中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

(鄉土)教材獎

030411

圖形上蛀點之不得不切割片數與不得不切割片數最小及最大之探討

學校名稱：桃園市立青溪國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃悅和 國二 魏博鈞 國二 邱浩暐	林樂酈

關鍵詞：不得不切割片數、不得不切割片數最小及最大、必要蛀點

摘　　要

本作品研究「將一塊正三角形的布，沿著圖形上節點即蛀點作切割，延伸至邊長為正整數的正三角形與正方形，且不管蛀蟲咬在哪一蛀點上，並分別切割成數個邊長為正整數的小正三角形與小正方形。發現原正三角形與原正方形在圖形上的所有蛀點，除去對稱性後，留下必要蛀點，並導出它的一般式。利用質因數分解找出邊長為合數的情況下，它的不得不切割片數最小，同時呈現必要蛀點在圖形上之分布。再者，利用邊長為某兩正整數(兩正整數皆大於一且可相等)切割後的相似圖形，找出邊長為兩數相乘的不得不切割片數最大與這兩數之關係，結果發現正三角形最上方第一個蛀點與正方形最左上方第一個蛀點的不得不切割片數必為此圖形的不得不切割片數最大。」

壹、研究動機

學期初時，在獨立研究社團的時間，老師們鼓勵我們多做數學方面的課外題目，發現「科學研習月刊」與「科學教育月刊」兩個教育網站有一些耐人尋味的數學題目，開始有興趣去探討，尤其對正三角形切割問題，接著引發我們搜尋相關問題，而在科學研習月刊上，我們看到游森棚教授提出的布商與蛀蟲問題 (游森棚，2015) 。

原始題目的敘述如下：「一個布商賣的布是邊長為正整數的正三角形布，布上畫有格線，圖 1.1 左是一塊邊長為 4 的布。布商與蛀蟲相處不睦，有一天蛀蟲在如圖 1.1 右節點的地方蛀了一個洞。布商氣急敗壞，但他想，沿著格線剪成小塊的布仍然可以賣，布商希望剪成愈少塊愈好。

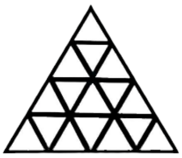
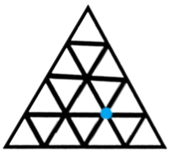



圖 1.1

布商發現如圖 1.2 左的剪法，他必須剪成八片 ，但圖 1.2 右的剪法只需剪成四片 。

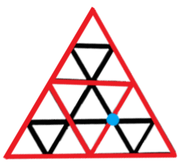



圖 1.2

看圖想一下可以知道，邊長為 4 的布不管蛀蟲把洞咬在哪裡，只要布商夠聰明，剪成四片就夠了—這個四片是「不得不」的結果，沒有比這個更好的剪法。

現在有一塊邊長為 7 的布，請問蛀蟲要咬在哪裡，使得布商「不得不」剪成的片數最大？這個最大值是多少？」

註:以圖 1.2 為例，對每一個節點即蛀點去找出它不得不切割片數，這些不得不切割片數的最大值，就是布商「不得不」切割片數最大。

由上述題目著手進行解析，首先，我們**定義本作品中所指圖形上的蛀點即為圖形上格線與格線的交點**（**蛀點須在節點上，此節點即為交點，必須在圖形內**）。探究蛀蟲不管咬在哪一蛀點上，討論對於所有蛀點的不得不切割片數最小及最大，如圖 1.2 的說明。再者，在所有蛀點中，除去對稱性，所剩下須考慮的蛀點稱必要蛀點，針對其必要蛀點的不得不切割片數與不得不切割片數最小及最大，做一系列解決方法的詳盡研究。倘若**延伸到邊長 n 為正整數的正方形布，則相關分類的必要蛀點之不得不切割片數與不得不切割片數最小及最大的規律是否相同**？更進一步，**探討這些不得不切割片數最大及其對應的蛀點位置為何？它的片數最大之一般式又如何？**我們著手了這一次的探究。

貳、研究目的

邊長為正整數的正三角形和正方形的布，當蛀蟲蛀在某節點上(蛀點須在節點上)如圖 2.1 及圖 2.2，再由蛀點分別探討切割成邊長為正整數的小正三角形數個和小正方形數個。(必須切割到蛀點)

一、**探討**邊長為正整數的**正三角形**：

1.邊長為合數(1)圖形上**每個**蛀點的切割情形

(2)**不得不**切割片數最小及最大與邊長的關係

2.邊長為質數(1)圖形上**每個**蛀點的切割情形

(2)**不得不**切割片數最小及最大與邊長的關係

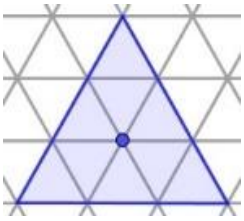


圖 2.1

二、**探討**邊長為正整數的**正方形**：

1.邊長為合數(1)圖形上**每個**蛀點的切割情形

(2)**不得不**切割片數最小及最大與邊長的關係

2.邊長為質數(1)圖形上**每個**蛀點的切割情形

(2)**不得不**切割片數最小及最大與邊長的關係

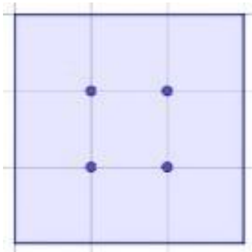


圖 2.2

三、以 **GeoGebra 動態幾何繪圖軟體繪製圖形**操作介面予以呈現，方便操作說明。

四、將以上所找出的規律，運用數學邏輯，利用**程式 C++寫出執行驗證**。

參、研究設備及器材

實驗紀錄本、彩色筆及鉛筆、筆電、隨身碟、GeoGebra 繪圖軟體、CodeBlocks C++工具

肆、文獻探討

做本研究之前，我們先就圖形切割的問題，將一些相關文獻資料比較，整理如表 4.1：

表 4.1：相關圖形切割文獻比較表

參賽名稱	**屆數/年度**	**組別**	**作品名稱**	**數學研究方法**	**得獎情形**
全國科展	46	國小組	三角格世界裡的大漩渦-從三角格裡尋找一些相關的級數	線對稱圖形、等差級數	第三名
全國科展	50	國小組	分分合合-圖形的分割與重組	費氏數列、盧卡斯數列	佳作
全國科展	51	國中組	三角形中的三角形-探討三角形的總數	等差級數、共頂點分層計算法、等差數列	佳作
全國科展	59	國中組	活「菱」活現，獨「菱」風騷	共頂點分層計算法、拆解共頂點法	
獨立研究競賽	109 年度	國中組	不得布剪	奇數、偶數、質數	

正三角形及正方形的切割是指將圖形切割為數個較小正三角形或正方形，在歷屆科展已經有一些相關作品，我們再分成以下幾個類型來說明，如表 4.2：

表 4.2：相關文獻研究內容概述比較表

作品名稱	**研究內容概述**
三角格世界裡的大漩渦-從三角格裡尋找一些相關的級數	求原三角形中的特定三角格被包含在多少三角形內。
分分合合-圖形的分割與重組	利用切割所找出的數量規則重新分類並組合圖形。
三角形中的三角形-探討三角形的總數	探討給定三角形邊長的等分點數後，形成在此三角形中所含三角形個數的計算方法。
活「菱」活現，獨「菱」風騷	研究快速的方法算出正三角形或特殊菱形中的菱形總數。
不得布剪	正三角形的布沿著蛀點分割，求出正三角形中的最小切割數。

註：「**不得布剪**」的最小切割數即為我們作品的不得不切割片數最小

上述第一至四件全國科展的作品文獻都在探討著圖形的切割，探討內容大概分述如下：

1. 被塗掉的小三角格，被包含在幾個三角形之中？
2. 把正三角形、等腰三角形和正五邊形切割為數個小三角形，找出其數量規則。
3. 找出三角形內的全部大大小小的三角形。
4. 從邊長為正整數的正三角形和菱形切割出數個小菱形。

第五件作品「**不得布剪**」則是和我們探究的問題較相近 (獨立研究競賽作品，2021)，但與本作品相比較，在研究方向上卻大不相同。本作品是將邊長由較小逐漸增大的正三角形繪圖進行切割，邊長為合數時，正三角形不得不切割片數最小為其邊長最小質因數之不得不切割片數最小；邊長為質數的正三角形，歸納切割圖形都必為平行四邊形、梯形及五邊形，透

過其面積相等性質，來導出由數個小正三角形組成，便可知道不得不切割片數最小。

然而本作品更重要是在**探討蛀蟲不管咬在正三角形布與正方形布的哪一蛀點上，其所有必要蛀點之不得不切割片數最小及最大的這些必要蛀點，它的一般式及在圖形上的分布為何?**

伍、研究過程及方法

一、名詞定義：

1. n ：圖形的邊長。

2. D ：在圖形內，蛀蟲可以蛀的蛀點數量(不考慮邊上的交點)。

3. **必要蛀點**：在所有蛀點中，除去對稱性，所剩下須考慮的蛀點；

   $D0$ ：**必要蛀點數**。

4. T ：在圖形內，**特定一蛀點的**所有切割情形下片數之最小值，稱為**不得不切割片數**；

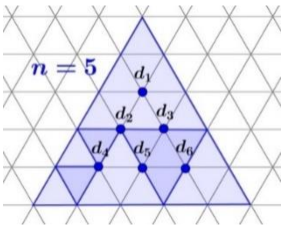
   C ：在圖形內，**所有蛀點**的不得不切割片數之最小值，稱為**不得不切割片數最小**；

   A ：在圖形內，**所有蛀點**的不得不切割片數之最大值，稱為**不得不切割片數最大**；

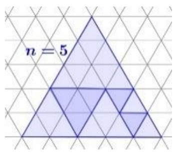
   L ：在不得不切割片數的情況下，其所有切割片中邊長的最大值，稱為**邊長最大值**。

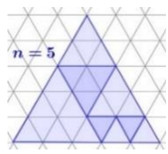
5 $d_i\,(i=1,2,\ldots,m)$ ：正三角形上的蛀點標示。由上而下，由左而右，且不考慮邊上的交點。

表 5.1：兩種切割方法且是不得不切割片數最小



	d_i	T
$n=5$	$i=2、3、4、5、6$	8
	$i=1、2、3、5、6$	8

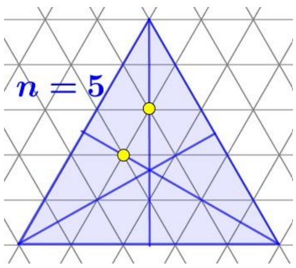


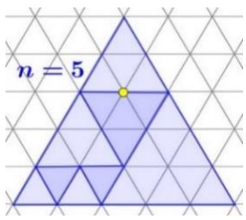


切割數個小正三角形相加可得面積總和式子：$\frac{\sqrt{3}\times5^2}{4}=\frac{\sqrt{3}\times(1\times3^2+3\times2^2+4\times1^2)}{4}\to5^2=1\times3^2+3\times2^2+4\times1^2$

由上述可推導出各切割單位面積 $(3^2,2^2,1^2)$ 之個數 $(1,3,4)$ 相加為不得不切割片數。

$n=5$，共有蛀點 $D=6$ (個)，以正三角形各對稱軸對稱比對，共留下必要蛀點 $D0=2$ (個)。

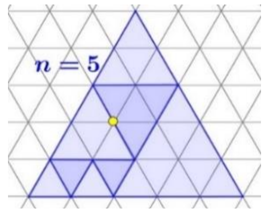




d_1 ：$T=8$；$L=3$

蛀點編號 d_1 的不得不切割片數 $T=8$

切割片之邊長最大值 $L=3$



d_2 ：$T=8$；$L=3$

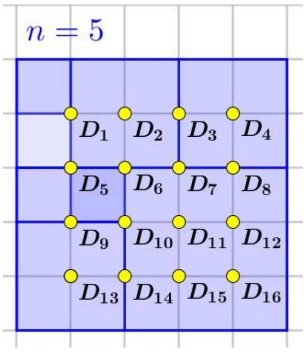
蛀點編號 d_2 的不得不切割片數 $T=8$

切割片之邊長最大值 $L=3$

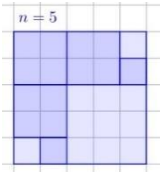
由上圖得知，此圖的不得不切割片數最大 $A=$ 不得不切割片數最小 $C=8$

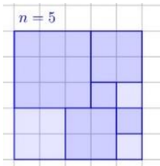
6. $Di(i=1,2,\ldots,m)$：正方形上的蛀點標示。由左而右，由上而下，且不考慮邊上的交點。

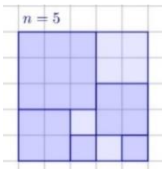
表 5.2：四種切割方法且是不得不切割片數最小



	Di	T
$n=5$	$i=1、3、5、6、7、8、9、10、14$	8
	$i=2、4、5、6、7、8、10、13、14$	8
	$i=3、7、8、9、10、11、12、14、16$	8
	$i=3、7、8、9、10、11、14、15、16$	8

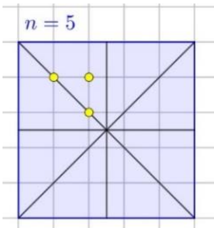




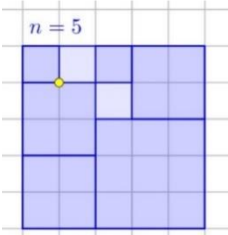


切割數個小正方形相加可得面積總和式子：$5^2=1\times3^2+3\times2^2+4\times1^2$

由上述可推導出各切割單位面積$(3^2,2^2,1^2)$之個數$(1,3,4)$相加為不得不切割片數。



$n=5$，共有蛀點$D=16$(個)，以正方形各對稱軸對稱比對，共留下必要蛀點$D0=3$(個)。

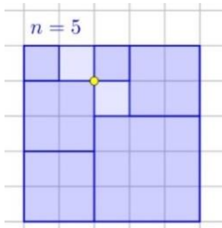


D_1：$T=8$；$L=3$

蛀點編號D_1的

不得不切割片數$T=8$

切割片之邊長最大值$L=3$

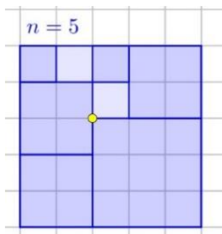


D_2：$T=8$；$L=3$

蛀點編號D_2的

不得不切割片數$T=8$

切割片之邊長最大值$L=3$



D_6：$T=8$；$L=3$

蛀點編號D_6的

不得不切割片數$T=8$

切割片之邊長最大值$L=3$

由上圖得知，此圖的不得不切割片數最大$A=$不得不切割片數最小$C=8$

二、邊長為正整數的正三角形

1. 邊長為偶數

(1)圖形上蛀點的切割情形：

$n=8$，共有21個蛀點，以正三角各對稱軸對稱比對，共留下5個必要蛀點如圖 5.2.1。

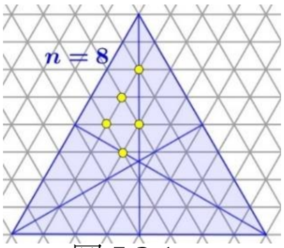
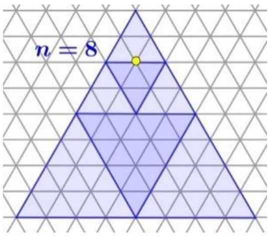
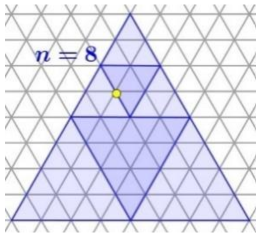


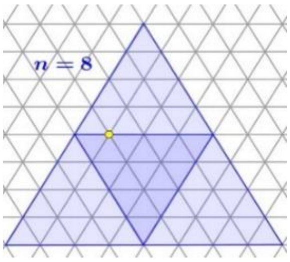
圖 5.2.1



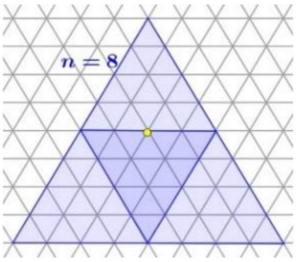
d_1：$T=7$；$L=4$



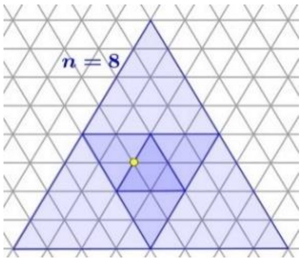
d_2：$T=7$；$L=4$



d_4 ：$T=4$ ；$L=4$



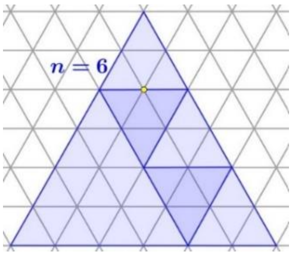
d_5 ：$T=4$ ；$L=4$



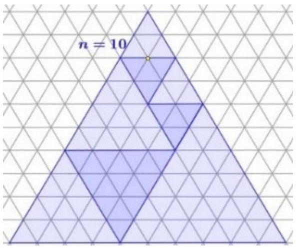
d_8 ：$T=7$ ；$L=4$

由上圖得知，此圖的不得不切割片數最大 $A=7$ (d_1 、 d_2 與 d_8)，不得不切割片數最小 $C=4$

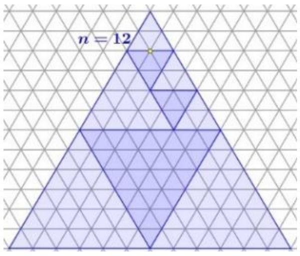
(2)**不得不**切割片數與邊長的關係：



$n=6$ ： $A=6$



$n=10$ ： $A=8$



$n=12$ ： $A=9$

上方三圖是邊長為偶數的第一個蛀點之切割情形，我們在推導過程發現各圖形第一個蛀點的不得不切割片數會等於此圖形不得不切割片數最大。

2. 邊長為奇數且合數

(1)圖形上蛀點的切割情形：

$n=9$，共有 28 個蛀點，以正三角形各對稱軸對稱比對，共留下 7 個必要蛀點如圖 5.2.2。

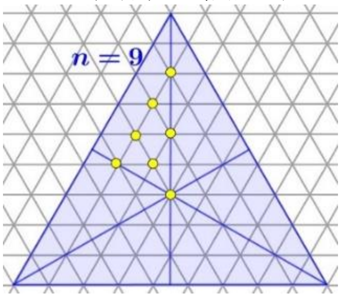
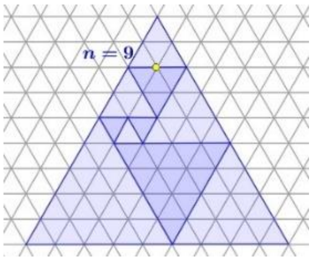
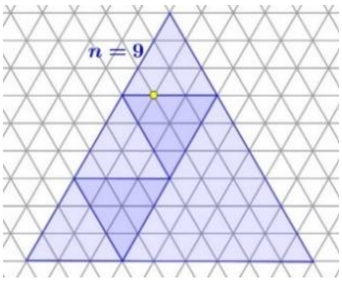


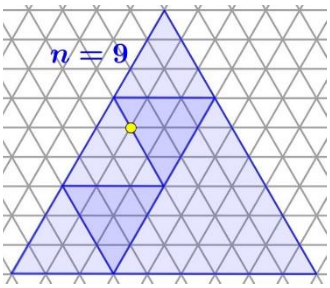
圖 5.2.2



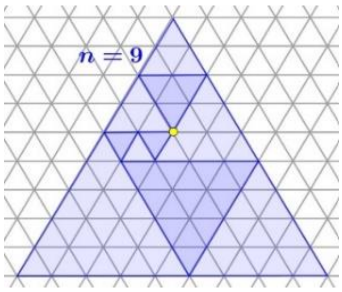
d_1 ：$T=10$ ；$L=5$



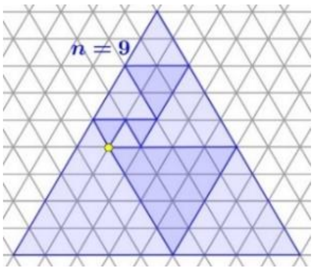
d_2 ：$T=6$ ；$L=6$



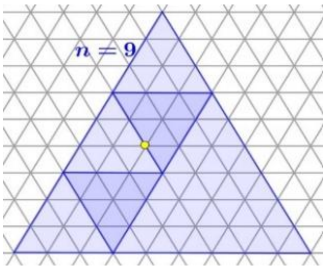
d_4 ：$T=6$ ；$L=6$



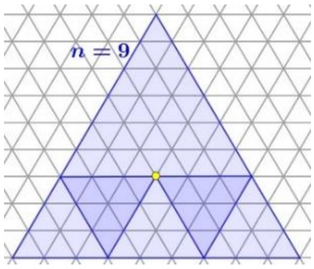
d_5 ：$T=10$ ；$L=5$



d_7 ：$T=10$ ；$L=5$



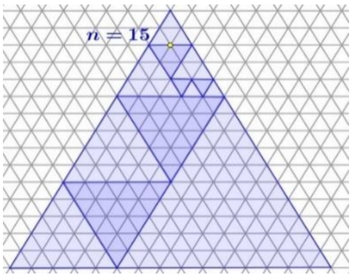
d_8 ：$T=6$ ；$L=6$



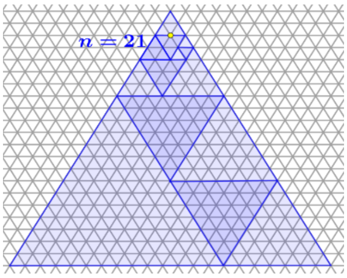
d_{13} ：$T=6$ ；$L=6$

由上圖得知，此圖的不得不切割片數最大 $A=10$ (d_1 、 d_5 與 d_7)，不得不切割片數最小 $C=6$

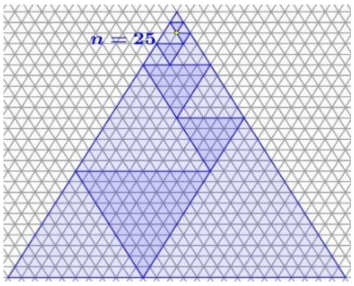
(2)**不得不**切割片數與邊長的關係：



$n=15$ ： $A=13$



$n=21$ ： $A=14$



$n=25$ ： $A=15$

上方三圖是邊長為奇數且合數的第一個蛀點之切割情形，我們在推導過程發現各圖形第一個蛀點的不得不切割片數會等於此圖形不得不切割片數最大。

3. 邊長為質數

(1)圖形上蛀點的切割情形：

$n=7$ ，共有15個蛀點，以正三角形各對稱軸對稱比對，共留下4個必要蛀點如圖 5.2.3。

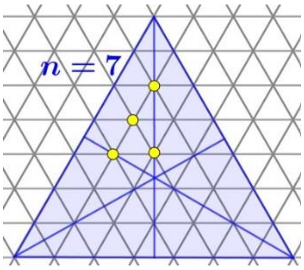
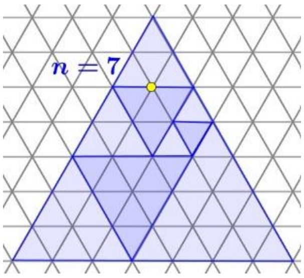
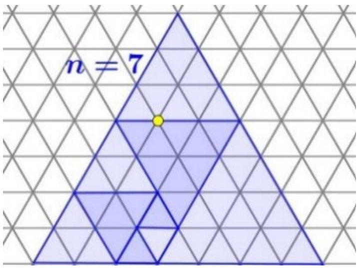


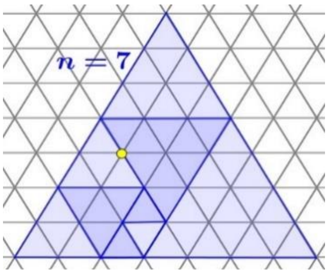
圖 5.2.3



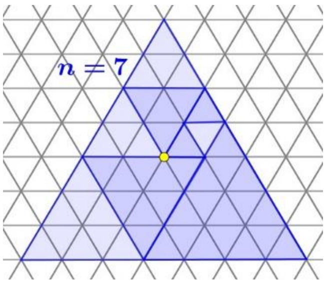
d_1 ：$T=9$ ；$L=4$



d_2 ：$T=9$ ；$L=4$



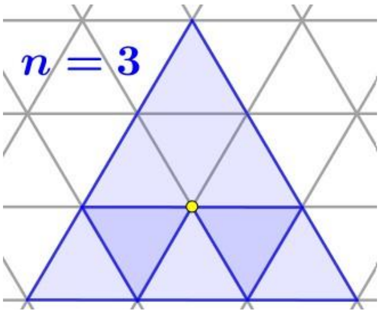
d_4 ：$T=9$ ；$L=4$



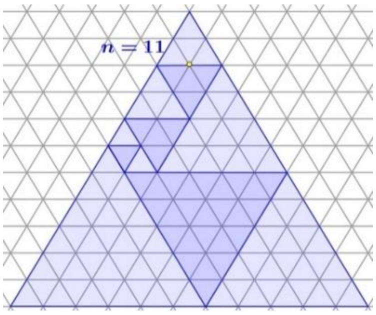
d_5 ：$T=9$ ；$L=4$

由上圖得知，此圖的不得不切割片數最大 $A=$ 不得不切割片數最小 $C=9$

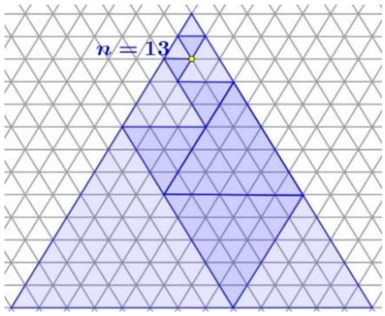
(2)**不得不**切割片數與邊長的關係：



$n=3$： $A=6$



$n=11$： $A=11$



$n=13$： $A=12$

上方三圖是邊長為質數的第一個蛀點之切割情形，我們在推導過程發現各圖形第一個蛀點的不得不切割片數會等於此圖形不得不切割片數最大。

三、邊長為正整數的正方形

1.邊長為偶數

(1)圖形上蛀點的切割情形：

$n=8$，共有 49 個蛀點，以正方形各對稱軸對稱比對，共留下 10 個必要蛀點如圖 5.2.4。

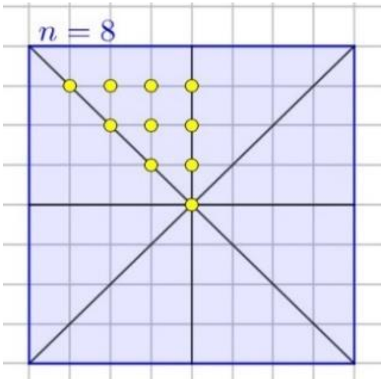
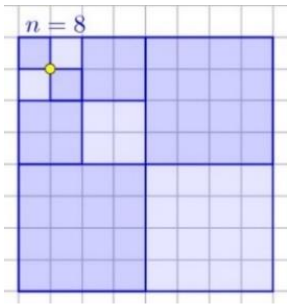
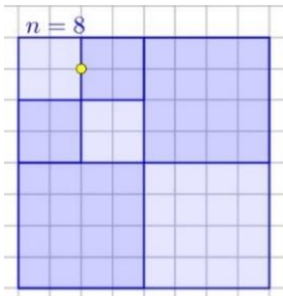


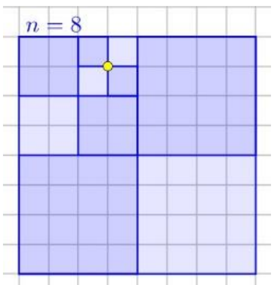
圖 5.2.4



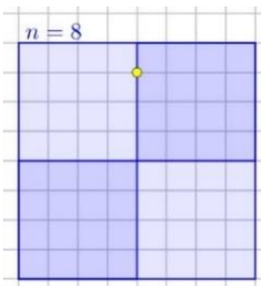
D_1 ： $T=10$ ； $L=4$



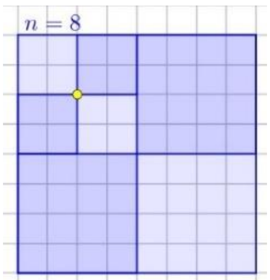
D_2 ： $T=7$ ； $L=4$



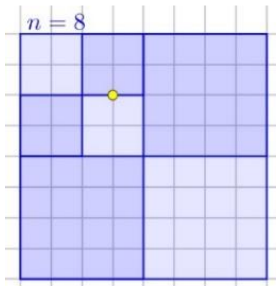
D_3 ： $T=10$ ； $L=4$



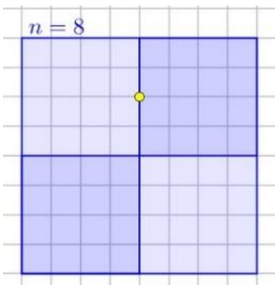
D_4 ： $T=4$ ； $L=4$



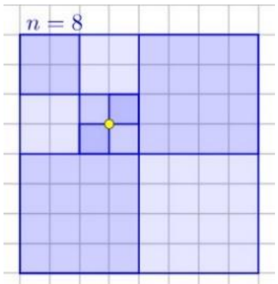
D_9 ： $T=7$ ； $L=4$



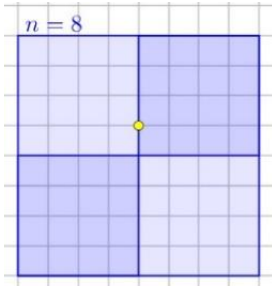
D_{10} ： $T=7$ ； $L=4$



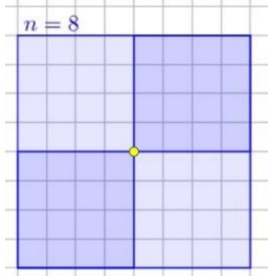
D_{11}：$T=4$；$L=4$



D_{17}：$T=10$；$L=4$



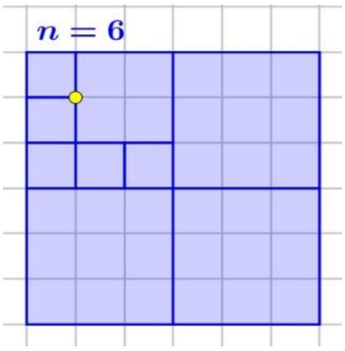
D_{18}：$T=4$；$L=4$



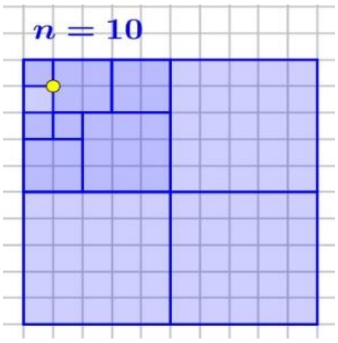
D_{25}：$T=4$；$L=4$

由上圖得知，此圖的不得不切割片數最大 $A=10$ (D_1 、 D_3 與 D_{17})，不得不切割片數最小 $C=4$

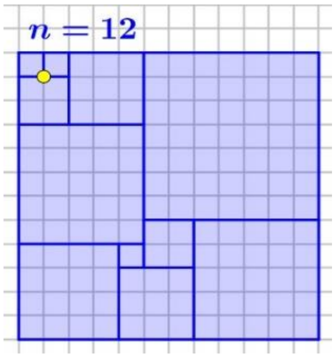
(2)**不得不**切割片數與邊長的關係：



$n=6$：$A=9$



$n=10$：$A=11$



$n=12$：$A=11$

上方三圖是邊長為偶數的第一個蛀點之切割情形，我們在推導過程發現各圖形第一個蛀點的不得不切割片數會等於此圖形不得不切割片數最大。

2. 邊長為奇數且合數

(1)圖形上蛀點的切割情形：

$n=9$，共有 64 個蛀點，以正方形各對稱軸對稱比對，共留下 10 個必要蛀點如 圖 5.2.5。

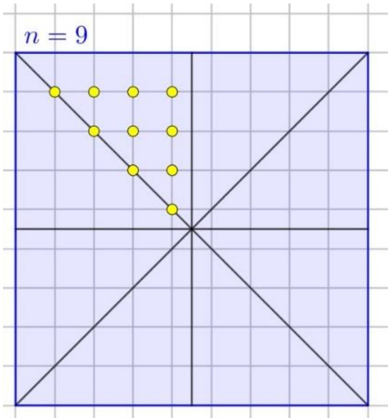
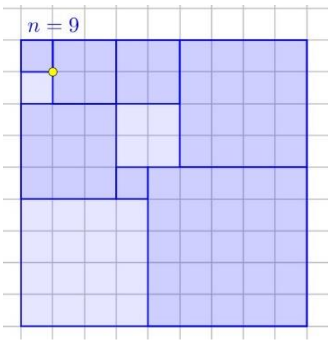
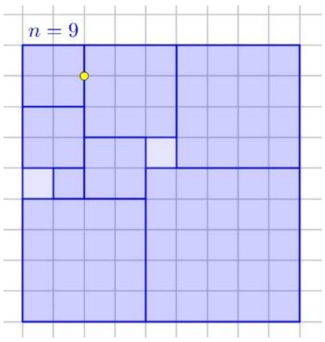


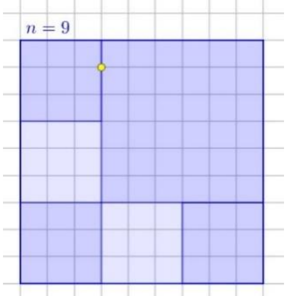
圖 5.2.5



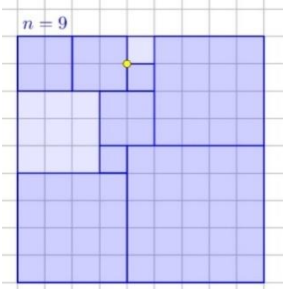
D_1：$T=10$；$L=5$



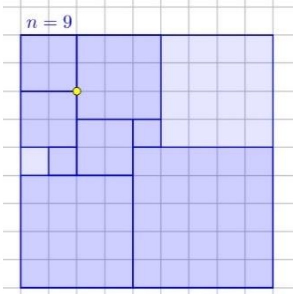
D_2：$T=10$；$L=5$



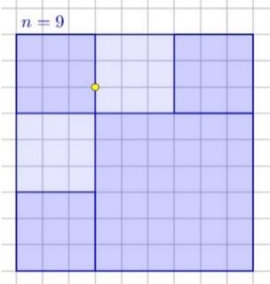
D_3 ： $T=6$ ； $L=6$



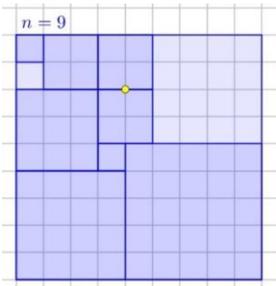
D_4 ： $T=10$ ； $L=5$



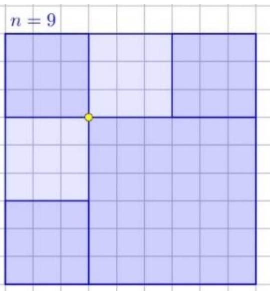
D_{10} ： $T=10$ ；L=5



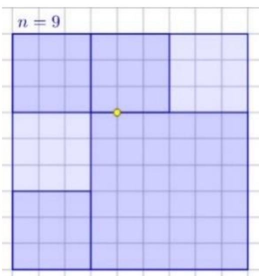
D_{11} ： $T=6$ ； $L=6$



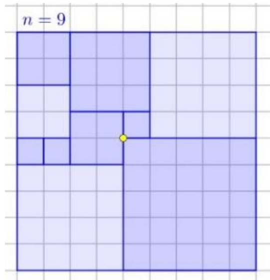
D_{12} ： $T=10$ ； $L=5$



D_{19} ： $T=6$ ； $L=6$



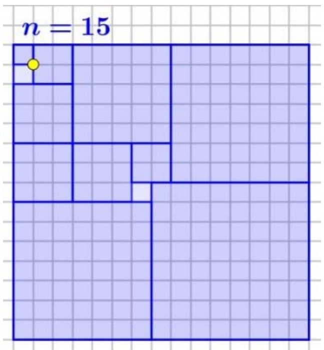
D_{20} ： $T=6$ ； $L=6$



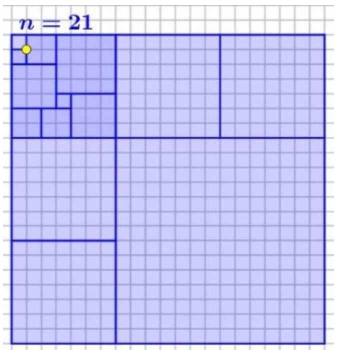
D_{28} ： $T=10$ ； $L=5$

由上圖得知，此圖的不得不切割片數最大$A=10$ (D_1 、 D_2 、 D_4 、 D_{10} 、 D_{12} 與 D_{28})，不得不切割片數最小$C=6$ 。

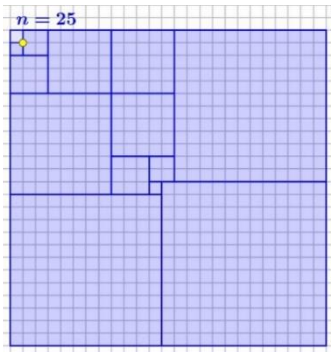
(2)**不得不**切割片數與邊長的關係：



$n=15$ ： $A=12$



$n=21$ ： $A=14$



$n=25$ ： $A=14$

上方三圖是邊長為奇數且合數的第一個蛀點之切割情形，我們在推導過程發現各圖形第一個蛀點的不得不切割片數會等於此圖形不得不切割片數最大。

3. 邊長為質數

(1)圖形上蛀點的切割情形：

$n=7$，共有36個蛀點，以正方形各對稱軸對稱比對，共留下6個必要蛀點如圖 5.2.6。

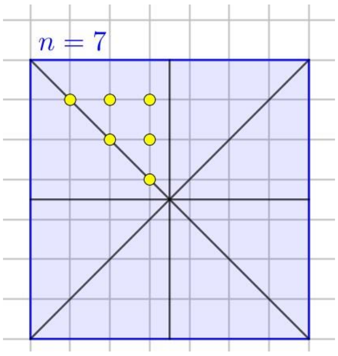
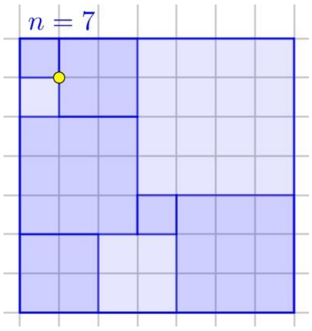
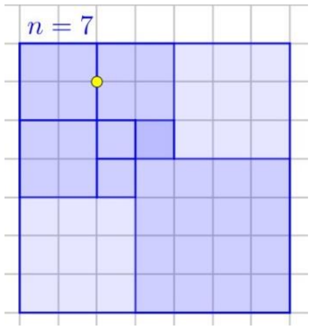


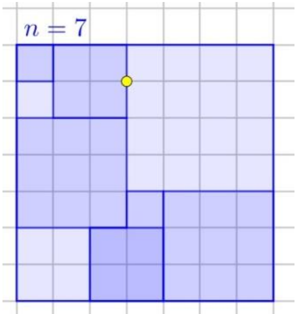
圖 5.2.6

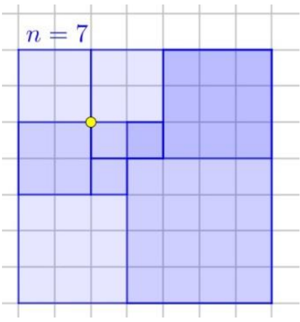


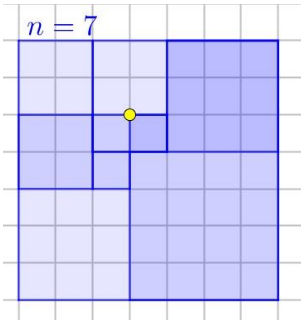
D_1：$T=9$；$L=4$

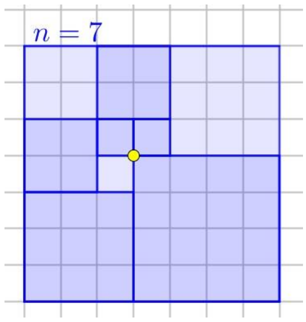


D_2：$T=9$；$L=4$





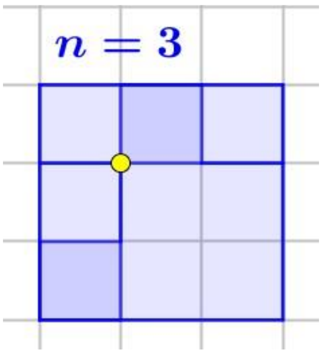




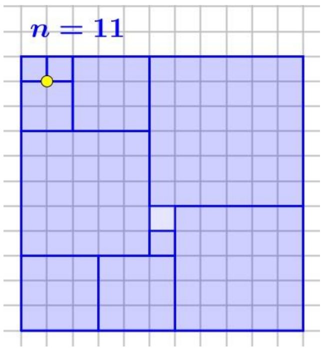
D_3：$T=9$；$L=4$　D_8：$T=9$；$L=4$　D_9：$T=9$；$L=4$　D_{15}：$T=9$；$L=4$

由上圖得知，此圖的不得不切割片數最大A=不得不切割片數最小$C=9$

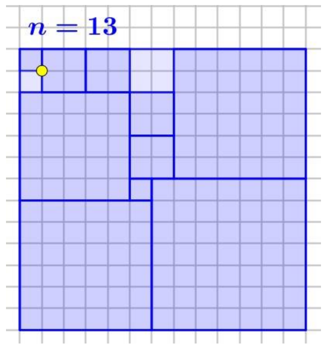
(2)**不得不**切割片數與邊長的關係：



$n=3$：$A=6$



$n=11$：$A=11$



$n=13$：$A=12$

上方三圖是邊長為質數的第一個蛀點之切割情形，我們在推導過程發現各圖形第一個蛀點的不得不切割片數會等於此圖形不得不切割片數最大。

陸、研究結果

一、蛀點數的一般式、不得不切割片數最小及切割方法：

邊長為合數的圖形，其不得不切割片數最小及切割方法與最小正因數相同；而邊長為質數的正三角形和正方形之不得不切割片數最小可**由較小圖形之面積總和相等**推論出，**各面積個數相加即為圖形的不得不切割片數最小**。

表 6.1：蛀點數的一般式與不得不切割片數最小的說明

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">正三角形</td><td colspan="2">正方形</td></tr>
<tr><td>蛀點數的一般式</td><td colspan="2">$\frac{(n-2)(n-1)}{2}$</td><td colspan="2">$(n-1)^2$</td></tr>
<tr><td>邊長數為合數的不得不切割片數最小</td><td colspan="4">質因數分解
$\rightarrow a^b \times c^d \times e^f \times \cdots$，其中 $a < c < e < \cdots$
$\rightarrow$不得不切割片數最小會等同邊長為 a 的不得不切割片數最小</td></tr>
<tr><td rowspan="10">邊長數為質數的不得不切割片數最小</td><td>n</td><td>C</td><td>29</td><td>15</td></tr>
<tr><td>2(只有正方形)</td><td>4(只有正方形)</td><td>31</td><td>16</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>37</td><td>16</td></tr>
<tr><td>5</td><td>8</td><td>41</td><td>17</td></tr>
<tr><td>7</td><td>9</td><td>43</td><td>17</td></tr>
<tr><td>11</td><td>11</td><td>47</td><td>17</td></tr>
<tr><td>13</td><td>12</td><td>53</td><td>18</td></tr>
<tr><td>17</td><td>13(正方形為 12)</td><td>59</td><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td><td>13</td><td>61</td><td>18</td></tr>
<tr><td>23</td><td>14</td><td>67</td><td>18</td></tr>
<tr><td rowspan="2">公式</td><td colspan="4">$\sum_{i=1}^{n-1} p_i i^2 = p_1(1)^2 + p_2(2)^2 + \ldots + p_{n-1}(n-1)^2 = n^2$ (面積相等)
$\sum_{i=1}^{n-1} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}$ (個數)</td></tr>
<tr><td colspan="4">p_i:是指切割後的某面積之數量。</td></tr>
</table>

1. 在正三角形上的蛀點數量計算方式與三角形數相同，以 n=5 為例，算式為：$\frac{(5-2)(5-1)}{2} = 6$

   即為 n=5 的蛀點數量(由於有切割意義的第一個正三角形為 n=3，故 n=5 算第三個)。

   由此可推論正三角形蛀點數的一般式為: $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ 。

2. 在正方形上的蛀點數量計算方式與平方數相同，以 n=3 為例，算式為：$(3-1)^2 = 4$

   即為 n=3 的蛀點數量(由於有切割意義的第一個正方形為 n=2，故 n=3 算第二個)。

   由此可推論正方形蛀點數的一般式為: $(n-1)^2$ 。

【性質 6.1.1】：在正三角形中，邊長 n 為正整數 $(n \geq 3)$，可得 D(蛀點數)為 $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ 。

〔**說明**〕：定義長度 1 為「第 1 排」，底邊長度 n 為「第 n 排」$\rightarrow$第 2 排到第(n -1)排共有

(n-1)-2+1=n-2 排有蛀點，數量從 2-1=1(個)到 (n-1)-1=n-2 (個)，

總數為 $\dfrac{[1+(n-2)](n-2)}{2}=\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$ 。

【性質 6.1.2】：在正方形中，邊長 n 為正整數 $(n\ge 2)$，可得 D(蛀點數)為 $(n-1)^2$ 。

〔**說明**〕：將一線段分成 x 等分時，會產生(x-2+1)個=(x-1)個等分點，邊長為 n 則可將邊長分為 n 等分，每等分長度為一，故每排共有(n-1)個蛀點，(n-1)排共(n-1)^2 個蛀點，在下方用數學歸納法加以證明。

〔**證明**〕：對所有正整數 $n\ge 2$，試證 $\sum_{i=1}^{n-1}(2i-1)=(2\times 1-1)+\ldots+[2\times(n-1)-1]=(n-1)^2$ 恆成立。

(1)當 $n=2$ 時，$\sum_{i=1}^{2-1}(2i-1)=(2\times 1-1)=1=(2-1)^2$，故成立。

(2)若 $n=k$ 時命題成立，即 $\sum_{i=1}^{k-1}(2i-1)=(2\times 1-1)+\ldots+[2\times(k-1)-1]=(k-1)^2$

則 $n=k+1$ 時，左式＝ $\sum_{i=1}^{(k+1)-1}(2i-1)=(2\times 1-1)+\ldots+\{2\times[(k+1)-1]-1\}$

$=(k-1)^2+\{2\times[(k+1)-1]-1\}=(k-1)^2+2k-1=[(k+1)-1]^2$ ＝右式

由數學歸納法可知，對於所有正整數 $n\ge 2$，$\sum_{i=1}^{n-1}(2i-1)=(n-1)^2=D$ 得證。

【性質 6.1.3】：在正方形與正三角形中，邊長 n 為合數時 $(n\in N)$，可得 C (不得不切割片數最小)為其最小正因數(1除外)的 C 。

〔**說明**〕：設 n 除了 1 以外的最小正因數為 t，n 的切割方式即為 t 的切割方式之 $\dfrac{n}{t}$ 倍放大圖，切割片數即相同。

【性質 6.1.4】：在正三角形中，邊長 n 為正整數 $(n\ge 3)$ 時，利用面積相等計算

$\sum_{i=1}^{n-1}p_i i^2=p_1(1)^2+p_2(2)^2+\ldots+p_{n-1}(n-1)^2=n^2$ （p_i 是指切割後某面積之數量)

需考慮能否在圖形上切割，可得 不得不切割片數最小 C

為 $\sum_{i=1}^{n-1}p_i=p_1+p_2+\ldots+p_{(n-2)}+p_{(n-1)}$ (個數總和)的最小值。

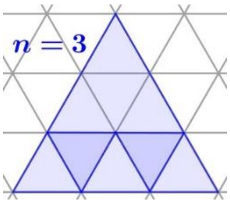


圖 6.1.1

〔**說明**〕：在正三角形中，可以利用面積相等計算切割片數，

例如圖 6.1.1，$5\times\dfrac{\sqrt{3}\times 1^2}{4}+1\times\dfrac{\sqrt{3}\times 2^2}{4}=\dfrac{\sqrt{3}\times 3^2}{4}$；

圖 6.1.2，$4\times\dfrac{\sqrt{3}\times 2^2}{4}=\dfrac{\sqrt{3}\times 4^2}{4}$ 。

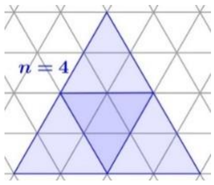


圖 6.1.2

可得公式為

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i i^2 = p_1\frac{\sqrt{3}(1)^2}{4} + p_2\frac{\sqrt{3}(2)^2}{4} + \ldots + p_{(n-2)}\frac{\sqrt{3}(n-2)^2}{4} + p_{(n-1)}\frac{\sqrt{3}(n-1)^2}{4} = n^2$$

(p_i 是指切割後某面積之數量)。

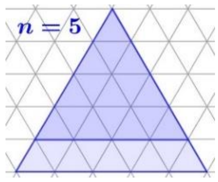


圖 6.1.3

上式同乘 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，可得 $\sum_{i=1}^{n-1} p_i i^2 = p_1(1)^2 + p_2(2)^2 + \ldots + p_{n-1}(n-1)^2 = n^2$ 。

例如 $n=5$ ， $\sum_{i=1}^{n-1} p_i i^2 = p_1(1)^2 + p_2(2)^2 + \ldots + p_{n-1}(n-1)^2 = n^2$ ，

當 $p_1=1$, $p_2=1$ 時原式成立，但在圖 6.1.3 可發現，將 $n=5$ 的正三角形切割出一個 $n=4$ 的正三角形，就無法再切 $n=3$ 的正三角形了。因此需考慮能否在圖形上進行切割。

【性質 6.1.5】：在正方形中，邊長 n 為正整數 $(n\geq 2)$ 時，利用面積相等計算

$\sum_{i=1}^{n-1} p_i i^2 = p_1(1)^2 + p_2(2)^2 + \ldots + p_{n-1}(n-1)^2 = n^2$ (p_i 是指切割後某面積之數量)

需考慮能否在圖形上切割，可得不得不切割片數最小 C

為 $\sum_{i=1}^{n-1} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_{(n-2)} + p_{(n-1)}$ (個數總和)的最小值。

〔**說明**〕：在正方形中，可以利用面積相等計算切割片數，

例如圖 6.1.4， $4\times 1^2 = 2^2$ ；

圖 6.1.5， $5\times 1^2 + 1\times 2^2 = 3^2$ 。

可得公式為 $\sum_{i=1}^{n-1} p_i i^2 = p_1(1)^2 + p_2(2)^2 + \ldots + p_{n-1}(n-1)^2 = n^2$ (p_i 是指切割後某面積之數量)。

當 $p_1=1$, $p_2=1$ 時原式成立，但在圖 6.1.6 可發現，將 $n=5$ 的正方形切割出一個 $n=4$ 的正方形，就無法再切 $n=3$ 的正方形了。因此需考慮能否在圖形上進行切割。

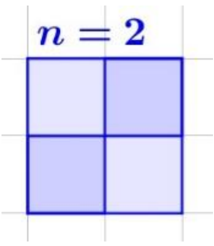


圖 6.1.4

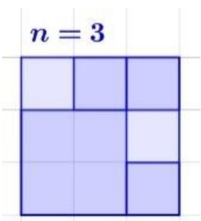


圖 6.1.5

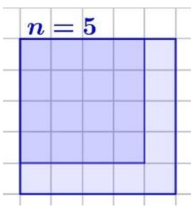


圖 6.1.6

二、必要蛀點數的一般式：

表 6.2.1：必要蛀點數的一般式及說明

		正三角形			正方形	
必要蛀點數算法的一般式	k \ n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$		
	奇數	$\frac{n^2+3}{12}$	$\frac{n^2-4}{12}$	$\frac{n^2-1}{12}$	n 為奇數	$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i = 1+2+\ldots+\frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{8}$
	偶數	$\frac{n^2}{12}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{n^2-4}{12}$	n 為偶數	$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} i = 1+2+\ldots+\frac{n}{2} = \frac{n^2+2n}{8}$

統計數據（正三角形）

n	必要蛀點數	差值	n	必要蛀點數	差值	n	必要蛀點數	差值
2			12	12	2	22	40	4
3	1	0	13	14	2	23	44	4
4	1	1	14	16	3	24	48	4
5	2	1	15	19	2	25	52	
6	3	1	16	21	3	依此類推		
7	4	1	17	24	3			
8	5	2	18	27	3			
9	7	1	19	30	3			
10	8	2	20	33	4			
11	10	2	21	37	3			

統計數據（正方形）

n	必要蛀點數	差值	n	必要蛀點數	差值	n	必要蛀點數	差值
2	1	0	12	21	0	22	66	0
3	1	2	13	21	7	23	66	12
4	3	0	14	28	0	24	78	0
5	3	3	15	28	8	25	78	
6	6	0	16	36	0	依此類推		
7	6	4	17	36	9			
8	10	0	18	45	0			
9	10	5	19	45	10			
10	15	0	20	55	0			
11	15	6	21	55	11			

上述表 6.2.1 分為正三角形與正方形的必要蛀點數，綜合可得以下幾點結果：

1.正三角形：

(1) 必要蛀點總數的**差值為 6 個一循環**，需將邊長除以六後，進行計算必要蛀點數的一般式

(2) 正三角形上之必要蛀點計算方式，

以n=5為例，算式為：$\frac{5^2-1}{12}=\frac{25-1}{12}=2$ ，2即為n=5的必要蛀點數量

由此可推論正三角形必要蛀點數的一般式為：$\frac{n^2+3}{12}$ 、$\frac{n^2-1}{12}$ 、$\frac{n^2}{12}$ 、$\frac{n^2-4}{12}$ 。

2.正方形：

(1) 必要蛀點總數的**差值為 2 個一循環且第一個為 0**，因 n 為奇數與 n 為偶數的起始數不同，則必要蛀點數的一般式也有所差異

(2) n 為奇數的正方形上之必要蛀點計算方式，以 n=5 為例，算式為：$\dfrac{5^2-1}{8}=\dfrac{25-1}{8}=3$

3即為n=5的必要蛀點數量

由此可推論n為奇數的正方形必要蛀點數的一般式為：$\dfrac{n^2-1}{8}$ 。

(3) n為偶數的正方形上之必要蛀點計算方式，

以n=6為例，算式為：$\dfrac{6^2+2\times 6}{8}=\dfrac{36+12}{8}=6$

6即為n=6的必要蛀點數量

由此可推論n為偶數的正方形必要蛀點數的一般式為：$\dfrac{n^2+2n}{8}$ 。

【性質 6.2.1】：在正三角形中，邊長 n 為正整數 $(n\geq 3)$，

可得 n 為 $3k$ 且 k 為偶數時，其必要蛀點數為 $\dfrac{n^2}{12}$ ；

n 為 $3k$ 且 k 為奇數時，其必要蛀點數為 $\dfrac{n^2+3}{12}$ ；

n 為 $3k+1$ 且 k 為偶數時，其必要蛀點數為 $\dfrac{n^2-1}{12}$ ；

n 為 $3k+1$ 且 k 為奇數時，其必要蛀點數為 $\dfrac{n^2-4}{12}$ ；

n 為 $3k+2$ 且 k 為偶數時，其必要蛀點數為 $\dfrac{n^2-4}{12}$ ；

n 為 $3k+2$ 且 k 為奇數時，其必要蛀點數為 $\dfrac{n^2-1}{12}$ 。

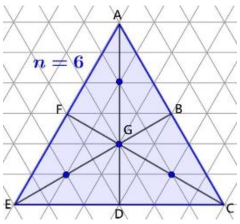


圖 6.2.1

〔**說明**〕：設對稱軸上的蛀點為 q，對稱軸上的必要蛀點為 r，必要蛀點總數為 s

$\dfrac{p-q}{6}+r=s$ ，$p=\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$ ；若 n 為 3 的倍數，$q=3r-2$；若 n 不為 3 的倍數，$q=3r$

三角形對稱軸上的蛀點同時計入2區域內，得若為 n 不為3的倍數，則 $q=(r\times 6)\div 2=3r$

n 為3的倍數時，3個蛀點變為同1個$\Rightarrow$須扣2蛀點，$q=3r-2$

又以右上圖 6.2.1 及圖 6.2.2

推得 r = 一條對稱軸上的蛀點數 $(\because \overline{AG}=\overline{CG}=\overline{EG}$ ，$\overline{BG}=\overline{DG}=\overline{FG})$

(1) 偶符合的點有 $\dfrac{[2+(n-2)]-2}{2}=\dfrac{n-2}{2}$(個) $\Rightarrow r=\dfrac{n-2}{2}$

(2) 奇符合的點有 $\dfrac{[2+(n-1)]-2}{2}=\dfrac{n-1}{2}$(個) $\Rightarrow r=\dfrac{n-1}{2}$

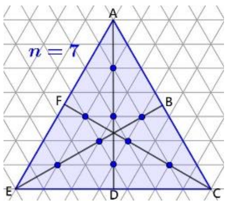


圖 6.2.2

我們統整如下表 6.2.2：

表 6.2.2：正三角形必要蛀點數的一般式

k \ n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
奇數	$\dfrac{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-(3\times\frac{n-1}{2}-2)}{6}+\dfrac{n-1}{2}$ $=\dfrac{(\frac{n^2-6n+9}{2})}{6}+\dfrac{n-1}{2}$ $=\dfrac{n^2-6n+9}{12}+\dfrac{6n-6}{12}=\dfrac{n^2+3}{12}$	$\dfrac{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-3\times\frac{n-2}{2}}{6}+\dfrac{n-2}{2}$ $=\dfrac{\frac{(n^2-6n+8)}{2}}{6}+\dfrac{n-2}{2}$ $=\dfrac{n^2-6n+8}{12}+\dfrac{6n-12}{12}=\dfrac{n^2-4}{12}$	$\dfrac{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-3\times\frac{n-1}{2}}{6}+\dfrac{n-1}{2}$ $=\dfrac{(\frac{n^2-6n+5}{2})}{6}+\dfrac{n-1}{2}$ $=\dfrac{n^2-6n+5}{12}+\dfrac{6n-6}{12}=\dfrac{n^2-1}{12}$
偶數	$\dfrac{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-(3\times\frac{n-2}{2}-2)}{6}+\dfrac{n-2}{2}$ $=\dfrac{(\frac{n^2-3n+2}{2}-\frac{3n-6}{2}+2)}{6}+\dfrac{n-2}{2}$ $=\dfrac{n^2-6n+12}{12}+\dfrac{6n-12}{12}=\dfrac{n^2}{12}$	$\dfrac{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-3\times\frac{n-1}{2}}{6}+\dfrac{n-1}{2}$ $=\dfrac{(\frac{n^2-6n+5}{2})}{6}+\dfrac{n-1}{2}$ $=\dfrac{n^2-6n+5}{12}+\dfrac{6n-6}{12}=\dfrac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-3\times\frac{n-2}{2}}{6}+\dfrac{n-2}{2}$ $=\dfrac{\frac{(n^2-6n+8)}{2}}{6}+\dfrac{n-2}{2}$ $=\dfrac{n^2-6n+8}{12}+\dfrac{6n-12}{12}=\dfrac{n^2-4}{12}$

【性質 6.2.2】：在正方形中，邊長 n 為正整數 $(n\geq 2)$，可得

n 為偶數的必要蛀點數為 $\dfrac{n^2+2n}{8}$；n 為奇數的必要蛀點數為 $\dfrac{n^2-1}{8}$。

〔**說明**〕：

n 為偶數：設對稱軸上的蛀點為 q，對稱軸上的必要蛀點為 r，必要蛀點總數為 s

$p=(n-1)^2=n^2-2n+1$；$q=4\times(n-1)-3=4n-7$；$r=n-1$

$$s=\frac{p-q}{8}+r=\frac{(n^2-2n+1)-(4n-7)}{8}+(n-1)=\frac{n^2-6n+8}{8}+\frac{8n-8}{8}=\frac{n^2+2n}{8}$$

n 為奇數：設對稱軸上的蛀點為 q，對稱軸上的必要蛀點為 r，必要蛀點總數為 s

$p=(n-1)^2=n^2-2n+1$；$q=2\times(n-1)=2n-2$；$r=\dfrac{n-1}{2}$

$$s=\frac{(n^2-2n+1)-(2n-2)}{8}+\frac{n-1}{2}=\frac{n^2-4n+3}{8}+\frac{4n-4}{8}=\frac{n^2-1}{8}$$

三、不得不切割片數最小的必要蛀點在圖形上的呈現：

1. n 為合數:

(1) **最小質因數為 2**:

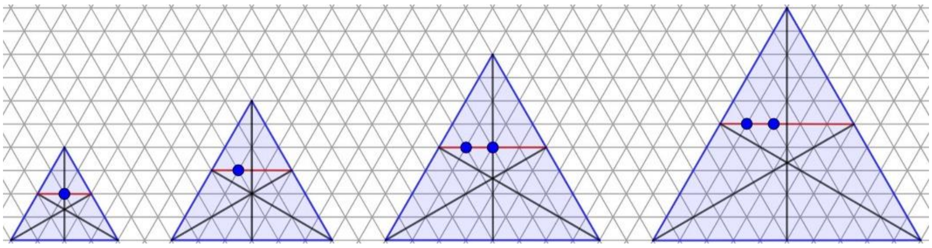


圖 6.3.1

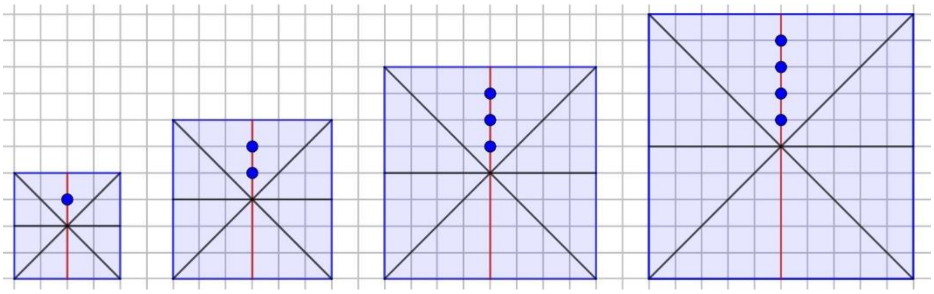


圖 6.3.2

圖 6.3.1、圖 6.3.2 是正三角形與正方形當**最小質因數為 2** 時不得不切割片數最小的必要蛀點，比較兩圖可發現各必要蛀點在圖形上**對邊中點連線上呈現一直線(指的是圖形紅線)**。

(2) **最小質因數為 3**:

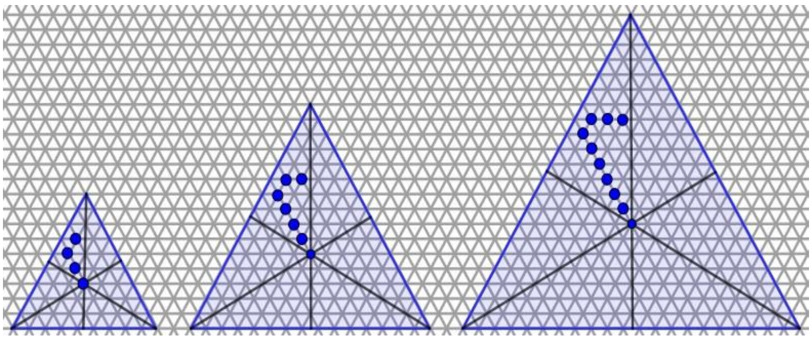


圖 6.3.3

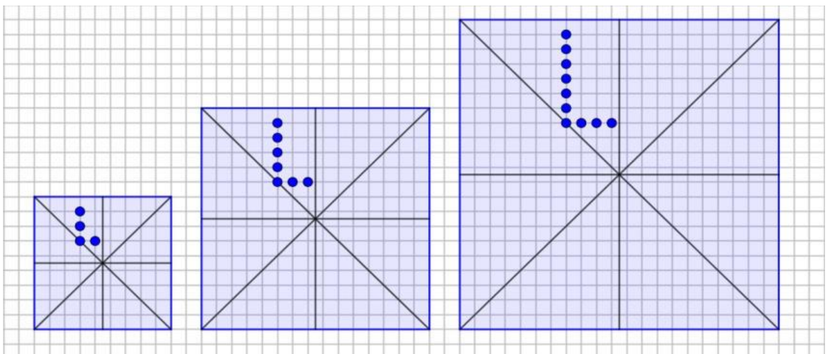


圖 6.3.4

圖 6.3.3、圖 6.3.4 是正三角形與正方形當**最小質因數為 3** 時不得不切割片數最小的必要蛀點，比較兩圖可發現各必要蛀點在圖上**皆有類似 *L* 的形狀**。

(3)**最小質因數為 5:**

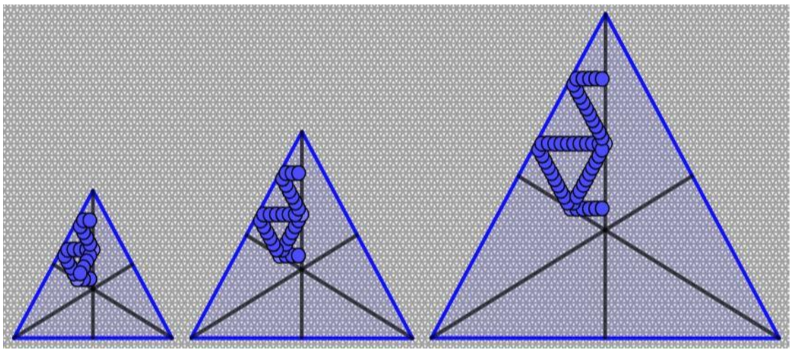


圖 6.3.5

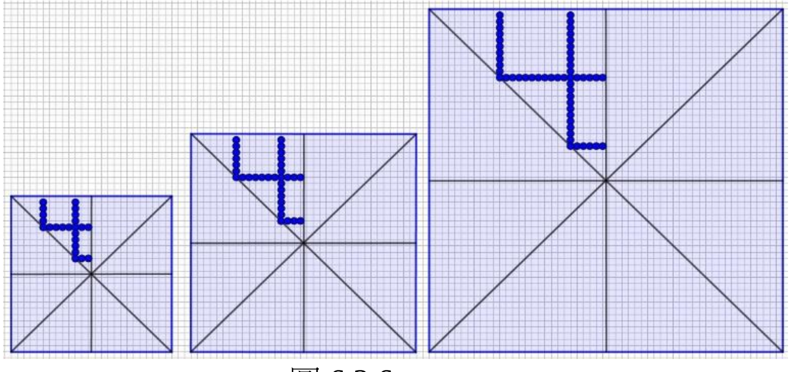


圖 6.3.6

圖 6.3.5、圖 6.3.6 是正三角形與正方形當**最小質因數為 5** 時不得不切割片數最小的必要蛀點，比較兩圖可發現各必要蛀點在圖上**皆有類似閃電形**。

(4)**最小質因數為 7:**

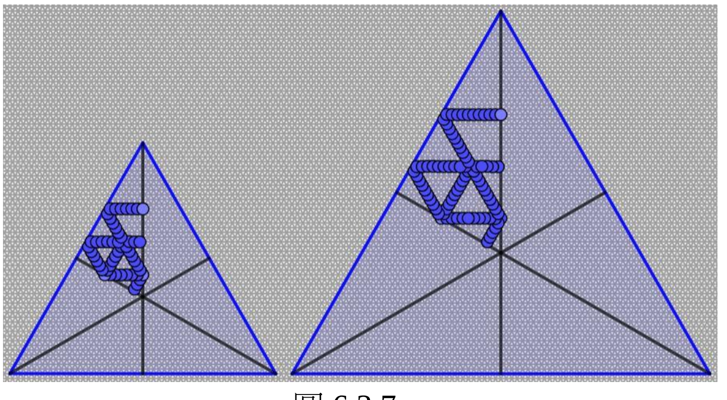


圖 6.3.7

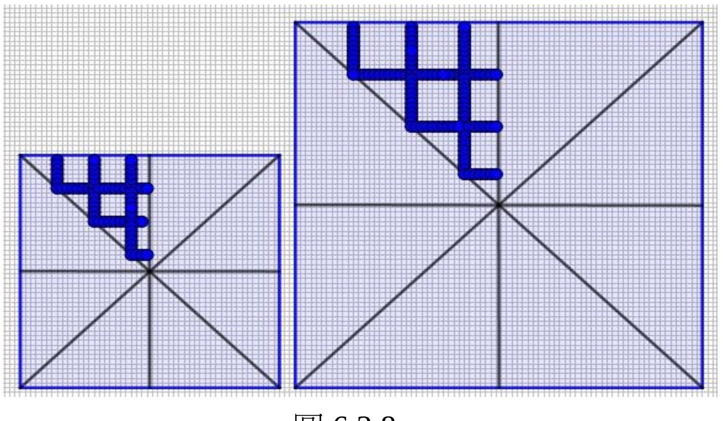


圖 6.3.8

圖 6.3.7、圖 6.3.8 是正三角形與正方形當**最小質因數為 7** 時不得不切割片數最小的必要蛀點，比較兩圖可發現各必要蛀點在圖上**皆有類似閃電形**。

2. n 為質數：

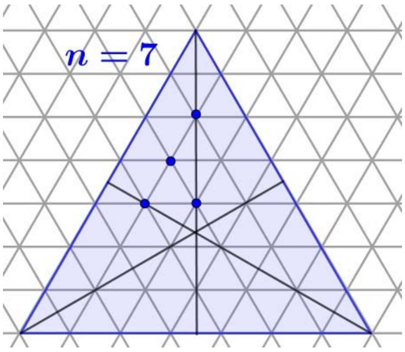


圖 6.3.9

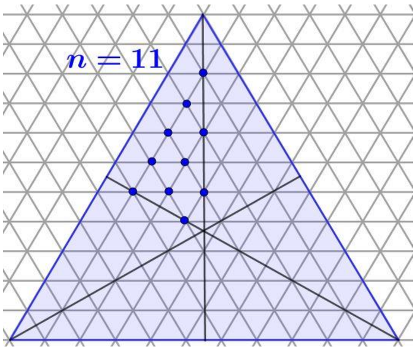


圖 6.3.10

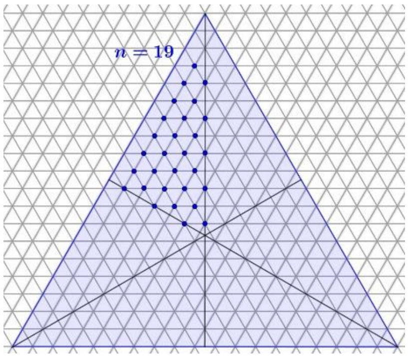


圖 6.3.11

圖 6.3.9、圖 6.3.10 不得不切割片數最小及最大的必要蛀點，比較兩圖可發現正三角形不得不切割片數最小及最大的必要蛀點在圖上皆呈現直角三角形的圖示。但從圖 6.3.11 可發現，從 $n = 19$ 開始，不得不切割片數最小及最大的必要蛀點並不相同。(圖 6.3.11 的必要蛀點為不得不切割片數最小)

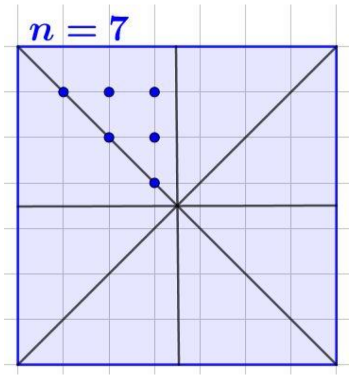


圖 6.3.12

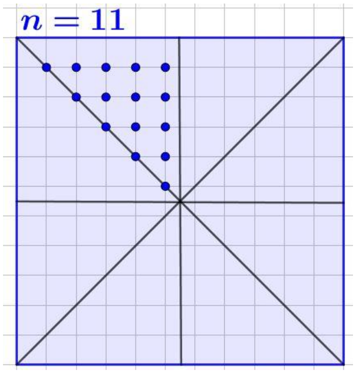


圖 6.3.13

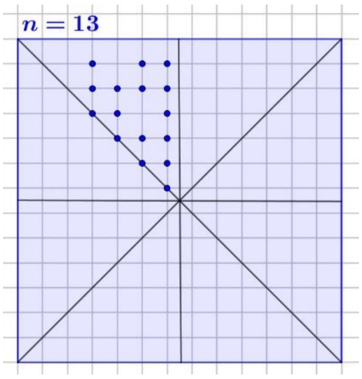


圖 6.3.14

圖 6.3.12、圖 6.3.13 不得不切割片數最小及最大的必要蛀點，比較兩圖可發現正三角形不得不切割片數最小及最大的必要蛀點在圖上皆呈現三角形數之形式的圖示。但從圖 6.3.14 可發現，從 $n = 13$ 開始，不得不切割片數最小及最大的必要蛀點並不相同。(圖 6.3.14 的必要蛀點為不得不切割片數最小)

但就目前做出來的情況下，大部分圖形成立，例外我們在下方予以說明。

3. *n* **為質數時**，**發生特例的情況**說明：

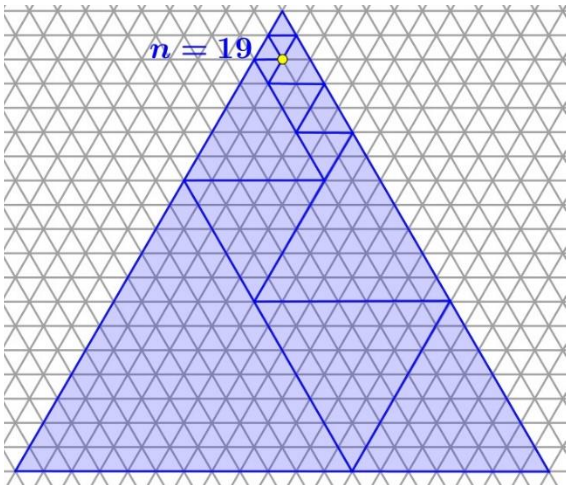


圖 6.3.15

上圖 6.3.15 為**正三角形編號 19-1 的必要蛀點**，在我們的推論中，此點切割片數應為 13，但在經歷過多次的嘗試之後，我們發現**此點無法切成 13 片，最少只能切成 14 片**。

可與下圖 6.3.17 比較觀察之：

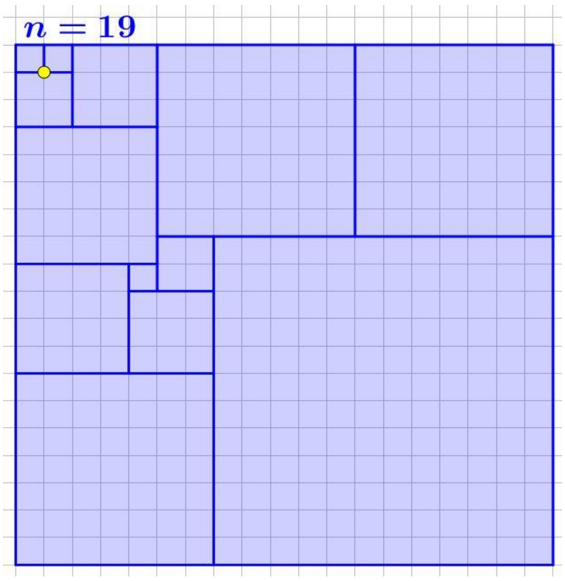


圖 6.3.17

比較**正三角形圖 6.3.15 與正方形編號 19-1 的必要蛀點圖 6.3.17** 可發現，**正三角形無法切成 13 片，但正方形可以**。

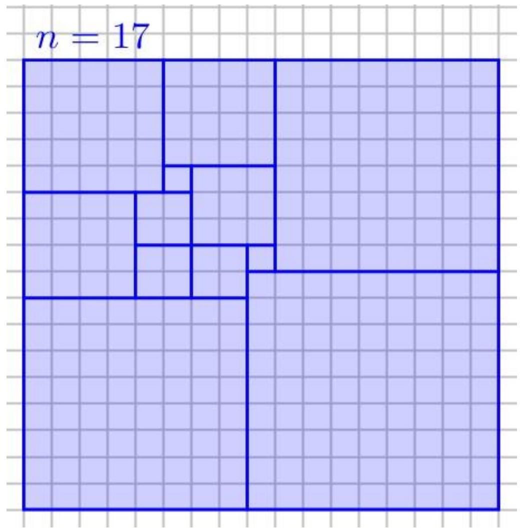


圖 6.3.16

上**圖 6.3.16 為正方形 *n*=17**，在我們的推論中，此圖切割片數應為 13，但在切割過程發現**此圖片最少可切割為 12 片，比我們推論中的少**。

可與下圖 6.3.18 比較觀察之：

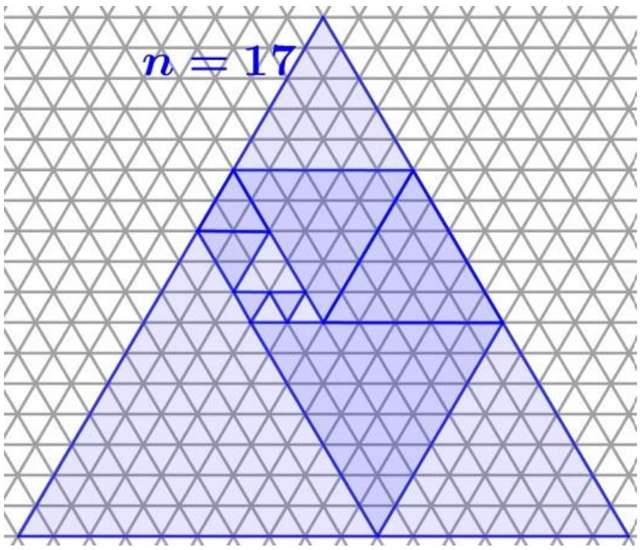


圖 6.3.18

比較**正三角形的圖 6.3.18 與正方形 *n*=17 的圖 6.3.16** 可發現，**正三角形不得不切割片數最小為 13，但正方形有許多點可切成 12 片**。

四、不得不切割片數最大 A 與 n 之關係：

我們找出**不得不切割片數最大 A 與 n 之關係**，在這裡統整性質並分別說明：

【性質 6.4.1】：在正方形中，邊長 n 為正整數 $(n \geq 2)$ 且為 2^k 時，

可得 A (不得不切割片數最大)為 $3k+1$。

〔**說明**〕：一個邊長為偶數的正方形可切成 4 個邊長為原本一半的小正方形，

且邊長為 2^k 的正方形，即經 k 次切割。

原有一個正方形每次增加 $4-1=3$ (個)正方形，共 k 次，

故不得不切割片數= $A=1+3\times k=3k+1$ (註：第一次切割後會形成 4 片，可從任一塊繼續切割，以此類推，直到切到邊長為 1 時，即會切到蛀點，但在邊長為 2^2 只需切到邊長為 2。

不得不切割片數為求各種狀況「最大值」，即 $3k+1$)

【性質 6.4.2】：在正三角形中，邊長 n 為正整數 $(n \geq 3)$ 且為 2^k 時，

可得 A (不得不切割片數最大)為 $3k-2$。

〔**說明**〕：一個邊長為 2 的正三角形，可切成 4 個邊長為 1 的正三角形，但邊長為 2 並無蛀點。邊長為 4 的正三角形，可知只要上述切割法一次即可切到任一蛀點，不需再切更小。邊長為 8，則有不只一種情況使用兩次 2 的切法，出現最小的正三角形邊長皆為 2。由此可知：

1.邊長為 2 的正三角形即可含括所有的蛀點，不用再切成 4 個邊長為 1 的正三角形。

(由**性質 6.2.2** 推導過程亦可知)

2.先切出 4 個邊長為原本一半的正三角形之後再切更小時，可能切在任一個，但不影響切出的總片數。由上述，邊長為 2(即 2^1)的正三角形，不需切割；

邊長為 4(即 2^2)的正三角形，切割出 $1+(2-1)(4-1)=4$ (個)正三角形；

邊長為 8(即 2^3)的正三角形切割出 $1+(3-1)(4-1)=7$ (個)正三角形，則邊長為 2^k 時 $(2^k=n\geq 3)$，切割出的三角形個數，即所求的 $A=1+(k-1)(4-1)=1+3(k-1)=1+(3k-3)=3k-2$

【性質 6.4.3】：在正方形中，邊長 n 為正整數 $(n \geq 3)$ 且為 3^k 時，可得 k 為偶數，

不得不切割片數最大為 $\dfrac{9k+2}{2}$，k 為奇數，不得不切割片數最大為 $\dfrac{9k+3}{2}$。

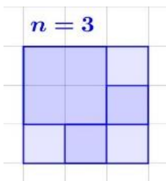


圖 6.4.1

〔**說明**〕：圖 6.4.1 是邊長為 3 的正方形之切割法，可切成 6 個圖形。而切成 1 個邊長為 2 和 5 個邊長為 1 的正方形。

以此切法切割邊長為 9(即 3^2)的正方形，發現可切成 11 個，

但由作品說明可知，$n=9$ 時，不得不切割片數最大為 10。因此

，將 k 分為奇數與偶數，亦可找出關係式。依上述可知，邊長為 3^k 時，

可得 k 為偶數，不得不切割片數最大為 $\frac{9k+2}{2}$；k 為奇數，不得不切割片數最大為 $\frac{9k+3}{2}$。

【性質 6.4.4】：在正三角形中，邊長 n 為正整數 $(n \geq 3)$ 且為 3^k 時，

$k>1$，不得不切割片數最大為 $5k$，$k=1$ 時，不得不切割片數最大為 6。

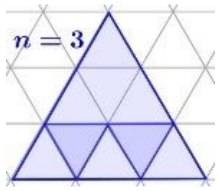


圖 6.4.2

〔**說明**〕：圖 6.4.2 是邊長為 3 的正三角形之切割法，可切成 6 個圖形。

而切成 1 個邊長為 2 和 5 個邊長為 1 的正三角形。

以此切法切割邊長為 9(即 3^2)的正三角形，發現可切成 11 個，

但由作品說明可知，$n=9$ 時，不得不切割片數最大為 10。

因此，$k>2$ 時，都可用 $n=9$ 的方法。依上述可知，邊長為 3^k 時，

$k>1$，不得不切割片數最大為 $5k$，$k=1$ 時，不得不切割片數最大為 6。

【性質 6.4.5】：在正方形中，邊長 n 為正整數且為 6^k 時，邊長為 6^k 時，

可得 k 為偶數，不得不切割片數最大為 $\frac{15k+2}{2}$；

k 為奇數，不得不切割片數最大為 $\frac{15k+3}{2}$

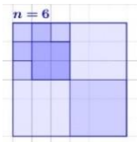


圖 6.4.3

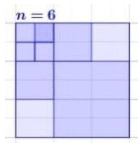


圖 6.4.4

〔**說明**〕：如圖 6.4.3、圖 6.4.4，皆是邊長為 6 的正方形

之切割法，皆為 9 個。圖 6.4.3 先用邊長 3 的切割法，

再用邊長 2 的切割法；圖 6.4.4 先用邊長 2 的切割法。

圖 6.4.3 式:$1+1\times(6-1)+1\times(4-1)=9$　　圖 6.4.4 式:$1+1\times(4-1)+1\times(6-1)=9$

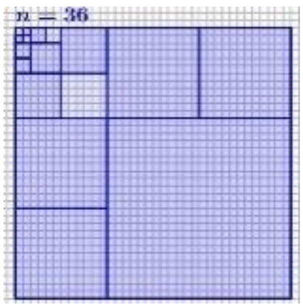
圖 6.4.5 為邊長 36 的其中一種切法，由**性質 6.4.3 可知**

$n=36$ 可用 $n=9$ 的切法，因此 $n=36$，

$A=1+2\times(4-1)+10-1=16$ 依上述可知，邊長為 6^k 時，

可得 k 為偶數，不得不切割片數最大為 $\frac{15k+2}{2}$，

k 為奇數，不得不切割片數最大為 $\frac{15k+3}{2}$



如圖 6.4.5

【**性質 6.4.6**】：在正三角形中，邊長 n 為正整數 $(n \geq 3)$ 且為 6^k 時，

可得 A (不得不切割片數最大)為 $8k-2$ 。

〔**說明**〕：如圖 6.4.6，邊長為 6 的正三角形，其「**不得不**切割片數最大」可切成 1 個邊長為 4、5 個邊長為 2 的正三角形後；圖 6.4.7，邊長為 36 的正三角形，切成 1 個邊長 24、5 個邊長 12 的正三角形後，須將其中一個邊長為 12 的正三角形切成 4 個邊長為 6 的正三角形，再把其中一個邊長為 6 的依圖 6.4.6 方式切割(可旋轉、翻轉)。邊長 216 同理。

邊長為 6，切割片數為 $6+0\times 8=6$ ；邊長為 6^2，切割片數為 $6+1\times(6+(4-1)-1)=6+1\times 8=14$

邊長為 6^3，切割片數為 $6+2\times(6+(4-1)-1)=6+2\times 8=22$

故若邊長為 6^k，切割片數為 $6+(k-1)\times 8=6+(8k-8)=8k-2$

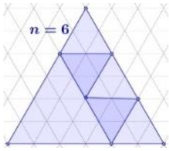


圖 6.4.6

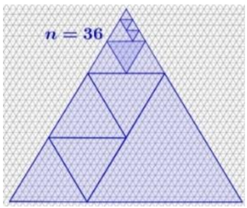


圖 6.4.7

註:邊長為 6 的正三角形，以「**不得不**」之方式切成 6 片，

旋轉、翻轉視為同意種情形時，就只有圖 6.4.6 一種；

但邊長 36(6^2)，216(6^3)時，即使旋轉、翻轉不只一種，圖 6.4.7 為 36 一舉例。

【**定理 1**】：由性質 6.4.1、6.4.3、6.4.5 可推得，在正方形中，n 為合數時

$n=xy\ (n,x,y\in N)\ (x,y\geq 2)\ (2\leq n\leq 27)\ (n\neq 9,12,15,25)$ ，可以切到 D_1 (正方形的第一個蛀點)，將所有組 x , y 的值找出後，可得不得不切割片數最大 A 為

所有**[(邊長為 x 的 A) + (邊長為 y 的 A) − 1]**的最小值。

〔**證明**〕：以邊長 9、36 來說(其中 9、36 的可能性不只一種，僅為舉例)，

9 用了兩次 3 的切法，計算式 $5+6=(6-1)+6=6+6-1=11$ ，但由作品說明可知，

因 $n=9$ 時 $A=10$ ，則 $n=36$ 時 $A=13+4-1=16$ **如圖 6.4.8**，故此解法仍存在例外。

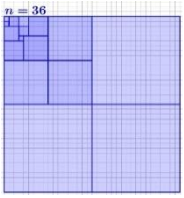


圖 6.4.8

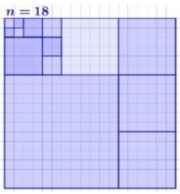


圖 6.4.9

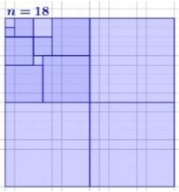


圖 6.4.10

例： $n=18$ 時(如上圖 6.4.9、圖 6.4.10)， $x=3, y=6$ 切割片數為 $4+(5\times 2+1)-1=14$ (如圖 6.4.9)，

$x=2, y=9$ 切割片數為 $4+10-1=13$ (如圖 6.4.10) (x,y 相反，切割片數亦相同)，

但因兩組切割方法相異，因此可推得， $n=18$ 時 $A=4+10-1=13$ 。

因此可推得 $n=xy\ (n,x,y\in N)\ (x,y\geq 2)\ (2\leq n\leq 27)\ (n\neq 9,12,15,25)$ ，

n 的 A 為所有組[(邊長為 x 的 A) + (邊長為 y 的 A) − 1]的最小值。

【定理 2】：由性質 6.4.2、6.4.4、6.4.6 可推得，在正三角形中，n 為合數時 $n = xy\ (n, x, y \in N)\ (x, y \geq 2)\ (2 \leq n \leq 27)\ (n \neq 9)$ ，可以切到 d_1 (正三角形的第一個蛀點)，將所有組 x, y 的值找出後，可得不得不切割片數最大 A 為

所有**[(邊長為 x 的 A) + (邊長為 y 的 A) -1]**的最小值。

限制條件為：x **和** y **的切法中只能有一種沒切到第一個邊**。

〔**證明**〕： 以邊長 3、9、36 來說(其中 9、36 的可能性不只一種，僅為舉例)，

9 用了兩次 3 的切法，計算式 $5+6=(6-1)+6=6+6-1=11$ ，

但由作品說明可知，因 $n=9$ 時 $A=10$ ，故此解法仍存在例外。

第一種 36 的方法先用了兩次 2 的切法，再用了兩次 3 的切法，如圖 6.4.11

計算 $3+3+5+6=(4-1)+(4-1)+(6-1)+6=(7-1)+11=7+11-1=17$ ；

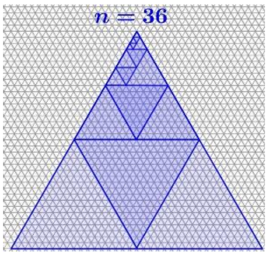


圖 6.4.11

但第二種 36 的方法只需用 3、2、3 的切法就可切到第一個蛀點(性質 6.4.2) ，如圖 6.4.7，因 3 的切法可切到圖形的第一個邊，所以當圖形放大為 6 後仍然可切到第一個蛀點，用一次 3、2，即為 $3\times 2=6$ 的切法，計算式 $6+(4-1)=6+4-1=9$ ，再加上一次 3 的切法，第二種 36 的方法計算式 $9+(6-1)=9+6-1=14$ 。由上述兩種 36 的切法可知，優先使用第二種。

因此可推得 n 為合數時 $n = xy\ (n, x, y \in N)\ (x, y \geq 2)\ (2 \leq n \leq 27)\ (n \neq 9)$ ，可以切到 d_1 (正三角形的第一個蛀點)，將所有組 x, y 的值找出後，可得不得不切割片數最大 A 為

所有[(邊長為 x 的 A) + (邊長為 y 的 A) -1]的最小值。

限制條件為：x **和** y **的切法中只能有一種沒切到第一個邊**。

五、第一個蛀點的不得不切割片數 T 與不得不切割片數最大 A 之關係：

【性質 6.5.1】：在正三角形中， d_1 (正三角形的第一個蛀點)的 T (不得不切割片數)，必定為 A (不得不切割片數最大)。

〔**說明**〕：由定理 2 與性質 6.4.2、6.4.4、6.4.6 可知，要切到 d_1 ，必須在最上方切出邊長為 2 的小正三角形或數個邊長為1的小正三角形。利用性質 6.1.4 面積相等的方法

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i i^2 = p_1(1)^2 + p_2(2)^2 + \ldots + p_{n-1}(n-1)^2 = n^2$$ ，

可發現， p_1 與 p_2 越多，切割片數會越大，則切到第一個點的 T ，必定為此圖形的 A 。

【**性質 6.5.2**】：在正方形中，D_1(正方形的第一個蛀點)的T(不得不切割片數)，必定為A(不得不切割片數最大)。

〔**說明**〕：由定理 1 與性質 6.4.1、6.4.3、6.4.5 可知，要切到D_1，必須在左上方切出數個邊長為1的小正方形。利用性質 6.1.5 面積相等的方法

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i i^2 = p_1(1)^2 + p_2(2)^2 + \ldots + p_{n-1}(n-1)^2 = n^2，$$

可發現，p_1與p_2越多，切割片數會越大，則切到第一個點的T，必定為此圖形的A。

柒、比較

表 7.1：本作品與參考文獻之比較

作品名稱	**不得布剪** (獨立研究競賽作品，2021)	**圖形上蛀點之不得不切割片數與不得不切割片數最小及最大之探討(本作品)**
當邊長 n 為偶數的切割片數如何判別	最小切割數為 4	探討各必要蛀點的不得不切割片數，篩選含有不得不切割片數最小為 4 的必要蛀點，發現在圖形上對邊中點連線上呈一直線。 (參閱 P.18 圖 6.3.1、圖 6.3.2)
當邊長 n 為奇數且合數的切割片數如何判別	令 x 為切割後小正三角形的邊長，其中 x 為 n 的最大正因數 。	1.邊長 n 的正三角形、正方形會與 n 之最小質因數(1 除外)。 2.探討各必要蛀點的不得不切割片數，篩選含有不得不切割片數最小的必要蛀點，呈現在圖形上。(參閱 P.18&P.19 圖 6.3.3、圖 6.3.4、圖 6.3.5、圖 6.3.6、圖 6.3.7、圖 6.3.8)
邊長 n 為質數(2 除外)的切割片數如何判別	使用平行四邊形來進行切割，無法求出最小切割數的公式，但能從中依照切割規律，進而找出最小切割數。	1.邊長 n 由小而大的正三角形、正方形之不得不切割片數最小漸增。 2.所有必要蛀點的不得不切割片數都相同，且在圖形上呈現情況(少數圖形例外)。
切割種類	正三角形	1.不得不切割片數最小：正三角形、正方形。 2.不得不切割片數最大：正三角形、正方形。

註：「**不得布剪**」的最小切割數即為我們作品的不得不切割片數最小

綜合而論，本作品最重要是在**探討蛀蟲不管咬在正三角形布與正方形布的哪一蛀點上，其所有蛀點之不得不切割片數最小及最大的這些蛀點，它呈現在圖形上的分布情況及其與邊長 n 之關係式。**

捌、結論

一、不得不切割片數最大及不得不切割片數最小與邊長 **n** 之關係：

(一)正三角形：

1.合數

(1) 邊長 n 為合數時 $(n \in N)$，可得 C (不得不切割片數最小)等於

邊長為其**最小正因數**(1除外)**的** C。

(2) 邊長為 2^k 時，不得不切割片數最大為 $3k-2$。

(3) 邊長為 3^k 時， $k>1$ 時，不得不切割片數最大為 $5k$ ，

$k=1$ **時，不得不切割片數最大為** 6

(4) 邊長為 6^k 時，不得不切割片數最大為 $8k+1$。

(5) n 為合數時 $n=xy$ $(n,x,y \in N)$ $(x,y \geq 2)$ $(2 \leq n \leq 27)$ $(n \neq 9)$，可以切到 d_1

(正三角形的第一個蛀點)，將所有組 x , y 的值找出後，可得**不得不切割片數最大 A 為所有[(邊長為 x 的 A) + (邊長為 y 的 A) − 1]的最小值**。

限制條件為： x 和 y **的切法中只能有一種沒切到第一個邊。**

2.質數

(1) 在 n 為 17 以下時，所有蛀點的 ***A* 和 *C* 相同**，但在 n 為 19 時 A 和 C 不同。

表 8.1：正三角形的邊長 n 為合數

n	D	D0	C	A
4	3	1	4	4
6	10	3	4	6
8	21	5	4	7
9	28	7	6	10
10	36	8	4	8
12	55	12	4	9
14	78	16	4	10
15	91	19	6	13
16	105	21	4	10
18	136	27	4	11
20	171	33	4	11
21	190	37	6	14
22	210	40	4	12
24	253	48	4	12
25	276	52	8	15
26	300	56	4	12
27	325	61	6	15

表 8.2：正三角形的邊長 n 為質數

n	D	D0	C	A
3	1	1	6	6
5	6	2	8	8
7	15	4	9	9
11	45	10	11	11
13	66	14	12	12
17	120	24	13	13
19	153	30	13	14
23	231	44	14	14

(二)正方形：

1.合數

(1) 邊長 n 為合數時 $(n \in N)$，可得 C (不得不切割片數最小)等於

邊長為其**最小正因數**(1除外)**的** C 。

(2) 邊長為 2^k 時，不得不切割片數最大為 $3k+1$ 。

(3) 邊長為 3^k 時，可得 k 為**偶數**，不得不切割片數最大為 $\frac{9k+2}{2}$ ，

k 為**奇數**，不得不切割片數最大為 $\frac{9k+3}{2}$

(4) 邊長為 6^k 時，可得 k 為**偶數**，不得不切割片數最大為 $\frac{15k+2}{2}$ ，

k 為**奇數**，不得不切割片數最大為 $\frac{15k+3}{2}$

(5) n 為合數時 $n = xy$ $(n,x,y \in N)$ $(x,y \geq 2)$ $(2 \leq n \leq 27)$ $(n \neq 9,12,15,25)$ ，可以切到 D_1 (正方形的第一個蛀點)，將所有組 x , y 的值找出後，可得**不得不切割片數最大 A 為所有[(邊長為 x 的 A) + (邊長為 y 的 A) − 1]的最小值**。

2.質數

(1) 在 n 為 11 以下時，所有蛀點的 ***A* 和 *C* 相同**，但在 n 為 13、17、23 時 A 和 C 不同。

表 8.3：正方形的邊長 n 為合數

n	*D*	*D0*	*C*	*A*
2	1	1	4	4
4	9	3	4	7
6	25	6	4	9
8	49	10	4	10
9	64	10	6	10
10	81	15	4	11
12	121	21	4	11
14	169	28	4	12
15	196	28	6	12
16	225	36	4	13
18	289	45	4	13
20	361	55	4	13
21	400	55	6	14
22	441	66	4	14
24	529	78	4	14
25	576	78	8	14
26	625	91	4	15
27	676	91	6	15

表 8.4：正方形的邊長 n 為質數

n	*D*	*D0*	*C*	*A*
3	4	1	6	6
5	16	3	8	8
7	36	6	9	9
11	100	15	11	11
13	144	21	11	12
17	256	36	12	13
19	324	45	13	13
23	484	66	13	14

表 8.1、8.2、8.3、8.4 分別為正三角形以及正方形，分成 n 為合數和 n 為偶數，因 n 為 20 以上，程式需執行一天以上，故在時間有限的情況下，目前驗證到 n=27。

二、第一個蛀點的不得不切割片數與不得不切割片數最大之關係

1. 在正三角形中， d_1(正三角形的第一個蛀點)的 T (不得不切割片數)，必定為 A (不得不切割片數最大)。

2. 在正方形中，D_1(正方形的第一個蛀點)**的T**(不得不切割片數)，**必定為A**(不得不切割片數最大)。

玖、未來展望

雖然我們更深入地探究、發掘並解決大部分的問題，卻還有未解決或未來可繼續研究的問題，我們做出以下的討論：

一、在邊長為合數時，**將邊長放大**，**不得不切割片數最大及最小與邊長之關係式是否仍成立**

1.當邊長放大為**三位數**時，**關係式是否仍成立？**

2.當邊長放大為**四位數**時，**關係式是否仍成立？**

二、找出邊長為質數時，計算出**不得不切割片數最大及最小**更好的方式

三、若將**邊長分為指定的數**進行切割，其切割片數與邊長之關係：

1.若**指定數為**2，其切割片數與邊長之關係，不得不切割片數最小又是多少？

2.若**指定數為**3，其切割片數與邊長之關係，不得不切割片數最小又是多少？

3.若**指定數為**4，其切割片數與邊長之關係，不得不切割片數最小又是多少？

四、探究邊長為正整數的正三角形與正方形，其切法經過**每一蛀點**時：

1.邊長為合數時，切割片數與邊長之關係；

2.邊長為質數時，切割片數與邊長之關係。

五、倘若邊長為正整數的正三角形圖形上**有兩個蛀點**，則不得不切割片數與這些蛀點之關係：

1.邊長為合數

(1)圖形上**每個**蛀點的切割情形；(2)**不得不**切割塊數最小及最大與邊長的關係

2.邊長為質數

(1)圖形上**每個**蛀點的切割情形；(2)**不得不**切割塊數最小及最大與邊長的關係

3.進一步探究這些蛀點彼此間之關係，同時這些蛀點的不得不切割片數最小及最大呈現在圖形上之規律。

六、探究邊長為正整數的**正六邊形**，如右圖 9.6.1

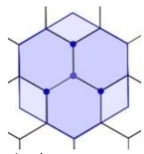


圖 9.6.1

1.邊長為合數

(1)圖形上**每個**蛀點的切割情形；(2)**不得不**切割片數最小及最大與邊長的關係

2.邊長為質數

(1)圖形上**每個**蛀點的切割情形；(2)**不得不**切割片數最小及最大與邊長的關係

拾、參考資料及其他

一、參考資料

[1] 游森棚(2015) 。布商與蛀蟲。科學研習月刊，NOV NO.54-11。

[2] 趙冠昕、羅垣鈞、陳沛穎(2019) 。活菱活現，獨菱風騷。第五十九屆全國科展國中組數學組。

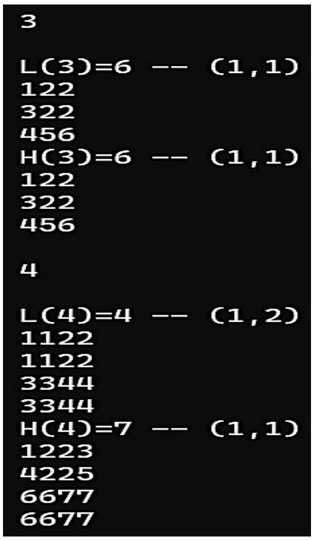
[3] 林妍辰、鄭琳易(2011) 。三角形中的三角形-探討三角形的總數。第五十一屆全國科展國中組數學組。

[4] 歐劭謙(2010) 。分分合合-圖形的分割與重組。第五十屆全國科展國小組。

[5] 謝瑄顥(2006) 。三角格世界裡的大漩渦-從三角格裡尋找一些相關的級數。第四十六屆全國科展國小組數學組。

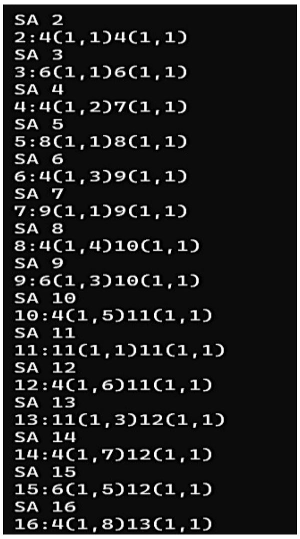
[6] 國中學生(2021) 。不得布剪。109 年度獨立研究競賽作品。台南市。

二、附錄：【因頁數限制，正方形程式碼與正三角形程式碼附於研究日誌簿】



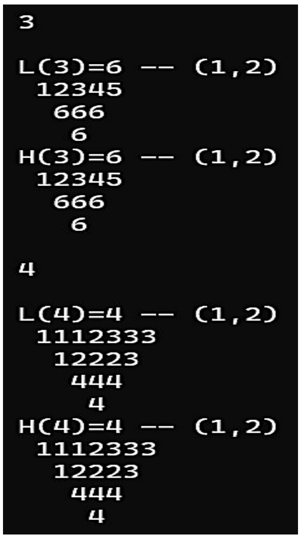
```
3

L(3)=6 -- (1,1)
122
322
456
H(3)=6 -- (1,1)
122
322
456

4

L(4)=4 -- (1,2)
1122
1122
3344
3344
H(4)=7 -- (1,1)
1223
4225
6677
6677
```

圖 10.1



```
SA 2
2:4(1,1)4(1,1)
SA 3
3:6(1,1)6(1,1)
SA 4
4:4(1,2)7(1,1)
SA 5
5:8(1,1)8(1,1)
SA 6
6:4(1,3)9(1,1)
SA 7
7:9(1,1)9(1,1)
SA 8
8:4(1,4)10(1,1)
SA 9
9:6(1,3)10(1,1)
SA 10
10:4(1,5)11(1,1)
SA 11
11:11(1,1)11(1,1)
SA 12
12:4(1,6)11(1,1)
SA 13
13:11(1,3)12(1,1)
SA 14
14:4(1,7)12(1,1)
SA 15
15:6(1,5)12(1,1)
SA 16
16:4(1,8)13(1,1)
```

圖 10.2



```
3

L(3)=6 -- (1,2)
 12345
   666
     6
H(3)=6 -- (1,2)
 12345
   666
     6

4

L(4)=4 -- (1,2)
 1112333
   12223
     444
       4
H(4)=4 -- (1,2)
 1112333
   12223
     444
       4
```

圖 10.3

```
3
3 6 6
4
4 4 4
5
5 8 8
6
6 4 6
7
7 9 9
8
8 4 7
9
9 6 10
10
10 4 8
11
11 11 11
12
12 4 9
13
13 12 12
14
14 4 10
15
15 6 13
16
16 4 10
```

圖 10.4

1.如上圖 10.1 及圖 10.2 為**正方形的程式碼所執行的結果**：

由圖 10.1 及圖 10.2 可以得知：當輸入(n)，

可得 C(不得不切割片數最小)及 A(不得不切割片數最大)的切割方法與相對蛀點位置。

2.如上圖 10.3 及圖 10.4 為**正三角形的程式碼所執行的結果**：

由圖 10.3 及圖 10.4 可以得知：當輸入(n)，

可得 C(不得不切割片數最小)及 A(不得不切割片數最大)的切割方法與相對蛀點位置。

【評語】030411

將布商與蛀蟲問題做延伸，對於三角形及正方形內部的所有點，考慮必要蛀點數計算不得不切割片數，得出不得不切割片數的最大值與最小值，作者們的考量方式減少了一些要討論的情況。對於邊長 n 的情形，討論合數、質數、2 的次方、3 的次方等情況，作者給出了許多不錯的結論，值得鼓勵。

作品海報

摘要

將一塊正三角形的布，沿圖形上節點即蛀點切割，且不管蛀蟲咬在哪一蛀點，分別切割。發現原圖形上所有蛀點，除去對稱性，留下必要蛀點，導出一般式。找出邊長為合數的情況下，不得不切割片數最小，同時在圖形上之分布。再利用邊長為某兩正整數切割後的相似形，找出邊長為兩數相乘的不得不切割片數最大與這兩數之關係。發現正三角形最上方第一個蛀點與正方形最左上方第一個蛀點的不得不切割片數必為不得不切割片數最大。

壹、研究動機

本題發想自布商與蛀蟲問題[1]。**主要探討蛀蟲咬在哪一點會造成布商最重的損失**，即每個蛀點去找出它不得不切割片數的最大值，也就是布商「不得不」切割片數最大。若延伸成正方形布，則相關規律與一般式又如何？

貳、研究目的

一、邊長為正整數的正三角形：圖形上每個蛀點的不得不切割片數；不得不切割片數最小及最大與邊長的關係。
二、邊長為正整數的正方形：圖形上每個蛀點的不得不切割片數；不得不切割片數最小及最大與邊長的關係 。
三、以GeoGebra動態幾何繪圖軟體繪製圖形操作介面予以呈現，方便操作說明。
四、將以上所找出的規律，運用數學邏輯，利用程式C++寫出執行驗證。

參、研究過程及方法

一、名詞定義：

1. n ：圖形的邊長。
2. D ：在圖形內，蛀蟲可以蛀的蛀點數量(不考慮邊上的交點)。
3. (1) **必要蛀點**：在所有蛀點中，除去對稱性，所剩下須考慮的蛀點；
   (2) $D0$ ：必要蛀點數。
4. (1) T ：在圖形內，特定一蛀點的所有切割情形下片數之最小值，稱為不得不切割片數；
   (2) C ：所有蛀點的T之最小值，稱為不得不切割片數最小；
   (3) A ：所有蛀點的T之最大值，稱為不得不切割片數最大；
   (4) L ：在T的情況下，其所有切割片中邊長的最大值，稱為邊長最大值。
5. $d_i(i=1,2,\cdots,m)$：正三角形上的蛀點標示。由左而右，由上而下的蛀點，且不考慮邊上的交點。
6. $D_i(i=1,2,\cdots,m)$：正方形上的蛀點標示。由左而右，由上而下的蛀點，且不考慮邊上的交點。

二、邊長為正整數的正三角形與正方形：

1.正三角形 (1) 圖形上每個蛀點的不得不切割片數：
例n=7，D=15，必要蛀點$D0$=4 ，其不得不切割情形如下

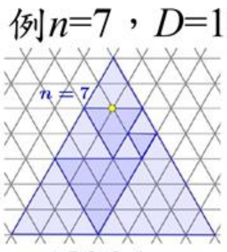


圖3.2.1
d_1 : $T=9$; $L=4$

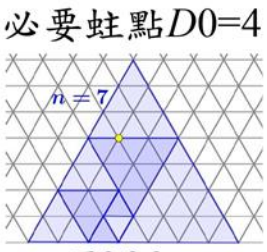


圖3.2.2
d_2 : $T=9$; $L=4$

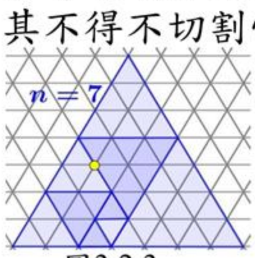


圖3.2.3
d_4 : $T=9$; $L=4$

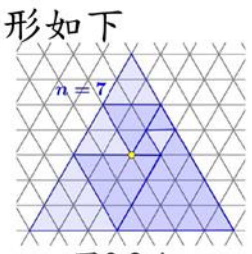


圖3.2.4
d_5 : $T=9$; $L=4$

(2) **不得不**切割片數最大A與邊長n的關係：

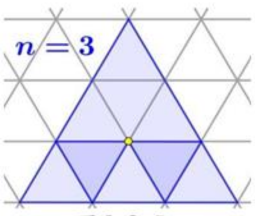


圖3.2.5
$n=3$; $A=6$

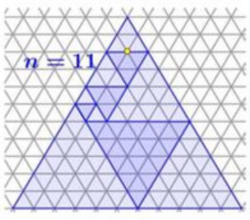


圖3.2.6
$n=11$; $A=11$

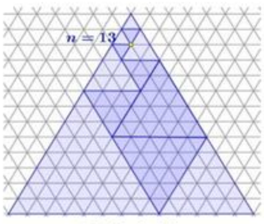


圖3.2.7
$n=13$; $A=12$

2.正方形 (1) 圖形上每個蛀點的不得不切割片數：例n=9，D=64，必要蛀點$D0$=10 ，其不得不切割情形如下

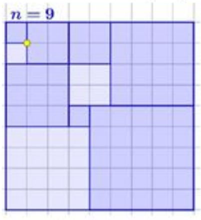


圖3.2.8
D_1 : $T=10$; $L=5$

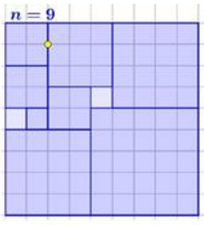


圖3.2.9
D_2 : $T=10$; $L=5$

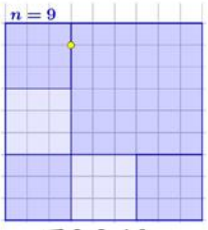


圖3.2.10
D_3 : $T=6$; $L=6$

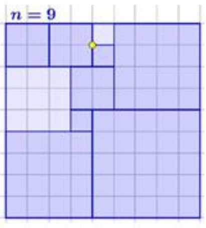


圖3.2.11
D_4 : $T=10$; $L=5$

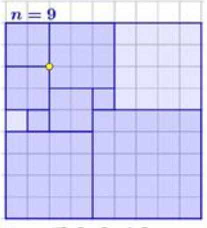


圖3.2.12
D_{10} : $T=10$; $L=5$

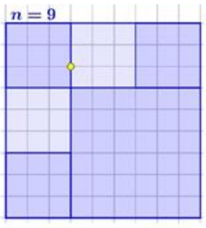


圖3.2.13
D_{11} : $T=6$; $L=6$

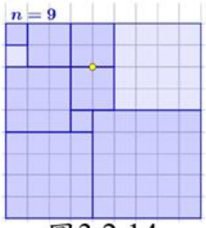


圖3.2.14
D_{12} : $T=10$; $L=5$

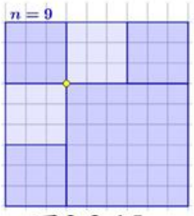


圖3.2.15
D_{19} : $T=6$; $L=6$

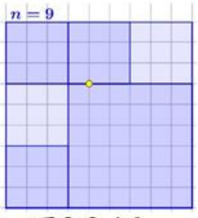


圖3.2.16
D_{20} : $T=6$; $L=6$

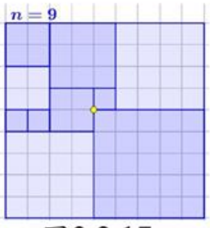


圖3.2.17
D_{28} : $T=10$; $L=5$

(2) **不得不**切割片數最大A與邊長n的關係：

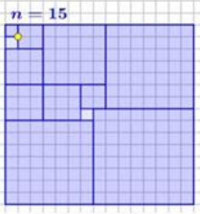


圖3.2.18
$n=15$; $A=12$

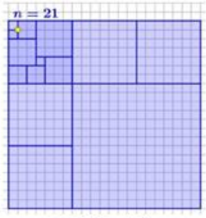


圖3.2.19
$n=21$; $A=14$

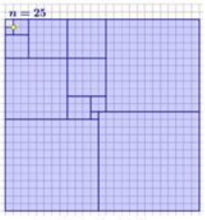


圖3.2.20
$n=25$; $A=14$

肆、研究結果

一、正三角形與正方形的不得不切割片數最小C：

表4.1.1：不得不切割片數最小C的說明

	正三角形		正方形	
邊長 n 為合數的不得不切割片數最小 C	質因數分解 $\rightarrow n=p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times p_3^{a_3}\times\ldots$ ， p_i 為質數， a_i 為自然數 $\rightarrow$不得不切割片數最小會等同邊長為 p_1 的不得不切割片數最小			
邊長 n 為質數的不得不切割片數最小 C	n	C	n	C
	2		2	4
	3	6	3	6
	5	8	5	8
	7	9	7	9
	11	11	11	11
	13	12	13	11
	17	13	17	12
	19	13	19	13
	23	14	23	13

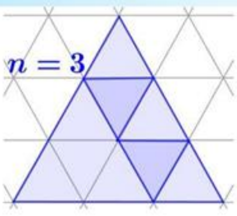


圖4.1.1

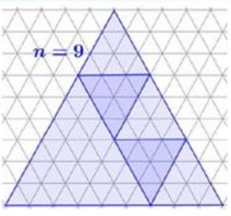


圖4.1.2

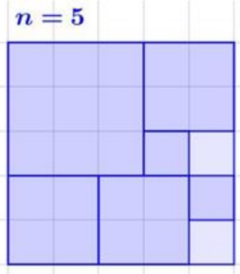


圖4.1.3

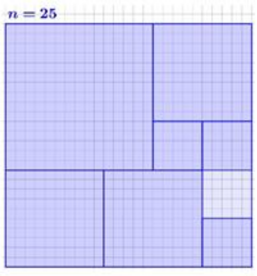


圖4.1.4

二、不得不切割片數最小C的蛀點D在圖形上的呈現：

1.n為合數

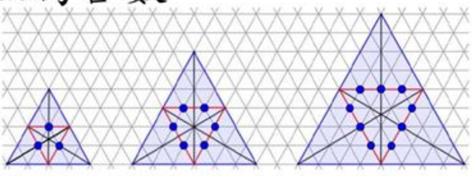


圖4.2.1

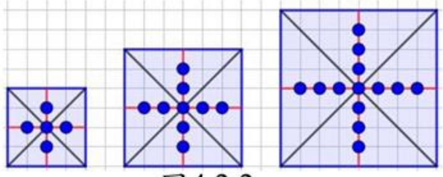


圖4.2.2

n的最小質因數為2時，不得不切割片數最小C的蛀點在圖上的呈現。

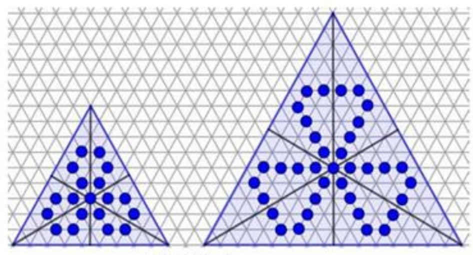


圖4.2.3

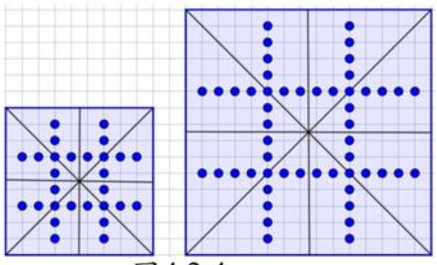


圖4.2.4

n的最小質因數為3時，不得不切割片數最小C的蛀點在圖上的呈現。

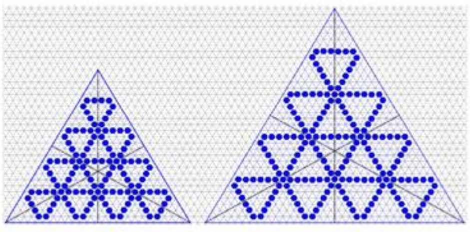


圖4.2.5

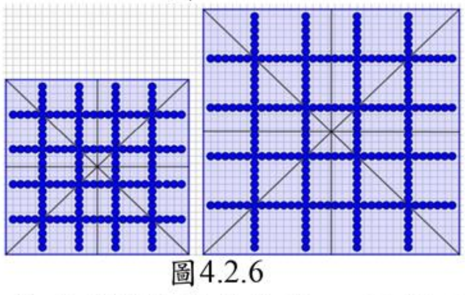


圖4.2.6

n的最小質因數為5時，不得不切割片數最小C的蛀點在圖上的呈現。

2.*n*為質數

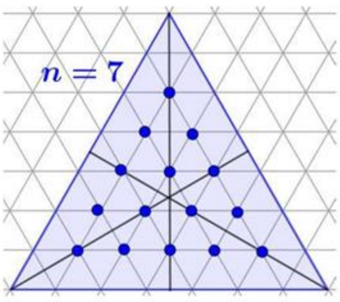


圖4.2.7

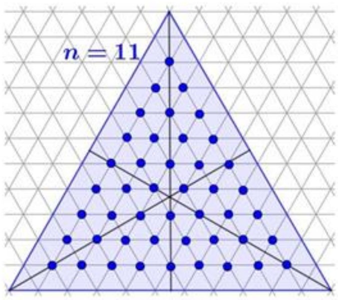


圖4.2.8

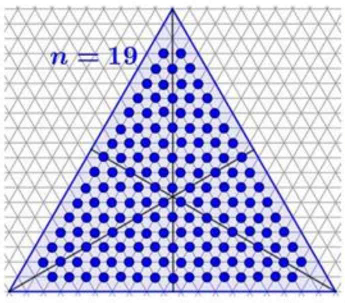


圖4.2.9

正三角形*n*為質數時，*C*的*D*在圖上的呈現。

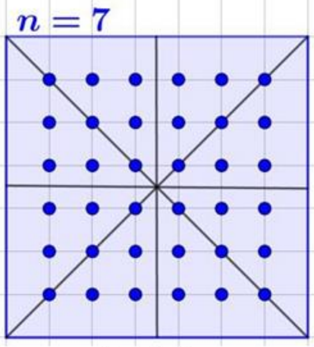


圖4.2.10

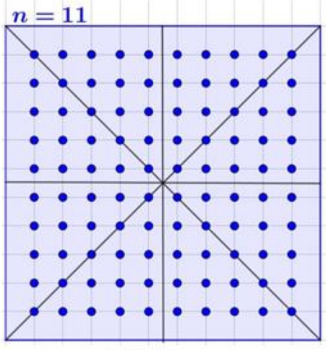


圖4.2.11

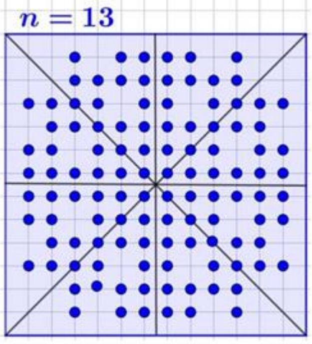


圖4.2.12

正方形*n*為質數時，*C*的*D*在圖上的呈現。

三、第一個蛀點(d_1及D_1)的不得不切割片數*T*與不得不切割片數最大*A*之關係：

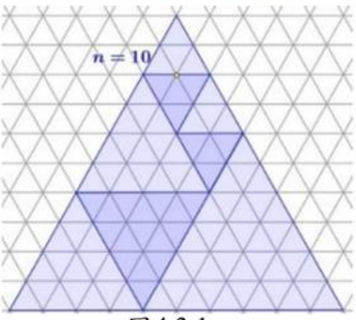


圖4.3.1
n=10 d_1的T

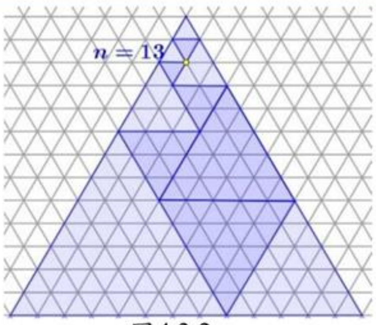


圖4.3.2
n=13 d_1的T

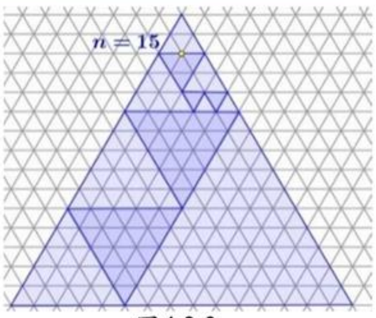


圖4.3.3
n=15 d_1的T

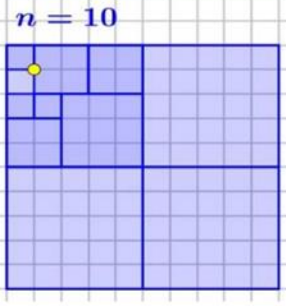


圖4.3.4
n=10 D_1的T

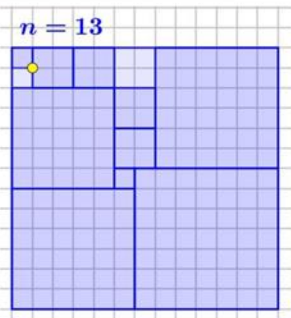


圖4.3.5
n=13 D_1的T

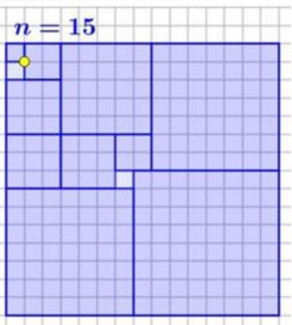
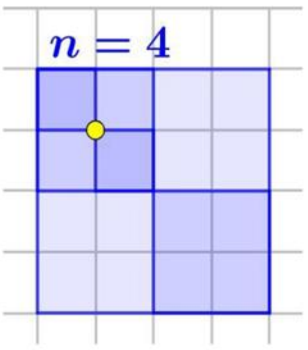


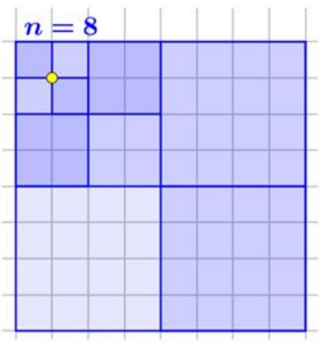
圖4.3.6
n=15 D_1的T

四、當*n*合數時，不得不切割片數最大*A*與*n*之關係：

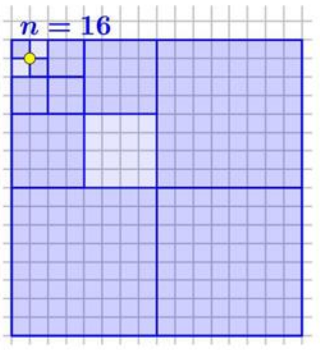
表4.4.1： 正方形$n=2^k$時，$A=3k+1$。



n=4　A=7

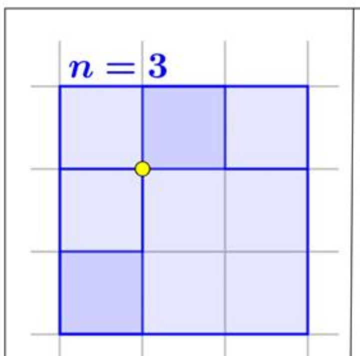


n=8　A=10

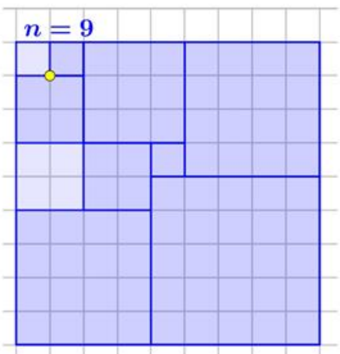


n=16　A=13

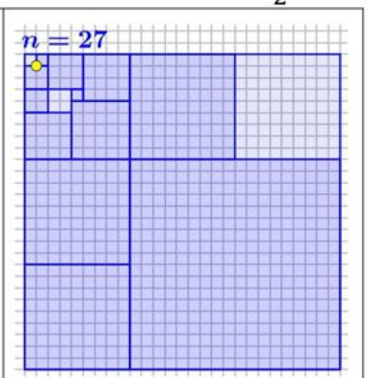
表4.4.2：正方形$n=3^k$時，k為偶數，$A=\frac{9k+2}{2}$；k為奇數，$A=\frac{9k+3}{2}$。



n=3　A=6

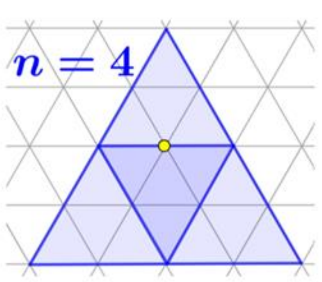


n=9　A=10

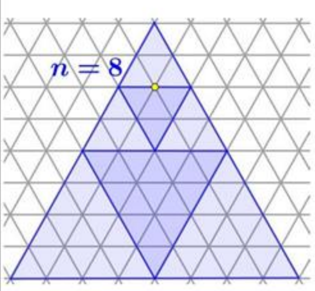


n=27　A=15

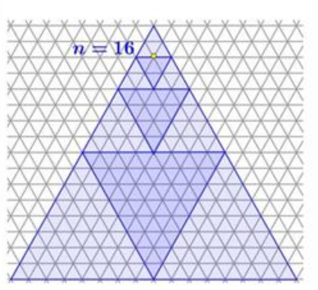
表4.4.3： 正三角形$n=2^k$時，$A=3k-2$。



n=4　A=4

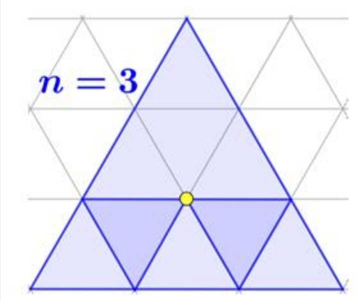


n=8　A=7

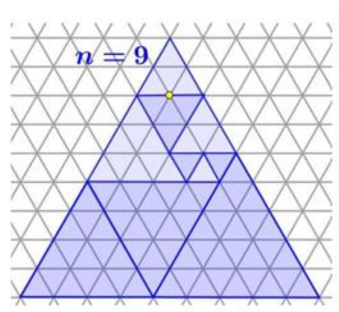


n=16　A=10

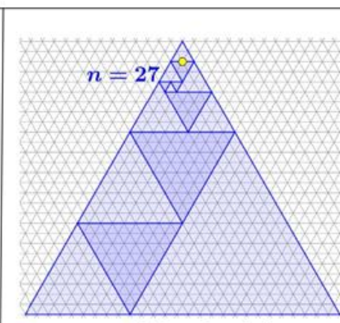
表4.4.4：正三角形$n=3^k$時，$k>1$，$A=5k$ ； $k=1$，$A=5k+1$。



n=3　A=6



n=9　A=10



n=27　A=15

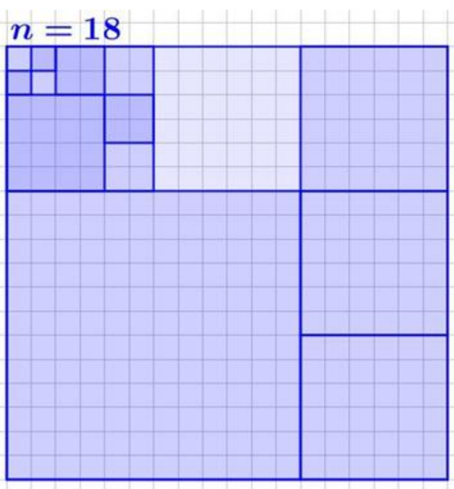


圖4.4.1

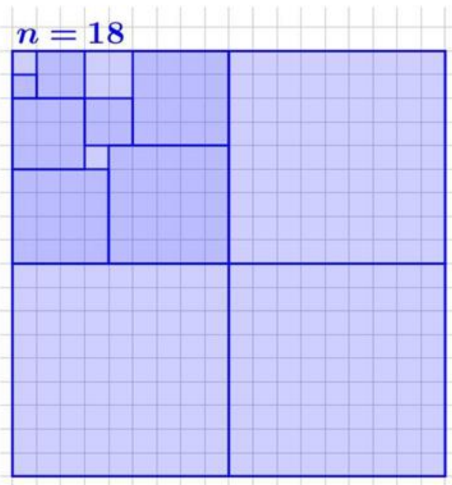


圖4.4.2

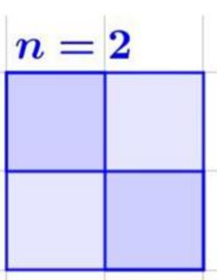


圖4.4.7

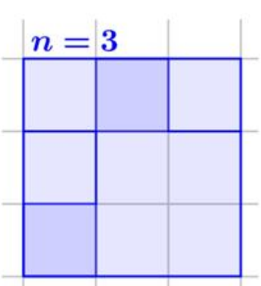


圖4.4.8

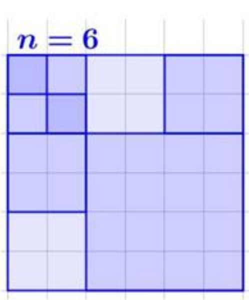


圖4.4.9

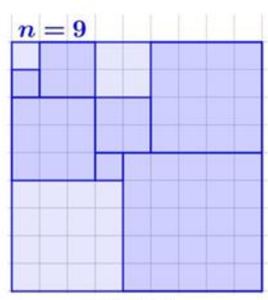


圖4.4.10

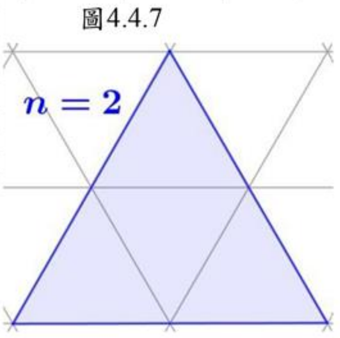


圖4.4.11

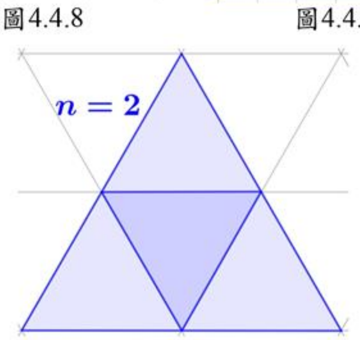


圖4.4.12

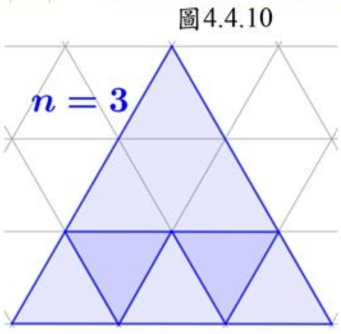


圖4.4.13

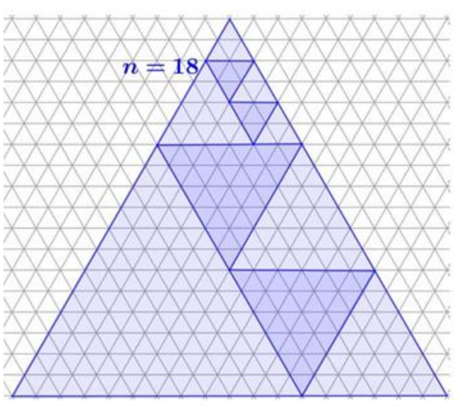


圖4.4.3

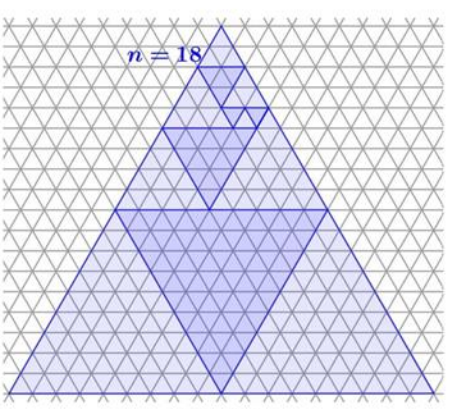


圖4.4.4

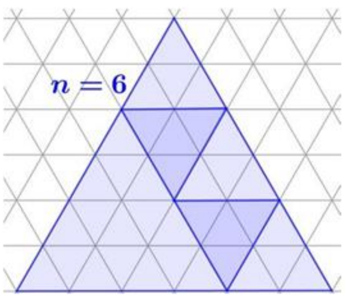


圖4.4.14

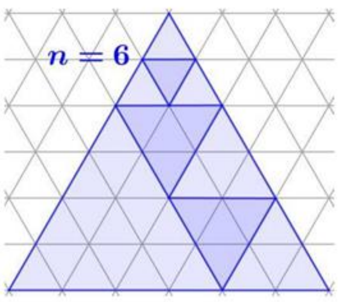


圖4.4.15

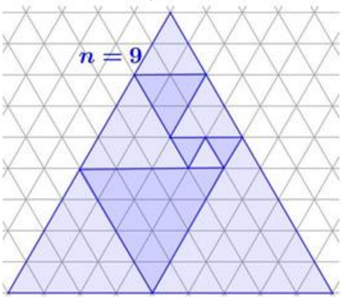


圖4.4.16

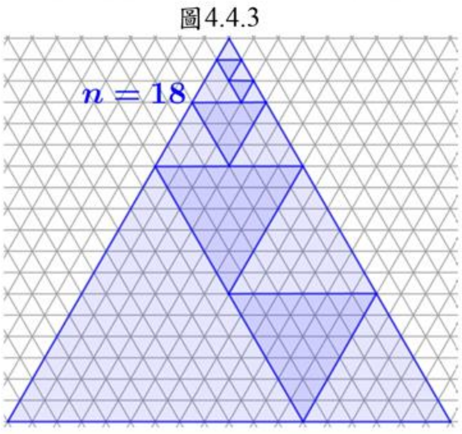


圖4.4.5

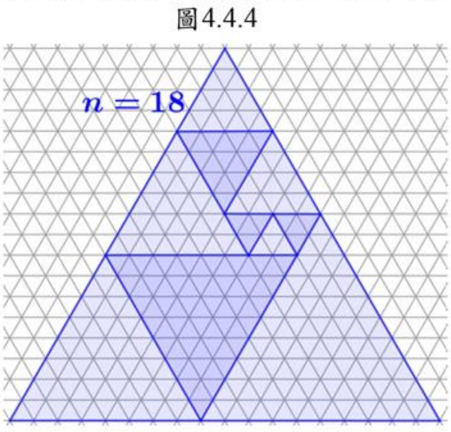


圖4.4.6

圖4.4.1　切割片數為n=3的A加n=6的A減1　即6+9-1=14

圖4.4.2　切割片數為n=2的A加n=9的A減1　即4+10-1=13

圖4.4.3　切割片數為n=3的A加n=6的A減1　即6+6-1=11

圖4.4.4　切割片數為n=2的切割片數加n=9的A減1　即4+10-1=13

圖4.4.5　切割片數為n=3的A加n=6的切割片數減1　即6+9-1=14

圖4.4.6　切割片數為n=2的A加n=9的A減1　即1+10-1=10

伍、結論

一、正三角形與正方形的不得不切割片數最小C：

1. n為合數：不得不切割片數最小C等於邊長n為其最小正因數(1除外)的C。
2. n為質數：邊長n放大時，不得不切割片數最小C漸增。

二、不得不切割片數最小C的蛀點數D在圖形上的呈現：

1. n為合數

   n的最小質因數為2時，圖形會分割成2^2個邊長為$\frac{n}{2}$的小正三角形及小正方形。

   n的最小質因數為3時，圖形會分割成3^2個邊長為$\frac{n}{3}$的小正三角形及小正方形。

   n的最小質因數為5時，圖形會分割成5^2個邊長為$\frac{n}{5}$的小正三角形及小正方形。

2. n為質數

(1) 正三角形：邊長n為17以下時，所有蛀點的C及A相同，但n為19時C及A不同。

(2) 正方形：邊長n為11以下時，所有蛀點的C及A相同，但n為13、17、23時C及A不同。

三、第一個蛀點(d_1及D_1)的不得不切割片數T與不得不切割片數最大A之關係：

在正三角形與正方形中，d_1 (正三角形的第一個蛀點)和D_1 (正方形的第一個蛀點)的T (不得不切割片數)，必定為A (不得不切割片數最大)。

四、當n為合數時，不得不切割片數最大A與n之關係：

1.正方形

(1) 邊長為2^k時，不得不切割片數最大為$3k+1$。

(2) 邊長為3^k時，可得k為**偶數**，不得不切割片數最大為$\frac{9k+2}{2}$，k為**奇數**，不得不切割片數最大為$\frac{9k+3}{2}$。

(3) 邊長為5^k時，可得k為**偶數**，不得不切割片數最大為$\frac{13k+2}{2}$，k為**奇數**，不得不切割片數最大為$\frac{13k+3}{2}$。

(4) 邊長n為合數且異於9,12,15,25並且大於1,小於等於30的自然數，$n=xy$其中x,y為不為1的自然數，
將所有組x,y的值找出後，可得**邊長n的A為所有(邊長為x的A)+(邊長為y的A)−1的最小值**。

2.正三角形

(1) 邊長為2^k時，不得不切割片數最大為$3k-2$。

(2) 邊長為3^k時，$k>1$時，不得不切割片數最大A為$5k$，**$k=1$時，不得不切割片數最大A為6。**

(3) 邊長為5^k時，不得不切割片數最大A為$7k+1$。

(4) 邊長n為合數且異於9並且大於1,小於等於27的自然數，$n=xy$其中x,y為不為1的自然數，
將所有組x,y的值找出後，可得**邊長n的A為所有(邊長為x的A)+(邊長為y切到第一個邊的切割片數最小值)−1的最小值**。**【可再細分成三類，附於研究日誌簿】**

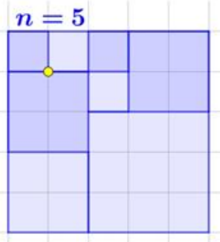


圖5.4.1

表5.1:正方形的n為合數

n	D	D0	C	A
2	1	1	4	4
4	9	3	4	7
6	25	6	4	9
8	49	10	4	10
9	64	10	6	10
10	81	15	4	11
12	121	21	4	11
14	169	28	4	12
15	196	28	6	12
16	225	36	4	13
18	289	45	4	13
20	361	55	4	13
21	400	55	6	14
22	441	66	4	14
24	529	78	4	14
25	576	78	8	14
26	625	91	4	15
27	676	91	6	15
28	729	105	4	15
30	841	120	4	15

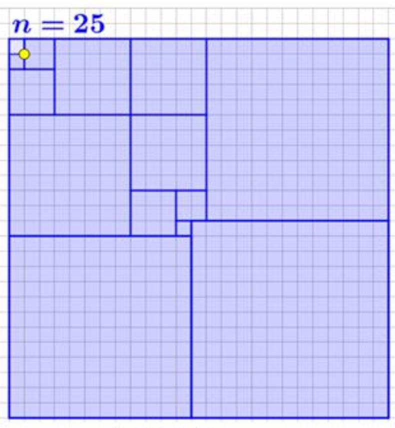


圖5.4.2

表5.2:正方形的n為質數

n	D	D0	C	A
3	4	1	6	6
5	16	3	8	8
7	36	6	9	9
11	100	15	11	11
13	144	21	11	12
17	256	36	12	13
19	324	45	13	13
23	484	66	13	14
29	784	105	14	15

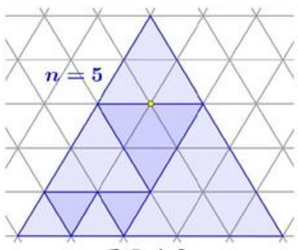


圖5.4.3

表5.3:正三角形形的n為合數

n	D	D0	C	A
4	3	1	4	4
6	10	3	4	6
8	21	5	4	7
9	28	7	6	10
10	36	8	4	8
12	55	12	4	9
14	78	16	4	10
15	91	19	6	13
16	105	21	4	10
18	136	27	4	11
20	171	33	4	11
21	190	37	6	14
22	210	40	4	12
24	253	48	4	12
25	276	52	8	15
26	300	56	4	12
27	325	61	6	15

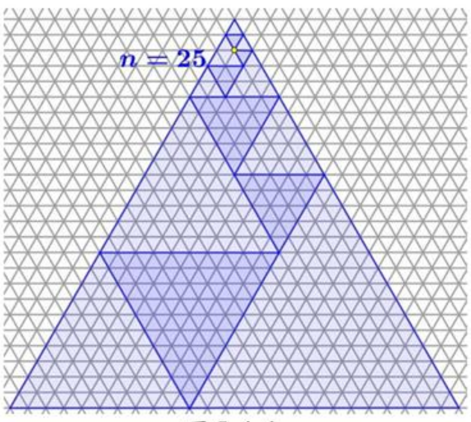


圖5.4.4

表5.4:正三角形的n為質數

n	D	D0	C	A
3	1	1	6	6
5	6	2	8	8
7	15	4	9	9
11	45	10	11	11
13	66	14	12	12
17	120	24	13	13
19	153	30	13	14
23	231	44	14	14

註:表5.1、5.2、5.3、5.4分別為正三角形與正方形，分成n為合數和質數。若n大於20，此時程式需執行多日，目前正三角形驗證到n=27、正方形驗證到n=30。

陸、未來展望

一、在n為合數時，**將邊長放大**為**三位數**、**四位數**時，**C及A與邊長之關係式是否仍成立?**

二、找出n為質數時，計算出**C及A**更好的方式

三、將**n分為指定的數**進行切割：若**指定數為3**，如右圖6.3.1，其切割片數與邊長之關係？

四、探究n為合數或質數的正三角形與正方形，其切法**經過每一蛀點**時切割片數與邊長之關係。

五、若n為正整數的正三角形圖形上**有兩個蛀點**，則T與這些蛀點之關係：

1.邊長為合數或質數: (1) 圖形上**每個**蛀點的不得不切割片數；(2)**C及A**與邊長的關係。

2.進一步探究這些蛀點彼此間之關係，和這些蛀點的**C及A**呈現在圖形上之規律。

六、探究n為合數或質數的**正六邊形**，如右圖6.6.1:

1.圖形上**每個**蛀點的不得不切割片數；2. **C及A**與邊長的關係。

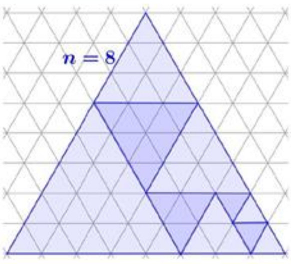


圖6.3.1

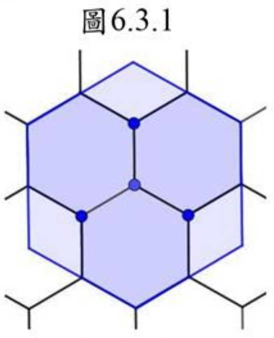


圖6.6.1

柒、參考資料與程式碼

一、參考資料

[1] 游森棚(2015) 。布商與蛀蟲。科學研習月刊，NOV NO.54-11。

[2] 國中學生(2021) 。不得布剪。109年度獨立研究競賽作品。台南市。

二、程式碼：【因頁數限制，正方形程式碼與正三角形程式碼附於研究日誌簿】

如右圖7.2.1、7.2.2、7.2.3、7.2.4為**正方形和正三角形的程式碼所執行的結果**

可以得知：當輸入(n)，可得C(不得不切割片數最小)及A(不得不切割片數最大)的切割方法與相對蛀點位置。

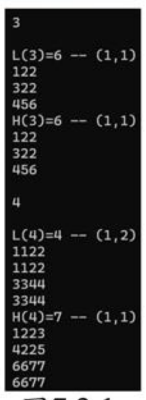


圖7.2.1

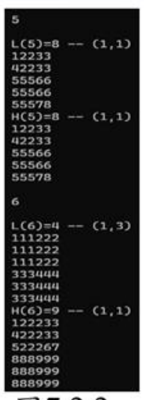


圖7.2.2


圖7.2.3


圖7.2.4