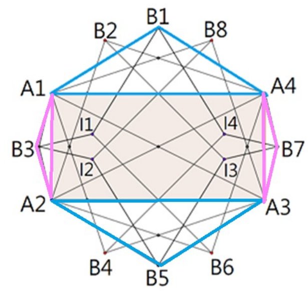
發現:
正奇邊形頂角為$(n-3)\theta°$時，數量為 4

⇒公式:$n\times\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$

(二)其他特殊 n 邊形等距共圓點形成等距△圖形特徵及其數量公式之探討

接續針對特殊四邊形(長方形、平行四邊形、菱形、梯形、箏形)、等角 n 邊形、等邊 n 邊形，依據本研究定義之等距共圓點、等距△進行作圖後分別探討如下：

1.特殊四邊形等距共圓點所衍伸出等距△之圖形特徵



(1)長方形等距共圓點所衍伸出等距△之圖形特徵

發現:❶設$\angle A_3A_1A_4$之角度大小為θ，

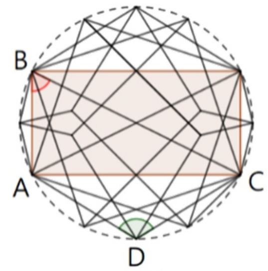
其形成之等距△頂角分別為$90+\theta, 180-\theta$

❷等距△頂角角度為 90+θ °，有 1 種全等△(如右藍色△)

$\triangle A_1B_3A_2 \cong \triangle A_3B_7A_4$

❸等距△頂角角度為 180-θ°，有 1 種全等△(如右粉色△)

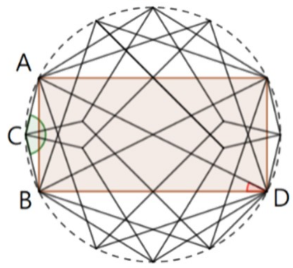
$\triangle A_1B_3A_2 \cong \triangle A_3B_7A_4$



證明: ❶等距△頂角角度為 90+θ °，有 1 種情形(右圖)

∵ ∠ABC與∠ADC互補，∠ABC為 90-θ°

∴ ∠ADC為 90+θ°



等距△頂角角度為 180-θ°，有 1 種情形(右圖)

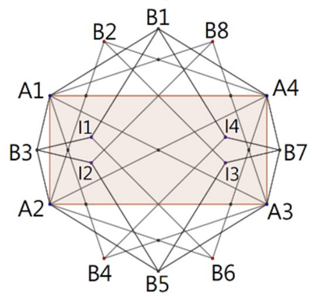
∵ ∠ADB 與∠ACB互補，∠ADB為θ°，∴ ∠ACB為 180-θ°

❷在$\triangle A_1B_3A_2$，$\triangle A_3B_7A_4$中(右下圖)，

∵ $\overline{A_1B_3}=\overline{A_2B_3}=\overline{A_3B_7}=\overline{A_4B_7}$ (等距共圓點)

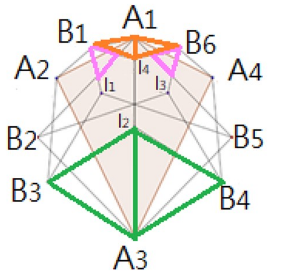
$\overline{A_1A_2}=\overline{A_3A_4}$(長方形)

∴ 同理可證$\triangle A_1B_3A_2 \cong \triangle A_3B_7A_4$(SSS 全等)



後面平行四邊形、菱形、梯形、箏形等因版面有限，僅列出結果，未羅列之證明詳見手稿或補充資料：

(2)箏形等距共圓點所衍伸出等距△之圖形特徵



發現:❶設$\angle A_3A_1A_4$之角度大小為θ，

其形成之等距△頂角分別為:$\frac{\theta}{2}$,$90-\frac{\theta}{2}, 90, 90+\frac{\theta}{2}, 180-\frac{\theta}{2}$

❷等距△頂角角度為$\frac{\theta}{2}$°，有 1 種全等△(如右)

$\triangle A_1B_1I_4 \cong \triangle A_1B_6I_4$(橘色△)

❸等距△頂角角度為$90-\frac{\theta}{2}$°，有 2 種全等△(如右上)

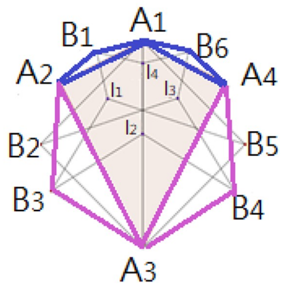
①$\triangle B_3A_3I_2 \cong \triangle B_4A_3I_2$ (綠色△) ②粉色△

❹等距△頂角角度為$90+\frac{\theta^\circ}{2}$，有 1 種全等△(如右)

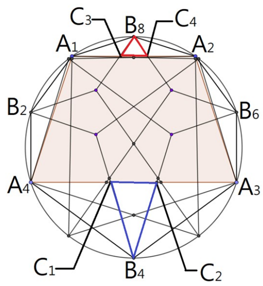
$\triangle A_2A_3B_3 \cong \triangle A_4A_3B_4$ (紫色△)

❺等距△頂角角度為$180-\frac{\theta^\circ}{2}$，有 1 種全等△(如右)

$\triangle A_1A_2B_1 \cong \triangle A_1A_4B_6$(藍色△)



(3)梯形等距共圓點所衍伸出等距△之圖形特徵



發現: ❶設$\angle A_3A_1A_4$、$\angle A_3A_1A_2$之角度大小為θ，ϕ

其形成之等距△頂角分別為:θ,ϕ, 180−ϕ,

180−θ,90+$\frac{\theta+\phi}{2}$。

❷等距△頂角角度為θ°，只可為△ $B_4C_1C_2$(藍色△)

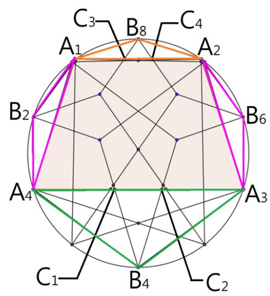
❸等距△頂角角度為ϕ°，只可為△ $B_8C_3C_4$(紅色△)

❹等距△頂角角度為 180−θ°，只可為△ $B_8A_1A_4$(橘色△)

❺等距△頂角角度為 180−θ°，只可為△ $A_2A_3B_4$(綠色△)

❻等距△頂角角度為 90+$\frac{\theta+\phi}{2}$°，有 1 種全等△，

$\triangle A_1A_2B_2 \cong \triangle A_3A_4B_6$(粉色△)



(4)平行四邊形等距共圓點所衍伸出等距△之圖形特徵

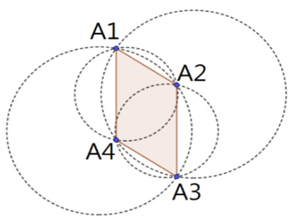
發現:平行四邊形除矩形外，無法四點共圓

證明:平行四邊形失敗原因:在 A_2、A_3 皆在圓周上時，

∵ $\overline{A_2A_3}=\overline{A_1A_4}$且$\overline{A_2A_3}//\overline{A_1A_4}$

∴只有在平行四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 之對角互補時，

才能符合「四點接在圓周上」之條件。



(5)菱形等距共圓點所衍伸出等距△之圖形特徵

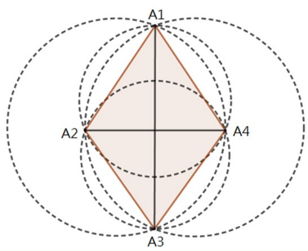
發現:菱形除正方形外，無法四點共圓

證明:$\overline{A_1A_2}//\overline{A_3A_4}$，$\overline{A_2A_3}//\overline{A_1A_4}$，

$\overline{A_1A_2}$=$\overline{A_2A_3}$=$\overline{A_3A4}$=$\overline{A_1A_4}$

∵四點共圓四邊中垂線必交於一點

∴相鄰兩夾角互補時成立

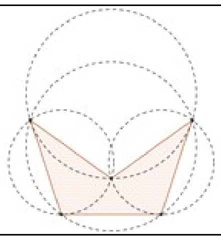
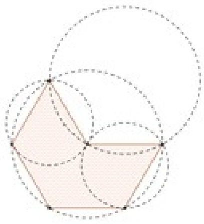
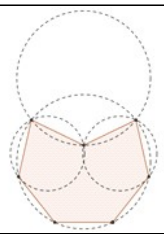
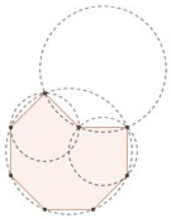


2. 等角 n 邊形及等邊 n 邊形等距共圓點所衍伸出等距△之圖形特徵

由先前研究若要探討等角 n 邊形及等邊 n 邊形等距共圓點之性質，前提是這些圖形要共圓，因此接續先探討這些圖形是否共圓

A. 等邊 n 邊形等距共圓點所衍伸出等距△之圖形特徵

整理如下表，發現:等邊 n 邊形除正 n 邊形外，無法形成 n 點共圓，故不繼續探討。

等邊五邊形	等邊六邊形	等邊七邊形	等邊八邊形
			

B. 等角 n 邊形等距共圓點所衍伸出等距△之圖形特徵

發現:等角 n 邊形除正 n 邊形外，等角 n 邊形在 n 為偶數時，滿足$\mathbf{x_1 = x_3 = \cdots = x_{n-1}}$、$\mathbf{x_2 = x_4 = \cdots = x_n}$($x_i$是弧長)，可形成頂點共圓。

證明:❶探討共圓偶邊形的形成條件

假設等角 n 邊形每邊所對的弧為x_1、x_2、 … 、x_n為多邊形外接圓上的弧，此時這些弧要滿足方程式

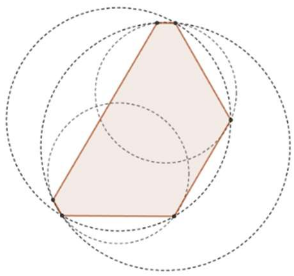
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-3}+x_{n-2}=2\left(180^\circ-\frac{360^\circ}{n}\right) \\ x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{n-2}+x_{n-1}=2\left(180^\circ-\frac{360^\circ}{n}\right) \\ x_3+x_4+x_5+\cdots+x_{n-1}+x_n=2\left(180^\circ-\frac{360^\circ}{n}\right) \\ \vdots \end{cases} \text{(內角)}$$

若要形成等角共圓偶邊形需滿足

$x_1=x_3=\cdots=x_{n-1}$、$x_2=x_4=\cdots=x_n$(x_i是弧長)

【以 6 邊形為例說明】

不失一般性假設等角 6 邊形每邊所對弧為x_1、x_2、 … 、x_6



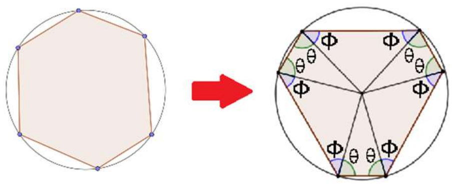
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=240^\circ\ \dots\dots(1) \\ x_2+x_3+x_4+x_5=240^\circ\ \dots\dots(2) \\ x_3+x_4+x_5+x_6=240^\circ\ \dots\dots(3) \\ x_4+x_5+x_6+x_1=240^\circ\ \dots\dots(4) \\ x_5+x_6+x_1+x_2=240^\circ\ \dots\dots(5) \\ x_6+x_1+x_2+x_3=240^\circ\ \dots\dots(6) \end{cases} \text{(內角)}$$

由(1)-(2)得 $x_1=x_5$；由(2)-(3)得 $x_2=x_6$

由(3)-(4)得 $x_3=x_1$；由(4)-(5)得 $x_4=x_2$

由(5)-(1)得 $x_5=x_3$；由(6)-(1)得 $x_6=x_4$

$\therefore x_1=x_3=x_5$，$x_2=x_4=x_6$，代入(1)



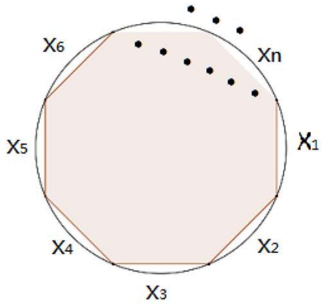
得: $2x_1+2x_2=240°$，$x_1+x_2=120°$

$\Rightarrow x_1$、x_3、x_5；x_2、x_4、x_6兩組分別等長時可形成等角共圓六邊形

❷探討等角共圓奇邊形的形成條件:

假設等角 n 邊形每邊所對的弧為x_1、x_2、 ... 、x_n為多邊形外接圓上的弧，此時這些弧要滿足方程式

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-3}+x_{n-2}=2\left(180°-\frac{360°}{n}\right) \\ x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{n-2}+x_{n-1}=2\left(180°-\frac{360°}{n}\right) \\ x_3+x_4+x_5+\cdots+x_{n-1}+x_n=2\left(180°-\frac{360°}{n}\right) \\ \vdots \end{cases} \text{(內角)}$$



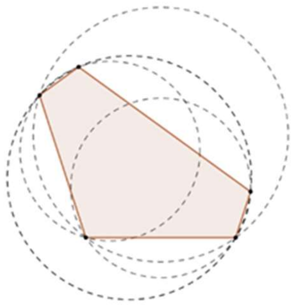
若形成等角共圓奇邊形必滿足$x_1=x_2=\cdots=x_n$

【以 5 邊形為例說明】

(1)以等角的面向來看，以等角 5 邊形為例

不失一般性假設等角 5 邊形每邊所對弧為x_1、x_2、 ... 、x_5

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=216°\ \ldots\ldots(1) \\ x_2+x_3+x_4=216°\ \ldots\ldots(2) \\ x_3+x_4+x_5=216°\ \ldots\ldots(3) \\ x_4+x_5+x_1=216°\ \ldots\ldots(4) \\ x_5+x_1+x_2=216°\ \ldots\ldots(5) \end{cases} \text{(內角)}$$



由(1)-(2)得 $x_1=x_4$；由(2)-(3)得 $x_2=x_5$

由(3)-(4)得 $x_3=x_1$；由(4)-(5)得 $x_4=x_2$

由(5)-(1)得 $x_5=x_3$；$\therefore x_1=x_2=x_3=x_4=x_5$，代入(1)

得: $3x_1=216°$，$x_1=72°$

$\Rightarrow x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=72°$

$\Rightarrow x_1$、x_2、x_3、x_4、x_5不等長時無法共圓，故 n=奇數僅正 n 邊形可共圓。

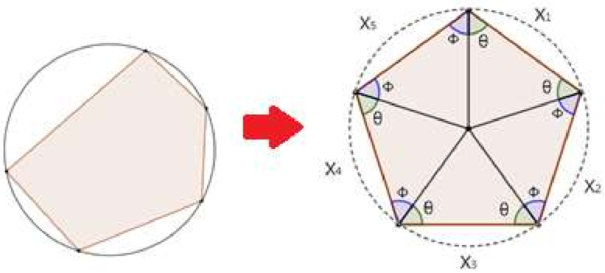
(2)以共圓的面向來看，以共圓 5 邊形又要滿足等角的條件為例

設$\theta+\phi=108°$，做等腰△

$\Rightarrow \theta=\phi=\dfrac{108°}{2}=54°$

$\Rightarrow x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=72°$

$\Rightarrow$ 形成正五邊形



引理 3：當等角偶邊形滿足$x_1=x_3=x_5=\cdots=x_{n-1}$、$x_2=x_4=x_6=\cdots=x_n$($x_i$是弧長)時所有頂點可共圓，則等角偶邊形可形成等距共圓點。

其餘等角 n 邊形或等邊 n 邊形除正 n 邊形皆無法形成等距共圓點。

3. 特殊 n 邊形等距共圓點所衍伸出等距△數量公式推導

至此，由於特殊四邊形角度無法固定，使數量無規律性，正 n 邊形前面已討論，

故以等角共圓 n 邊形進行探討其數量公式，

首先整理等角共圓 4、6、8.....邊形以θ為頂角之等距△數量如下頁表 12，

其中θ為多邊形對角線所切割出的最小角。

注意：∵等角 n 邊形具有對稱性，

∴除倒數第二排外，其他皆須權數 × 2，

此權數討論方式與研究三(一)3 雷同，不再重複。

倒數第二排則是正中間的角所形成的等距△，

∴僅需要權數 × 1 即可。

★表 12 等角共圓 n 邊形以θ為頂角之等距△數量整理表

等角共圓 n 邊形	等角 4 邊形(長方形)	等角六邊形	等角八邊形	……	權數
θ頂角數量	1	1	1	……	x2
	0	2	6	……	x2
	1	2	3	……	x1
	0	0	0	……	x2
$\frac{360}{n}-\theta$ 頂角數量	0	0	0	……	x2
	0	1	4	……	x2
	1	2	3	……	x1
	0	0	0	……	x2
$\frac{360}{n}+\theta$ 頂角數量	0	1	1	……	x2
	0	0	2	……	x2
	1	2	3	……	x1
	0	0	0	……	x2
$\frac{360}{n}\times 2+\theta$ 頂角數量		1	1	……	x2
		0	2	……	x2
		2	3	……	x1
		0	0	……	x2
$\frac{360}{n}\times 2-\theta$ 頂角數量		0	1	……	x2
		0	1	……	x2
		2	3	……	x1
		0	0	……	x2

等角共圓 n 邊形	等角 4 邊形(長方形)	等角六邊形	等角八邊形	……	權數
180-θ 頂角數量	0	0	0	……	x2
	0	0	0	……	x2
	1	1	1	……	x1
	0	0	0	……	x2
$\frac{360}{n}$ 頂角數量	0	0	0	……	x2
	0	0	0	……	x2
	0	0	0	……	x1
	0	0	0	……	x2

由上可得等角共圓 n 邊形對應不同角度的規律並推導公式如下

❶頂角為θ°時數量規律為 3、8、17⇒公式:$\left[\frac{(n-1)(n-4)}{2}+3\right]\times\frac{n}{2}$

❷頂角為$\frac{360}{n}\times 1-\theta$°時數量規律為 1、4、11⇒公式:$\left[\frac{(n-3)(n-4)}{2}+1\right]\times\frac{n}{2}$

❸頂角為$\frac{360}{n}\times 1+\theta$°時數量規律為 1、4、11⇒公式: $\left\{\frac{(n-2)}{2}\right\}^2\times\frac{n}{2}$

❹頂角為$\frac{360}{n}\times 2+\theta$°時數量規律為 1、4⇒公式:$\left\{\frac{n-2\times 2}{2}\right\}^2\times\frac{n}{2}$

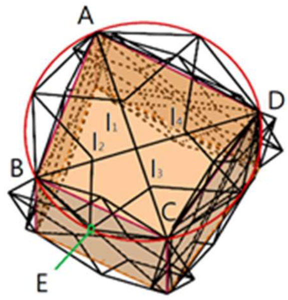
❺頂角為$\frac{360}{n}\times 2-\theta$°時數量規律為 2、7⇒公式:$\left\{\left[\frac{n-2(2-1)}{2}\right]^2-2\right\}\times\frac{n}{2}$

❻頂角為$180-\theta$°和$\frac{360}{n}$°時，數量分別為 $1\times\frac{n}{2}$和 0

肆、討論

嘗試從上述研究的平面多邊形延伸至立體的多面體：

一、 任意多面體所有平面皆形成等距共圓點條件之推導與證明



以【任意六面體】為例進行探討(其餘詳見手稿或附件)

推導：做一任意六面體，

並將其中一面之四邊形命名為$ABCD$，

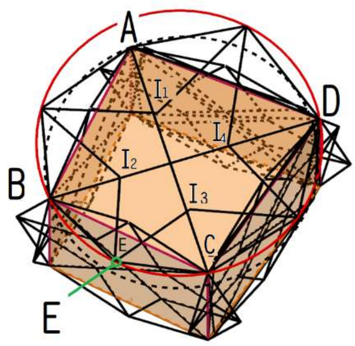
並將其分成 4 個共邊△，

分別將其外接圓、共圓點與等距線段繪製出來，

並將A點向右平移直至四邊形每邊皆出現一等距共圓點(右上圖)。

發現:任意六面體任一平面形成等距共圓點之條件為該平面四頂點共圓。

證明:設BCD三點共圓，A點不與其共圓，且弧BC上之共圓點為E，



則∵ 雞爪定理僅於共圓時發生

∴ $\overline{I_2E}\neq\overline{BE}$(非共圓)，且$\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{I_3E}$(雞爪定理)

∴ 同理可證$\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{I_3E}=\overline{I_4E}$(→←)

此時若兩共邊$\triangle ABC$、$\triangle BCD$共圓，

則$\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{I_3E}=\overline{I_4E}$

∴ 須滿足$ABCD$四點共圓，任意四邊形才可形成等距共圓點，其餘五平面則依此類推

∴ 必須滿足所有平面頂角共圓，任意六面體所有平面才可皆形成等距共圓點

引理 4：任意多面體所有平面皆形成等距共圓點之條件為任意 **n** 面體所有平面頂角共圓。

仿先前研究嘗試探討特殊多面體，以正多面體衍伸出等距△之圖形特徵及其數量進行討論：

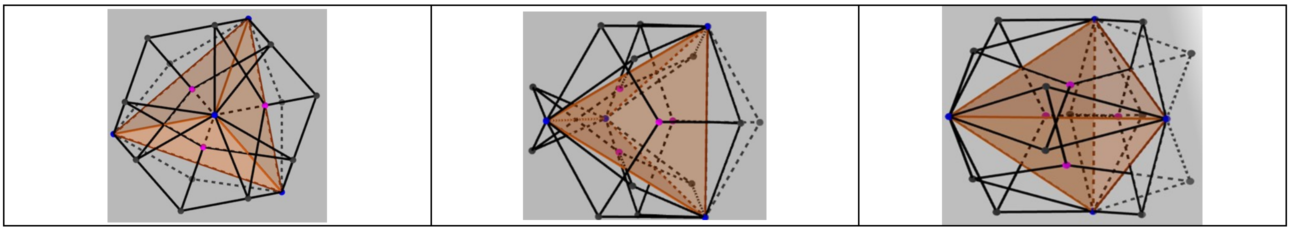
二、探討正多面體等距共圓點衍伸出等距△之數量與特徵

(一)正四面體等距共圓點所衍伸出等距△之數量與特徵

發現:形成之等距△頂角，只可為 120^{O}，其數量為 12 個。

證明: ∵正四面體是由四個正△所組成，

∴ 等距 △ 之個數為正 △ 之 4 倍



(二)正十二面體等距共圓點所衍伸出等距△之數量與特徵

發現:形成之等距△頂角，只可為 36^{O}、72^{O} 、108^{O}或 144^{O}，其數量又分別為 600 個、240 個、600 個和 60 個。

證明: ∵正十二面體是由十二個正五邊形所組成，

∴ 等距 △ 之個數為正五邊形之 12 倍。

(三)正二十面體等距共圓點所衍伸出等距△之數量與特徵

發現:形成之等距△頂角，只可為 120^{O}，其數量又分別為 60 個。

證明: ∵正二十面體是由二十個正△所組成，

∴ 等距 △ 之個數為正 △ 之 20 倍。

伍、結論

一、針對雞爪定理是否可以適用於多邊形，發現：

(一)雞爪定理不能延伸至多邊形，即無法由多邊形內角角平分線與其外接圓之交點，與多邊形內心、相鄰 2 個頂點的連線段形成 n 個等距線段(雞爪的爪) 。

(二)當多邊形內角角平分線與其外接圓之交點 F_1，與相鄰 2 頂點生衍的其中一個△內心會形成等距線段，若以 F_1 為圓心，該等距線段長為半徑畫弧，可在該弧上找到∞個點，形成∞個等距線段。

二、針對任意 n 邊形形成等距共圓點的條件，發現：

(一)設圓內接任意 n 邊形($A_1A_2\ldots A_n$)，Ii(I_1)為【以該 n 邊形其中一邊(設為$\overline{A_1A_2}$)為共邊的】共邊△內心，$\angle A_2A_3A_1$ 的角平分線 A_3I_1 交外接圓於 Fi(F_1)，則可找到另外(n-2)個以$\overline{A_1A_2}$為共邊配其餘頂點 Ai(i=3、…….、n)的共邊△內心 I_k，使得$\overline{A_1F_1}$=$\overline{A_2F_1}$=$\overline{I_1F_1}$=……=$\overline{I_kF_1}$，此時 Fi 為等距共圓點。

(二)當任意 n 邊形所有頂點共圓時，可形成等距共圓點。

(三)當等角偶邊形滿足$x_1 = x_3 = x_5 = \cdots = x_{n-1}$、$x_2 = x_4 = x_6 = \cdots = x_n$($x_i$ 是弧長)時所有頂點可共圓，則等角偶邊形可形成等距共圓點。

其餘等角 n 邊形或等邊 n 邊形除正 n 邊形皆無法形成等距共圓點。

(四)任意多面體所有平面皆形成等距共圓點之條件為「任意 n 面體所有平面頂角共圓」。

三、針對任意 n 邊形形成等距共圓點的性質：

(一) 任意 n 邊形所有頂點共圓時，可形成 n 個等距共圓點，存在 n-2 組 n 個等距線段。

(二) 特殊四邊形等距共圓點形成等距△之圖形特徵有：

1.設長邊與對角線之夾角大小為θ，其長方形等距共圓點所衍伸出等距△有 2 類，頂角分別為$90+\theta, 180-\theta$。

2.設箏形最小角之角度大小為θ，其等距共圓點所衍伸出等距△有 5 類，頂角分別為$\frac{\theta}{2}, 90-\frac{\theta}{2}, 90, 90+\frac{\theta}{2}, 180-\frac{\theta}{2}$。

3.設兩對角線與側邊之夾角大小為θ與ϕ，等腰梯形等距共圓點所衍伸出等距△有 6 類，頂角分別為$\theta, \phi, 180-\phi, 180-\theta, 90+\frac{\theta+\phi}{2}$。

(三) 正 n 邊形等距共圓點形成等距△之圖形特徵及其數量公式為：

1.正 n 邊形等距共圓點所衍伸出等距△之頂角角度公式

$$\{(\frac{180}{n}\times 1)°、(\frac{180}{n}\times 2)°、\ldots\ldots\ldots、\left[\frac{180}{n}\times(n-1)\right]°\}$$

2.除了正△及正方形，其餘正 n 邊形有 n-1 種全等等距△。

3.正 n 邊形等距共圓點所衍伸出等距△之數量公式，圖形特徵決定正 n 邊形形成等距△數量權數

(1)正奇 n 邊形等距共圓點所衍伸出等距△之數量公式

①最小角等距△數量公式為$\left[\frac{n+5}{4}\times(n-3)\right]\times 2n$

②第偶數個小角等距△數量公式為$\left\{(\frac{n-1}{2})^2、(\frac{n-3}{2})^2、\ldots、\left[\frac{n-(n-4)}{2}\right]^2、\left[\frac{n-(n-2)}{2}\right]^2\right\}\times n$

③第 2 大角等距△數量公式為$[2(n-3)+1]\times 2n(n\geq 5)$

(2)正偶 n 邊形等距共圓點所衍伸出等距△之數量公式

①最小角等距△數量公式為$[\frac{(n+4)(n-2)+8}{8}]\times 2n$

②第 2 小角等距△數量公式為$[\sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}} k^2+\sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}} k+\frac{n(n-2)}{8}]\times 2n$ (n≥8)

③第奇數個小角等距△數量公式為$\left\{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2、\left(\frac{n-4}{2}\right)^2、\ldots、\left[\frac{n-(n-4)}{2}\right]^2、\left[\frac{n-(n-2)}{2}\right]^2\right\}\times n$

④第 2 大角等距△數量公式為$[2(n-3)]\times 2n(n\geq 8)$

(四)等角共圓 n 邊形對應不同角度公式如下，其中θ為多邊形對角線所切割出的最小角：

1.頂角為θ°時，等距△數量公式為公式:$\left[\frac{(n-1)(n-4)}{2}+3\right]\times\frac{n}{2}$

2.頂角為$\frac{360}{n}\times 1-\theta$°時，等距△數量公式為:$\left[\frac{(n-3)(n-4)}{2}+1\right]\times\frac{n}{2}$

3.頂角為$\frac{360}{n}\times 1+\theta$°時，等距△數量公式為公式: $\left\{\frac{(n-2)}{2}\right\}^2\times\frac{n}{2}$

4.頂角為$\frac{360}{n}\times 2+\theta$°時時，等距△數量公式為$\left\{\frac{n-2\times 2}{2}\right\}^2\times\frac{n}{2}$

5.頂角為$\frac{360}{n}\times 2-\theta$°時，等距△數量公式為$\left[\left\{\frac{n-2(2-1)}{2}\right\}^2-2\right]\times\frac{n}{2}$

6.頂角為$180-\theta$°和$\frac{360}{n}$°時，等距△數量公式為 $1\times\frac{n}{2}$和 0

(五) 針對多面體等距共圓點衍伸出等距∆之圖形特徵與數量，發現：

1.正四面體等距共圓點形成之等距∆有 1 類，頂角為 120^O，其數量為 12 個。

2.正十二面體等距共圓點形成之等距∆有 4 類，頂角為 36^O、72^O 、108^O或 144^O，其數量又分別為 600、240、600 和 60 個。

3.正二十面體等距共圓點形成之等距∆有 1 類，頂角為 120^O，其數量又分別為 60 個。

陸、應用

一、夾娃娃機之爪子

在夾娃娃時，如果把娃娃機爪子放在等距之交點(圖 6-1-1 之紅色點上)，可使娃娃之重心放在內心上(圖 6-1-1 黑點)，可使娃娃夾的最堅固，較不易失敗。

夾娃娃機之爪子

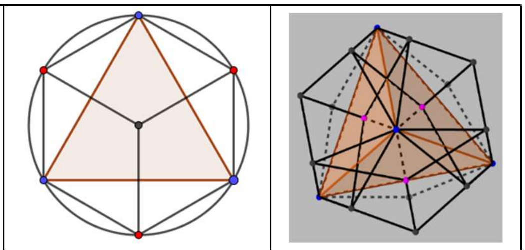


圖 6-1-1

二、網路基地台的位置探討

將網路基地台放置在紫色內心上(如圖 6-1-2 所示)，可使其有效範圍重疊，涵蓋所有範圍，並且在三圓之焦點處，由等距共圓點可知，其位置與三個基地台的距離皆相等。

網路基地台示意圖

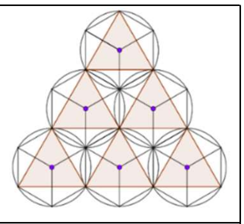


圖 6-1-2

柒、參考資料

1.陳凱傑(2008)。共點圓、共圓點。臺灣國際科展數學科科展作品說明書。

2.華祥志、吳祐德、蔡承儒(2008)。求過任意點作多邊形面積平分線。全國中小學科展國中組數學科科展作品說明書。

3.鍾政霖、賴芊卉(2007)。△內心、重心、垂心的另類推導。臺灣國際科展數學科科展作品說明書。

4.雞爪定理- 维基百科，自由的百科全書。

5. The Incenter/Excenter Lemma - Evan Chen。

【評語】030413

作品從一個俗稱雞爪定理的平面幾何的定理開始發想:在三角形 ABC 中，設 E 為內心，∠ABC 的平分線 BE 交外接圓於 D 點，則 D 點與 A, C, E 三點等距。作者擬探討雞爪定理在多邊形上的推廣，給定 n 邊形 $A_1 A_2 \cdots A_n$。固定 $A_1 A_2$ 為三角形的一邊,考慮所有由 A_1, A_2 和 A_i 為頂點的三角形 $A_1 A_2 A_i$。是否能夠找到一個點 P，使得 P 點到 A_1、A_2 和所有三角形 $A_1 A_2 A_i$ 的內心距離都相等？如果可能，這樣的 n 邊形具有什麼樣的特性？作者們針對這個問題做了詳盡的分析並給出了答案。當所給的 n 邊形是正 n 邊形，會有多少個以每一邊所找到的等距點當頂點等距三角形（以等距點為頂點的等腰三角形)，對於這個問題，作者們也作了一些討論。這是作者們在思考雞爪定理是否可以進一步擴展至 n 邊形時所聯想到的問題。雖然最後考慮的問題已經與雞爪定理的精神有些出入，但能夠由思考一個結果是否可以進一步推廣開始，逐步修正，得出一些不一樣的有趣結論，還是非常難能可貴，這一點頗值得鼓勵。作品前段的鋪陳可以做適當的精簡，後半段在推估等距三角形的個數似乎經偏離了主軸，在分析個數時似乎也只是藉由觀察小的例子的數據

來推估一般化的規則，是不是有可能給一個更完整的論述？除了計算個數，關於等距點還會有什麼有趣的性質？如果能針對這些部分加以闡述會更好。

作品海報

共邊三角形內心與等距共圓點之研究

壹、前言

在練習數學習題時，偶然發現一個有趣的定理，如下:

雞爪定理:
設ΔABC為任意△，I為其內心，∠ABC的角平分線BI 交外接圓⊙ ABC於D，則D到A、C、I三點等遠，即**DA = DC = DI**

證明

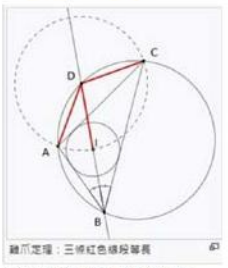
由於同弧所對的圓周角相等，有 $\angle IBA = \angle DCA, \quad \angle IBC = \angle DAC.$

又BI為角B的平分線，有 $\angle DCA = \angle DAC,$

故$DA = DC$得證（等圓周角對等弦）。

最後計角有： $\angle DIA = 180^\circ - \angle AIB$
$= \angle IAB + \angle IBA$
$= \angle IAC + \angle DAC$
$= \angle IAD.$

所以三角形DIA有兩底角相等，證畢$DA = DI$。



(取自維基百科資料)

上述僅適用於任意△，好奇:**雞爪定理是否可以適用在多邊形呢**?回歸定理初始條件，分析形成雞爪(等距線段)的做法，**探討多邊形在何種條件下才能找到類似雞爪定理的等距線段?是否可形成「等距相關性質」?**

研究目的：

一、探討雞爪定理是否可以適用於多邊形。

二、探討任意 n 邊形在什麼條件下形成等距共圓點。

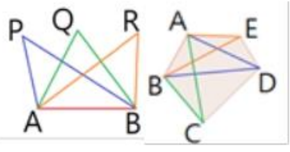
三、探討特殊 n 邊形等距相關性質。

(一) 正 n 邊形等距共圓點形成等距三角形圖形特徵及其數量公式之探討。

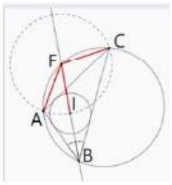
(二) 其他特殊多邊形等距共圓點形成等距三角形圖形特徵及其數量公式之探討。

貳、名詞解釋

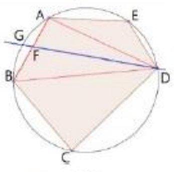
共邊△：當 n 個△共用一條邊時，稱這 n 個△為共邊△。若 n 邊形的其中一邊為共邊△的公共邊，其餘(n-2)個頂點與該公共邊形成(n-2)個共邊△。



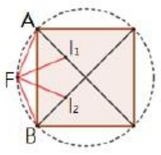
等距線段：雞爪定理中長度相等之線段，即△內角角平分線與△外接圓之交點 F，①F 與△ABC 內心連線形成等距線段；②F 與相鄰 2 個頂點的連線段形成等距線段(如右圖$\overline{FA}$、$\overline{FC}$、$\overline{FI}$)；**本研究與雞爪定理中類似，長度相等的線段命名為等距線段**。



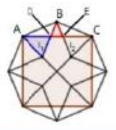
共圓點：三角形內角平分線與其外接圓之交點。
(如右△ABD 內角平分線$\overline{DF}$和△ABD 外接圓交點 G)



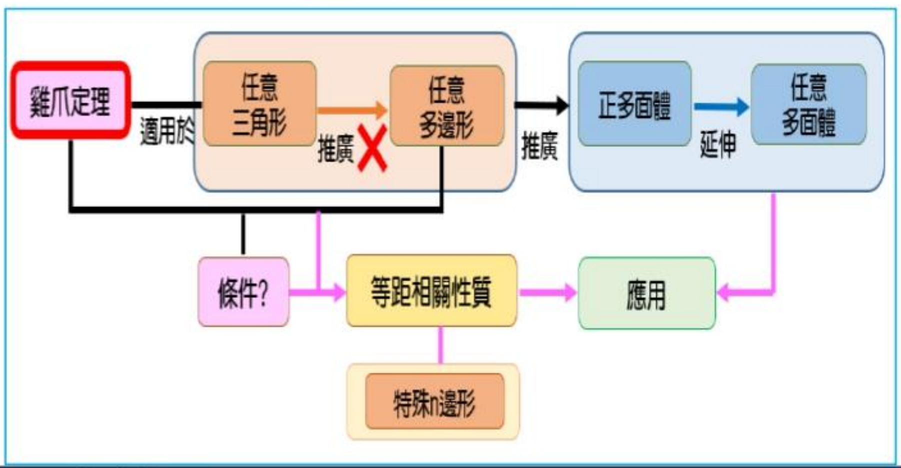
等距共圓點：雞爪定理中雞爪的踝部位置，△的內角平分線與該△外接圓的交點。本研究指以 n 邊形中 3 個頂點形成△，該△的內角平分線與該△外接圓的交點，且須滿足該點是**具 n 個等距線段的共圓點**稱為等距共圓點。
(如右圖四邊形中 F 點有相鄰 2 個頂點 A、B，搭配 2 個內心 I_1、I_2，共 4 條等距線段$\overline{FA} = \overline{FB} = \overline{FI_1} = \overline{FI_2}$，∴F 是等距共圓點。)



等距△：**以等距共圓點為頂點之等腰△**。
(如右圖△BDE 為等距△，而△ADI_1因其頂點並非等距共圓點，∴並非等距△)



參、研究架構



肆、研究過程與結果

一、探討雞爪定理是否可以適用於多邊形

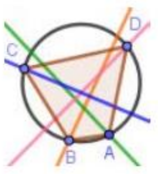
思考：∵雞爪定理提及適用的圖形是△，要形成**雞爪如果要能適用在多邊形需要達到基本條件可能有：**

1. 多邊形頂點共圓； 2. 多邊形需具內心；

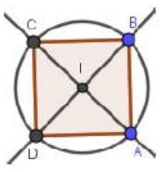
3. 內角角平分線與多邊形外接圓之交點，與多邊形內心、相鄰 2 個頂點的連線段形成等距線段

嘗試：任意四邊形➔做共圓四邊形 ABCD➔做橘藍粉綠線分別為∠ABC、∠BCD、∠ADC、∠BAD角平分線 (右圖)

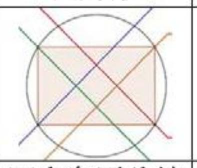
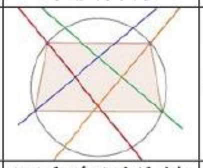
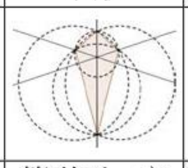
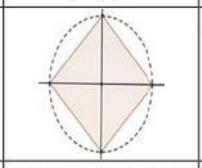
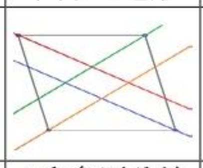
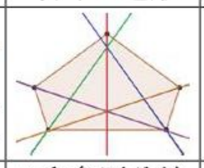
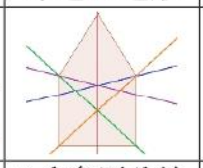
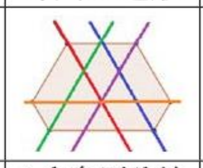
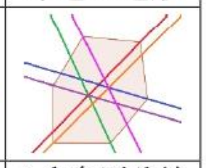
困難：要滿足雞爪定理，須達到「四條角平分線(橘藍粉綠線)交於一點，形成多邊形內心」之條件，此時僅正多邊形。



★**雞爪定理是否適用在正 n 邊形** 以正方形 ABCD 進行嘗試(右圖➘)：
設 ABCD 符合雞爪定理，則$\overline{BC}$=$\overline{CD}$=$\overline{IC}$，∵ABCD 為正方形，∴ $\overline{BC}$=$\overline{CD}$，∵ ∠CID = 90°， ∴ $\overline{CD} \neq \overline{IC}$，
∴ $\overline{BC}$=$\overline{CD}$ = $\overline{IC}$(→←)，∴雞爪定理無法適用在正方形。其餘同理可證。**發現**：雞爪定理無法適用在正 n 邊形。

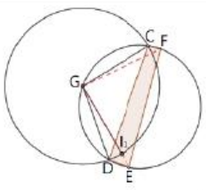


★**雞爪定理是否適用在其他特殊多邊形** 分別找圖形的內心跟做其外接圓進行嘗試，**發現**:原定理在特殊 n 邊形不適用。

圖	長方形	等腰梯形	箏形	菱形	平行四邊形	等角五邊形	等邊五邊形	等角六邊形	等邊六邊形
圖形									
不能理由	四內角平分線無法交於一點⇒沒有內心	四內角平分線無法交於一點⇒沒有內心	箏形不一定形成共圓(對角互補時共圓)	無法在圓周上找到一點使一未過圓心之弦與半徑等長	4 內角平分線無法交於一點⇒沒有內心	5 內角平分線無法交於一點⇒沒有內心	5 內角平分線無法交於一點⇒沒有內心	6 內角平分線無法交於一點⇒ 無內心	6 內角平分線無法交於一點⇒沒有內心

如果雞爪定理不能延伸至任意多邊形，則多邊形在何種條件下可找到類似雞爪定理的等距線段?

困難：從四邊形嘗試(如右圖)，**在滿足原雞爪定理$\overline{DG} = \overline{I_1G} = \overline{CG}$的前提下，想找連線段等長之外的第 3 個頂點**，
但在嘗試過後**發現均無法找到這第 3 個頂點**(E、F 都不滿足)，即$\overline{DG} = \overline{I_1G} = \overline{CG} \neq \overline{FG} \neq \overline{EG}$。



目標:在 n 邊形找到 n 組等距線段，每組等距線段有 n 條(類似雞爪定理)，滿足等距線段的點條件是? (如右下目標圖➘)

【以任意四邊形為例】

步驟 1.見圖 3-1-3，依原雞爪定理，作共用$\overline{CD}$的共邊△ACD 之內心 I_1(△ACD 三內角平分線)，並作過直線 AI_1 交圓於 F

步驟 2.見圖 3-1-4，連$\overline{FD}$、$\overline{FI_1}$、$\overline{FC}$，此時依原雞爪定理可證明$\overline{FD}$=$\overline{FI_1}$=$\overline{FC}$

如何找到其他滿足等距線段的點呢?

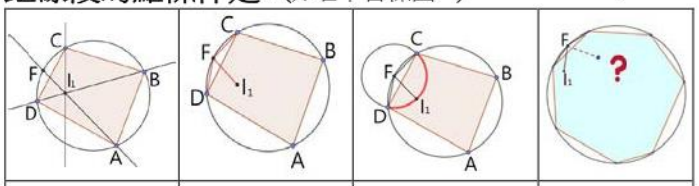


圖 3-1-3 圖 3-1-4 圖 3-1-5 目標圖

步驟 3.見圖 3-1-5，以 F 為圓心，$\overline{CF}$為半徑，做一個圓通過 C、I_1、D，此時圓 F 上的點都會與圓心 F 形成等距線段。

發現：**若像雞爪定理的等距線段點要在多邊形內部，則滿足等距線段的點必在弧$\overset{\frown}{CI_1D}$上(圖 3-1-5)，此時弧$\overset{\frown}{CI_1D}$的範圍為∠CFD，且可在該弧上找到無限個點，形成無限條等距線段。**

二、探討任意 n 邊形在什麼條件下形成等距共圓點

(一)探討圓內接多邊形上一點的共圓點如何找到其他條件使其成為等距共圓點

★**為何找共邊△**：**∵雞爪定理的等距線段為共圓點與 2 頂點和內心所形成，∴形成 n 條線段必有 2 頂點和 n-2 個內心與共圓點相連。**

理由：以GGB嘗試後發現 n邊形中△在共圓且共用一條邊的情況下(圖3-2-1)，根據等角對等弧性質，可推得各△共用邊之對應角角平分線會與外接圓交於 G(圖 3-2-2)；又根據雞爪定理可得 G 點與 n 個△內心及共用邊的 2 頂點距離相等(圖 3-2-3)；而 n 邊形又可視為 n-2 個共邊△頂點相連而成(圖 3-2-4)，∴便選定了共邊△來進行探討。得到**引理 1 並證明**：

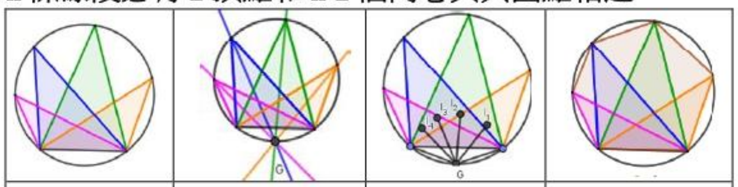
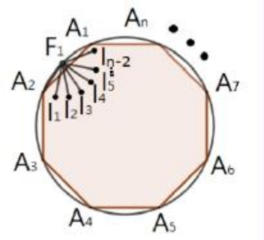


圖3-2-1 圖3-2-2 圖3-2-3 圖3-2-4

引理 1 設圓內接任意 n 邊形($A_1A_2…A_n$)，I_i(I_1)為【以該 n 邊形其中一邊(設$\overline{A_1A_2}$)為共邊的】共邊△內心，
∠$A_2A_3A_1$ 的角平分線 A_3I_1 交外接圓於 F_i(F_1)，
則可找到另外(n-2)個以$\overline{A_1A_2}$為共邊配其餘頂點 A_i(i=3、…….、n)的共邊△內心 I_k(k=1、…….、n-2)，
使得$\overline{A_1F_1}$=$\overline{A_2F_1}$=$\overline{I_1F_1}$=……=$\overline{I_{n-2}F_1}$，此時 Fi 為等距共圓點。(證明詳見作品說明書)



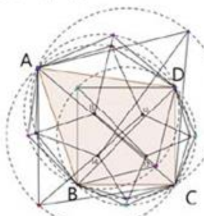
引理 1 延伸性質：任意 n 邊形必存在 n 組 (n-2) 個共邊三角形。

（二）探討任意 n 邊形形成等距共圓點的條件

思考：根據【引理 1 延伸性質】的條件，是否能形成等距共圓點?試由任意偶邊形及任意奇邊形分開討論(以任意偶邊形代表，奇邊形見說明書)

★探討任意偶邊形形成等距共圓點的條件以【任意四邊形】為例說明

推導：做一任意四邊形$ABCD$，並將其分成 4 個共邊△，分別將其外接圓、共圓點與等距線段繪製出來，此時 4 個共邊△有 4 個相異外接圓，如右圖。



發現❶：任意 4 邊形 4 個共邊△有 4 個相異外接圓無法形成等距共圓點。將右圖將A點向右平移，直至四邊形每邊皆出現一等距共圓點。

發現❷：任意四邊形形成等距共圓點之條件為任意四邊形 4 頂點共圓。

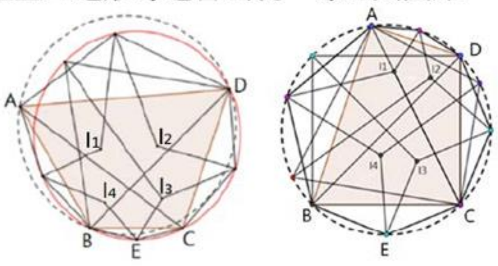
證明:假設BCD三點共圓，但A不與其共圓，

設弧BC上之共圓點為E，由於雞爪定理僅於共圓時發生$\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{I_3E}$(雞爪定理)

又∵ $\overline{I_4E}\neq\overline{BE}$(非共圓)，∴ 同理可證$\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{I_3E}=\overline{I_4E}$(→←)

此時若兩共邊三角形△ABC、△BCD共圓，則$\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{I_3E}=\overline{I_4E}$，

∴ 必須滿足$ABCD$四點共圓，任意四邊形才可形成等距共圓點。



引理 2：當任意 n 邊形所有頂點共圓時，可形成等距共圓點。

引理 2 延伸性質：任意 n 邊形所有頂點共圓時，可形成 n 個等距共圓點，存在 n-2 組 n 個等距線段。

三、探討特殊 n 邊形等距相關性質(分成正 n 邊形與其他特殊 n 邊形探討)

從研究二發現當多邊形具 n 組(n-2)個等距共圓點時，出現許多形狀相同的△，特別是特殊多邊形有不同特徵。針對等距△圖形特徵探討並推導公式：

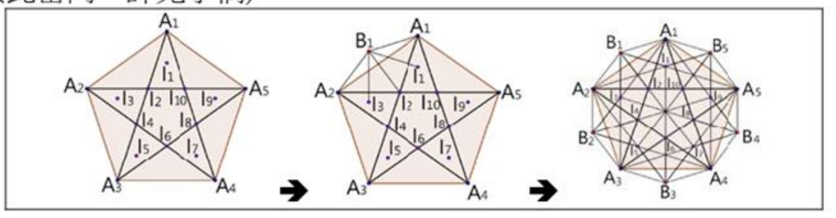
(一) 正 n 邊形等距共圓點形成等距△圖形特徵及其數量公式之探討(以正奇邊形的正五邊形為例)

★等距△圖形特徵探討：依據本研究定義之等距共圓點、等距△進行作圖：(▪其餘情形與此雷同，詳見手稿)

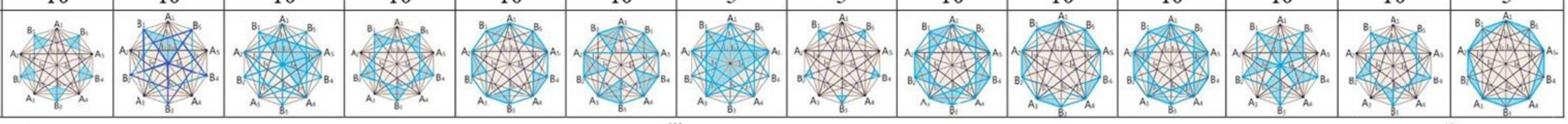
步驟 1 將此五邊形形成 10 個共邊△之內心標示為內心標示為I_1~I_{10}

步驟 2 將$\angle A_1A_3A_2$、$\angle A_1A_4A_2$、$\angle A_1A_5A_2$之角平分線分別與△ $A_1A_3A_2$、△ $A_1A_4A_2$、△ $A_1A_5A_2$之外接圓的交點標示為B_1，其餘依此類推標示為B_2、B_3、B_4、B_5，並與相鄰兩頂點相連。

步驟 3 將B_1~B_5與其共邊△之內心相連。



發現：形成等距△有 4 類，頂角為 36°、 72°、108° 或 144°，其數量分別為 50、20、50 和 5 個，圖形特徵乃會依頂角不同形成不同類的全等△如下:

頂角	36°	36°	36°	36°	36°	72°	72°	72°	108°	108°	108°	108°	108°	144°
數量	10	10	10	10	10	10	5	5	10	10	10	10	10	5
圖形														

證明: (1)等距△頂角角度為 36°，有 2 種(舉 1 例其餘見手稿)

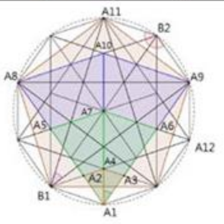
∵$\angle A_9A_1A_{10}$與$\angle A_9B_2A_{11}$為互補關係

$\angle A_9B_2A_{11}$與$\angle A_9B_1A_{11}$亦同，

$\angle A_9B_1A_{11}$為$\frac{1}{3}$正五邊形內角

∴△ $A_1A_8A_{10}$、△ $A_1A_9A_{10}$、△ $A_1A_5A_7$、

△ $A_1A_6A_7$、△ $A_1A_2A_4$、△ $A_1A_3A_4$之頂角皆 36°為等距△，其餘以此類推。



(2)等距△頂角角度為 72°，有 2 種情形(舉 1 例其餘見手稿)

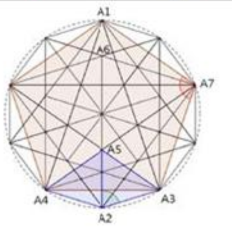
∵$\angle A_3A_2A_6$與$\angle A_1A_7A_3$為互補關係

$\angle A_1A_7A_3$為正五邊形之內角，

∴$\angle A_3A_2A_6$之頂角為 72° 做$\overline{DF}$之延長線$\overline{DA}$

發現∠ADC 與∠AEC 皆是對到$\widehat{AC}$

其餘角度證明與圖形關係詳見作品說明書。



★頂角公式觀察與推導，以此分類等距△

以頂角角度大小分類等距△，其中$\theta=\frac{180°}{n}$為等距△之最小頂角、2θ為第 2 小角、……、(n − 1)θ為最大角、(n − 2)θ為第 2 大角，其餘角度見手稿。正偶數邊形以正六邊形等距△作為示例，最小角(圖 3-1-5)、第 2 小角(圖 3-1-6)、第 2 大角(圖 3-1-7)、最大角(圖 3-1-8)的圖例，並整理公式表:

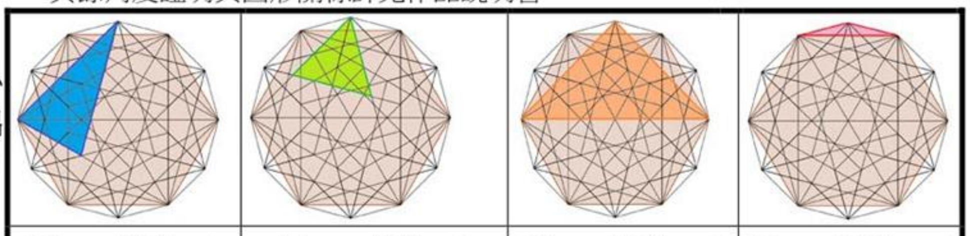


圖3-1-5頂角30°　圖3-1-6頂角60°　圖3-1-7頂角120°　圖3-1-8頂角150°

▪正 n 邊形(n 為偶數)等距△頂角角度公式表

正 n 邊形	六	八	十	…	等距△頂角角度公式
最小角 θ	30	22.5	18	…	$\frac{180°}{n}\times1$
第 2 小角 2θ	60	45	36	…	$\frac{180°}{n}\times2$
⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮
第 2 大角 (n-2)θ	120	135	144	…	$\frac{180°}{n}\times$(n-2)
最大角 (n-1)θ	150	157.5	162	…	$\frac{180°}{n}\times$(n-1)

正五、六邊形最小角為例說明，算出等距△最基本數量需要乘以多少權數來得到最後全部的等距△數量

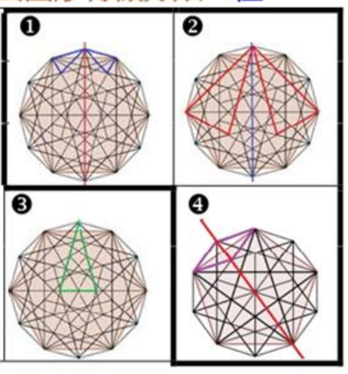
★圖形特徵決定正 n 邊形形成等距△數量權數，權數加乘的情形因圖形特徵分類 4 種：

正 n 邊形	5	6	權數
最小角等距△數量	0	1	×2
	3	2	×2
	0	2	×1
	2	0	×2

❶❷❹三類：

❶最外層、❷以對角線夾角、及❹底角為最小角倍數共 3 類等距△因具兩等距△共用對稱軸的特徵，等距△數量權數×2

❸：等距Δ底邊平行原正 n 邊形的其中一邊，等距△數量權數×1



★正 n 邊形等距共圓點所衍伸出等距△數量公式推導

∵圖形對稱特徵不同(偶邊形為例，詳見說明書或手稿)

▪正偶邊形以θ°為頂角之等距△數量整理表

正偶邊形	6	8	10	12	…		6	8	10	12	…	權數
頂角為θ°等距△數量	1	1	1	1	…	➔	1	1	1	1	…	×2
	2	5	9	14	…	分	2	2+3	2+3+4	2+3+4+5	…	×2
	2	3	4	5	…	析	2	2+1	2+1+1	2+1+1+1	…	×1
	0	0	0	0	…	➔	0	0	0	0	…	×2

正偶邊形頂角為θ°時數量規律為

情形❶1、1+2、1+2+3、1+2+3+4、…、1+2+3+……+k成等差級數

⇒首項為1，公差為1，項數為$k=\frac{n-2}{2}$，$a_k=\frac{(\frac{n-2}{2})(\frac{n-2}{2}+1)}{2}\times2=\frac{n(n-2)}{4}$

情形❷2+1、3+1、4+1、5+1、…(k+1)+1⇒ $a_k=\frac{n-2}{2}$

∴公式為$\left[\frac{n(n-2)}{4}+\frac{n-2}{2}\right]\times n=\frac{(n+2)(n-2)}{4}\times n$

★第奇數大角之等距△數量公式推導

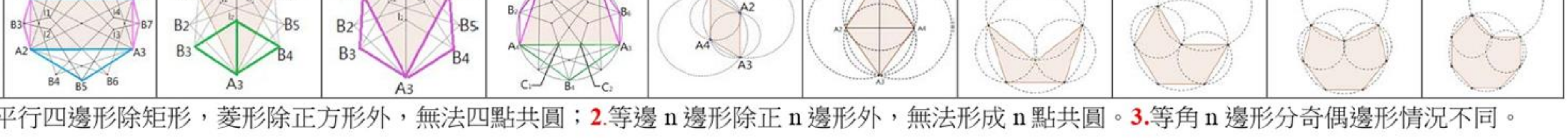
正奇邊形				正偶邊形			
權數×1		權數×2		權數×1		權數×2	
m	數量	m	數量	m	數量	m	數量
1	1	1	0	1	1	1	1
3	2	3	1	3	2	3	3
5	3	5	3	5	3	5	6
7	4	7	6	7	4	7	10
…	…	…	…	…	…	…	…
公式	$\frac{m+1}{2}$	公式	$\frac{(m+1)(m-1)}{8}$	公式	$\frac{m+1}{2}$	公式	$\frac{(m+1)(m+3)}{8}$

正奇邊形及正偶邊形第奇數大角之等距△數量公式分別為: $\frac{(m+1)^2}{4}$及$\frac{(m+1)(m+5)}{4}$

其中 m 為第 m 大角，例如最大角之 m=1；第三大角之 m=3，以此類推。

(二)其他特殊 n 邊形等距共圓點形成等距△圖形特徵及其數量公式之探討

接續針對特殊四邊形(長方形、平行四邊形、菱形、梯形、箏形)、等角n邊形、等邊n邊形，依據等距共圓點、等距△之定義作圖後分別探討如下：

圖形	長方形	箏形		等腰梯形	平行四邊形	菱形	等邊五邊形	等邊六邊形	等邊七邊形	等邊八邊形
等距△圖形特徵										

發現:1.平行四邊形除矩形，菱形除正方形外，無法四點共圓；**2.**等邊 n 邊形除正 n 邊形外，無法形成 n 點共圓。**3.**等角 n 邊形分奇偶邊形情況不同。

引理 3：當等角偶邊形滿足奇數邊及偶數邊分別相等時所有頂點可共圓。其餘等角 n 邊形除正 n 邊形皆無法形成等距共圓點。

證明: 共圓偶邊形的 形成條件

設等角n邊形頂點共圓，每邊所對弧為x_1、x_2、 ... 、x_n(多邊形外接圓上的弧)，這些弧要滿足方程式

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-3}+x_{n-2}=2\left(180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}\right) \\ x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-3}+x_{n-2}=2\left(180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}\right) \\ x_3+x_4+x_5+\cdots+x_{n-1}+x_n=2\left(180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}\right) \end{cases}$$

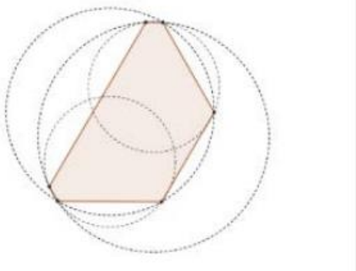
……

形成等角共圓偶邊形

需$x_1=x_3=\cdots=x_{n-1}$、

$x_2=x_4=\cdots=x_n$(x_i是弧長)

■等角共圓奇邊形推導過程，內容詳見說明書



【以6邊形為例說明】

設等角6邊形每邊所對弧為x_1、x_2、 ... 、x_6

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=240^\circ \ldots\ldots(1) \\ x_2+x_3+x_4+x_5=240^\circ \ldots\ldots(2) \\ x_3+x_4+x_5+x_6=240^\circ \ldots\ldots(3) \\ x_4+x_5+x_6+x_1=240^\circ \ldots\ldots(4) \\ x_5+x_6+x_1+x_2=240^\circ \ldots\ldots(5) \\ x_6+x_1+x_2+x_3=240^\circ \ldots\ldots(6) \end{cases}$$

由(1)-(2)得$x_1=x_5$；由(2)-(3)得$x_2=x_6$

由(3)-(4)得$x_3=x_1$；由(4)-(5)得$x_4=x_2$

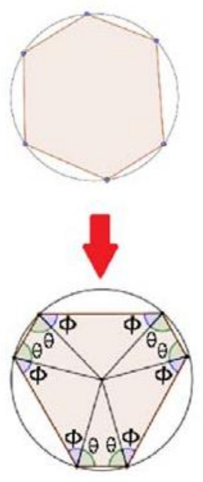
由(5)-(1)得$x_5=x_3$；由(6)-(1)得$x_6=x_4$

∴ $x_1=x_3=x_5$，$x_2=x_4=x_6$，代入(1)

得: $2x_1+2x_2=240^\circ$，$x_1+x_2=120^\circ$

⇒ x_1、x_3、x_5；x_2、x_4、x_6兩組分別等長時可形成等角共圓六邊形，**透過等弧對等弦，**

得知**奇數邊及偶數邊邊長分別相等時所有頂點可共圓**。



★**等角共圓 n 邊形對應不同數量公式**如下，其中θ為多邊形對角線所切割出的最小角，推導過程詳見作品說明書。

1.頂角為θ°時，等距△數量公式為:$\left[\frac{(n-1)(n-4)}{2}+3\right]\times\frac{n}{2}$

2.頂角為$\frac{360}{n}\times 1-\theta$°時，等距△數量公式為:$\left[\frac{(n-3)(n-4)}{2}+1\right]\times\frac{n}{2}$

3.頂角為$\frac{360}{n}\times 1+\theta$°時，等距△數量公式為公式: $\left[\frac{n-2}{2}\right]^2\times\frac{n}{2}$

4.頂角為$\frac{360}{n}\times 2+\theta$°時，等距△數量公式為$(\frac{n-4}{2})^2\times\frac{n}{2}$

5.頂角為$\frac{360}{n}\times 2-\theta$°時，等距△數量公式為$[(\frac{n-2}{2})^2-2]\times\frac{n}{2}$

6.頂角為$180-\theta$°和$\frac{360}{n}$°時，等距△數量公式為$1\times\frac{n}{2}$和0

伍、討論

一、 任意多面體所有平面皆形成等距共圓點條件之推導與證明

以【任意六面體】為例進行探討(其餘詳見手稿或附件)

推導： 做一任意六面體，並將其中一面之四邊形命名為$ABCD$，並將其分成 4 個共邊△，分別將其外接圓、共圓點與等距線段繪製出來，並將A點向右平移直至四邊形每邊皆出現一等距共圓點。

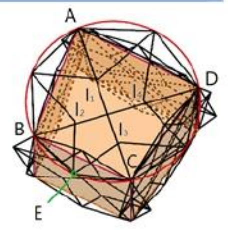
發現:任意六面體任一平面形成等距共圓點之條件為該平面四頂點共圓。

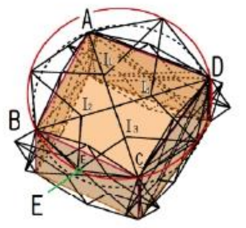
證明: 設BCD三點共圓，A點不與其共圓，且弧BC上之共圓點為E，

則∵ 雞爪定理僅於共圓時發生，∴ $\overline{I_2E}\neq\overline{BE}$(非共圓)，且$\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{I_3E}$(雞爪定理)

同理可證$\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{I_2E}=\overline{I_3E}$(→←)，此時若兩共邊$\triangle ABC$、$\triangle BCD$共圓，則$\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{I_2E}=\overline{I_3E}$須滿足$ABCD$四點共圓，任意四邊形才可形成等距共圓點，其餘五平面則依此類推。

∴ 必須滿足**所有平面頂點分別共圓**，任意六面體所有平面才可皆形成等距共圓點。





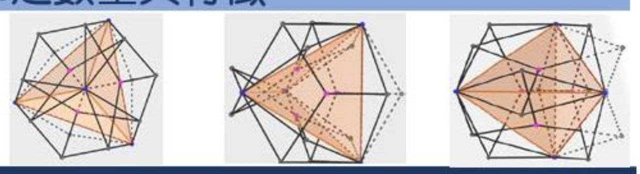
引理 4：任意多面體所有平面皆形成等距共圓點之條件為任意 n 面體所有平面頂點分別共圓。

二、探討正多面體等距共圓點衍伸出等距△之數量與特徵

以【正四面體】為例進行探討(其餘詳見手稿或附件)

發現: 形成之等距△頂角，只可為 120°，其數量為 12 個。

證明: ∵正四面體是由四個正△所組成，∴ 等距 △ 之個數為正 △ 之 4 倍



陸、結論

一、針對雞爪定理延伸發現：(一)**雞爪定理不能適用於多邊形**。

(二)當多邊形內角平分線與其外接圓之交點 F_1，與相鄰 2 頂點衍伸的其中 1 個△內心形成等距線段；**若以 F_1 為圓心，該等距線段長為半徑畫弧，則可在該弧上找到無限個點，形成無限個等距線段。**

二、針對任意 n 邊形形成等距共圓點的條件，發現：

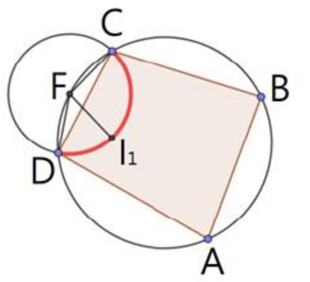
(一)設圓內接任意 n 邊形($A_1A_2\ldots A_n$)，Ii(I_1)為【以該 n 邊形其中一邊(設為$\overline{A_1A_2}$)為共邊的】共邊△內心，$\angle A_2A_3A_1$ 的角平分線$\overline{A_3I_1}$交外接圓於 Fi(F_1)，則可找到另外(n-2)個以$\overline{A_1A_2}$為共邊配其餘頂點 Ai(i=3、…….、n)的共邊△內心 I_k(k=1、…….、n-2)，使得$\overline{A_1F_1}$=$\overline{A_2F_1}$=$\overline{I_1F_1}$=……=$\overline{I_{n-2}F_1}$，此時 Fi 為等距共圓點。

(二)**當任意 n 邊形所有頂點共圓時，則可形成等距共圓點。**

(三)**當任意 n 面體所有平面頂點分別共圓，則任意多面體所有平面皆可形成等距共圓點。**

(四)平行四邊形除矩形，菱形除正方形外，無法四點共圓。

(五)**當等角偶邊形滿足奇數邊及偶數邊邊長分別相等時，則所有頂點可共圓，此時等角偶邊形可形成等距共圓點；**其餘等角 n 邊形或等邊 n 邊形除正 n 邊形皆無法形成等距共圓點。



三、針對任意 n 邊形形成等距共圓點的性質：

(一)**任意 n 邊形所有頂點共圓時，可形成 n 個等距共圓點，存在 n-2 組 n 個等距線段。**

(二)特殊四邊形中的箏形，若最小角為θ，其等距共圓點所衍伸出等距△有 5 類，頂角分別為$\frac{\theta}{2}$,$90-\frac{\theta}{2}$,90 ,$90+\frac{\theta}{2}$,$180-\frac{\theta}{2}$，其餘特殊四邊形等距共圓點形成等距△之圖形特徵見作品說明書。

(三)除了正△及正方形，其餘**正 n 邊形有 n-1 種全等等距△**，其餘正 n 邊形等距共圓點形成等距△之圖形特徵及其數量公式為：

1.正 n 邊形等距共圓點所衍伸出等距△之頂角角度公式$\{(\frac{180}{n}\times 1)^\circ$、$(\frac{180}{n}\times 2)^\circ$、 ………、 $\left[\frac{180}{n}\times(n-1)\right]^\circ\}$

2.正 n 邊形等距共圓點所衍伸出等距△之數量公式，圖形特徵決定正 n 邊形形成等距△數量權數，其中

(1)正奇 n 邊形第偶數個小角等距△數量公式為$\left\{(\frac{n-1}{2})^2、(\frac{n-3}{2})^2、 \ldots 、\left[\frac{n-(n-4)}{2}\right]^2 、\left[\frac{n-(n-2)}{2}\right]^2\right\}\times n$；其餘公式見說明書。

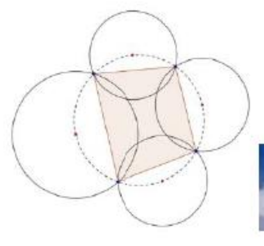
(2)正偶 n 邊形第奇數個小角等距△數量公式為$\left\{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 、\left(\frac{n-4}{2}\right)^2 、 \ldots 、\left[\frac{n-(n-4)}{2}\right]^2 、\left[\frac{n-(n-2)}{2}\right]^2\right\}\times n$；其餘公式見說明書。

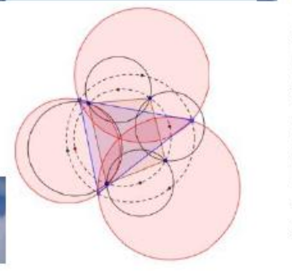
(3)正奇邊形及正偶邊形第奇數大角之等距△數量公式分別為: $\frac{(m+1)^2}{4}$及$\frac{(m+1)(m+5)}{4}$，其中 m 為第 m 大角。

(四)正四、十二、二十面體等距共圓點形成之等距△分別有 1；4；1 類，頂角分別為 120°；36°、72° 、108°或 144°；120°，其數量各有 12 個； 600、240、600 和 60 個；60 個。

柒、應用—網路基地台的數量多寡與位置設計

將網路基地台放置在等距共圓點（左圖 4 個紅色點）上，此時**等距共圓點是發射訊號點，訊號範圍即半徑**。應用研究結果，可隨時根據需要，重新規劃基地台數量及位置，例如想減少基地台數量，可以做一個任意三角形，畫出他們的等距共圓點（如右圖紅色範圍），此時設計的基地台不僅減少數量，還涵蓋原有的範圍。





捌、參考文獻

1.蔣曉涵、鄭介迪(2002)。平面上三點集中度判別法之探討。全國中小學科展國小組數學科科展作品說明書。

2.華祥志、吳祐德、蔡承儒(2008)。求過任意點作多邊形面積平分線。全國中小學科展國中組數學科科展作品說明書。3.鍾政霖、賴芊卉(2007)。△內心、重心、垂心的另類推導。臺灣國際科展數學科科展作品說明書。

4.雞爪定理- 维基百科，自由的百科全書。

5. The Incenter/Excenter Lemma - Evan Chen。