中華民國第 63 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030412

數字轉轉彎

學校名稱：臺南市立建興國民中學

作者：	指導老師：
國二 林玠廷 國二 康哲銨 國二 林詠心	蔡孟倫 周育信

關鍵詞：數列、向量、平面座標

摘要

本作品將數列與直角坐標做結合，探討不同數列及不同旋轉角度的情況下，整理所畫圖形的特徵，並歸納出各組組合之間的關聯性。

總結出以下幾點：

(1) 以所畫圖形為例：從原點出發，旋轉角度設定為 90°，數列a_n除了$n \equiv 0(mod\ 4)$時某些情形無法回到原點外，其餘情形皆能畫出回到原點的圖形。

(2) 以執行的最少次數（最小執行次數）可推算出為$t = \frac{lcm(\alpha,n)}{n}$。

(3) 以數列的變化來說，我們發現首末項交換會使圖形位移接著旋轉或數字的顛倒排列的圖形則會有位移再以$tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)x = y$為對稱軸進行線對稱的變化。

最後，本作品試著找出一般化公式，並期望能推廣到在得知α、θ、n後，會產生出何種漂亮的圖形。

壹、前言

一、研究動機

暑假期間，我們讀到一本數學遊戲書「原來數學這麼漂亮」。書中提到一種叫「數字轉轉彎」的數學小遊戲，利用數列繪製成線段，組成圖形。書裡提到，一個項數為四項的等差數列所畫出的線段最終無法回到原點。嘗試用幾個隨機的數列繪製後，我們發現出現的圖形很類似簡易的萬花尺圖形，覺得非常有趣，也感到好奇，心中產生許多問題：什麼樣的數列可以回到原點？甚麼樣的數列不行？不同規律的數列會怎麼影響畫出圖形的特性？因此，我們想透過此研究來探討這種作圖法各種變化的可能性。

二、文獻回顧

安娜・維特曼著、愛德華・謝佛頓、伊凡・希喜繪圖、畢馨云翻譯（2017）。原來數學這麼漂亮：30 種激發創意的手繪練習。台北市：小天下出版。

文獻啟發：

這本書原是一本啟蒙讀物，但卻涵蓋著相當大量由數字與形狀結合的規律圖形。在數字翻筋斗這一個章節中，他提出了一個問題：什麼樣的數列所畫出的圖形會回原點？

而這句話也成為了我們主要的研究方向以及目的。

三、研究目的

(一) 探討不同的數列對圖形的影響。

(二) 探討不同的角度對圖形的影響。

(三) 假設圖形可以回到原點，需要執行幾次數列來回到原點。

(四) 求圖形可以回到原點的充要條件。

貳、研究設備及器材

一、 研究與記錄用文具：紙張、方格紙、筆、直尺。

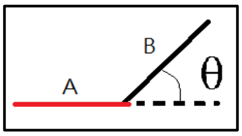
二、 作圖與資料處理工具：電腦、文書處理軟體（Word）、遊戲設計軟體（Scratch）、截圖軟體、表格繪製軟體（Excel）。

參、名詞解釋與符號定義

一、 數列：以固定順序排列的幾個非負實數，決定輪流要畫的各個線段長度。

表示方法：$\langle a_k \rangle_{k=0}^{n-1}$，其中$n$為數列之項數,$n$為正整數。

二、 旋轉角度（θ）：為每繪製一個有向線段後，旋轉的角度，此角度大於$0°$且小於等於$180°$，如左圖



三、 原點 (O)：開始繪製圖形的起始點，以圖上綠色點表示。

四、 執行數列：以數列與旋轉角度繪製一次圖形的動作（詳細過程可見研究過程）

五、 完成圖形：重複執行數列，直到回到原點即完成圖形。

六、 執行次數(t)：指圖形經過多少次執行數列可回到原點（不只一值）。

七、 最小執行次數(t_0)：指完成圖形後，數列的執行次數。例如：以數列$\langle 1,2,3 \rangle$繪製圖形，執行 4 次數列後，剛好會回到原點，則數列$\langle 1,2,3 \rangle$的最小執行次數為 4 次。

注意：t_0為t其中一個值

八、 節點（P_i）：每繪製數列的兩相鄰項時，中間旋轉時所構成的頂點。

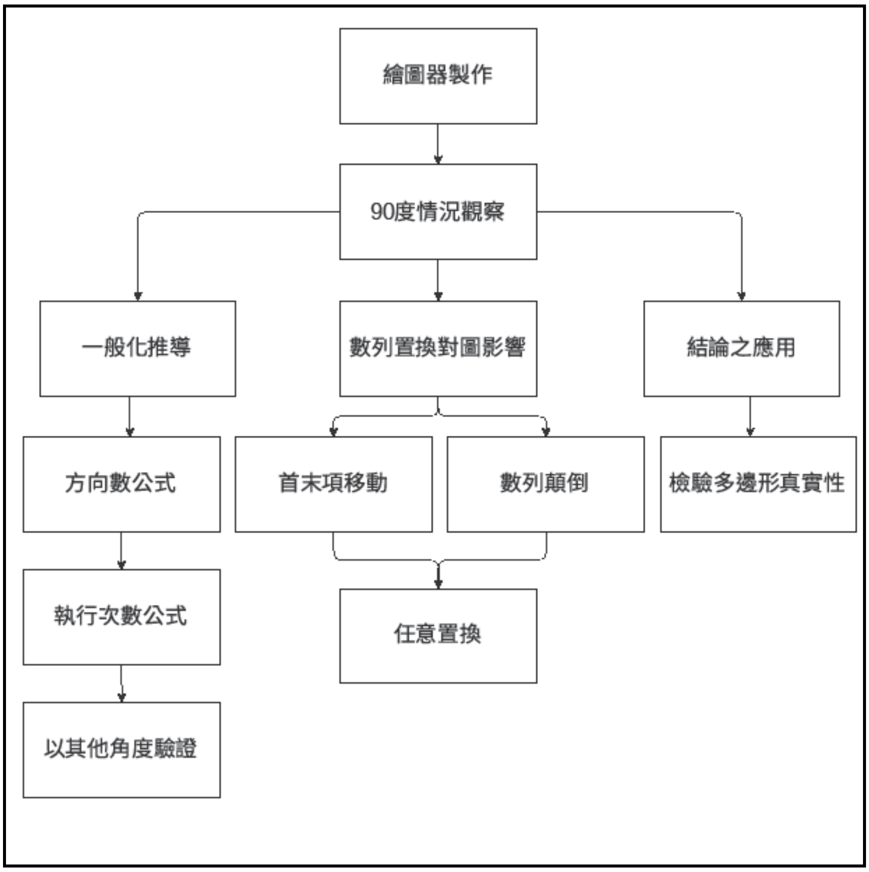
九、 旋轉點（Q_i）：執行一次數列後到達的座標點，以圖上粉色點表示。

十、 方向數(α)：對於某一角度來說，對一坐落於x軸正向的向量開始一次一次逆時針旋轉

給定角度，方向數(α)即為此向量可能具有的方向的總數，此處彼此差為$360°$倍數的角視為同一個方向。以$90°$為例：$0° \to 90° \to 180° \to 270° \to 360°$(與 $0°$同方向$) \to 450°$(與 $90°$同方向$)\ldots$，因此$90°$的方向數(α)為4。

十一、同餘函數(mod)：以$mod(k,n)$代表 k 除以 n 的餘數。

肆、研究架構



伍、研究過程

數列繪製規則

(一) 執行數列：

1. 從數列的第一項開始，畫出此數字長度的線段。
2. 逆時針旋轉θ，並繼續畫下一個項數長度的線段。
3. 重複此步驟，直到畫完數列的最後一項，就稱為執行一次數列。以數列$\langle 1,2,3\rangle$為例，執行一次數列後畫出的圖形，如圖 5-1。

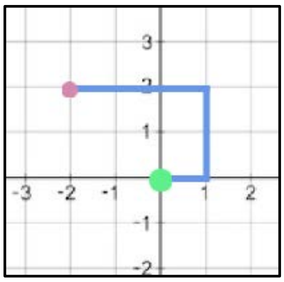


圖 5-1

(二) 繪製規則：

1. 從原點O向x軸正向出發，執行一次數列。
2. 如果執行一次數列，還沒有回到原點，則再次執行數列。
3. 重複此步驟，直到回到原點O時，剛好也完成執行一次數列，便可結束而完成圖形。
4. 若旋轉點位置呈一直線，則此圖形為無法回到原點。

以數列$\langle 1,2,3\rangle$為例，完成的圖形如圖 5-2：

以數列$\langle 1,2,3,4\rangle$為例，無法完成圖形，如圖 5-3：

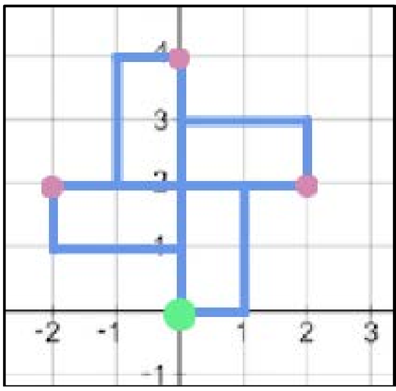


圖 5-2

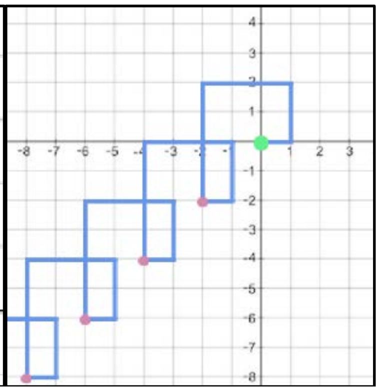


圖 5-3

探究一、繪圖器製作

(一) 數列

1. 新增一個清單「數列」以表示數列。
2. 新增一個變數「n」代表項數。
3. 新增一個變數「單位長」，以便調整圖形大小。

(二) 繪筆

1. 製作一個角色「畫筆」，開始運行時定位到座標點(0,0)，並面朝90°(右)。(圖 5-4、5-5)
2. 清除所有筆跡，設定繪筆顏色與寬度。(圖 5-6)

圖 5-4

圖 5-5

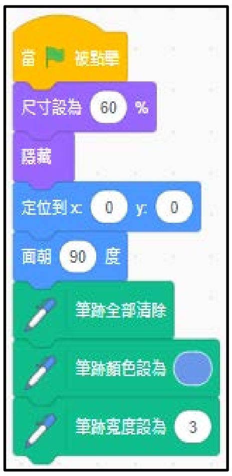


圖 5-6

(三) 執行數列

1. 將變數「n」設定為 1，並重複無限次：繪筆下筆，移動(數列第 n 項×單位長)的距離，將畫筆逆時針旋轉90°，再把變數「n」增加 1。也就是說開始執行時，畫筆會先畫出數列第一項的長度，旋轉90°，下一次循環再畫出數列第二項的長度，再旋轉90°，如此不斷循環直到最後一項。(圖 5-7)
2. 繪製完數列最後一項時，檢驗畫筆是否剛好回到原點(0,0)。若沒有回到原點則將 n 設定回 1 再次執行數列，回到原點則停筆並停止程式。(圖 5-8)

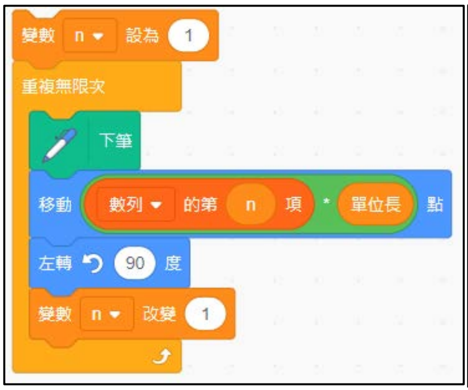


圖 5-7

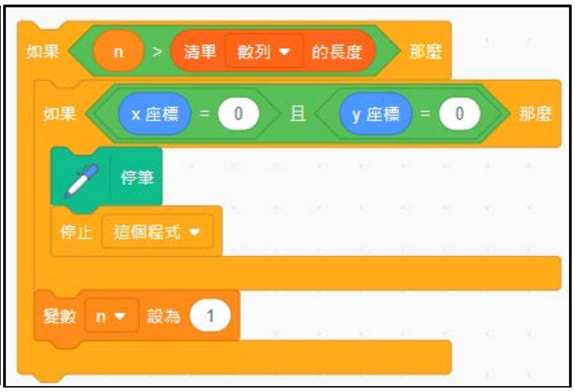


圖 5-8

(四) 計算執行次數

1. 製作一個變數「執行次數」，開始執行時數值設為 0。(圖 5-9)
2. 程式執行完一次數列，在下一次執行前，變數增加 1。(圖 5-10)

圖 5-9

圖 5-10

(五) 標示旋轉點、原點

1. 旋轉點：以繪筆標示出旋轉點。因為每執行一次數列後，畫筆的所在位置就是旋轉點，所以建立自己的分身即可作為標示。(圖 5-11、5-12)

圖 5-11

圖 5-12

2. 原點：

(1) 製作一個新角色「原點」。(圖 5-13)

(2) 移動到位置(0,0)並移至最上層。(圖 5-14)

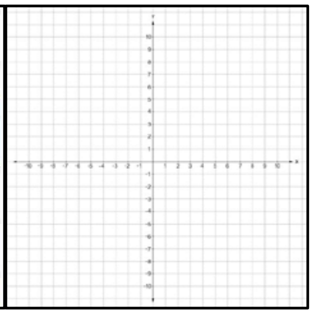


圖 5-13

圖 5-14

圖 5-15

(六) 加入背景：方格紙 (圖 5-15)

(七) 完成程式

1. 畫筆程式(圖 5-16)

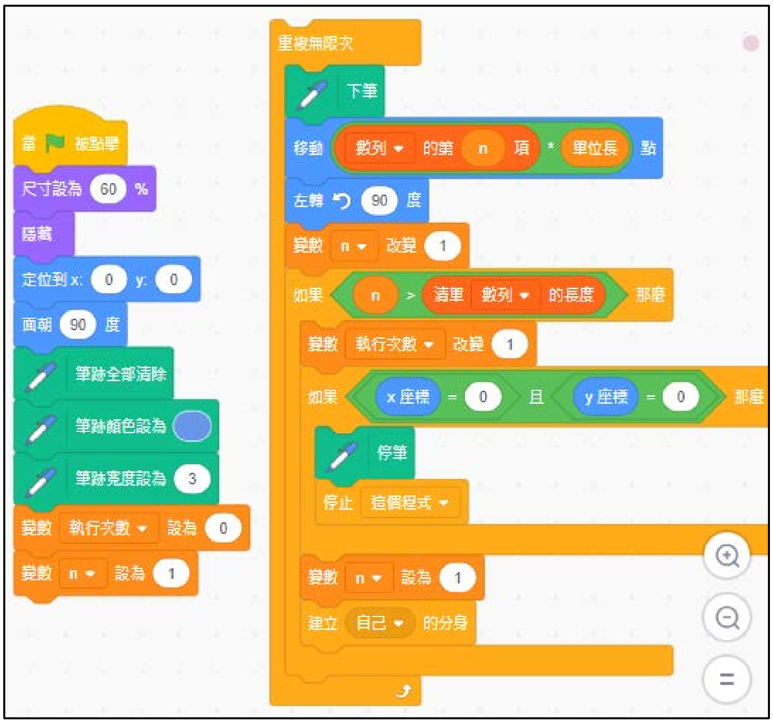


圖 5-16 (左邊程式在上而兩列相接，為了方便展示而拆開)

圖 5-17

2. 原點程式(圖 5-17)

3. 執行介面(圖 5-18)

直接在「數列」清單中輸入數列，按下左上角綠旗即開始繪製。

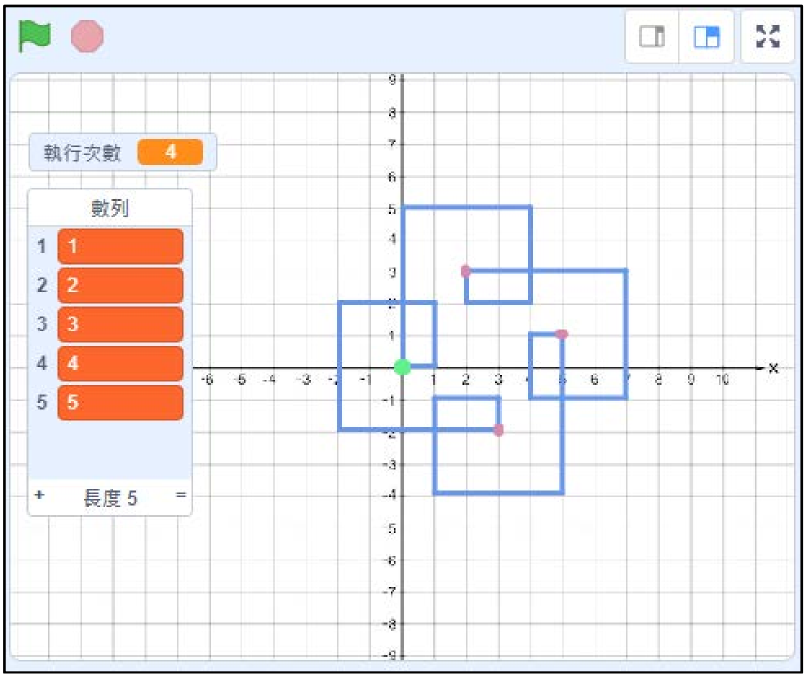


圖 5-18

探究二、$\boldsymbol{\theta = 90°}$時數列的最小執行次數與回原點條件

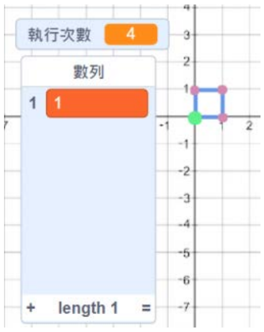
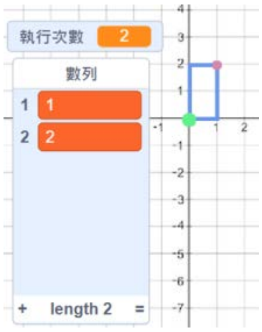
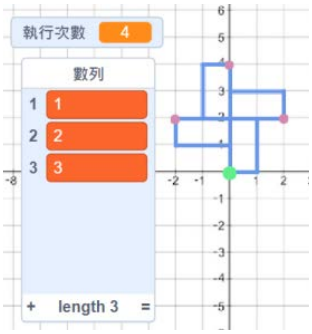
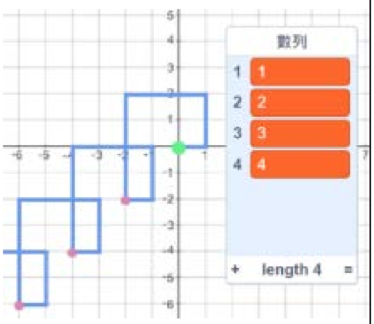
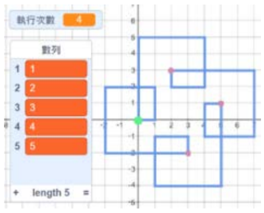
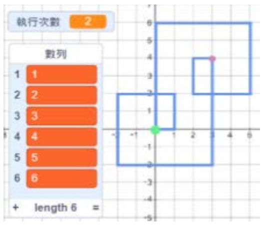
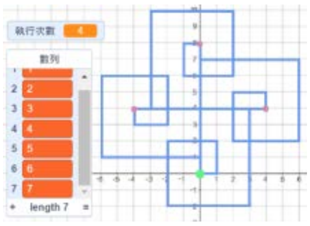
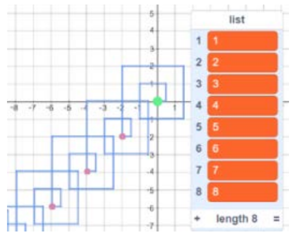
觀察$\boldsymbol{a_0 = 1,\ d = 1,}$ 項數 1 項至 8 項			
執行 4 次	執行 2 次	執行 4 次	不回原點
 $\langle 1\rangle$	 $\langle 1,2\rangle$	 $\langle 1,2,3\rangle$	 $\langle 1,2,3,4\rangle$
 $\langle 1,2,3,4,5\rangle$	 $\langle 1,2,3,4,5,6\rangle$	 $\langle 1,2,3,4,5,6,7\rangle$	 $\langle 1,2,3,4,5,6,7,8\rangle$
發現：規律可能和除以四的餘數有關，因此討論餘數的四個可能性			

表 5-1

依序討論$n \equiv\ 1\ or\ 2\ or\ 3\ or\ 0(mod\ 4)$，結果為：

當$\boldsymbol{\theta = 90°}$時，$\boldsymbol{n \equiv 1\ or\ 3(mod\ 4)}$時，$\boldsymbol{t_0 = 1\ or\ 4}$；$\boldsymbol{n \equiv 2(mod\ 4)}$，$\boldsymbol{t_0 = 1\ or\ 2}$；

$\boldsymbol{n \equiv 0(mod\ 4)}$時，$\boldsymbol{t_0 = 1\ or}$ 無法完成圖形。

(一) $\boldsymbol{n \equiv 1(mod\ 4)}$

設$\langle a_k\rangle_{k=0}^{n-1} = a_0, a_1, a_2 \dots\dots a_{n-1}$

令$a_0 - a_2 + a_4\ \dots\dots - a_{n-3} + a_{n-1} = x_1$，$a_1 - a_3 + a_5 \dots\dots - a_{n-4} + a_{n-2} = y_1$

$Q_1(a_0 - a_2 + a_4\ \dots\dots - a_{n-3} + a_{n-1}$，$a_1 - a_3 + a_5 \dots\dots - a_{n-4} + a_{n-2})$

執行 1 次數列要回原點，若且唯若$Q_1(x_1, y_1) = (0,0)$，$\therefore x_1 = 0, y_1 = 0$

$Q_2(x_1 - a_1 + a_3 - a_5 \dots\dots + a_{n-4} - a_{n-2}$，$y_1 + a_0\ - a_2 + a_4 \dots\dots - a_{n-3} + a_{n-1})$

執行 2 次數列要回原點，若且唯若$Q_2(x_1 - y_1, y_1 + x_1) = (0,0)$，$\therefore x_1 = 0, y_1 = 0$

$Q_3(x_1 - y_1 - a_0 + a_2 - a_4 \dots\dots + a_{n-3} - a_{n-1}$，$y_1 + x_1 - a_1 + a_3 - a_5 \dots\dots + a_{n-4}$
$- a_{n-2})$

執行 3 次數列要回原點，若且唯若$Q_3(-y_1, x_1) = (0,0)$，$\therefore x_1 = 0, y_1 = 0$

$Q_4(-y_1 + a_1 - a_3 + a_5 \dots\dots - a_{n-4} + a_{n-2}$，$x_1 - a_0 + a_2 - a_4 \dots\dots + a_{n-3} - a_{n-1})$

$Q_4(-y_1 + y_1, x_1 - x_1) = (0,0)$

由以上計算得知，$t_0 = 1\ or\ 2\ or\ 3$的條件皆為$x_1 = 0, y_1 = 0$，因此若發現有一數列，執行 2 或 3 次數列後回原點，其實已在執行一次數列時回原點，所以只有$t_0 = 1$這種可能。又$t_0 = 4$時必回原點，$\therefore \boldsymbol{n \equiv 1\ (mod\ 4)}$**時，**$\boldsymbol{t_0 = 1\ or\ 4}$**。**

(二) $\boldsymbol{n \equiv 2(mod\ 4)}$

設$\langle a_k \rangle_{k=0}^{n-1} = a_0, a_1, a_2 \dots\dots a_{n-1}$

令$a_0 - a_2 + a_4 \dots\dots - a_{n-4} + a_{n-2} = x_2$，$a_1 - a_3 + a_5 \dots\dots - a_{n-3} + a_{n-1} = y_2$

$Q_1(a_0 - a_2 + a_4 \dots\dots - a_{n-4} + a_{n-2}$，$a_1 - a_3 + a_5 \dots\dots - a_{n-3} + a_{n-1})$

執行 1 次數列要回原點，若且唯若$Q_1(x_2, y_2) = (0,0)$，$\therefore x_2 = 0, y_2 = 0$

$Q_2(x_2 - a_0 + a_2 - a_4 \dots\dots + a_{n-4} - a_{n-2}$，$y_2 + a_3 - a_5 \dots\dots + a_{n-3} - a_{n-1})$

$Q_2(x_2 - x_2, y_2 - y_2) = (0,0)$，$\therefore \boldsymbol{n \equiv 2(mod\ 4)}$**時，**$\boldsymbol{t_0 = 1\ or\ 2}$**。**

(三) $\boldsymbol{n \equiv 3(mod\ 4)}$

設$\langle a_k \rangle_{k=0}^{n-1} = a_0, a_1, a_2 \dots\dots a_{n-1}$，

令$a_0 - a_2 + a_4 \dots\dots - a_{n-3} + a_{n-1} = x_3$，$a_1 - a_3 + a_5 \dots\dots - a_{n-4} + a_{n-2} = y_3$

$Q_1(a_0 - a_2 + a_4 \dots\dots - a_{n-3} + a_{n-1}$，$a_1 - a_3 + a_5 \dots\dots - a_{n-4} + a_{n-2})$

執行 1 次數列要回原點，若且唯若$Q_1(x_3, y_3) = (0,0)$，$\therefore x_3 = 0, y_3 = 0$

$Q_2(x_3 + a_1 - a_3 + a_5 \dots\dots - a_{n-4} + a_{n-2}$，$y_3 - a_0 + a_2 - a_4 \dots\dots + a_{n-3} - a_{n-1})$

執行 2 次數列要回原點，若且唯若$Q_2(x_3 + y_3, y_3 - x_3) = (0,0)$，$\therefore x_3 = 0, y_3 = 0$

$Q_3(x_3 + y_3 - a_0 + a_2 - a_4 \dots\dots + a_{n-3} - a_{n-1}$，$y_3 - x_3 - a_1 + a_3 - a_5 \dots\dots + a_{n-4} - a_{n-2})$

執行 3 次數列要回原點，若且唯若$Q_3(y_3, -x_3) = (0,0)$，$\therefore x_3 = 0, y_3 = 0$

$Q_4(y_3 - a_1 + a_3 - a_5 \dots\dots + a_{n-4} - a_{n-2}$，$-x_3 + a_0 - a_2 + a_4 \dots\dots - a_{n-3} + a_{n-1})$

$Q_4(-y_3 + y_3, x_3 - x_3) = (0,0)$，執行 4 次數列必回原點。

由以上計算得知，$t_0 = 1\ or\ 2\ or\ 3$的條件皆為$x_1 = 0, y_1 = 0$，因此若發現有一數列，執行 2 或 3 次數列後回原點，其實在執行一次數列時就已回過原點，所以只有 $t_0 = 1$這種可能。又$t_0 = 4$時必回原點，**$\therefore n \equiv 3\ (mod\ 4)$時，$t_0 = 1\ or\ 4$。**

(四) $n \equiv 0(mod\ 4)$

設$\langle a_k \rangle_{k=0}^{n-1} = a_0, a_1, a_2 \dots\dots a_{n-1}$

令$a_0 - a_2 + a_4 \dots\dots - a_{n-4} + a_{n-2} = x_4$，$a_1 - a_3 + a_5 \dots\dots - a_{n-3} + a_{n-1} = y_4$

$Q_1(a_0 - a_2 + a_4 \dots\dots - a_{n-4} + a_{n-2}$，$a_1 - a_3 + a_5 \dots\dots - a_{n-3} + a_{n-1})$

執行 1 次數列要回原點，若且唯若$Q_1(x_4, y_4) = (0,0)$，$\therefore x_4 = 0, y_4 = 0$

$Q_2(x_4 + a_0 - a_2 + a_4 \dots\dots - a_{n-4} + a_{n-2}$，$y_4 + a_1 - a_3 + a_5 \dots\dots - a_{n-3} + a_{n-1})$

$Q_2(2x_4, 2y_4) = (0,0)$，$\therefore x_4 = 0, y_4 = 0$條件與執行 1 次數列回原點相同

$Q_i(ix_4, iy_4) = (0,0)$，$\therefore x_4 = 0, y_4 = 0$條件與執行 1 次數列回原點相同

$\therefore n \equiv 0(mod\ 4)$時，$t_0 = 1$ or 無法完成圖形。

探究三、方向數(α)的數值計算

(一) 觀察規律：

(以下方向，以x軸正向為$0°$的逆時針廣義角來表達且彼此差為$360°$倍數的角視為同方向)

$90°$：$0° \to 90° \to 180° \to 270° \to 360°$(與 $0°$同方向) $\to 450°$(與 $90°$同方向) ...

可觀察得知$90°$的方向數(α)為 4

$60°$：$0° \to 60° \to 120° \to 180° \to 240° \to 300° \to 360°$(與 $0°$同方向) ...

可觀察得知$60°$的方向數(α)為 6

$45°$：$0° \to 45° \to 90° \to \cdots \to 315 \to 360°$(與 $0°$同方向) ...

可觀察得知$45°$的方向數(α)為 8

(二) 推導方向數(α)公式：

首先依照方向數(α)定義可知θ是唯一影響方向數(α)的變數，再來因為角度呈等差，所以在第一個重複的方向後皆為重複的方向，也就是方向數(α)不會再增加，因此計算方向數(α)可以數到出現重複的方向即可停止。

由(一)觀察規律可以知道第一個重複的方向會是與$0°$同方向，

由於第一個重複的方向是$lcm(\theta, 360°)$，而其後面的都是其他重複的方向，所以第一個重複的方向旋轉度數除以θ就會剛好是方向數(α)，因此$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{lcm(\theta,360°)}}{\boldsymbol{\theta}}$。

探究四、求最小執行次數t_0的值

(一) 執行數列代數化

首先我們可以將一圖形中每個有向線段都作為向量，這樣所有的向量相加就會是從原點指到終點的一個向量，圖形此時若要完成就是原點指到終點的這個向量就是零向量。

再來試以向量表達第k個有向線段，此向量長度會是$a_{mod(k-1,n)}$，因為長度是依照數列呈現週期為n的週期性變化，而其第一項是a_0，再來它的方向會是第一個向量旋轉$(k-1)\theta$的結果，這裡我們以$R(\varphi)$表達旋轉矩陣，也就是$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ sint(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$，其中$\varphi$為其旋轉角度，所以第$k$個向量可以是$R((k-1)\theta)\begin{bmatrix} a_{mod(k-1,n)} \\ 0 \end{bmatrix}$

也就是第$k+1$個向量是$R(k\theta)\begin{bmatrix} a_{mod(k,n)} \\ 0 \end{bmatrix}$

接下來就是把所有的向量相加且其結果要是零向量，如此可得以下方程：

$$\sum_{k=0}^{tn-1} R(k\theta)\begin{bmatrix} a_{mod(k,n)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

然後可以再化簡一下：

$$\sum_{k=0}^{tn-1} a_{mod(k,n)}\begin{bmatrix} cos(k\theta) \\ sin(k\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

我們試圖觀察t與影響圖形形狀因素的關係：$\boxed{令r = mod(n,\alpha)}$

從角度的觀點切入：

發現執行一次數列後的位移與執行下一次數列的位移夾角為$((\alpha-r)\theta)°$。因為共應旋轉$lcm((\alpha-r)\theta, 360°)$，

所以$t_0 = \frac{lcm((\alpha-r)\theta, lcm(360,\theta))}{(\alpha-r)\theta}$(同除$\theta$) $= \frac{lcm(\alpha-r,\alpha)}{\alpha-r}$

這邊要去掉 r 以減少變數的量好進行推導，故發現$\frac{lcm(\alpha,n)}{n}$為$\frac{lcm(\alpha,\alpha-r)}{\alpha-r}$另一形式。

以下為其證明：

證明$t_0=\frac{lcm(\alpha,n)}{n}=\frac{lcm(\alpha,\alpha-r)}{\alpha-r}(\alpha\neq r)$

由於$\alpha(\alpha-r)n=n\alpha(\alpha-r)$，再由$ab=lcm(a,b)\text{gcd}\,(a,b)$以及可由輾轉相除法得出的$gcd(\alpha,n)=gcd\,(\alpha,\alpha-r)$推得$lcm(\alpha,n)\cdot(\alpha-r)=lcm(\alpha,\alpha-r)\cdot n$，最後進行等量除法得出$\frac{lcm(\alpha,n)}{n}=\frac{lcm(\alpha,\alpha-r)}{\alpha-r}$，得證。

根據以上的觀察，以下嚴謹證明對於任意數列以及θ，如果方向數(α)不整除項數，則t的解必有$\frac{\alpha}{gcd(\alpha,n)}$。

證明定理 1：每項皆為零的數列必t可等於$\frac{\alpha}{gcd(\alpha,n)}$

這部分使用直接證明法

$$\sum_{k=0}^{tn-1}a_{mod(k,n)}\begin{bmatrix}cos(k\theta)\\sin(k\theta)\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{tn-1}R(k\theta)\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{tn-1}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

得證。

證明定理 2：對於每個t可等於$\frac{\alpha}{gcd(\alpha,n)}$的數列，取其任意一項加上一個任意正實數，所得的新數列依然t可等於$\frac{\alpha}{gcd(\alpha,n)}$。

同樣利用直接證明法檢驗

這裡把原本的數列設作$\langle a_k\rangle_{k=0}^{n-1}$，新的則為$\langle b_k\rangle_{k=0}^{n-1}$，有加實數的一項作為第 m 項，加的實數則為 p

$$\sum_{k=0}^{tn-1}\begin{bmatrix}cos(k\theta) & -sin(k\theta)\\sin(k\theta) & cos(k\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{mod(k,n)}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+p\sum_{k=0}^{t-1}\begin{bmatrix}cos(m\theta+k\theta n)\\sin(m\theta+k\theta n)\end{bmatrix}$$

$$=p\sum_{k=0}^{t-1}\begin{bmatrix}cos(m\theta+k\theta n)\\sin(m\theta+k\theta n)\end{bmatrix}=p\cdot csc\left(\frac{\theta n}{2}\right)sin\left(\frac{\theta nt}{2}\right)\begin{bmatrix}cos\left(m\theta+\frac{\theta n(t-1)}{2}\right)\\sin\left(m\theta+\frac{\theta n(t-1)}{2}\right)\end{bmatrix}$$

其中$sin\left(\frac{\theta nt}{2}\right)=sin\left(\frac{\theta n\cdot\frac{\alpha}{gcm(\alpha,n)}}{2}\right)=sin\left(\frac{\theta\cdot lcm(\alpha,n)}{2}\right)$

再其中的$\frac{\theta\cdot lcm(\alpha,n)}{2}=\frac{\theta\cdot lcm(\frac{lcm(\theta,2\pi)}{\theta},n)}{2}$，由於$lcm(\frac{lcm(\theta,2\pi)}{\theta},n)$是$\frac{lcm(\theta,2\pi)}{\theta}$的倍數，

所以可以知道$\theta\cdot lcm(\frac{lcm(\theta,2\pi)}{\theta},n)$是$lcm(\theta,2\pi)$的倍數，而$lcm(\theta,2\pi)$又是$2\pi$的倍數，

可得知$\frac{\theta nt}{2}$是π的倍數，因此$sin\left(\frac{\theta nt}{2}\right)=0$。所以除非$p\cdot csc\left(\frac{\theta n}{2}\right)\begin{bmatrix}cos\,(\theta m+\frac{\theta n(t-1)}{2}) \\ sin\,(\theta m+\frac{\theta n(t-1)}{2})\end{bmatrix}$未定義，否則$p\cdot csc\left(\frac{\theta n}{2}\right)sin\left(\frac{\theta nt}{2}\right)\begin{bmatrix}cos\,(\theta m+\frac{\theta n(t-1)}{2}) \\ sin\,(\theta m+\frac{\theta n(t-1)}{2})\end{bmatrix}=0$，而在其中唯一可能未定義的部分為$csc\left(\frac{\theta n}{2}\right)$，它在$\pi|\frac{\theta n}{2}$時未定義，$\pi|\frac{\theta n}{2}\Rightarrow 2\pi|\theta n\Rightarrow$執行數列一次而旋轉的角度為若干圈

$\Rightarrow$每次執行數列的方向都一樣$\Rightarrow$每個旋轉點及其下一個旋轉點的座標差固定

$\Rightarrow$除非第一次執行就回到原點否則不會回到原點

而執行一次執行數列一次而旋轉的角度為若干圈也代表每一種方向都畫過了相同的次數，這個次數乘上方向數(α)就會是目前畫了多少線段，也就是n，所以$\alpha|n$，得證。

由定理 1 可以知道全項為 0 的數列必t可等於$\frac{\alpha}{gcd(\alpha,n)}$，

而從定理 2 可以得知如果方向數(α)不整除項數，t可等於$\frac{\alpha}{gcd(\alpha,n)}$數列的某一項加上任意實數依然可以得到$t$可等於$\frac{\alpha}{gcd(\alpha,n)}$的數列。

在方向數(α)不整除項數的情形下，由此二項定理可以得知任意首項的數列皆可回原點，再者可知任意首兩項的數列皆可回原點，以此類推可以證明出：

(1) 如果方向數(α)不整除項數，數列圖形必回原點。

(2) 如果方向數(α)整除項數，數列圖形會一次回原點或不回。

(二) 利用分次執行數列求t_0

根據「探究四」：第$k+1$個向量為$R(k\theta)\begin{bmatrix}a_{mod(k,n)} \\ 0\end{bmatrix}$，

且第m次執行數列的第一個向量為整體的第$mn-n+1$個向量，

而最後一個則是整體的第mn個向量，所以可以得知第m次執行數列的向量總和為

$$\sum_{k=mn-n}^{mn-1}R(k\theta)\begin{bmatrix}a_{mod(k,n)} \\ 0\end{bmatrix}=R\big((mn-n)\theta\big)\sum_{k=0}^{n-1}R(k\theta)\begin{bmatrix}a_k \\ 0\end{bmatrix}$$

$$=R((mn-n)\theta)\sum_{k=0}^{n-1}a_k\begin{bmatrix}cos\,(k\theta) \\ sin\,(k\theta)\end{bmatrix}$$

再者就可以利用以上來表達整體向量總和為 0 向量，因而可得以下方程：

$$\left(\sum_{k=0}^{t-1} R(kn\theta)\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \begin{bmatrix} cos(k\theta) \\ sin(k\theta) \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可設其中$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \begin{bmatrix} cos(k\theta) \\ sin(k\theta) \end{bmatrix}$為$v$，且$v = R(\beta)\begin{bmatrix} |v| \\ 0 \end{bmatrix}$，

所以$(\sum_{k=0}^{t-1} R(kn\theta))R(\beta)\begin{bmatrix} |v| \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

接著因為矩陣的分配律跟二維旋轉矩陣的交換律，

因此$|v|R(\beta)(\sum_{k=0}^{t-1} R(kn\theta))\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，再把其中矩陣及向量相乘：

$$|v|R(\beta)\left(\sum_{k=0}^{t-1} \begin{bmatrix} cos(kn\theta) \\ sin(kn\theta) \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得出兩種可能性：

$|v| = 0$以及$\sum_{k=0}^{t-1} \begin{bmatrix} cos(kn\theta) \\ sin(kn\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

取其後者可以換成複數表達成：

$\sum_{k=0}^{t-1} cos(kn\theta) + i\, sin(kn\theta) = 0$，也就是$\sum_{k=0}^{t-1} e^{ikn\theta} = 0$

再利用等比級數和得出：$\frac{e^{in\theta t}-1}{e^{in\theta}-1} = 0$，可得出以下兩者情況：

$e^{in\theta t} - 1 = 0 \vee e^{in\theta} - 1 = 0$。其中後者情況會使$t$為零，即無繪製數列，

故須排除此情況。

而因$2\pi | n\theta t \leftrightarrow e^{in\theta t} = 1$，所以整體向量總和為0的條件為：

$(|v| = 0) \wedge (2\pi | n\theta t)$前者之$t_0$即為1，

而後者的$n\theta t$需取最小值才可得t_0，$n\theta t$可以被2π以及$n\theta$整除，

所以其最小值可取$lcm(2\pi, n\theta)$，因此t_0就是$\frac{lcm(2\pi,n\theta)}{n\theta}$也等於$\frac{\alpha}{gcd\,(\alpha,n)}$，

兩者相等的證明如下：

因為θ是2π的有理數倍，所以可以設$\theta = \frac{q}{p}\cdot 2\pi$，其中$p$與$q$為互質的正整數，

所以$\frac{lcm(2\pi,n\theta)}{n\theta}-\frac{\alpha}{gcd\ (\alpha,n)}=\frac{lcm(2\pi,n\theta)}{n\theta}-\frac{\frac{lcm(\theta,2\pi)}{\theta}}{gcd\ (\frac{lcm(\theta,2\pi)}{\theta},n)}=\frac{lcm(2\pi,n\theta)}{n\theta}-\frac{lcm(\theta,2\pi)}{gcd\ (lcm(\theta,2\pi),\theta n)}=$

$\frac{lcm(\frac{p}{q}\theta,n\theta)}{n\theta}-\frac{lcm(\theta,\frac{p}{q}\theta)}{gcd\ (lcm(\theta,\frac{p}{q}\theta),\theta n)}=\frac{lcm(p,n)\theta}{n\theta}-\frac{p\theta}{gcd\ (p\theta,\theta n)}=\frac{lcm(p,n)}{n}-\frac{p}{gcd\ (p,n)}=0$

另外還需要排除$e^{in\theta}=1$的情況，而其可化簡為$2\pi|n\theta$，此部分前面已有證明等同$\alpha|n$

如此可得當$\alpha\nmid n$時t_0的解：

$$t_0=1(if\left|\sum_{k=0}^{n-1}a_k\begin{bmatrix}cos(k\theta)\\sin(k\theta)\end{bmatrix}\right|=0)$$

$$t_0=\frac{\alpha}{gcd\ (\alpha,n)}=\frac{lcm(2\pi,n\theta)}{n\theta}(if\left|\sum_{k=0}^{n-1}a_k\begin{bmatrix}cos(k\theta)\\sin(k\theta)\end{bmatrix}\right|\neq 0)$$

探究五、圖形性質

(一) 首末項移動之影響

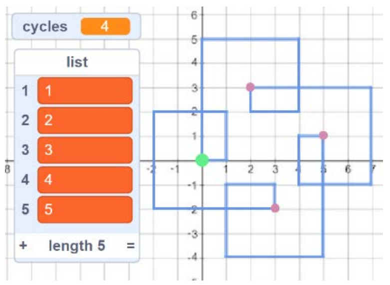
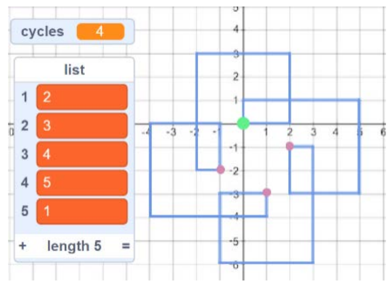
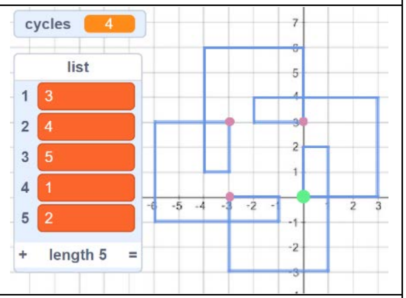
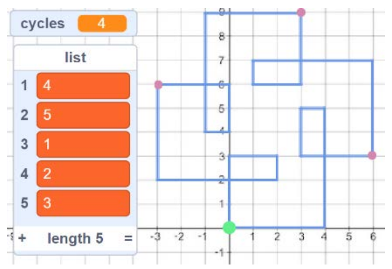
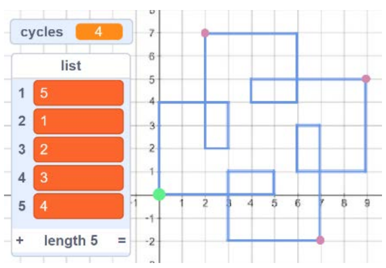
⟨1,2,3,4,5⟩		
		
		

表 5-2

我們觀察到：

將數列首項移至最尾處(表 5-2)，圖形會向左移原首項值並以原點為基準順時針轉θ角；反之數列末項移至最前面，圖形會以原點為基準逆時針轉θ角再向右移原末項值。

但是有兩個特殊情況不適用：

(1) 一次執行就完成圖形：不適用的原因是由於進行首末項移動後會導致圖形的執行次數改變，即無法使兩圖之線段一一對應，所以可以在此部分改動一下圖形繪製方法，使執行次數強制執行$\frac{\alpha}{gcd\,(\alpha,n)}$次，如此便有足夠的線段一一對應。

(2) 無法完成圖形：這類情形對於原本之首個線段並沒有對應線段，所以可以不考慮此情況之原首個線段。

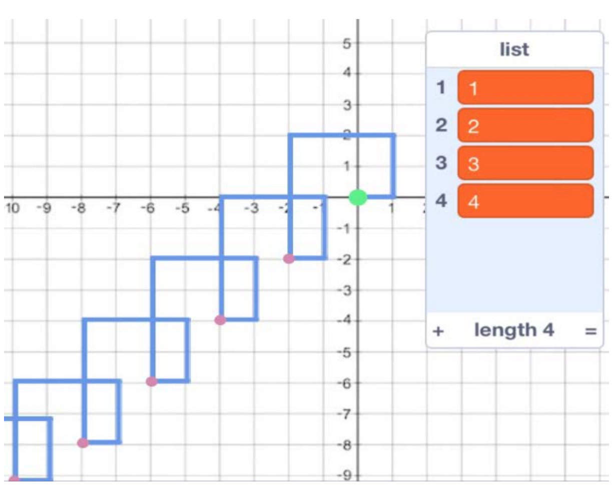
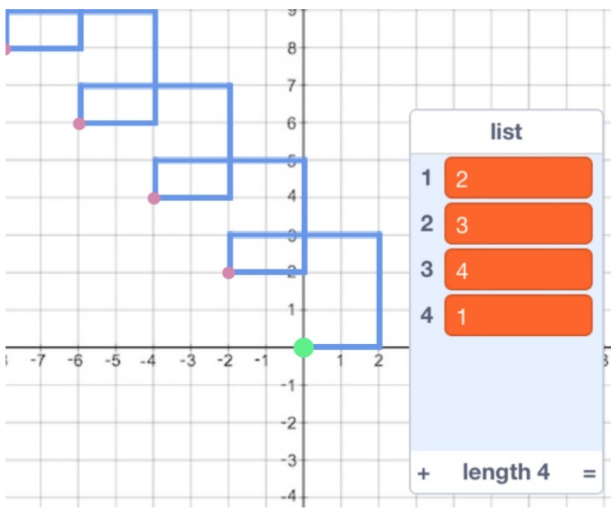
⟨1,2,3,4⟩	
	

表 5-3

根據以上結論，若用方程式表達則可驗證觀察得出的規律：

圖形向左移原首項時且順時針轉θ角時，可以發現原第一個有向線段會對應的新的最後一個有向線段，原第二個則對應到新的第一個，以此類推，原第m個有向線段對應到新的第$m-1$個有向線段，除了原首項為例外。

所以要設立方程式可以先根據探究四之結果得出第m個有向線段尾處座標為：

$\sum_{k=0}^{m-1} R(k\theta)\begin{bmatrix} a_{mod(k,n)} \\ 0 \end{bmatrix}$，而新的數列可設為$\langle b_k \rangle_{k=0}^{n-1}$其中每一$b_k = a_{mod(k+1,n)}$

因此對於原第m個有向線段的方程式如下：

$$R(-\theta)\left(\sum_{k=0}^{mod(m-1,tn)} R(k\theta)\begin{bmatrix} a_{mod(k,n)} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \sum_{k=0}^{mod(m-2,tn)} R(k\theta)\begin{bmatrix} b_{mod(k,n)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以目標改為證明以上方程，若正確即可證明首末項移動的影響的觀察結果：

第一步，可以先分成兩個情況，$m=1$以及$m \neq 1$

(1) 討論$m=1$之情形，原式可以化簡成$R(-\theta)\left(\begin{bmatrix}a_0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a_0\\0\end{bmatrix}\right)=\sum_{k=0}^{tn-1}R(k\theta)\begin{bmatrix}b_{mod(k,n)}\\0\end{bmatrix}$

從左式中明顯為零向量，右式則因為$t=\frac{\alpha}{gcd(\alpha,n)}$，所以可根據「探究四」，證明為零向量，所以$m=1$時，等式成立。

(2) 討論$m\neq 1$之情形，同樣可進行化簡然後以相減代替相等，得出：

$$R(-\theta)\left(\sum_{k=0}^{m-1}R(k\theta)\begin{bmatrix}a_{mod(k,n)}\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a_0\\0\end{bmatrix}\right)-\sum_{k=0}^{m-2}R(k\theta)\begin{bmatrix}a_{mod(k+1,n)}\\0\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}R\big((k-1)\theta\big)\begin{bmatrix}a_{mod(k,n)}\\0\end{bmatrix}-\sum_{k=-1}^{m-2}R(k\theta)\begin{bmatrix}a_{mod(k+1,n)}\\0\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}R\big((k-1)\theta\big)\begin{bmatrix}a_{mod(k,n)}\\0\end{bmatrix}-\sum_{k=0}^{m-1}R\big((k-1)\theta\big)\begin{bmatrix}a_{mod(k,n)}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

因此得證此部分之發現。

(二) 數列顛倒之影響

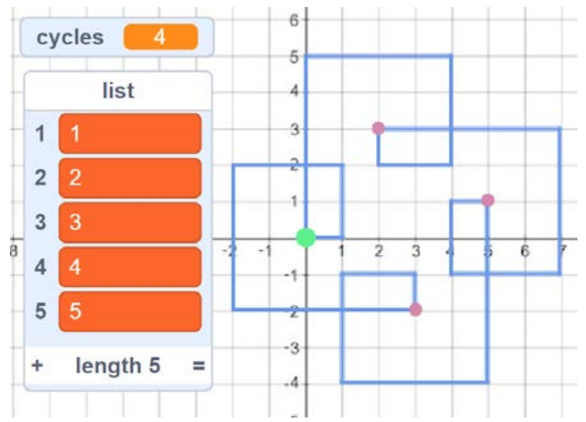
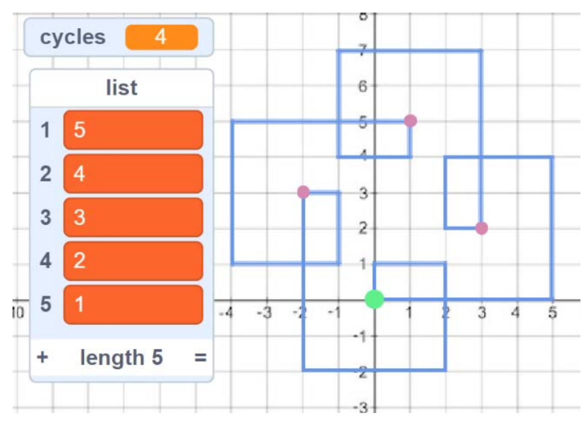
⟨1,2,3,4,5⟩	
	

表 5-4

由上圖我們觀察到：**將數列顛倒，兩圖形將線對稱於$\boldsymbol{tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)x=y}$，**

而**第$\boldsymbol{k}$個有向線段起點**對應**倒數第$\boldsymbol{k}$個有向線段的終點**，

但對於一次執行完成的圖形會需要**強制使$\boldsymbol{t=\frac{\alpha}{gcd\ (\alpha,n)}}$**才能使此觀察成立，

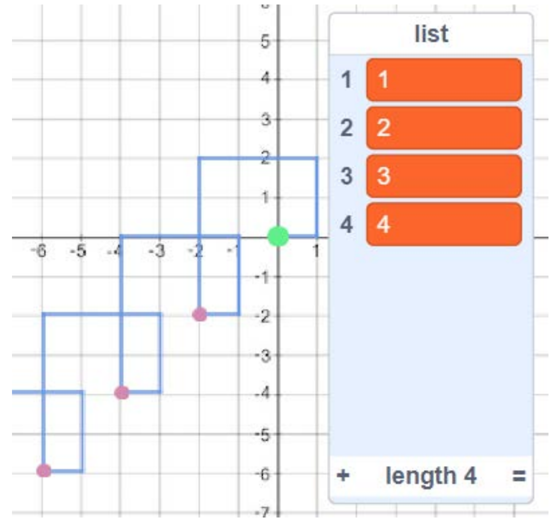
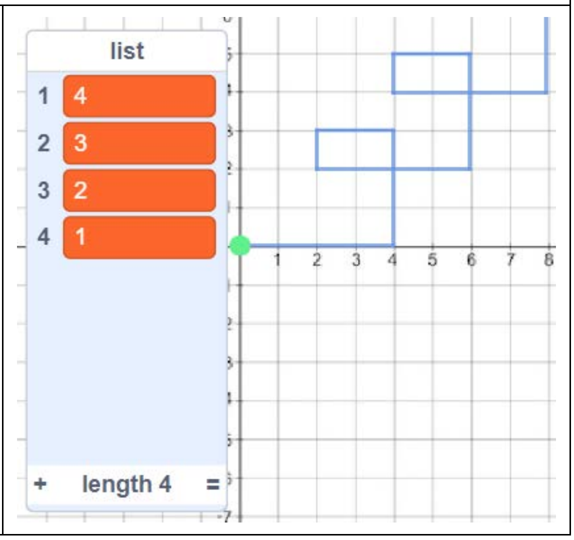
$\langle 1,2,3,4\rangle$	
	

表 5-5

而無法完成圖形則無法找出倒數往前的有向線段，也可以強制使$t=\frac{\alpha}{gcd\ (\alpha,n)}$，則可以觀察到將數列顛倒所造成的結果是將整個圖形位移使得終點移至起點再進行對於$tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)x=y$的線對稱，原本的第$k$個有向線段起點對應新的倒數第$k$個有向線段的終點，而此觀察亦適用於可以完成圖形的情形，因此以下作此觀察之證明：

首先根據前一探究可知第m個有向線段尾端為$\sum_{k=0}^{m-1}R(k\theta)\begin{bmatrix}a_{mod(k,n)}\\0\end{bmatrix}$

且使向量對於$tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)x=y$線對稱的矩陣為$\begin{bmatrix}-cos(\theta) & sin(\theta)\\ sin(\theta) & cos(\theta)\end{bmatrix}$

設新數列$\langle b_k\rangle_{k=0}^{n-1}$使得$\langle b_k\rangle=a_{n-k-1}$，因此可得以下對於第$m$個有向線段的方程：

$$(\sum_{k=0}^{m-1}R(k\theta)\begin{bmatrix}a_{mod(k,n)}\\0\end{bmatrix})-R((m-1)\theta)\begin{bmatrix}a_{mod(m-1,n)}\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-cos(\theta) & sin(\theta)\\ sin(\theta) & cos(\theta)\end{bmatrix}((\sum_{k=0}^{tn-m}R(k\theta)\begin{bmatrix}b_{mod(k,n)}\\0\end{bmatrix})-\sum_{k=0}^{tn-1}R(k\theta)\begin{bmatrix}b_{mod(k,n)}\\0\end{bmatrix})$$

首先可以分為兩個情況進行討論：$m=1$以及$m\neq 1$

前者來說左式為兩相同向量相減，故為零向量，右式也同為零向量。

再者可以討論$m\neq 1$的情形，首先進行化簡：

$$\sum_{k=0}^{m-2}R(k\theta)\begin{bmatrix}a_{mod(k,n)}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-cos(\theta) & sin(\theta)\\ sin(\theta) & cos(\theta)\end{bmatrix}(-\sum_{k=tn-m+1}^{tn-1}R(k\theta)\begin{bmatrix}a_{n-mod(k,n)-1}\\0\end{bmatrix})$$

這裡可以使用數學歸納法進行證明：

首先需要證明$m=2$的起始點是否成立，這邊以相減來證明：

$$R(0\times\theta)\begin{bmatrix}a_{mod(0,n)}\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-cos(\theta) & sin(\theta)\\ sin(\theta) & cos(\theta)\end{bmatrix}R(-\theta)\begin{bmatrix}a_{n-mod(-1,n)-1}\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a_0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

再來一樣以相減來證明當$m=j(j\geq 2)$時以上方程成立，$m=j+1$時亦成立：

$$\sum_{k=0}^{j-2+1}R(k\theta)\begin{bmatrix}a_{mod(k,n)}\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-cos(\theta) & sin(\theta)\\ sin(\theta) & cos(\theta)\end{bmatrix}\sum_{k=tn-j-1+1}^{tn-1}R(k\theta)\begin{bmatrix}a_{n-mod(k,n)-1}\\0\end{bmatrix}$$

$$=R(j\theta-\theta)\begin{bmatrix}a_{mod(j-1,n)}\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-cos(\theta) & sin(\theta)\\ sin(\theta) & cos(\theta)\end{bmatrix}R(-j\theta)\begin{bmatrix}a_{n-mod(-j,n)-1}\\0\end{bmatrix}$$

$$=a_{mod(j-1,n)}\begin{bmatrix}cos(j\theta-\theta)\\sin(j\theta-\theta)\end{bmatrix}-a_{n-mod(-j,n)-1}\begin{bmatrix}cos(j\theta-\theta)\\sin(j\theta-\theta)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}cos(j\theta-\theta)\\sin(j\theta-\theta)\end{bmatrix}\left(a_{mod(j-1,n)}-a_{n-mod(-j,n)-1}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

依據以上的過程，可由數學歸納法得證此部分之觀察。

(三) 任意置換之影響

⟨2,6,5⟩

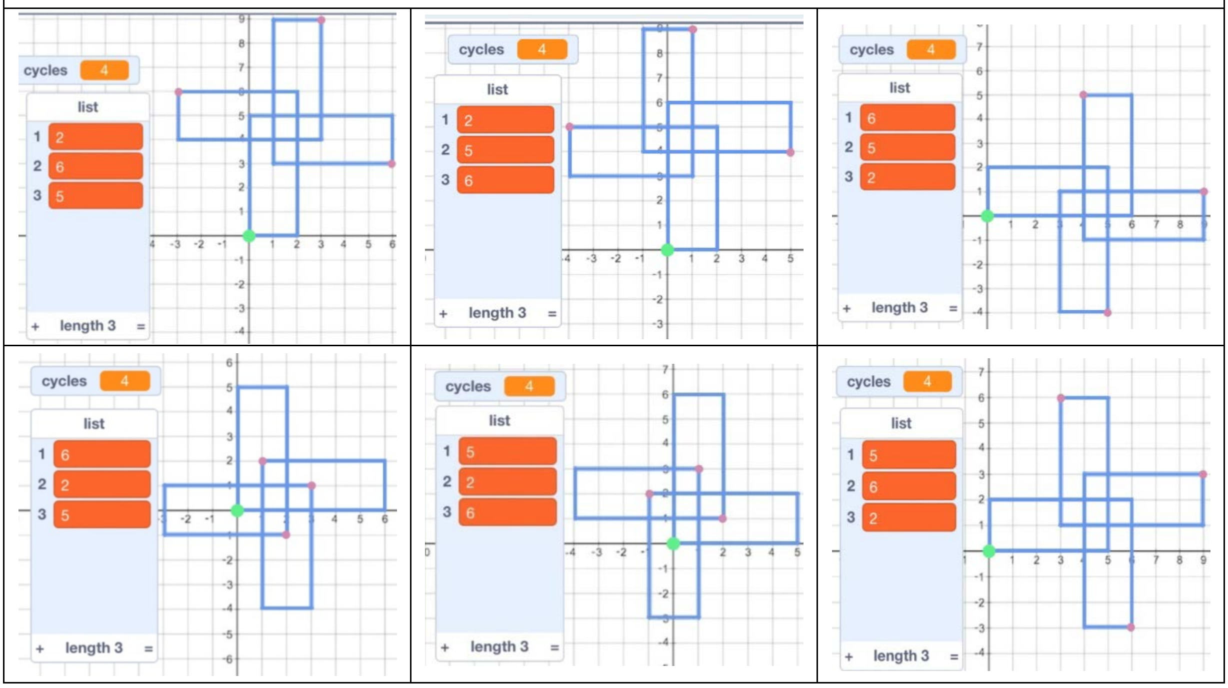


表 5-6

當$n \leq 3$時，無論如何置換，圖形皆全等

令$\langle a_k \rangle_{k=0}^{2} = a_0, a_1, a_2$

由列舉法可以發現有六種排列方式

$a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots$圖形$A$, $a_0, a_2, a_1 \ldots\ldots$圖形$B$, $a_1, a_2, a_0 \ldots\ldots$圖形$C$

$a_1, a_0, a_2 \ldots\ldots$圖形$D$, $a_2, a_0, a_1 \ldots\ldots$圖形$E$,$a_2, a_1, a_0 \ldots\ldots$圖形$F$

1. 發現圖形A, F和圖形B, C和圖形D, E互為顛倒的數列，因此可以由發現(2)得知它們兩兩互為全等的圖形。
2. 發現圖形A首項移至最尾處得到圖形C，圖形C首項移至最尾處得圖形E。
3. 發現圖形B首項移至最尾處得到圖形F，圖形F首項移至最尾處得圖形D。

因此可以得知兩兩互為全等的圖形。

圖形$A \cong$圖形$C \cong$圖形E，圖形$B \cong$圖形$D \cong$圖形E，

故當$n \leq 3$時，無論如何置換，圖形皆全等。

(四) 旋轉對稱

因為每一次執行數列所得的部分皆互相全等，所以嘗試推論圖形是旋轉對稱的，而若是旋轉對稱必有一個旋轉中心及可對稱的旋轉角度，每個旋轉點彼此為旋轉對稱，因此所有旋轉點座標的算術平均即為其旋轉中心，而因為總共有$t_0 = \frac{\alpha}{gcd\,(\alpha,n)}$個旋轉點，所以可知旋轉$\frac{2\pi gcd\,(\alpha,n)}{\alpha}$可得出一樣的圖形，如此便有了旋轉對稱中心即其對應的旋轉角度。

(五) 不相交性質

接下來我們想要求什麼樣的條件可以確保圖形中的所有線段除了彼此間的節點外沒有任何相交，其中，我們發現一個條件可以確保這件事，如下：

設給定旋轉角度後，圖形至少要執行x次才可以與其他線段相交，也就是執行$x-1$次θ時不可能與其他線段產生交點(由此可以保證執行到P_{x-1}以前圖形的各個線段必不相交)。以圖 8-1 為例($x = 4$)，進行推導：

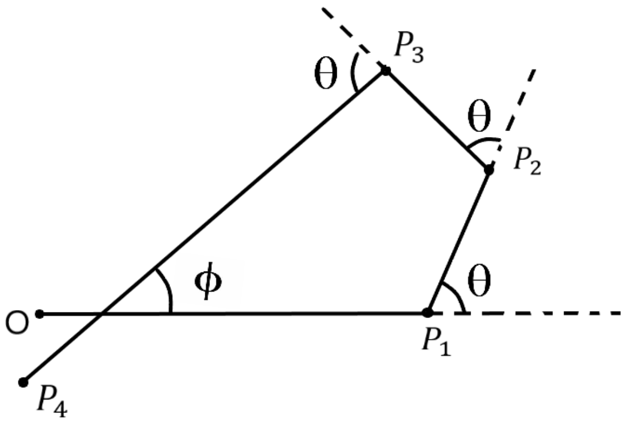


圖 8-1

$(x-2)\cdot 180=(x-1)(180-\theta)+\phi$，化簡一下得到$\phi=\theta x-\theta-180$

因為$\phi<180°$，所以$\phi=\theta x-\theta-180<180$，故$x<\frac{360+\theta}{\theta}$。

又因為要執行數列完成圖形必最後與圓點 O 相交，所以當執行到P_x時洽回原點，則可以確定此圖形除去$\overline{P_iP_{i+1}}$與$\overline{P_{i+1}P_{i+2}}$於$P_{i+1}$的交點之外，任意$\overline{P_{i+1}P_{i+2}}$與$\overline{P_kP_{k+1}}$均無交點。因此推得：$when\ tn=x<\frac{360+\theta}{\theta}$，圖形必不相交回原點。

後來，我們發現只要圖形繪製到的線段的延長線交於先前的線段並可構成一個封閉多邊形，則之後的所有線段若要保持不相交的條件則不會離開此多邊形，以下為其證明：

證明:

對於 m+2個點$\mathbf{P_i}(\mathbf{i}=\mathbf{0,1,2\ldots\ldots m,m+1})$，任意$\overrightarrow{\mathbf{P_{i+1}P_{i+2}}}$之方向為$\overrightarrow{\mathbf{P_iP_{i+1}}}$逆時針旋轉$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta}\in(\mathbf{0°,180°}))$且任意兩對$\mathbf{P_i,P_{i+1}}$所連之線段無交點(除去$\overline{\mathbf{P_iP_{i+1}}}$與$\overline{\mathbf{P_{i+1}P_{i+2}}}$於$\mathbf{P_{i+1}}$的交點)。若$\overrightarrow{\mathbf{P_{m-1}P_m}}$交$\overline{\mathbf{P_0P_1}}$於$\mathbf{P'}$，則$\mathbf{P_{m+1}}$必於多邊形$\mathbf{P_1P_2P_3\ldots\ldots P_mP'}$的內部。

$\overrightarrow{P_mP'}$之方向逆時針旋轉θ為$\overrightarrow{P_mP_{m+1}}$之方向，$P_{m-1},P_m,P'$三點共線且$P_m$於$\overline{P_{m-1}P'}$上。

可由轉換座標系來設$\overrightarrow{P_{m-1}P_m}$為 x 軸正向，其中$P_{m-1}$為座標原點。

再來可因題中所給的有向線段方向的條件，可以知道$\overrightarrow{P_mP_{m+1}}$之方向以極座標表示為$\theta$，介於0°與 180°之間，也就是其方向指向必於第一、二象限，而多邊形$P_1P_2P_3\ldots\ldots P_mP'$在$\overline{P_{m-1}P'}$ y 軸正向的方向構成一個完整的封閉圖形，故$\overrightarrow{P_mP_{m+1}}$必與多邊形$P_1P_2P_3\ldots\ldots P_mP'$相交，設其交點為$P''$，可分為兩個情況討論：若$P''$在$\overline{P_mP_{m+1}}$上，則因

$\overline{P_m P_{m+1}}$與多邊形$P_1P_2P_3......P_mP'$具有交點，故不符合題中條件，可排除此情形。若P_{m+1}在$\overline{P_m P''}$上，因為此線段除了兩端點於多邊形上外都於多邊形內部，可知P_{m+1}於多邊形內部，故得證。

根據以上的結論，接下來我們推導不相交圖形的形狀分類，以下不同的線段數量分別對應一種不同形狀的分類：

1. 取最少線段數量的情況，也就是以第一個 y 座標為向下的有向線段為最後一個線段的情況，如此必可取合適的數列使得其回原點，同時因為這個情況角度必定尚未轉到一圈或者以上，故可顯然確定不會發生相交的情況。
2. 在總旋轉角度尚未到達一圈前皆可持續再增加線段數量，直到線段數量使得總旋轉角度抵達一圈後，則需以額外的策略進行推導。
3. 此時要增加線段的數量，則要先調整倒數第二個線段的長度：
   (1) 若縮短倒數第二個線段則最後一個有向線段之延長線會交於先前的線段並構成一個不包含原點的封閉多邊形，故可由先前結論推知此情形必不可不相交地完成圖形。
   (2) 若延長倒數第二個線段，延長後則最後一個線段的長度有唯一解可使得再額外加入一線段可回原點。
4. 觀察可發現圖形中各個節點的 y 座標是由零開始增加為正，接著減少到負，最後再增加回零。
5. 若是持續增加線段的數量最後會遇到一種特殊的情況，那就是接下來要新增的有向線段的 y 座標是向下的，也代表我們原先的最後一個有向線段的尾端之 y 座標是正的，即有一個線段穿過了 x 軸以使 y 座標變正，但它與 x 軸的交點不可在原點與第一個節點間，否則違反了不相交的條件，所以其交點之 x 座標必大於第一個節點的 x 座標，並且此交 x 軸的線段後的每一個節點皆在由原點、第一個節點後連續 y 軸為正的節點們以及 x 軸所圍出的多邊形之外，所以接下來要新增的線段若要回到原點則必與先前線段相交，故此情形不可不相交的完成圖形。

90°	 圖 5-19	 圖 5-20	 圖 5-21
120°	 圖 5-22	 圖 5-23	 圖 5-24

探究六、以45°檢驗一般化結論

(一) 方向數(α)之檢驗

要驗證方向數(α)的話，可數出45°時有多少的方向，所以先以$\alpha = \frac{lcm(\theta,360°)}{\theta}$進行運算，得出$\alpha = \frac{lcm(45°,360°)}{45°} = \frac{360°}{45°} = 8$，畫圖 5-25 驗證。

由圖 5-25 可知45°有 8 個不同的方向，因此符合結論。

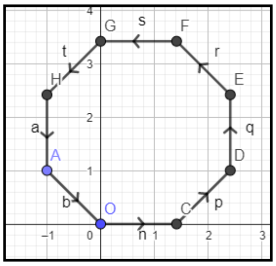
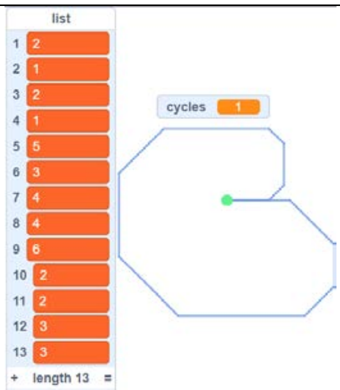
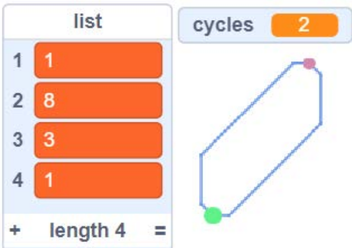
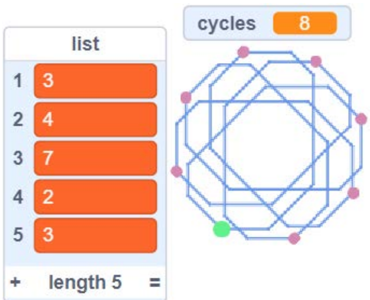


圖 5-25

(二) 最小執行次數之檢驗

這部分可取些隨機的數列以檢驗前面得出的最小執行次數計算法而各執行次數各舉一個例子：

 圖 5-26	 圖 5-27	 圖 5-28

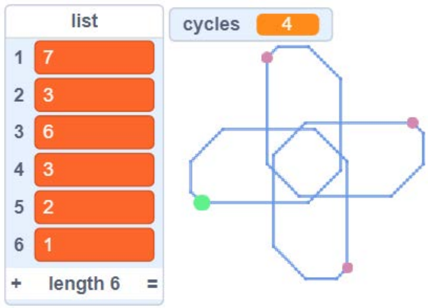


圖 5-29

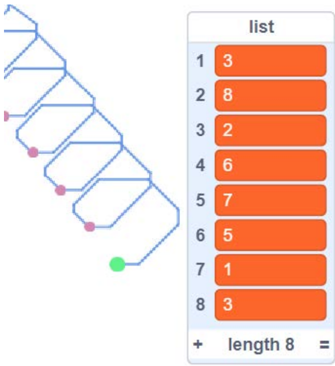


圖 5-30

1. 以數列 2,1,2,1,5,3,4,4,6,2,2,3,3(圖 5-26)為例，可知此為執行一次完成圖形的情況，無論是否$\alpha|n$，皆為特殊情況，故無需驗證。
2. 以數列 1,8,3,1(圖 5-27)為例，可知此為執行二次完成圖形的情形，首先此為$\alpha \nmid n$且一次不回原點，因此$t_0 = \frac{\alpha}{gcd(\alpha,n)} = \frac{8}{gcd(8,4)} = 2$，故符合結論。
3. 以數列 7,3,6,3,2,1(圖 5-28)為例，可知此為執行四次完成圖形的情形，此同上為$\alpha \nmid n$且一次不回原點，所以$t_0 = \frac{\alpha}{gcd(\alpha,n)} = \frac{8}{gcd(8,6)} = 4$，故符合結論。
4. 以數列 3,4,7,3,2(圖 5-29)為例，可知此為執行八次完成圖形的情形，同樣為$\alpha \nmid n$且一次不回原點，故$t_0 = \frac{\alpha}{gcd(\alpha,n)} = \frac{8}{gcd(8,5)} = 8$，故符合結論。
5. 以數列 3,8,2,6,7,5,1,3(圖 5-30)為例，可知此為無法完成圖形的情形，因為$\alpha|n$且一次不回原點，可由前面探究推出必不回原點，故符合結論。

(三) 置換數列影響之檢驗

這部分可取些隨機的數列以檢驗前面得出的結論：

1. 首末項移動

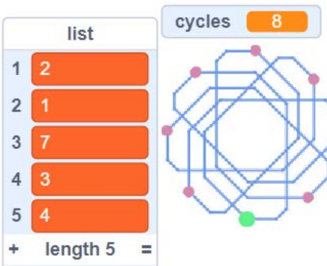


圖 5-31

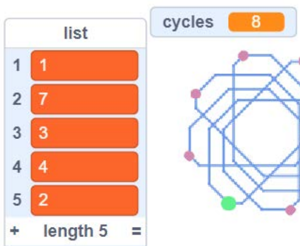


圖 5-32

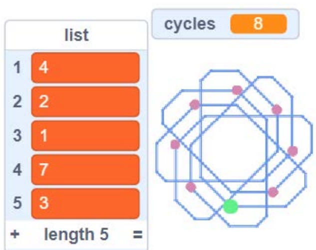


圖 5-33

以數列 2,1,7,3,4 (圖 5-31)為例：

(1) 將首項移至尾處得數列：1,7,3,4,2 (圖 5-32)，可知其為原圖向左移原首項值並以原點為基準順時針轉θ角。

(2) 再將其末項移至最前端得數列：4,2,1,7,3 (圖 5-33)，可知其為原圖以原點為基準逆時針轉θ角並向左移原首項值。

因此檢驗出來沒有問題。

2. 數列顛倒

以數列 3,4,2,9,4(圖 5-34)為例：

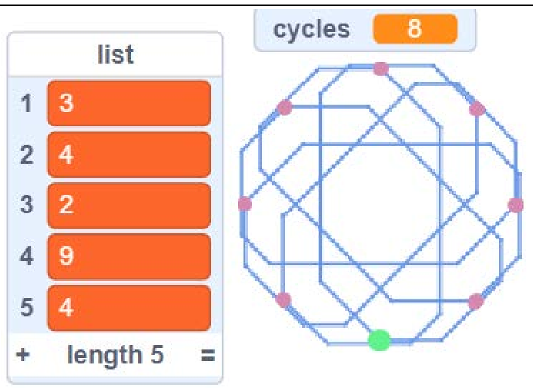


圖 5-34

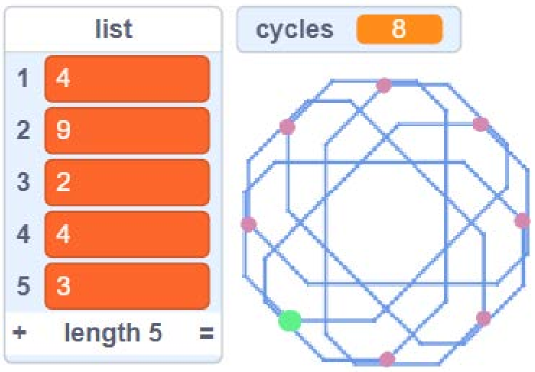


圖 5-35

(1) 將數列顛倒可得數列：4,9,2,4,3(圖 5-34)，可知兩圖的確線對稱於 $tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)x = y$，因此檢驗出來結論正確。

(2) 接著因為由首尾置換及數列顛倒就可以得出所有情形，所以$n \leq 3$時任意置換圖形依然全等之結論無需檢驗。

(四) 旋轉對稱之檢驗

這部分同樣可取些隨機的數列以檢驗結論，所以以 1,2,3,4 數列舉例，由前面之結論可以算出其旋轉角度及其旋轉中心分別為：$180°$以及$(0.5 - 0.5\sqrt{2}, 1.5 + 1.5\sqrt{2})$，以圖 5-36 可看出本結論的確無誤。

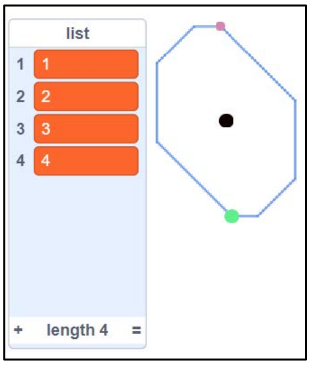


圖 5-36

探究七、多邊形是否真實存在(應用)

概念：由數列的定義得知，數列的項中可以有 0。假設數列$\langle a_k \rangle_{k=0}^{n-1}$中有兩項$a_k$、$a_{k+i}$，其之間有連續$(i-1)$個零，若$(i-1) \geq 2$，則表示為$a_k, 0(i-1), a_{k+i}$，且旋轉角度為$\theta$，則從$a_k$執行至$a_{k+i}$的圖為圖 5-37，因此們可以藉由此特性變化所畫出的圖形的角度。當n為α的因數時且數列在

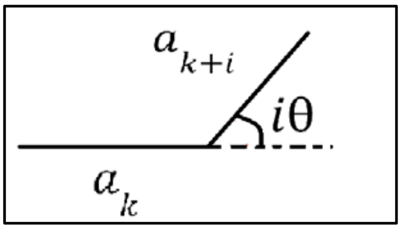


圖 5-37

執行$t_0 = \frac{\alpha}{\gcd(\alpha,n)} = \frac{\alpha}{n}$次後會回原點，則我們可以藉由此特性畫出多邊形。

如今假設有一個n邊形，使得我們可以假設以下數列為此多邊形的邊長數列$\langle a_k \rangle_{k=0}^{n-1} = a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots a_{n-1}$，且兩邊的夾角(圖形的內角)為：$a_0$和$a_1$的夾角是$\theta_1$，$a_1$和$a_2$的夾角是$\theta_2$，$a_2$和$a_3$的夾角是$\theta_3$，……$a_{n-1}$和$a_0$的夾角是$\theta_n$。因此我們可以求得旋轉的角度對應為：$a_0$和$a_1$旋轉的角度是$180-\theta_1$，$a_1$和$a_2$旋轉的角度是$180-\theta_2$，$a_2$和$a_3$旋轉的角度是$180-\theta_3$，……$a_{n-1}$和$a_0$旋轉的角度是$180-\theta_n$。就數列的作圖方式而言，旋轉的角度$\theta$應為：$\theta = gcd[(180-\theta_1)^{\circ}, (180-\theta_2)^{\circ}, (180-\theta_3)^{\circ} \ldots\ldots (180-\theta_n)^{\circ}]$

$$同時\alpha = \frac{lcm(\theta, 360°)}{\theta} = \frac{lcm(gcd[(180-\theta_1)^{\circ}, (180-\theta_2)^{\circ} \ldots\ldots (180-\theta_n)^{\circ}], 360°)}{gcd[(180-\theta_1)^{\circ}, (180-\theta_2)^{\circ}, \ldots\ldots (180-\theta_n)^{\circ}]}$$

我們利用結論中的「α整除n則圖形不一定回到原點」，執行數列$t_0 = \frac{\alpha}{gcd(\alpha,n)}$次，若其中位移和不為 0 則不回原點，反之位移向量的總合為 0 則回原點"不回原點的意思就是此邊長與角度的多邊形並不存在。因此執行數列$t_0 = \frac{\alpha}{gcd(\alpha,n)}$次後的結果可以成為驗證多邊形是否存在的工具。

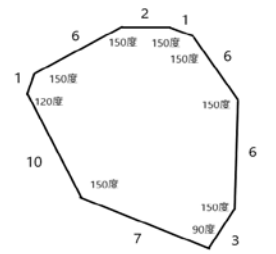
證明：任意點對稱多邊形必存在

因為結論為「α整除n則圖形不一定回到原點」，若要做出多邊形，n為α的因數。因此我們得到$\alpha | n \land n | a \to a = n$。表示當$a \neq n$且$n|a$，所做出的多邊形必定存在。若有一個多邊形的邊長為某數列的倍數列，又若所做出的圖形的$\frac{2\pi \cdot gcd(\alpha,n)}{\alpha} | 180°$，則為點對稱圖形。因此得到點對稱的多邊形無論數列與角度是多少必存在。

(一)如何檢驗多邊形是否真實存在

例：右圖是我們用小畫家隨機作的圖形(未按真實比例繪製)，

要知道它是角度和邊長是否正確。



$\theta = gcd[(180-120)^{\circ},(180-90)^{\circ},(180-150)^{\circ}] = 30°$

故$\alpha = \frac{lcm(\theta,360°)}{\theta} = 12$，∴數列：$0(2),3,6,6,2,6,1,0,10,7$

列表：(反向以負號表示)

方向	正	負	各方向總位移
0°	0	-2	-2
30°	0	-6	-6
60°	3	-1	2
90°	6	0	6
120°	6	-10	-4
150°	1	-7	--6

表 5-7

如表 5-7(因為可以了解哪一邊的邊長出了問題而進行調整)。可以看出30°、90°和150°的總位移向量會相消，但0°、60°和120°的總位移向量不相消，因此如果我們把數列的第 11 項(10)改為(8)，那麼120°的總位移變為-2，此時0°、60°和120°的總位移向量便會相消，圖形回到原點。所以我們得到的數列為：$0(2),3,6,6,1,2,6,1,0,8,7$。

以 scratch 檢驗，發現圖形確實存在：(圖 5-38)

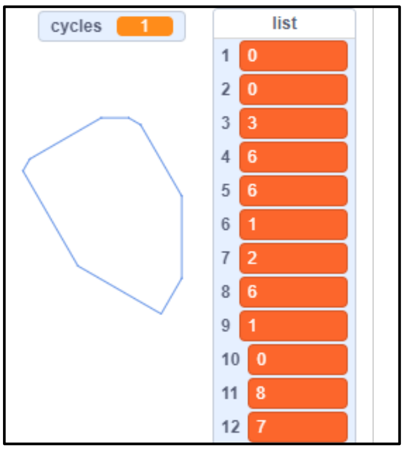
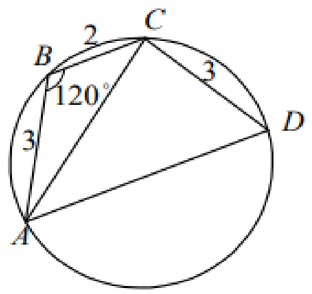


圖 5-38

(二)如何算出多邊形的剩餘一邊：

在此我們引用一常見的題型作為範例，欲求出$\overline{AD}$



令$\overline{AD}$的長度$= x$，因為$\overline{ABCD}$為圓內接四邊形，所以$\angle ADC\ =\ 60°$。

$\theta = gcd[(180-120)^{\circ},(180-60)^{\circ}] = 60°$

故$\alpha = \frac{lcm(\theta,360°)}{\theta} = 6$，數列為：$3,0,x,0,3,2$

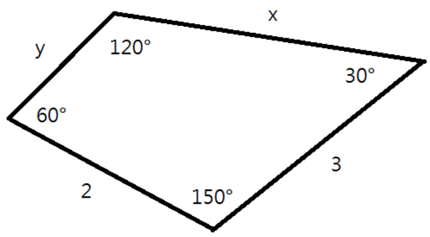
$\because$ 回原點， $\therefore \sum_{k=0}^{t'n-1} a_{mod(k,n)} \begin{bmatrix} cos(k\theta) \\ sin(k\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{cases} 3cos0° + xcos(2\cdot 60)° + 3cos(4\cdot 60)° + 2cos(5\cdot 60)° = 0 \\ 3sin0° + xsin(2\cdot 60)° + 3\sin(4\cdot 60)° + 2\sin(5\cdot 60)° = 0 \end{cases}$，得$x = 5$

註：計算過程中若發現$\sum_{k=0}^{n-1} a_{mod(k,n)}(cosk\theta) = 0$，$\sum_{k=0}^{n-1} a_{mod(k,n)}(sink\theta) = 0$所求得的邊長不同，則代表已知的邊長長度有誤，未知邊x無解。

(三)如何算出多邊形的剩餘二(最多二)邊長：

如圖 6-6，我們要求邊長x, y的值。



$\theta = \gcd[(180-150)^{\circ},(180-60)^{\circ},(180-120)^{\circ},(180-30)^{\circ}]$

$= gcd[30^{\circ},120^{\circ},60^{\circ},150^{\circ}] = 30°$，故$\alpha = \frac{lcm(\theta,360°)}{\theta} = 12$

數列：$3,0(4),x,0(1),y,0(3),2$，$\because$回原點，$\therefore \sum_{k=0}^{t'n-1} a_{mod(k,n)} \begin{bmatrix} cos(k\theta) \\ sin(k\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{cases} 3cos0° + xcos(5\cdot 30)° + ycos(7\cdot 30)° + 2cos(11\cdot 30)° = 0 \\ 3sin0° + xsin(5\cdot 30)° + ysin(7\cdot 30)° + 2sin(11\cdot 30)° = 0 \end{cases}$，得$x = 2+\sqrt{3}, y = \sqrt{3}$

用餘弦定理驗算：$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xycos120° = 2^2 + 3^2 - 2(2\cdot 3)cos150° \\ y^2 + 2^2 - 2(2y)cos60° = x^2 + 3^2 - 2(3x)cos30° \end{cases}$

將聯立方程放入 wolfram alpha 計算得：

$$x = -2，y = 1 - \sqrt{10+6\sqrt{3}}\ or\ x = -2，y = 1 + \sqrt{10+6\sqrt{3}}$$

$$x = 2+2\sqrt{3}，y = -\sqrt{3}\ or\ x = 2+\sqrt{3}，y = \sqrt{3}$$

$\because x,y>0$，$\therefore x=2+\sqrt{3},y=\sqrt{3}$為正解，驗算出答案為正確。

證明：對於所有n多邊形的全等情況必有$ASASASAS\ldots\ldots ASA$全等，其中有$(n-1)$個A和$(n-2)$個S

一個n多邊形有相鄰未知兩邊x,y。在給定除了x,y所夾的內角以外的所有內角時，可以由多邊形的內角和求出x,y所夾的內角。

而再由$\sum_{k=0}^{n-1}a_{mod(k,n)}(cosk\theta)=0$，$\sum_{k=0}^{n-1}a_{mod(k,n)}(sink\theta)=0$所列出的兩條二元一次方程式得知$x,y$有唯一解。表示一$n$多邊形若已知除了相鄰未知兩邊$x,y$以外其餘的$(n-2)$個邊長和除了$x$和$y$所夾的內角以外的$(n-1)$個內角時，$x,y$的長度已固定。因此對於任意一個$n$多邊形的全等情況必有$ASASASAS\ldots\ldots ASA$全等，其中有$(n-1)$個$A$和$(n-2)$個$S$。

例：三角形$n=3$，故有ASA全等。

使用優點與限制：

1. 若要求出剩餘邊長，則最多只能求兩個未知邊長。
2. 此算法求出剩餘邊長的方程式為二元一次聯立方程式或一元一次方程式相較於餘弦定理的二元二次聯立方程式還來的簡單許多。

陸、研究結果

一、當$\theta=90°$時，$n\equiv 1\ or\ 3(mod\ 4)$時，$t_0=1\ or\ 4$；$n\equiv 2(mod\ 4)$，$t_0=1\ or\ 2$；$n\equiv 0(mod\ 4)$時，$t_0=1\ or$無法完成圖形。

二、方向α數必為$\frac{lcm(\theta,360°)}{\theta}$。

三、當$\alpha\nmid n$時，任意數列及角度所得的最小執行次數$t_0=1\ or\ \frac{\alpha}{gcd\,(\alpha,n)}$；當$\alpha|n$時，任意數列及角度所得的最小執行次數$t_0=1\ or$無法完成圖形

四、使數列強制執行$\frac{\alpha}{gcd\,(\alpha,n)}$時，將首項移至尾處會使得圖形左移原首項之值再以原點為基準順時針轉θ角；反之將會使圖形以原點為基準逆時針轉θ角再向右移原末項。

五、使數列強制執行$\frac{\alpha}{gcd\,(\alpha,n)}$時，將整個數列顛倒會讓圖形終點移至起點，

再對於$tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)x=y$進行線對稱的結果。

六、當$n \leq 3$時，數列無論如何置換，圖形依然會彼此全等。

七、當$t_0 > 1$時，圖形具有旋轉對稱的特性，也就是旋轉一定角度（此角度小於圓周）後，圖形依然與原本一樣沒有變化，而它的旋轉中心也就是旋轉的中心點是所有旋轉點的算術平均數，其一定角度則為$\frac{2\pi}{t_0}$，也就是$\frac{2\pi \cdot gcd\,(\alpha,n)}{\alpha}$。

八、任意點對稱多邊形必存在。

九、對於所有n多邊形的全等情況必有$ASASASAS\ldots\ldots ASA$全等，其中有$(n-1)$個A和$(n-2)$個S。

【評語】030412

給定一個數列 a_1, a_2, …, a_m。由原點出發，沿 x 軸正向前進 a_1 個單位，再逆時針旋轉 90°，前進 a_2 個單位，再逆時針旋轉 90°，前進 a_3 個單位，…再逆時針旋轉 90°，前進 a_m 個單位。走完一輪後，如果沒有回到原點，再重複下一輪，由最後的方向逆時針旋轉 90°，前進 a_1 個單位…。週而復始，直到回到原點為止。對於給定的數列，是不是總能夠保證執行幾次後，一定會回到原點？這是在一本科普讀物中提到的有趣問題。本作品的作者們由原始的問題出發，考慮了當轉角由 90° 變為任意的角度 θ 後，執行若干次後是否會回到原點，而如果會回到原點，最少的執行次數又會是多少這樣的問題。藉助向量和旋轉矩陣的概念，作者們針對這個問題，給出了一些初步的結論。針對一般化的問題要給出決定執行次數的準則是有些困難的，作者們能夠導出部分的結果，表示已經掌握了處理問題的一些關鍵想法，十分難得。比較可惜的是，沒能針對一些可能可以解決的狀況給出確切的結論。作者們其實有注意到如果將執行一次的結果看成是一個向量，它和執行下一次所得出的向量其實只差了一個轉角。如果能好好利用這樣的概念，應該可以讓論

述變的更為精簡，也應該可以得出更多好的關係。沒能針對這個部分多加著墨，有點可惜。

作品海報

壹、 前 言

一、 研 究 動 機

暑假期間，我們讀到一本數學遊戲書「原來數學這麼漂亮」。書中提到一種叫「數字轉轉彎」的數學小遊戲，利用數列繪製成線段，組成圖形。書裡提到，一個項數為四項的等差數列所畫出的線段最終無法回到原點。嘗試用幾個隨機的數列繪製後，我們發現出現的圖形很類似簡易的萬花尺圖形，覺得非常有趣，也感到好奇，心中產生許多問題：什麼樣的數列可以回到原點？甚麼樣的數列不行？不同規律的數列會怎麼影響畫出圖形的特性？因此，我們想透過此研究來探討這種作圖法各種變化的可能性。

二、 文 獻 回 顧

安娜·維特曼著、愛德華・謝佛頓、伊凡・希喜繪圖、畢馨云翻譯（2017）。

原來數學這麼漂亮：30種激發創意的手繪練習。台北市：小天下出版。

文獻啟發：這本書原是一本啟蒙讀物，但卻涵蓋著相當大量由數字與形狀結合的規律圖形。在數字翻筋斗這一個章節中，它提出了一個問題：什麼樣的數列所畫出的圖形會回原點？而這句話也成為了我們主要的研究方向以及目的。

三、 研 究 目 的

(一) 探討不同的數列對圖形的影響。

(二) 探討不同的角度對圖形的影響。

(三) 假設圖形可以回到原點，需要執行幾次數列來回到原點。

(四) 求圖形可以回到原點的充要條件。

貳、 研 究 設 備 及 器 材

(一) 研究與記錄用文具：紙張、方格紙、筆、直尺。

(二) 作圖與資料處理工具：電腦、文書處理軟體（Word）、遊戲設計軟體（Scratch）、截圖軟體、GeoGebra、Wolfram Alpha。

參、 名 詞 解 釋 與 符 號 定 義

一、 數列：以固定順序排列的幾個非負實數，決定輪流要畫的各個線段長度。

表示方法：$\langle a_k \rangle_{k=0}^{n-1}$，其中$n$為數列之項數,$n$為正整數。

二、 旋轉角度（θ）：為每繪製一個線段後，旋轉的角度，此角度大於0°且小於等於180°，如圖 4-1

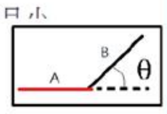


圖4-1

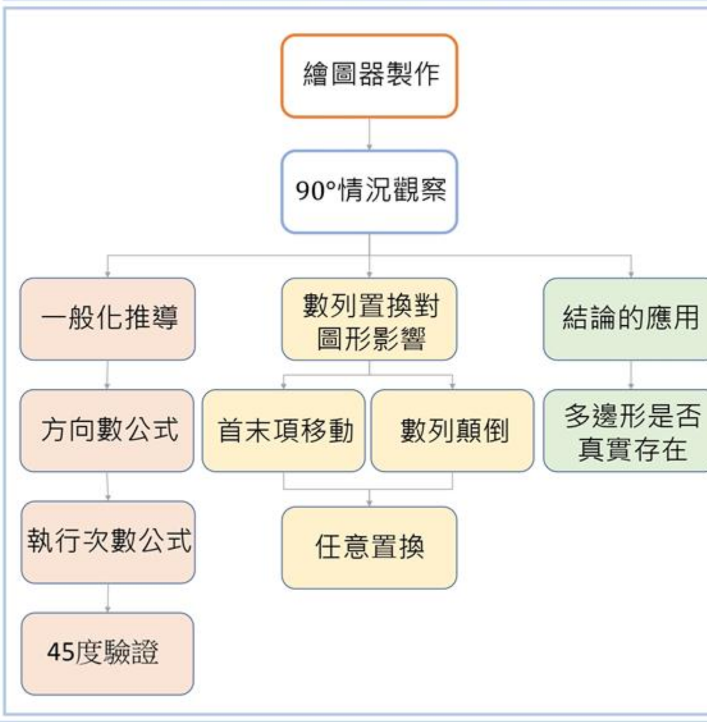
三、 旋轉點（P_i）：執行一次數列後到達的座標點，以圖上粉色點表示。

四、 原點 (O)：開始繪製圖形的起始點，以圖上綠色點表示。

五、 執行次數(t)：指完成圖形後，數列的總執行次數。例如：以數列$\langle 1,2,3 \rangle$繪製圖形，執行 4 次數列後，剛好會回到原點，則數列$\langle 1,2,3 \rangle$的執行次數為 4 次。

六、 方向數(α)：對於某一角度來說，對一坐落於x軸正向的向量開始一次一次逆時針旋轉給定角度，方向數即為此向量可能具有的方向的總數，此處彼此同界的角視為同一個方向。以90°為例：$0° \to 90° \to 180° \to 270° \to 360°$(與 0°同界) … …因此90°的方向數為4。

肆、 研 究 架 構



伍、 研 究 過 程

數列繪製規則

(一) 執行數列：

1. 從數列的第一項開始，畫出此數字長度的線段。
2. 逆時針旋轉$\theta°$，並繼續畫下一個項數長度的線段。
3. 重複此步驟，直到畫完數列的最後一項，就稱為執行一次數列。

以數列 ⟨1,2,3⟩ 為例，執行一次數列後畫出的圖形，如圖5-1。

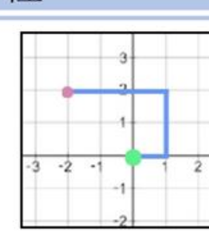


圖5-1

(二) 繪製規則：

1. 從原點O向x軸正向出發，執行一次數列。
2. 如果執行一次數列，還沒有回到原點，則再次執行數列。
3. 重複此步驟，直到回到原點O時，剛好也完整執行一次數列，便可結束而完成圖形。
4. 若旋轉點位置不呈週期性變化，則此圖形為無法回到原點。

以數列⟨1,2,3⟩為例，完成的圖形如圖5-2；以數列⟨1,2,3,4⟩為例，無法完成圖形，如圖5-3。

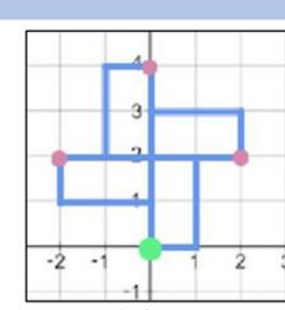


圖5-2

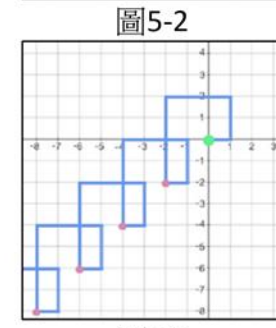
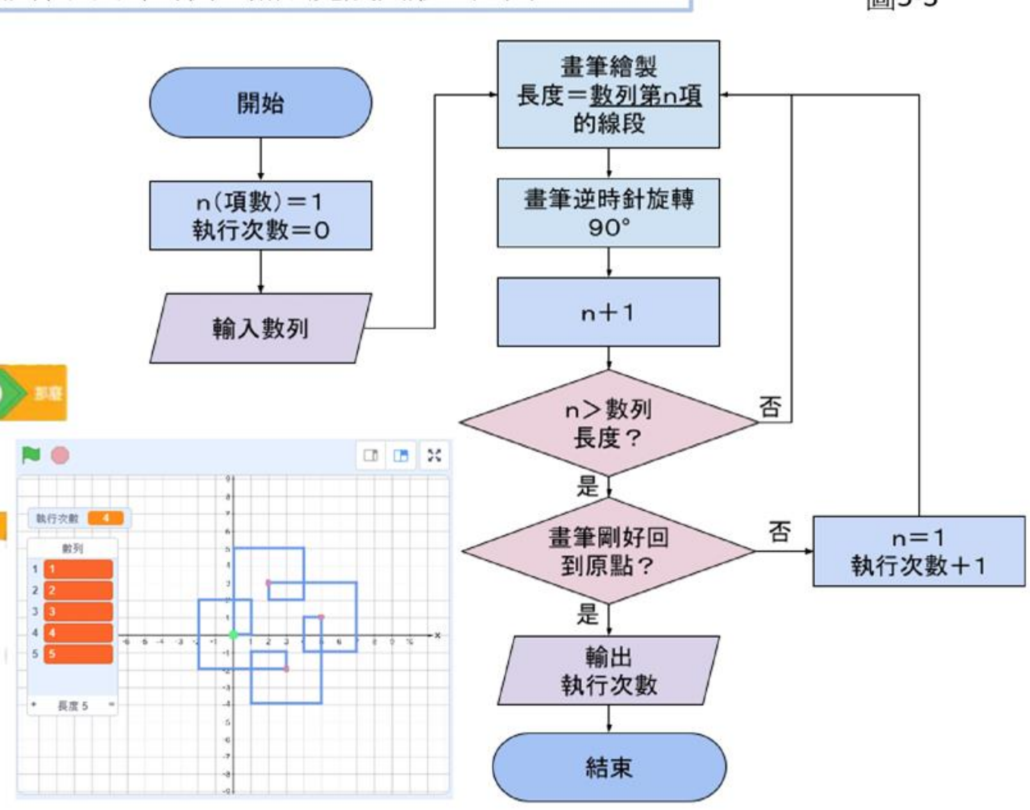


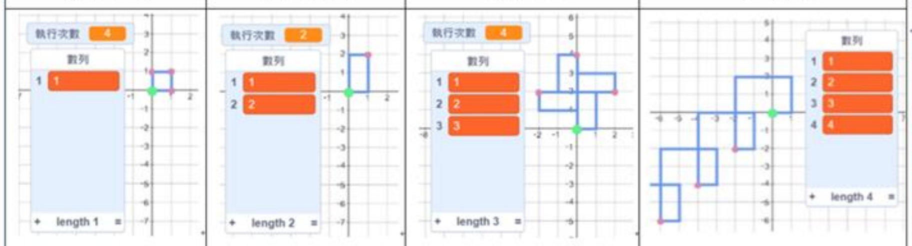
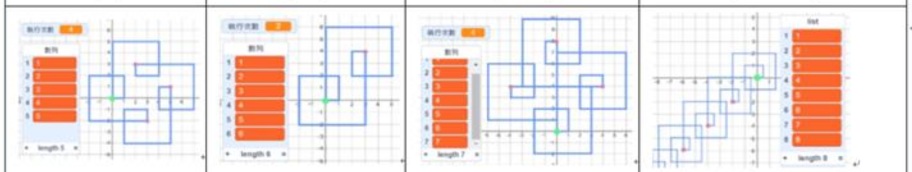
圖5-3

探究一、繪圖器製作

(左邊程式在上而兩列相接)



$\theta = 90°$時數列得執行次數與回原點條件

觀察$a_0 = 1$, $d = 1$, 項數1項至8項			
執行4次	執行2次	執行4次	不回原點
			
⟨1⟩	⟨1, 2⟩	⟨1, 2, 3⟩	⟨1, 2, 3, 4⟩
			
⟨1, 2, 3, 4, 5⟩	⟨1, 2, 3, 4, 5, 6⟩	⟨1, 2, 3, 4, 5, 6, 7⟩	⟨1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8⟩
發現：規律可能和除以四的餘數有關，因此討論餘數的四個可能性			

依序討論$n \equiv 1$ or 2 or 3 or $0 (mod\ 4)$，當$\boldsymbol{\theta = 90°}$時，結果為：

- $\boldsymbol{n \equiv 1\ or\ 3 (mod\ 4)}$，$\boldsymbol{t = 1\ or\ 4}$
- $\boldsymbol{n \equiv 2 (mod\ 4)}$，$\boldsymbol{t = 1\ or\ 2}$
- $\boldsymbol{n \equiv 0 (mod\ 4)}$時，$\boldsymbol{t = 1\ or}$ 無法完成圖形

方向數α的數值計算

首先進行不同角度的觀察：

$90°$：$0° \to 90° \to 180° \to 270° \to 360°$(與$0°$同界) ⋯

可觀察得知$90°$的方向數為4

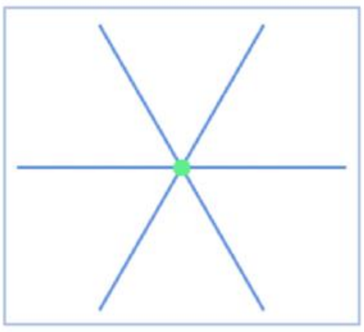
$45°$：$0° \to 45° \to 90° \to \cdots \to 270° \to 315 \to 360°$(與$0°$同界) ⋯

可觀察得知$45°$的方向數為8

藉由方向數只受角度影響且同一方向不重複計算的定義，可以推導得出：

$$\alpha = \frac{lcm(\theta, 360°)}{\theta}$$

右圖為60度時方向數的示意圖

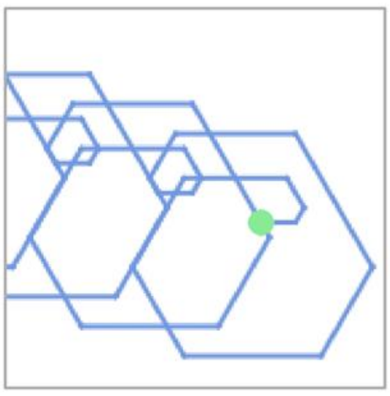


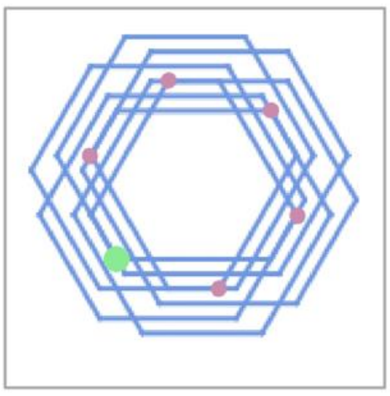
求 執 行 次 數 t 的 值

藉由把線段換成向量表示再加起來，我們可以得出下方的方程式：

$$\sum_{k=0}^{tn-1} a_{mod(k,n)} \begin{bmatrix} cos(k\theta) \\ sin(k\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

右兩圖為方程不成立跟成立的情況





根據我們的觀察，我們推測$t = \frac{\alpha}{\gcd(\alpha,n)}$ 總是成立

方法1 (1)證明在數列每項皆為0時$t = \frac{\alpha}{\gcd(\alpha,n)}$成立

(2)證明$t = \frac{\alpha}{\gcd(\alpha,n)}$成立的數列任意一項加上任意正實數，

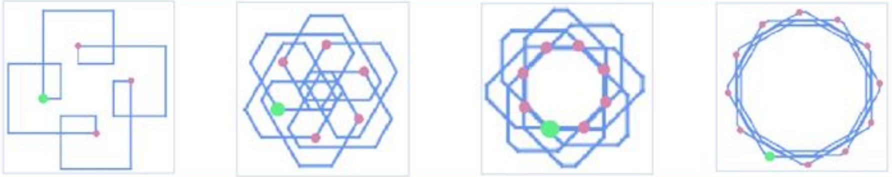
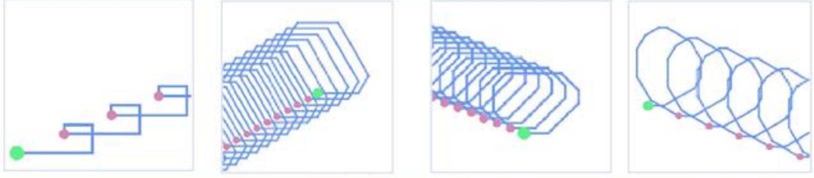
新的數列依然$t = \frac{\alpha}{\gcd(\alpha,n)}$可成立。

如此一來可以在$\alpha \nmid$ n證明我們的推論。

方法2 (1)將一次執行數列作為一個向量

(2)利用複數轉換題目形式，一樣可在$\alpha \nmid$ n時證明推論，並且還可得知其他情況的結果。

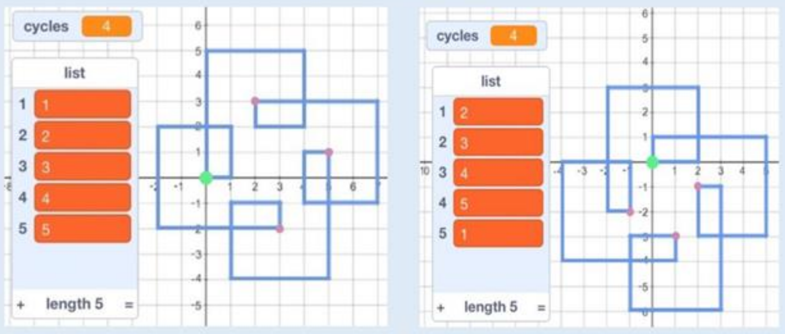
$$if\ t \neq 1$$

$\alpha \nmid$ n → $t = \frac{\alpha}{\gcd(\alpha, n)}$	$\alpha \mid$ n → 無法完成圖形
	

數 列 置 換

以下觀察與結論都是在強制執行數列$\frac{\alpha}{\gcd(\alpha,n)}$次的情況下得出的，來避免不同的線段數量

首末項移動



數列<1,2,3,4,5>首項移至尾處-前後比較圖

我們觀察到：將數列首項移至最尾處，

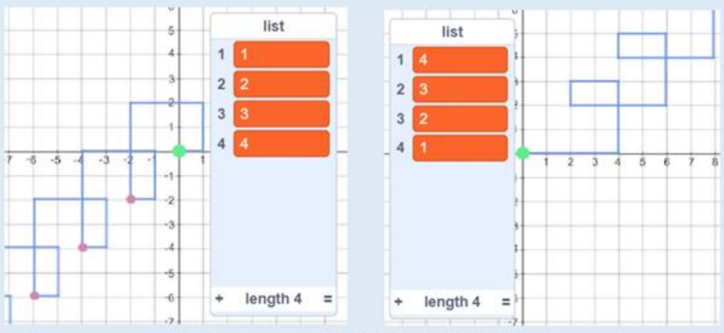
圖形會向左移原首項值並以原點為基準順時針轉θ角

我們以將其換成方程的方式證明之。

任意置換 根據前面兩種置換，

我們可以推得在$n \leq 3$時，任意置換後圖形依然全等。

數列顛倒



數列<1,2,3,4>數列顛倒-前後比較圖

我們觀察到：圖形會位移使終點與原起點重疊並以

$y = \tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)x$作線對稱，我們以將其換成方程的方式證明之。

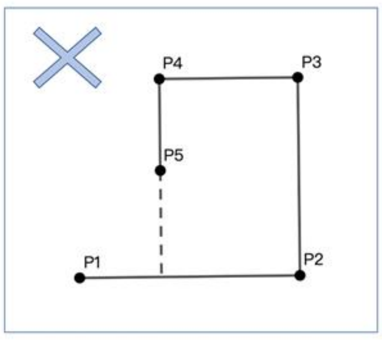
旋轉對稱 因為我們的圖形是由多個執行數列的圖形組成的，

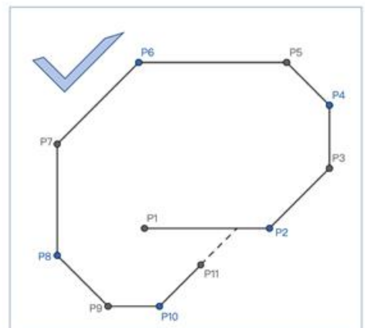
所以這個圖形具有對稱性，取其所有旋轉點的座標平均點，

圖形沿著個點旋轉$\frac{2\pi}{t}$角會保持不變。

線段不相交

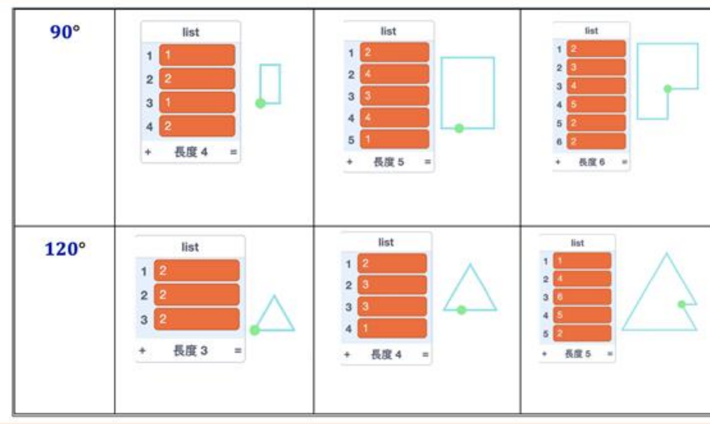
判斷性質





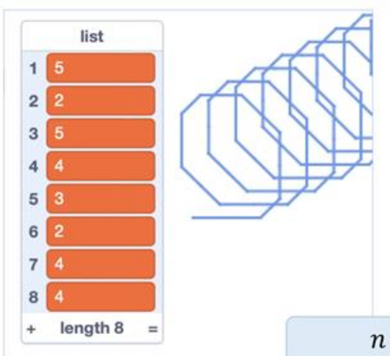
若某有向線段延長後之射線與先前線段構成一封閉圖形，
則此後之點跟線段無法不相交地在此封閉圖形外，
同時除非原點在此封閉圖形內否則無法完成圖形。

圖形分類



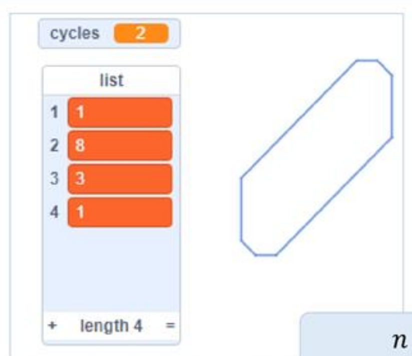
根據判斷性質可以推導出圖形可能之線段數量以及其形狀，
根據觀察可以發現線段數量與形狀是對應的，
且形狀可以分為凸多邊形或者由x軸為界的兩凸多邊形。

以45度驗證前面結論



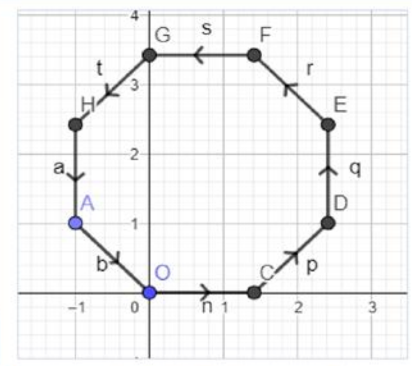
$n = 8$

無法完成圖形



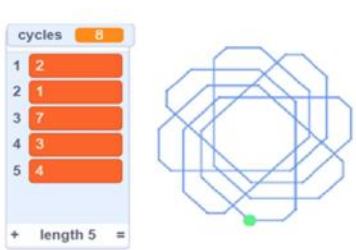
$n = 4$

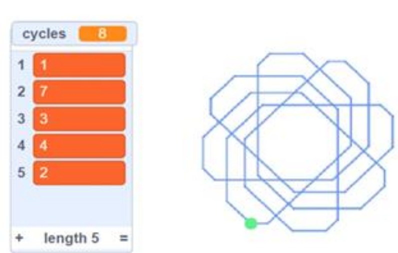
$t = \dfrac{\alpha}{\gcd(\alpha, n)} = 2$



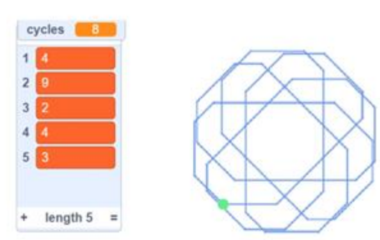
$\alpha = \dfrac{lcm(\theta, 2\pi)}{\theta} = 8$

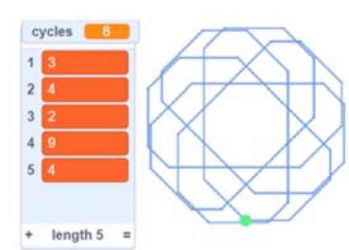
數列<2,1,4,7,3,4>首項移至尾處-前後比較圖





數列<4,9,2,4,3>數列顛倒-前後比較圖



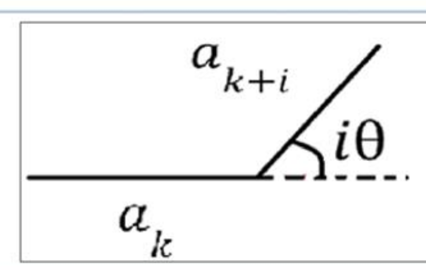


多 邊 形 是 否 真 實 存 在 (應 用)

概念：因為數列的每一項皆為非負實數，因此數列的項中可以有0，我們利用執行0時不畫出邊長而是旋轉角度角變化出圖形的外角。繪製的方式皆和執行數列的方式相同，原點必為多邊形的其中一個頂點。

對於某一n邊形，設其各邊長為$a_i(i = 0 \sim n-1)$及其各內角為$\theta_i(i = 1 \sim n)$

1. 旋轉角度：$\theta = gcd[(180-\theta_1)^{\circ}, (180-\theta_2)^{\circ}, (180-\theta_3)^{\circ} \ldots\ldots (180-\theta_{n-1})^{\circ}]$
2. 數列：$a_0, \frac{180^{\circ}-\theta_1}{\theta}$個$0, a_1, \frac{180^{\circ}-\theta_2}{\theta}$個$0, \ldots, \frac{180^{\circ}-\theta_{n-1}}{\theta}$個$0, a_{n-1}$
3. 可以用執行次數公式的x,y座標部分分別作為方程1,2，進行下列推導



(一) 如何檢驗多邊形是否真實存在

1. **代入計算法**：利用方程1,2的左式把多邊形的數列代入。只要其中有一是不等於0則此多邊形不存在。

2. **挖除法**：將多邊形數列中的其中一項挖除，視其為未知邊 x。利用方程1與方程2各自求x。若分別得解a, b，則有兩種情況。
(1)$a = b =$ 原項：原多邊形存在。
(2)$a = b \neq$ 原項：原多邊形不存在，該邊長應改a or b。
(3)$a \neq b$：原多邊形不存在，其他邊長有誤。

(二) 計 算 多 邊 形 的 兩 邊 長

設未知邊 x, y。利用方程1,2列出二元一次聯立方程式。解出後得到唯一解即為兩邊長。
優點：可較簡單地得出結果，計算難度較其他方法低，例如使用餘弦定理會是二元二次聯立方程式。

陸、 研 究 結 果

一、當$\theta = 90^{\circ}$時，$n \equiv 1$ or $3(mod\ 4)$時，$t = 1$ or 4；$n \equiv 2(mod\ 4)$，$t = 1$ or 2；$n \equiv 0(mod\ 4)$ 時，$t = 1$ or 無法完成圖形。

二、方向α數必為$\frac{lcm(\theta, 360^{\circ})}{\theta}$。

三、$t = 1$ 或者$\alpha \nmid n \rightarrow t = \frac{\alpha}{gcd\ (\alpha, n)}$；$\alpha | n \rightarrow$ 無法完成圖形

四、使數列強制執行 $\frac{\alpha}{gcd\ (\alpha,n)}$ 時，將首項移至尾處會使得圖形左移原首項之值再以原點為基準順時針轉θ角。

五、使數列強制執行 $\frac{\alpha}{gcd\ (\alpha,n)}$ 時，將整個數列顛倒會讓圖形終點移至起點再對於$tan\ (\frac{\pi-\theta}{2})\ x = y$進行線對稱的結果。

六、當$n \leq 3$時，數列無論如何置換，圖形依然會彼此全等。

七、圖形沿所有旋轉點的座標之算術平均數得出之點旋轉$\frac{2\pi}{t}$時，圖形不產生變化

八、任意點對稱多邊形必存在。

九、對於所有n多邊形的全等情況必有$ASASASAS\ldots\ldots ASA$全等，其中有$(n-1)$個A和$(n-2)$ 個S。