中華民國第63屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第一名

030410

兩組直線所構造的三角形外心軌跡性質

學校名稱：新北市立文山國民中學

作者：	指導老師：
國二 藍翊庭 國二 莊瑄	蕭偉智

關鍵詞：九點圓、旋轉縮放、動態幾何

得獎感言

關於科展的那些驚喜

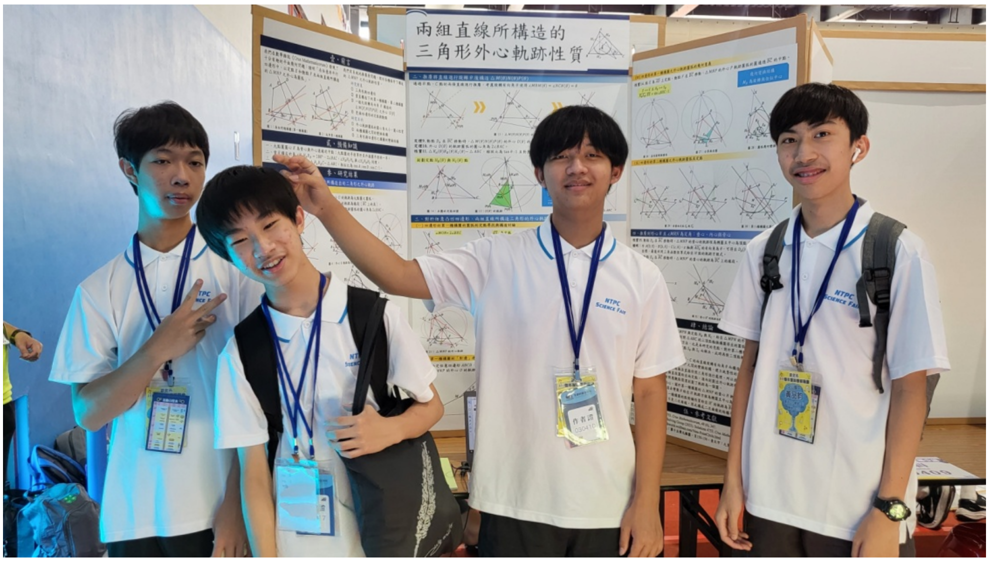
司儀喊出：「第一名——030410！」直到了此刻，030410這個編號才真正記在了我們的腦中，這意料之外的名次將本來要畫下的句點，刷地瞬間改成了驚嘆號「！」，甚至不顧使用規則的多加了好幾個驚嘆號。

回首去年九月開始做數學研究的懵懂，到今年七月全國科展的成熟，一年過去了，我們都改變了許多，成長了許多。有些深刻畫面自然而然烙印在了心裡，例如：起初因為無法理解的原文雜誌而動念放棄、找到非常適合的題目又有了動力、自學國中幾何工具、發現新的性質、為了解決問題而學習三角函數、證明定理、校內報告、模擬問答、新北市科展比賽、解析幾何、國展培訓等等，我們帶著研究成果，終於來到了全國科展的舞台，向評審與參觀的人們侃侃而談我們的有趣發現。

比賽期間風雨不斷，賽程還因颱風影響而提前。第一日我們跟另外一組同學出發，提早了一個梯次，順利完成報告與應答。比賽還發生小插曲，因為我們處理第二日評審的回應而討論到半夜，導致早晨沒有聽到鬧鐘而睡過頭，最後錯過遊覽車，在驚慌中打給已經帶前一隊到場的指導老師，同時請櫃檯叫計程車搭車趕去會場比賽。還好最後一刻趕上了檢錄，我們將四周吵雜的聲音拋到九霄雲外，準備好面對評審的問題，幸好從容圓滿完成了比賽。

頒獎典禮宣布我們獲得全國第一名的殊榮，真的非常驚喜！我們必須感謝指導老師帶領我們走入數學研究、學習怎麼做研究，還有訓練我們問答，還有同樣重要的事情——帶大家去吃誘人的基隆廟口夜市美食。我們還要謝謝家人們全力支持，因為科展影響了一些家庭活動的安排。

雖然科展研究過程占用許多的原本的休閒時間，但是我們並不後悔！那些犧牲的時光與科展研究的歷程及成果相比，那是微不足道的。科展對學習的幫助是巨大的！我們除了學習到的新知識之外，對於理解列式、計算速度、觀察繪圖，以及邏輯推理能力都變得更好了。若未來有機會再次參加，相信能更從容的面對研究的各種艱辛，更重視跟研究有關的事物。同時也會善用學到的解題思維、作圖驗證、製作海報和撰寫報告的技巧，應用在其他領域學習。面對無涯的學海，剛剛被加上的驚嘆號，已悄悄地被改成了刪節號「……」，未完待續。



全國科展數學科同校的兩組學生合照

作者合照（左起藍翊庭、莊珰）

頒獎典禮的師生合照

兩組直線所構造的三角形外心軌跡性質

摘要

本研究源於 2022 年數學雜誌《Crux Mathematicorum》的一道四邊形動態幾何問題，我們先將此問題設定為三角形，利用綜合幾何方法給出了兩種構圖條件下的三角形外心軌跡皆為圓弧，並且發現兩種圓弧的變換關係，也給出豐富有趣的性質。值得一提的是，分別對三角形的三個頂點輪換進行第一種構圖得出三個圓弧，這些圓弧恰可組合成三角形的九點圓，這是有趣的發現！回到原始問題的四邊形，我們構造了兩個三角形，透過巧妙轉換頂角與直徑圓變換而給出外心軌跡所在圓弧的兩個定點而解決此問題。最後推廣至鄰邊連線時，我們用雙射對應觀點簡潔刻劃了軌跡圓弧。重要的是，本研究處理四邊形的手法與三角形的是一致的，意味著證明手法具有推廣性。

壹、 前言

一、 研究動機與文獻探討

Luu Dong 在 2022 年 6 月的數學雜誌《Crux Mathematicorum》提出一個有趣的四邊形動態幾何問題 Problem 4753 [1]，如下所示。

Let $ABCD$ be a quadrilateral for which AB is not parallel to CD. Fix a point E on AD different from A, D, and let F be a variable point on the line BC.

Denote the projections of B and C on the line EF by M and N, respectively. If P is the intersection of the lines through M perpendicular to CD and through N perpendicular to AB, prove that the circumcenter of triangle MNP lies on a fixed circle as F moves along CD.

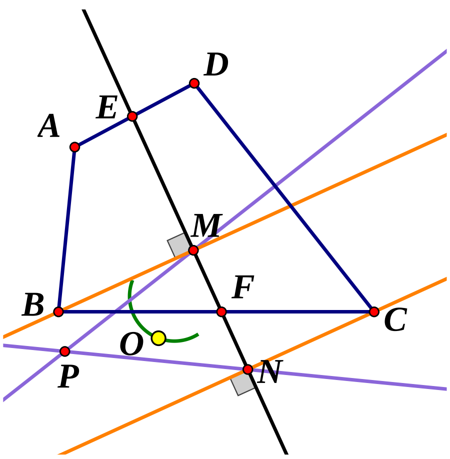


圖 1：原始問題

如下圖，原題目當 E 點為定點，F 點為動點時，$\triangle MNP$ 的外心 O 的軌跡是圓弧；當 E 為動點，F 點為定點時，外心 O 點的軌跡也是圓弧，然而兩個圓弧卻不同。

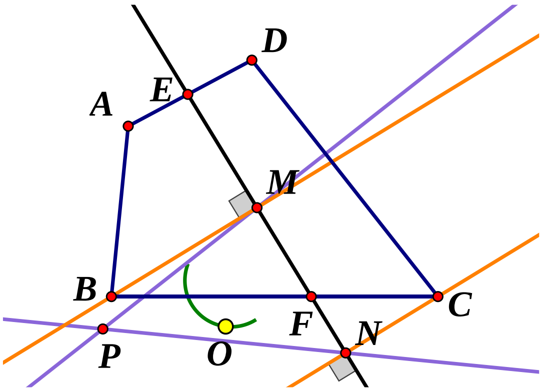


圖 2-1：E 為定點且 F 為動點

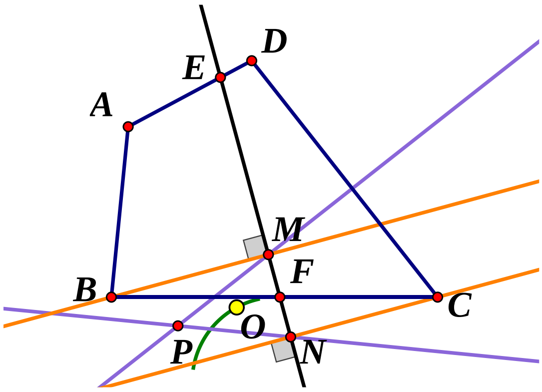


圖 2-2：E 為動點且 F 為定點

我們自 2022 年 9 月開始著手研究此問題，本問題的解答於 2023 年 1 月公告，共有 6 件徵答，投稿的人用了複雜的坐標解析幾何方法，並且需要使用電腦輔助計算，雜誌編輯提供了社群 UCLan Cyprus Problem Solving Group 的綜合幾何解法 [2]。本研究與雜誌提供解答都是用純幾何方法，我們透過兩個定點以及定角，再證明動點外心 O 軌跡為圓弧。然而，雜誌公告的定點是 S_B 點與 $\overline{BC}$ 的中點，本研究則是對稱的 S_B 與 S_C 點，雜誌的作法是無法觀察到外心軌跡圓弧與 $\triangle BXC$ 的九點圓之關係與性質，另外雜誌解法僅針對原問題而沒有延伸探討，例如：圓弧的圓心在何處？半徑長度多長？圓周角度數多大？這些都是有趣的主題。

對於四邊形 $ABCD$，在構造法部分，我們將「過 M 點作 $\overline{CD}$ 的垂線且過 N 點作 $\overline{AB}$ 的垂線，構造的 $\triangle MNP$ 的外心 O 點」稱為第一種構圖，創新設定為「過 M 點作 $\overline{AB}$ 的垂線且過 M 點作 $\overline{CD}$ 的垂線，構造的 $\triangle MNP'$ 的外心 O' 點」稱為第二種構圖，這兩種構圖的差異性與關連性為何？此外，E 點與 F 點原題設定分別在對邊上，若分別在鄰邊呢？

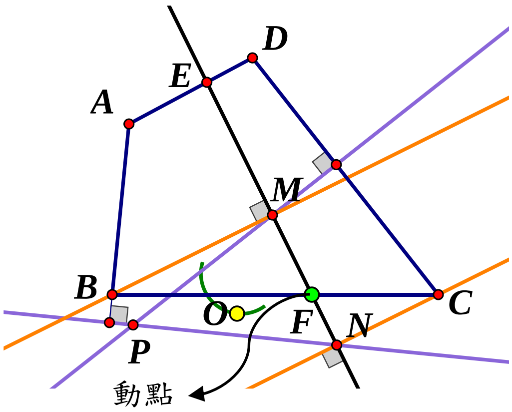


圖 3-1：第一種構圖

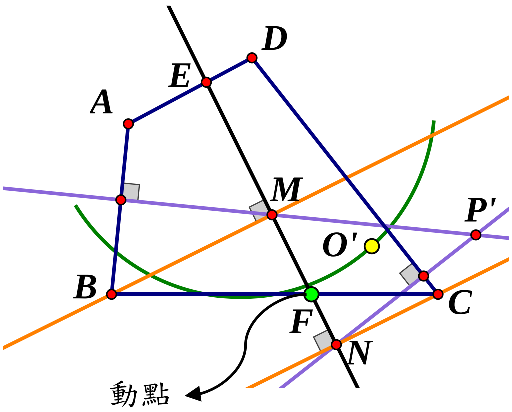


圖 3-2：第二種構圖

我們可考慮將四邊形 $ABCD$ 退化成三角形 ABC，分析第一種構圖下的 $\triangle MNP$ 的外心 O 點軌跡，以及第二種構圖下的 $\triangle MNP'$ 的外心 O' 點軌跡的差異性與關連性。我們發現這個問題可以推廣延伸的方向極為豐富，於是展開以下研究。

二、 研究目的

（一） 對於任意三角形，探討兩組直線所構造出的三角形之外心軌跡

1. 針對三角形的三個頂點方向，刻劃第一種構圖的 $\triangle MNP$ 之外心軌跡為圓弧，並給出其圓心角度數。
2. 針對三角形的三個頂點方向，刻劃第二種構圖的 $\triangle MNP'$ 之外心軌跡為圓弧，並給出其圓心角度數。
3. 探討第一種構圖與第二種構圖的外心軌跡圓弧的變換結構。

（二） 對於任意三角形，推廣將兩組直線進行旋轉 θ 後構造 $\triangle M(\theta)N(\theta)P(\theta)$，探討第一種構圖與第二種構圖下的外心圓弧、外心連線三角形性質以及變換結構。

（三） 對於任意四邊形，探討兩組直線所構造出的三角形之外心軌跡

1. 對邊連線條件下，刻劃第一種構圖的 $\triangle MNP$ 之外心軌跡為圓弧，並給出其圓心角度數。
2. 探討四邊形與三角形的外心軌跡圓弧之差異。
3. 鄰邊連線條件下，刻劃第一種構圖的 $\triangle MNP$ 之外心軌跡為圓弧，並與對邊連線條件下進行比較。
4. 刻劃定點與動點互換後的 $\triangle MNP$ 之外心軌跡。
5. 刻劃第二種構圖的 $\triangle MNP'$ 之外心軌跡。

貳、 研究設備與器材

幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0 軟體。

參、　預備知識

定義 1. (九點圓) 平面上 $\triangle ABC$ 的各邊中點 M_A、M_B、M_C，各邊上的高之垂足點 H_A、H_B、H_C，以及三個頂點與垂心的連線之中點 T_A、T_B、T_C 共圓，稱為九點圓，其圓心 K 為垂心與外心連線的中點。

預備性質 2. [3][4]

(1) 垂心 H 是 $\triangle H_AH_BH_C$ 的內心。

(2) $\angle H_CH_AH_B = 180° - 2\angle BAC$，$\angle H_BH_CH_A$ 與 $\angle H_AH_BH_C$ 同理。

(3) 點 T_A 平分弧 H_BH_C，點 T_B 與 T_C 同理。

(4) $\triangle AH_BH_C \sim \triangle H_ABH_C \sim \triangle H_AH_BC \sim \triangle ABC$，其相似比為 $\cos A : \cos B : \cos C : 1$。

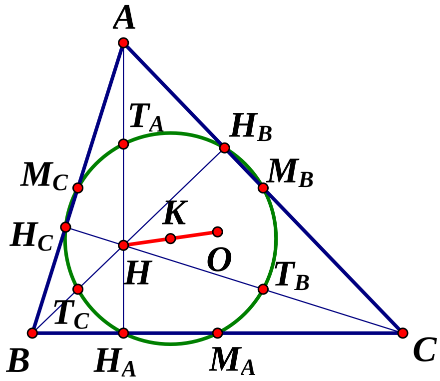


圖 4：九點圓

(5) 點 M_A 是 $\triangle BH_BC$ 的外心，也是 $\triangle BH_CC$ 的外心，其餘中點同理。

(6) $\triangle ABC$ 之九點圓的半徑等於其外接圓半徑的一半。

預備性質 3. (四點共圓)

(1) 四邊形 $ABCD$ 中，若 $\angle BAC = \angle BDC$，若且唯若 A、B、C、D 四點共圓。

(2) 四邊形 $ABCD$ 中，若 $\angle DAB + \angle BCD = 180°$，若且唯若 A、B、C、D 四點共圓。

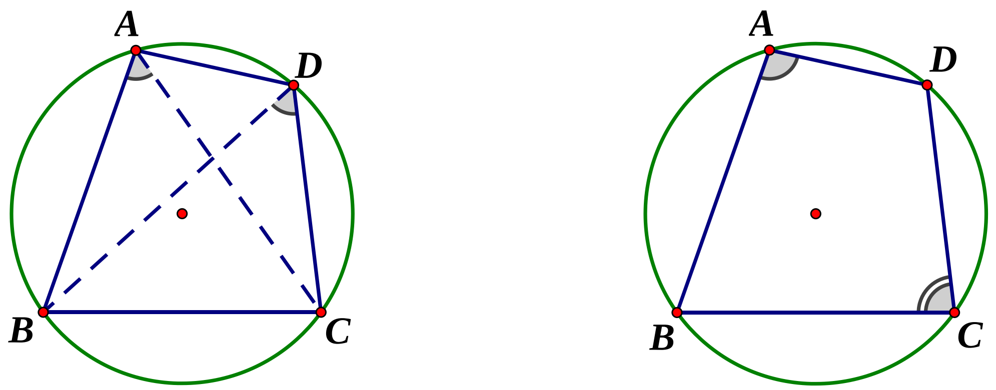


圖 5：四點共圓

肆、 研究過程與結果

一、 對於任意三角形，由兩組直線所構造三角形的外心軌跡

（一） 三角形的第一種構圖之外心軌跡

我們將原問題的四邊形退化成三角形進行討論，結果發現非常漂亮的結果。

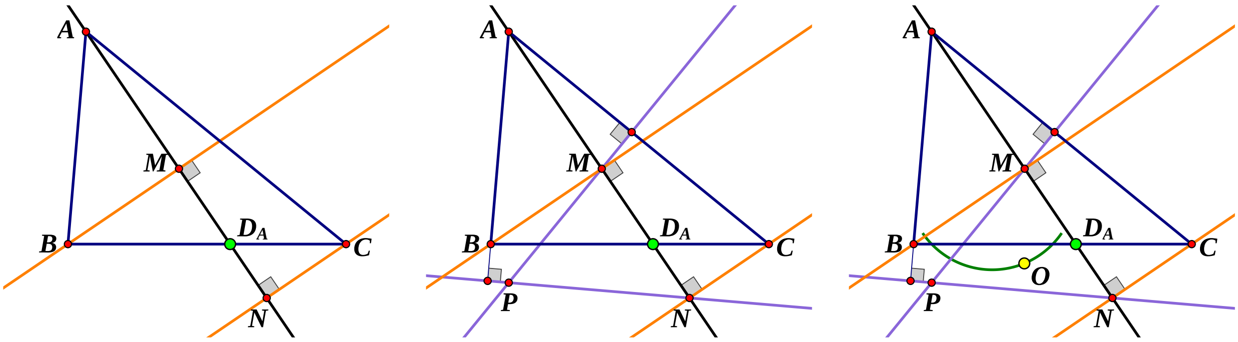


圖 6：三角形構圖步驟

如上圖，給定任意 $\triangle ABC$，在 $\overline{BC}$ 上取一動點 D_A，分別過 B 點、C 點作 $\overleftrightarrow{AD_A}$ 的垂線，垂足分別為 M 點、N 點。再過 M 點作 $\overleftrightarrow{AC}$ 的垂線，過 N 點作 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線，兩線交於 P 點，取 $\triangle MNP$ 的外心 O，點 O 為一動點。

考慮動點 D_A 在 $\overline{BC}$ 移動時，外心 O 的軌跡。我們先分析 $\triangle MNP$ 的頂點 M 與 N 的軌跡，再巧妙透過多次四點共圓的技巧給出外心 O 的軌跡。

性質 1：動點 D_A 在 $\overline{BC}$ 移動時，$\triangle MNP$ 的外心 O 的軌跡為九點圓之圓弧。

證明：

1. 如右圖，因為 $\angle AP_BP = \angle AP_CP = 90°$，所以 $\angle MPN = \angle BAC$，又 O 點為 $\triangle MNP$ 的外心，可得 $\angle OMN = \frac{180°-2\angle MPN}{2} = \frac{180°-2\angle BAC}{2} = 90° - \angle BAC$。再得 $\angle BMO = 90° - \angle OMN = \angle BAC$。（註：若 $\angle BAC > 90°$ 時，則 $\angle OMN = \angle BAC - 90°$，不影響後續論證推理）

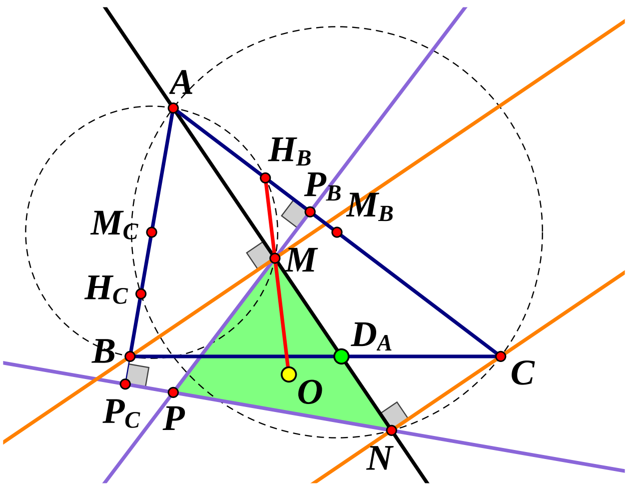


圖 7-1：三點共線

2. 因為 $\angle AMB = 90°$，所以動點 M 在以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓上；同理，動點 N 在以 $\overline{AC}$ 為直徑的圓上。令 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}$ 上的高的垂足為 H_C，$\overline{AC}$ 上的高的垂足為 H_B，因

為 A、H_B、M、B 共圓，所以 $\angle H_BMB + \angle BAC = 180°$，又 $\angle BMO = \angle BAC$，得出 H_B、M、O 恆三點共線。再考慮 $\overline{AC}$ 為直徑的圓，A、H_C、N、C 共圓，$\angle H_CNC + \angle BAC = 180°$，又 $\angle ONC = 90° + \angle ONM = 90° + (90° - \angle BAC) = 180° - \angle BAC$，可得 $\angle ONC = \angle H_CNC$，得出 H_C、O、N 恆三點共線。

3. 因為 H_B、M、O 共線且 H_C、O、N 共線，所以 $\angle H_BOH_C = 180° - \angle MON = 180° - 2\angle MPN = 180° - 2\angle BAC$。考慮 $\overline{BC}$ 上的高的垂足為 H_A，由垂足三角形性質有 $\angle H_CH_AB = \angle H_BH_AC = \angle BAC$，得出 $\angle H_BH_AH_C = 180° - 2\angle BAC = \angle H_BOH_C$。注意到 H_A、H_B 與 H_C 為定點，因此外心 O（動點）恆在 $\triangle ABC$ 的九點圓上。

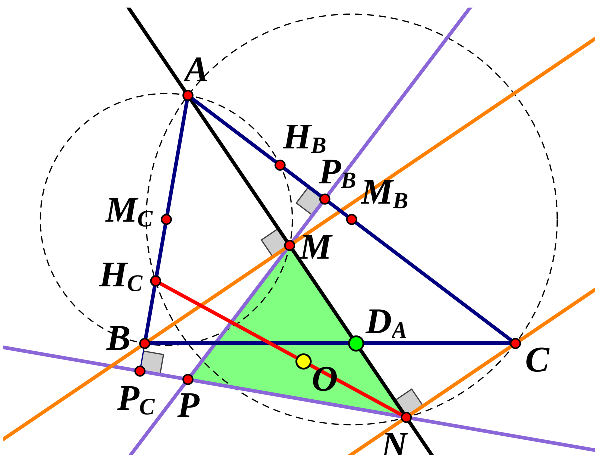


圖 7-2：三點共線

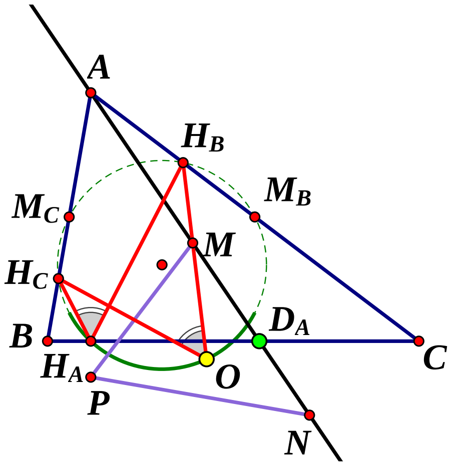


圖 8：外心 O 在九點圓上

□

在性質 1 中，已知 $\triangle MNP$ 的頂點 M、N 的軌跡，同時也給出外心 O 的軌跡，我們好奇頂點 P 的軌跡是什麼？有趣的是，P 恆落在 $\overline{BC}$ 上的高上。

性質 2：動點 D_A 在 $\overline{BC}$ 移動時，$\triangle MNP$ 的頂點 P 的軌跡為線段（$\overline{BC}$ 上的高）。

證明：先證明 P、H_A、M、N 共圓。由性質 1 可知 $\angle MPN = \angle BAC$，考慮 $\angle MH_AN = \angle MH_AC + \angle CH_AN$，又由 $\overline{AC}$ 為直徑的圓可得 $\angle CH_AN = \frac{\widehat{CN}}{2} = \angle CAN$ 且由 $\overline{AB}$ 為直徑的圓可得 A、M、H_A、B 共圓，所以 $\angle MH_AC = \angle NAB$，所以 $\angle MH_AN = \angle BAC = \angle MPN$，得出 P、H_A、M、N 共圓。第二，$\angle PH_AN = \frac{\widehat{PN}}{2} =$

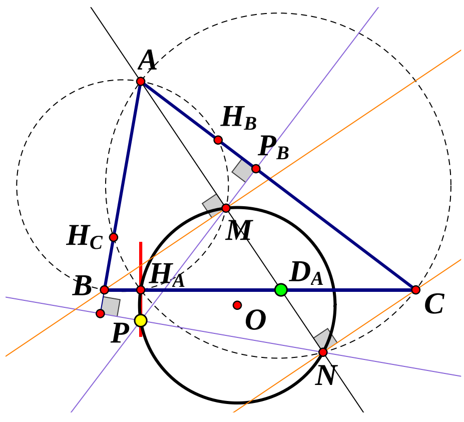


圖 9：P 點軌跡

$\angle PMN$，對頂角 $\angle PMN = \angle P_B MA$，又 $\angle CH_A N = \angle CAN$，因此 $\angle CH_A P = \angle CH_A N + \angle NH_A P = \angle CAN + \angle P_B MA = 90°$，即 $\overline{PH_A} \perp \overline{BC}$。

□

引理 3：若 V_A、V_B、V_C 分別為 $\overline{AH}$、$\overline{BH}$、$\overline{CH}$ 的中點，則 $\triangle V_A V_B V_C \sim \triangle ABC$。

證明：V_A、V_B、V_C 分別為 $\overline{AH}$、$\overline{BH}$、$\overline{CH}$ 的中點，可得出 $\overline{V_A V_B} \parallel \overline{AB}$、$\overline{V_B V_C} \parallel \overline{BC}$、$\overline{V_C V_A} \parallel \overline{CA}$，所以得出 $\triangle V_A V_B V_C \sim \triangle ABC$。

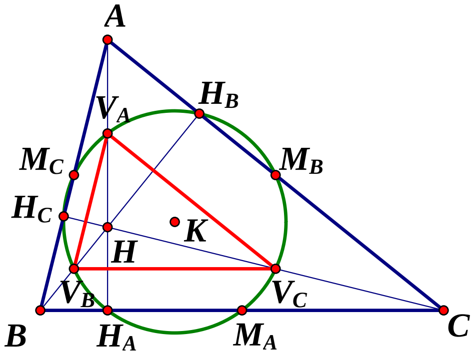


圖 10：九點圓性質

□

性質 4：動點 D_A 在 $\overline{BC}$ 移動時，$\triangle MNP$ 的外心 O 的軌跡圓弧的圓心角為 $2\angle BAC$。

證明：在性質 1 中我們已經證明外心 O 的軌跡九點圓的圓弧，因此如下圖考慮以下兩種情形找出圓弧的端點，當動點 D_A 分別與頂點 B 與 C 重合，可得出兩端點，即 $\triangle ABC$ 的九點圓分別與 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 上的高之交點 O_1 與 O_2，可得出 $\angle O_1 P O_2 = 180° - \angle BAC$。令九點圓圓心為 K 點，由引理 3 可得 $\angle O_1 K O_2 = 2\angle BAC$。

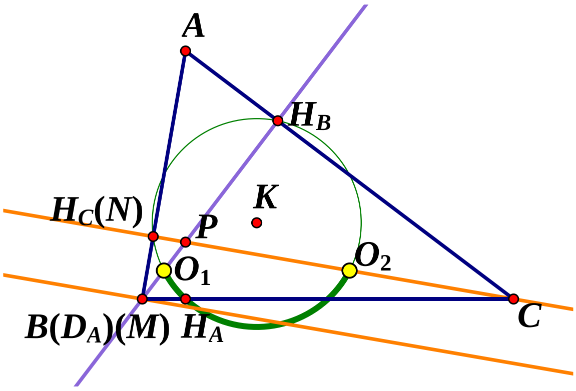


圖 11-1：圓弧的左端點 O_1

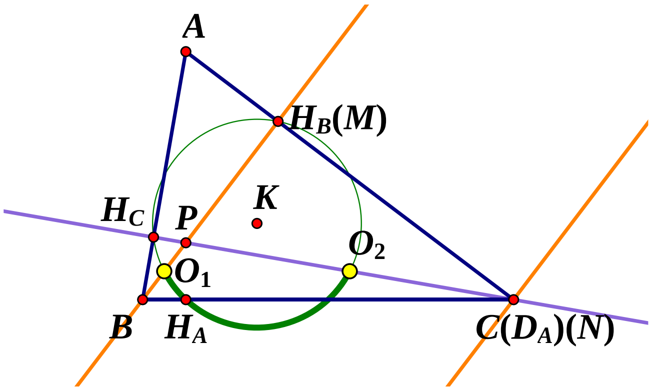


圖 11-2：圓弧的右端點 O_2

□

如下圖，我們分別在 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上取動點 D_A、D_B、D_C，透過性質 1 與性質 4 可推出三個圓弧合併即為 $\triangle ABC$ 的九點圓，這個發現非常有趣也很驚喜。

我們搜尋線上數學百科全書 Wolfram MathWorld 網站關於九點圓的資料[3]，並沒有發

現此構圖或性質，這是本研究的亮點！此做法也可以視作九點圓的另類構造法。

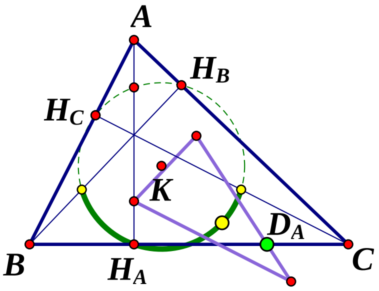


圖 12-1：D_A 動點

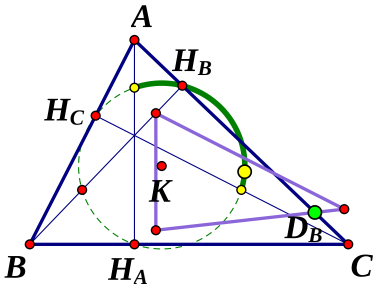


圖 12-2：D_B 動點

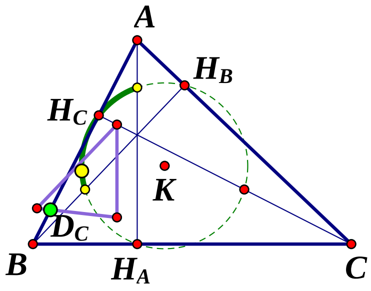


圖 12-3：D_C 動點

（二） 三角形的第二種構圖之外心軌跡

我們將構造法進行改變。如下圖，前面的作法是過 M 點作 $\overleftrightarrow{AC}$ 的垂線，過 N 點作 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線，兩線交於 P 點，考慮改成過 M 點作 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線，過 N 點作 $\overleftrightarrow{AC}$ 的垂線，兩線交於 P' 點，取 $\triangle MNP'$ 的外心 O'。兩種構圖方式得出的外心軌跡不相同，但具有關聯性，我們接下來繼續探究其中的幾何樣式與性質。

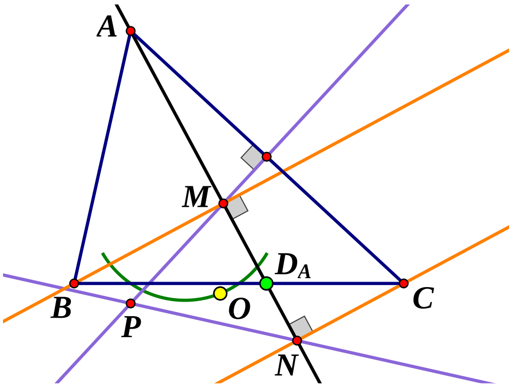


圖 13-1：第一種構圖

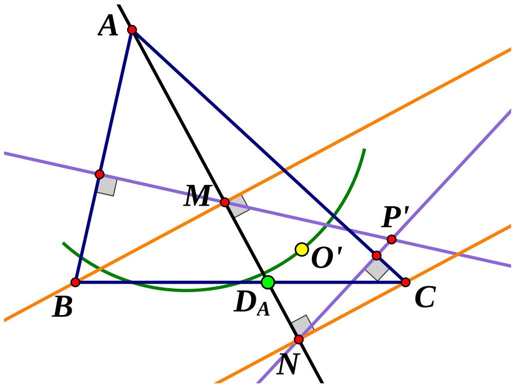


圖 13-2：第二種構圖

在性質 1 的 $\triangle MNP$ 的外心 O 的軌跡的重要關鍵是證明動點 O 與三個定點 H_A、H_B 與 H_C 恆四點共圓（第一種構圖）。變成第二種構圖後，如何找出類似的定點就是關鍵，我們利用 GSP 軟體進行多次實驗，並給出了第二種構圖的兩個定點為 S_B 與 S_C 點，其中 S_B 點為 $\overleftrightarrow{H_AH_C}$ 與以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓之交點，S_C 點為 $\overleftrightarrow{H_AH_B}$ 與以 $\overline{AC}$ 為直徑的圓之交點，以下是我們的證明。

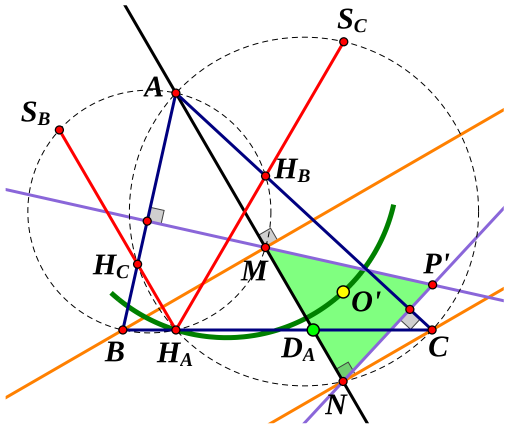


圖 14：第二種構圖的定點

性質 5：動點 D_A 在 $\overline{BC}$ 移動時，$\triangle MNP'$ 的外心 O' 的軌跡為圓弧，其圓心角為 $2\angle BAC$。

證明：

1. 如下圖，仿照性質 1 的方法可得 $\angle MP'N = \angle BAC$，又 O' 點為 $\triangle MNP'$ 的外心，$\angle O'MN = 90° - \angle BAC$，再得 $\angle BMO' = 90° + (90° - \angle BAC) = 180° - \angle BAC$。因為 H_A 與 H_C 為高的垂足，所以 $\angle H_cH_AB = \angle BAC$ 又 $\angle BMS_B = \frac{\widehat{S_BB}}{2} = \angle H_cH_AB$，得出 $\angle BMS_B = \angle BAC$，所以 $\angle BMS_B + \angle BMO' = 180°$，故 S_B、M、O' 恆三點共線。再考慮 S_C、N、O' 三點，$\angle O'NM = \angle O'MN = 90° - \angle BAC$，所以 $\angle O'NC = 90° - (90° - \angle BAC) = \angle BAC$，又 $\angle CNS_C = \frac{\widehat{S_CC}}{2} = \angle H_BH_AC = \angle BAC$，因此 S_C、N、O' 恆三點共線。
2. 因為 S_B、M、O' 共線且 S_C、O'、N 共線，所以 $\angle S_cO'S_B = 180° - \angle MO'N = 180° - 2\angle MP'N = 180° - 2\angle BAC$。由垂足三角形性質有 $\angle S_BH_AS_C = 180° - 2\angle BAC = \angle S_cO'S_B$。注意到 H_A、S_B 與 S_C 為定點，因此外心 O'（動點）恆在 $\triangle S_BS_AH_A$ 的外接圓上，也就是 H_A、S_B、S_C 與 O' 四點共圓。

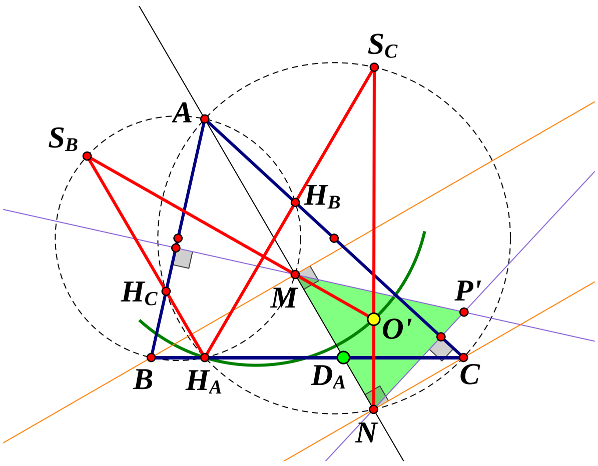


圖 15-1：三點共線

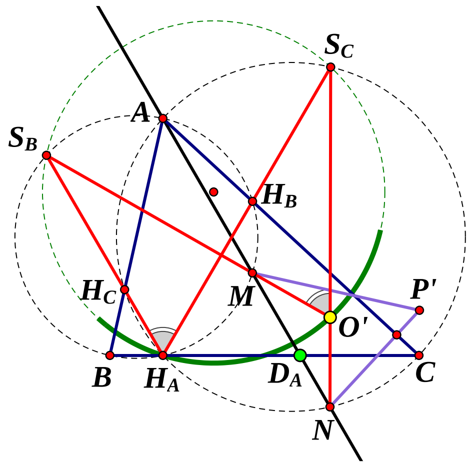


圖 15-2：外心 O' 的軌跡為圓弧

3. 注意到 $\angle AH_AS_B = \angle AH_AS_C = 90° - \angle A$，可得 $\frac{\widehat{S_BA}}{2} = \angle AH_AS_B = \angle AH_AS_C = \frac{\widehat{H_BA}}{2}$，即 S_B 為 H_B 關於 $\overline{AB}$ 的對稱點，同理 S_C 為 H_C 關於 $\overline{AC}$ 的對稱點。如下圖分別考慮 $\overline{AD_A}$ 分別與 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 重合可得出圓弧的兩個端點 O_1' 與 O_2'。由上可知 $\widehat{S_BS_C} =$

$2\angle H_CH_AH_B = 2(180° - 2\angle BAC)$，又 $\angle BAC = \angle S_CFO'_2 = \frac{\widehat{S_BO'_1}+\widehat{S_CO'_2}}{2}$，所以 $\widehat{S_BO'_1} + \widehat{S_BO'_2} = 2\angle BAC$，因此 $\widehat{O'_1O'_2} = 360° - 2(180° - 2\angle BAC) - 2\angle BAC = 2\angle BAC$。

4. 再分別 $\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上取動點 D_B、D_C，依相同作圖步驟構造出兩個三角形的外心，並且描繪其圓弧軌跡，其圓心角分別為 $2\angle CBA$ 與 $2\angle BCA$，如下圖，與第一種構圖不同的是，第二種構圖的三個圓弧並非同一個圓。

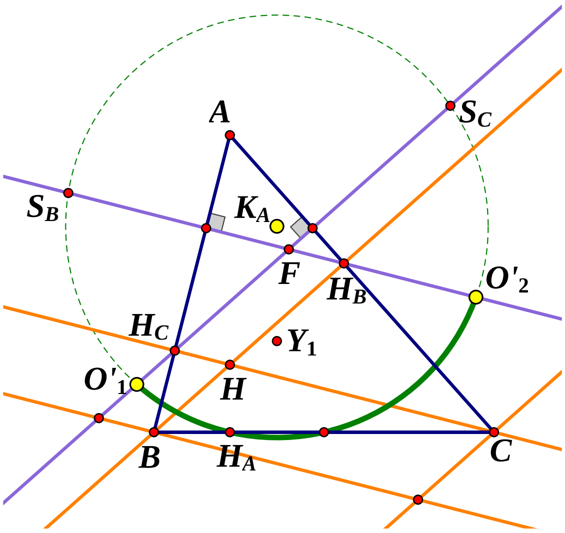


圖 16：外心 O' 的軌跡圓弧的大小

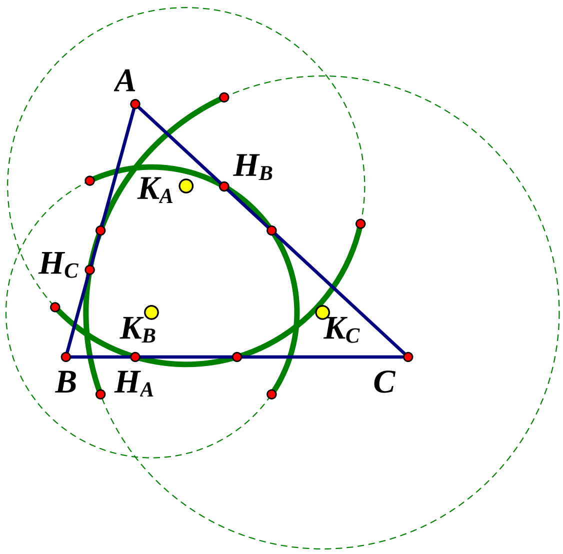


圖 17：三個方向構造的外心的軌跡圓弧

□

如上圖，K_A 圓心的圓弧 $\widehat{O'_1O'_2}$ 與 $\overline{BC}$ 的交點有兩個，一個是已經證明的垂足點 H_A，另一個是什麼呢？我們發現另外一個點是 $\overline{BC}$ 的中點 M_A。第二種構圖的圓弧與第一種構圖的圓弧（九點圓）雖然不相同，但是它們都會通過 H_A 與 M_A，我們在以下的性質證明中給出了兩種構圖的幾何關連性「旋轉與相似變換」。

性質 6：動點 D_A 在 $\overline{BC}$ 移動時，$\triangle MNP'$ 的外心 O' 的軌跡圓弧通過 $\overline{BC}$ 的中點。

證明：如圖分別以 $\triangle ABC$ 三邊為直徑作三圓，在 $\triangle M_AH_BS_C$ 與 $\triangle M_AH_CS_B$ 中，$\overline{M_AH_B} = \overline{M_AH_C} = \frac{\overline{BC}}{2}$，又 S_B 為 H_B 關於 $\overline{AB}$ 的對稱點且 S_C 為 H_C 關於 $\overline{AC}$ 的對稱點，得出 $\overline{H_BS_C} = \overline{H_BH_C} = \overline{H_CS_B}$。接著討論 $\angle M_AH_BS_C$ 與 $\angle M_AH_CS_B$，$\overline{M_AB} = \overline{M_AH_C}$ 可得 $\angle M_AH_CB = \angle B$，又 $\angle S_BH_CA = \angle AH_CH_B = \angle C$，推得 $\angle M_AH_CS_B = 180° - \angle B + \angle C$，同理可得出 $\angle M_AH_BS_C = 180° - \angle B + \angle C$，所以 $\triangle M_AH_BS_C \cong \triangle M_AH_CS_B$（SAS 全等），因此 $\angle M_AS_BH_A = \angle M_AS_CH_A$，可推得 S_B、S_C、M_A 與 H_A 四點共圓，即圓弧通過 $\overline{BC}$ 的中點。

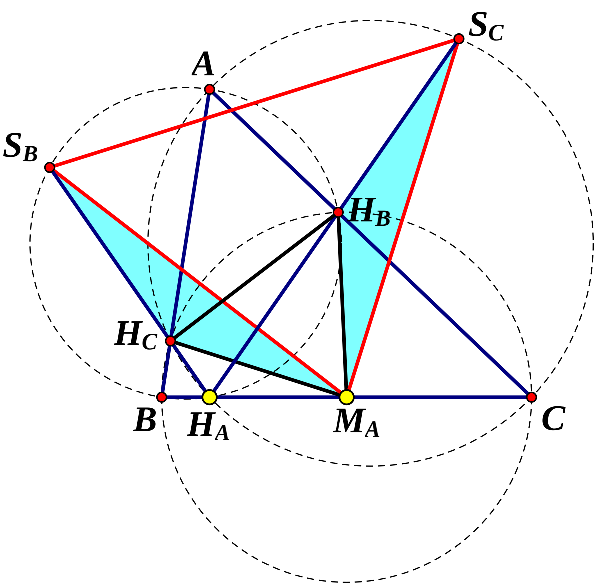


圖 18：S_B、H_A、M_A、S_C 共圓

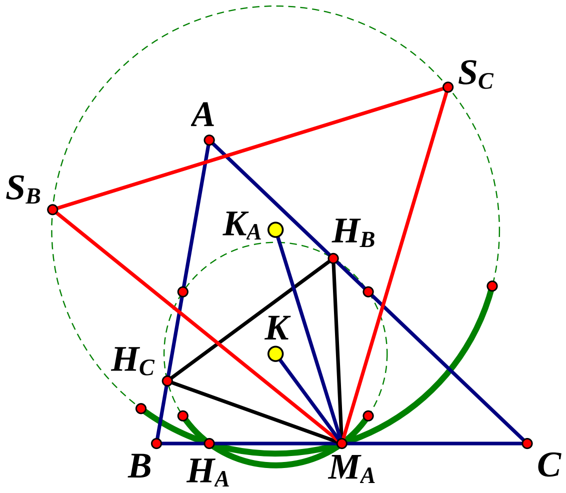


圖 19：兩種構圖的幾何關聯

□

我們給出了第二種構圖下的圓弧（K_A 為圓心）之幾何本質，它是第一種構圖的九點圓變換而來，即以 $\overline{BC}$ 的中點 M_A 為旋轉與位似中心，先旋轉 $\angle H_C M_A S_B$，再進行縮放 $\frac{\overline{M_A K}}{\overline{M_A K_A}} = \frac{\overline{M_A S_B}}{\overline{M_A H_C}} = \sqrt{4\cos^2 A - 4\cos^2 B - 4\cos^2 C + 5}$，這是很美麗的幾何關係（附註說明：在 $\triangle H_C M_A S_B$ 中，$\overline{M_A H_C} = \overline{M_A B} = \frac{a}{2}$，$\overline{H_C S_B} = \overline{H_C H_B} = a\cos A$，利用餘弦定理可得出 $\overline{M_A S_B}$ 的長度，即得出縮放比例 $\frac{\overline{M_A S_B}}{\overline{M_A H_C}}$）。

繼續深究第二種構圖的幾何性質，考慮三個圓心 K_A、K_B、K_C，它們分別是$\triangle ABC$ 的頂點與各邊中點連線形成的三角形之外心。

性質 7：點 K_A、K_B、K_C 分別是 $\triangle AM_BM_C$、$\triangle BM_CM_A$、$\triangle CM_AM_B$ 的外心。

證明：

1. 在 $\triangle H_C M_A S_B$ 中，$\overline{M_A H_C} = \overline{M_A B} = \frac{a}{2}$，$\overline{H_C S_B} = \overline{H_C H_B} = a\cos A$，由性質 6 的證明中可得知 $\triangle M_A S_B H_C \sim \triangle M_A K K_A$，推得 $\overline{M_A K} : \overline{K K_A} = \overline{M_A H_C} : \overline{H_C S_B} = 1 : 2\cos A$。注意到 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑是其九點圓的半徑的 2 倍，由正弦定理先得出外接圓半徑為 $\frac{a}{2\sin A}$ 所以九點圓半徑 $\overline{M_A K} = \frac{a}{4\sin A}$，$\overline{K K_A} = \overline{M_A K} \times 2\cos A = \frac{a}{2} \times \cot A$。

2. 考慮連接中點 $\overline{M_A M_B}$、$\overline{M_A M_C}$，以及 $\overline{K M_B}$、$\overline{K M_C}$、$\overline{K_A M_B}$、$\overline{K_A M_C}$。$\overline{K_A K}$ 是連心線，可

得 $\overleftrightarrow{K_AK} \perp \overline{H_AM_A}$，又 $\overline{M_BM_C} \parallel \overline{H_AM_A}$，所以 $\overleftrightarrow{K_AK} \perp \overline{M_BM_C}$，再得出 $\overleftrightarrow{K_AK}$ 是 $\overline{M_BM_C}$ 的中垂線。在九點圓 K 中，$\angle M_BKM_C = 2\angle M_BM_AM_C = 2\angle A$，所以 $\angle M_BKE = \angle A$。

3. 考慮直角 $\triangle KM_CE$ 中，$\overline{KE} = \overline{KM_C} \times \cos A = \frac{a}{4\sin A} \times \cos A = \frac{a}{4} \times \cot A$，又 $\overline{KK_A} = \frac{a}{2} \times \cot A$，因此 $\overline{KE} = \overline{EK_A}$，即四邊形 $KM_BK_AM_C$ 是菱形（對角線互相垂直平分），推得 $\angle M_BK_AM_A = \angle M_BKM_C = 2\angle A$ 且 $\overline{K_AM_B} = \overline{K_AM_C}$，因此 K_A 是 $\triangle AM_BM_C$ 的外心。同理可得 K_B 與 K_C 分別是 $\triangle BM_CM_A$、$\triangle CM_AM_B$ 的外心。

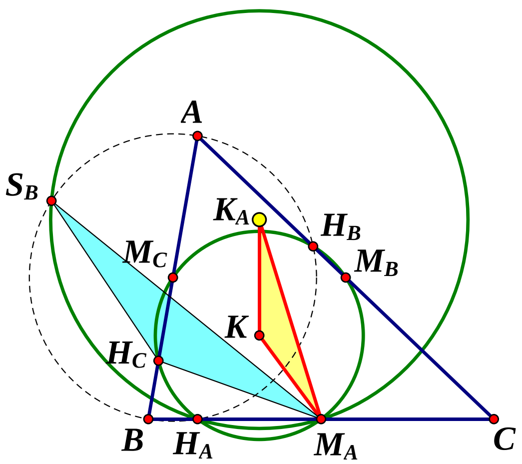


圖 20：兩種構圖的縮放比

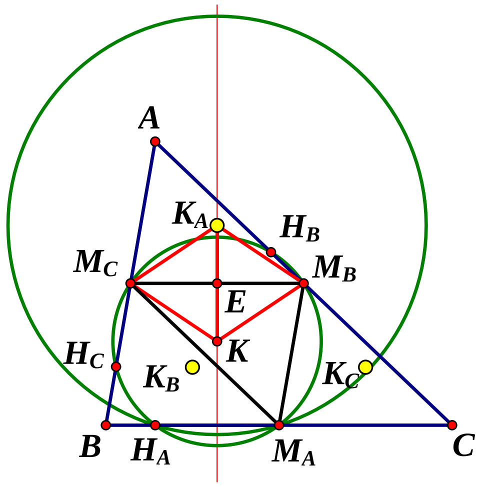


圖 21：四邊形 $KM_BK_AM_C$ 是菱形

□

將圓心 K_A、K_B、K_C 連線構成 $\triangle K_AK_BK_C$，我們發現三角形非常特殊，$\triangle K_AK_BK_C$ 與 $\triangle ABC$ 的位似中心是 $\triangle ABC$ 的外心，這個性質非常美麗！

性質 8：$\triangle K_AK_BK_C \sim \triangle ABC$，位似中心為 $\triangle ABC$ 的外心 O 且位似比為 $1:2$。

證明：由性質 7 可得點 K_A、K_B、K_C 分別是 $\triangle AM_BM_C$、$\triangle BM_CM_A$、$\triangle CM_AM_B$ 的外心，又$\triangle AM_BM_C \sim \triangle ACB$，所以 A、K_A、O 三點共線且 $\overline{OA} = 2\overline{OK_A}$，同理 $\overline{OB} = 2\overline{OK_B}$、$\overline{OC} = 2\overline{OK_C}$，因此 $\triangle K_AK_BK_C \sim \triangle ABC$。

□

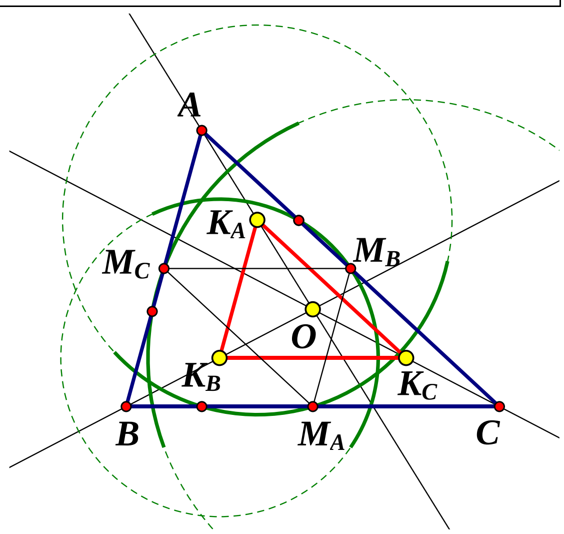


圖 22：$\triangle K_AK_BK_C \sim \triangle ABC$

二、 推廣將兩組直線進行旋轉 θ 後構造 $\triangle M(\theta)N(\theta)P(\theta)$

對於兩組直線進行推廣，我們先討論過 M 點作 $\overleftrightarrow{AC}$ 的垂線與過 N 點作 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線，我們將此兩直線分別以 M 點、N 點為旋轉中心，旋轉有向角 γ 後（正角為逆時鐘，負角為順時鐘），兩線交於 Q 點，因為 $\angle PMQ = \angle PNQ = \gamma$，所以 M、P、Q 與 N 四點共圓，因此 $\triangle MNP$ 與 $\triangle MNQ$ 的外心重合，也就是說在有向角度 γ 變量下，其外心是不動點。

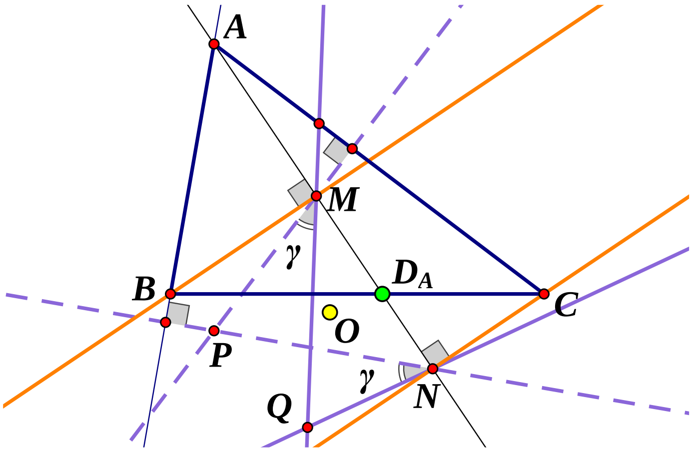


圖 23：外心是不動點

因此僅需要討論第一組直線即可，也就是說在第一種構圖下，將通過 B、C 點的兩條直線進行推廣，我們考慮旋轉有向角 θ 使得 $\angle MBM(\theta) = \angle NCN(\theta) = \theta$。

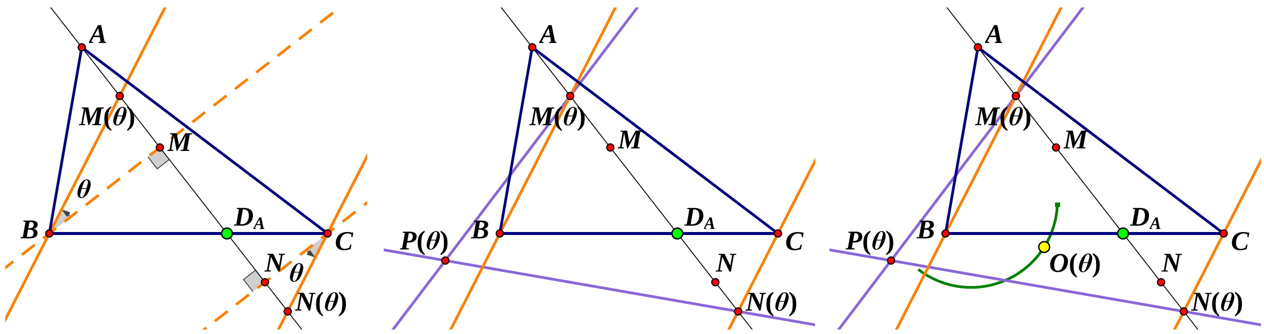


圖 24：一般化旋轉有向角 θ 的構圖步驟

如上圖，給定任意 $\triangle ABC$，在 $\overline{BC}$ 上取一動點 D_A，令 B 點、C 點關於 $\overleftrightarrow{AD_A}$ 的垂足分別為 M 點、N 點。過 B 點作 $\overleftrightarrow{BM(\theta)}$ 交 $\overleftrightarrow{AD_A}$ 於 $M(\theta)$ 點，使得 $\angle MBM(\theta) = \theta$（有向角），再過 C 點作 $\overleftrightarrow{CN(\theta)}$ 交 $\overleftrightarrow{AD_A}$ 於 $N(\theta)$ 點，使得 $\angle NCN(\theta) = \theta$（有向角）。

由於前面我們討論過第二組直線在有向角度變量下，外心是不動點，所以不失一般性直接做垂線即可，再分別過 $M(\theta)$ 點作 $\overleftrightarrow{AC}$ 的垂線，過 $N(\theta)$ 點作 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線，兩線交於 $P(\theta)$ 點，取 $\triangle M(\theta)N(\theta)P(\theta)$ 的外心 $O(\theta)$（即第一種構圖的一般化角度）。

首先我們先分析一般化角度，旋轉有向角 θ 的 $\triangle M(\theta)N(\theta)P(\theta)$，因為 $\overleftrightarrow{M(\theta)P(\theta)}$ 垂直 $\overleftrightarrow{AC}$ 且 $\overleftrightarrow{N(\theta)P(\theta)}$ 垂直 $\overleftrightarrow{AB}$，所以 $\angle M(\theta)P(\theta)N(\theta) = \angle BAC$。在變動的角度 θ 下，$\angle M(\theta)O(\theta)N(\theta) = 2\angle BAC$。

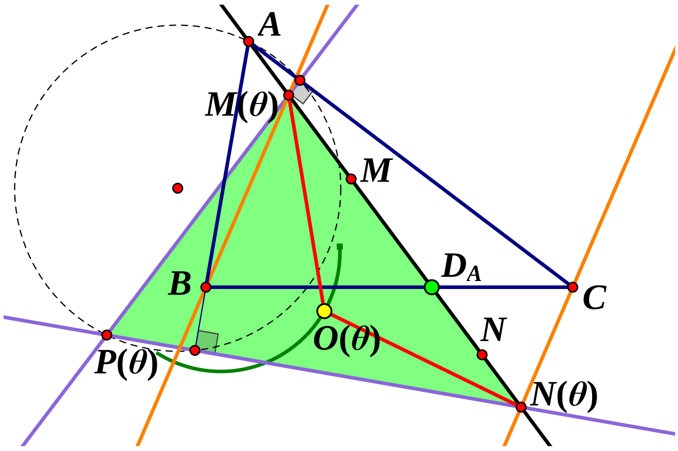


圖 25：第一種構圖的一般化角度推廣

第二，如同性質 1（見圖 8），當 $\theta = 0°$ 時，我們已經證明了動點 O 與三個定點 H_A、H_B 與 H_C 恆四點共圓。在一般化角度 θ 的情形下，我們想要證明外心 $O(\theta)$ 的軌跡是圓弧，其技巧就是找出動點 $O(\theta)$ 與某兩個定點，再證明此三點恆共圓，我們最後給出了定點 $H_B(\theta)$ 與 $H_C(\theta)$，此性質展現幾何之美與數學趣味性。

先由 $\theta = 0°$ 時去觀察，如圖，性質 1 中的 A、H_C、N、C 共圓是關鍵的幾何結構，推廣 θ 為任意角度時，以 C 為旋轉中心將 $\overleftrightarrow{CN}$ 旋轉有向角 θ（有向角 $\angle NCN(\theta) =$ θ），維持 A、$N(\theta)$、C 以及 $H_C(\theta)$ 共圓。

因此我們考慮以 A 為旋轉中心將 $\overleftrightarrow{AB}$ 旋轉有向角 $-\theta$（有向角 $\angle H_CAH_C(\theta)=-\theta$），此時因為 $\angle CN(\theta)N=90°-\theta$，在共圓對同弧下 $\angle CH_C(\theta)A$ 也會等於 $90°-\theta$，因此 $\overline{CH_C(\theta)}\perp\overline{AB}$，推得 C、H_C、$H_C(\theta)$ 三點共線，於是我們給出關鍵的點 $H_C(\theta)$ 的作圖方法，點 $H_B(\theta)$ 亦同理。定點 $H_B(\theta)$ 與 $H_C(\theta)$ 點作圖方法如下：過 A 點作 $\overleftrightarrow{AH_B(\theta)}$ 交 $\overline{AC}$ 邊上的高 $\overleftrightarrow{BH_B}$ 於 $H_B(\theta)$ 點，使得 $\angle CAH_B(\theta)=-\theta$，再過 A 點作 $\overleftrightarrow{AH_C(\theta)}$ 交 $\overline{AB}$ 邊上的高 $\overleftrightarrow{CH_C}$ 於 $H_C(\theta)$ 點，使得 $\angle BAH_C(\theta)=-\theta$。

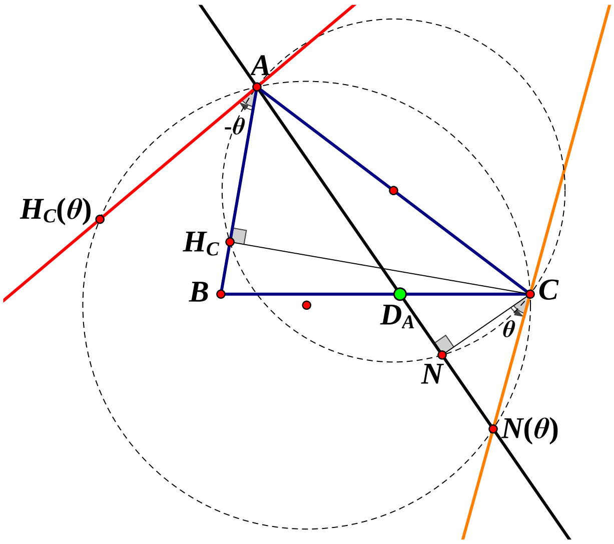


圖 26：一般化的定點分析

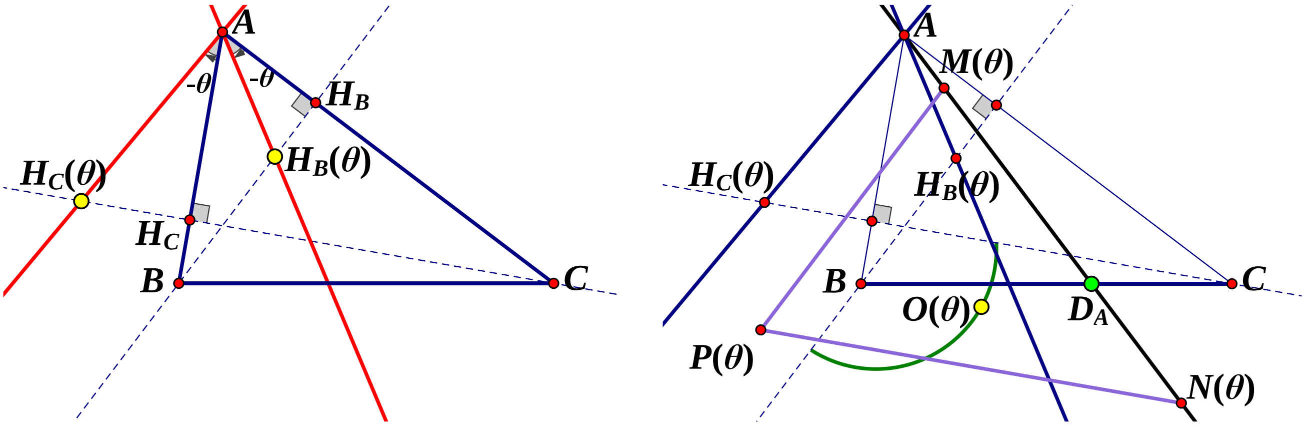


圖 27：一般化第一種構圖的兩定點 $H_B(\theta)$ 與 $H_C(\theta)$

定理 9：動點 D_A 在 $\overline{BC}$ 移動時，$\triangle M(\theta)N(\theta)P(\theta)$ 的外心 $O(\theta)$ 的軌跡為圓弧。

證明：

1. $\angle BM(\theta)O(\theta)=\angle BM(\theta)N(\theta)-\angle O(\theta)M(\theta)N(\theta)=(90°-\theta)-(90°-\angle BAC)=\angle BAC-\theta$。再考慮 $\angle H_B(\theta)M(\theta)B$，由前頁的討論得知 A、$H_B(\theta)$、$M(\theta)$、B 四點共圓，可得出 $\angle H_B(\theta)M(\theta)B=180°-\angle BAH_B(\theta)=180°-(\angle BAC-\theta)$，因此 $\angle BM(\theta)O(\theta)+\angle H_B(\theta)M(\theta)B=180°$，即 $\angle H_B(\theta)M(\theta)O(\theta)=180°$，於是 $H_B(\theta)$、$M(\theta)$、$O(\theta)$ 恆三點共線。同樣方式我們也可得出 $H_C(\theta)$、$N(\theta)$、$O(\theta)$ 恆三點共線。
2. 因為 $H_B(\theta)$、$M(\theta)$、$O(\theta)$ 共線且 $H_C(\theta)$、$N(\theta)$、$O(\theta)$ 共線，所以

$\angle H_B(\theta)O(\theta)H_C(\theta) = 180° - \angle M(\theta)O(\theta)N(\theta) = 180° - 2\angle BAC$。注意到 $H_B(\theta)$ 與 $H_C(\theta)$ 為定點，因此（動點）外心 $O(\theta)$ 的軌跡為圓弧。

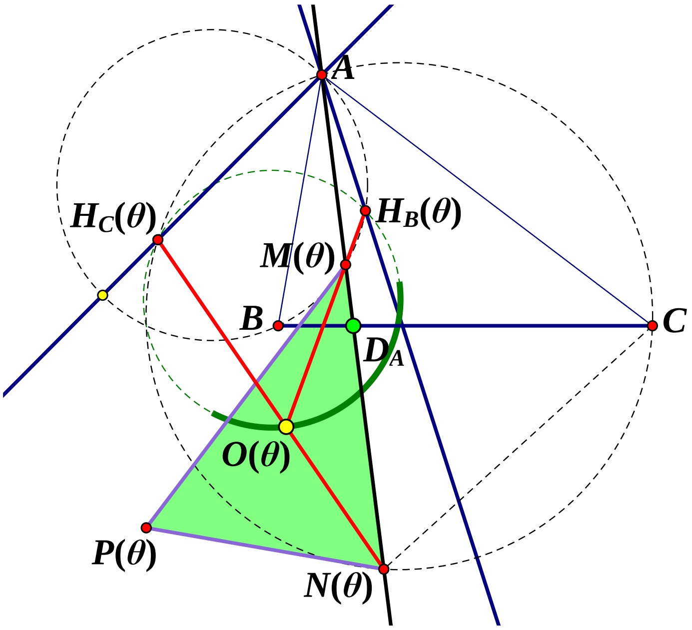


圖 28：外心 $O(\theta)$ 的軌跡為圓弧

□

在定理 9 的證明中，我們發現 $\angle H_B(\theta)O(\theta)H_C(\theta) = 180° - 2\angle BAC$，又因為 $\angle BAC = \angle H_C(\theta)AH_B(\theta)$，於是我們可以給出第一種構圖的一般化角度 θ 的外心圓的幾何意義，它一樣是九點圓。如下圖，過點 $H_B(\theta)$ 作 $\overleftrightarrow{AH_B(\theta)}$ 的垂線交 $\overleftrightarrow{AH_C(\theta)}$ 於 $B(\theta)$ 點，再過 點 $H_C(\theta)$ 作 $\overleftrightarrow{AH_C(\theta)}$ 的垂線交 $\overleftrightarrow{AH_B(\theta)}$ 於 $C(\theta)$ 點。

因為 $H_B(\theta)$ 與 $H_C(\theta)$ 為 $\triangle AB(\theta)C(\theta)$ 高的垂足，再令 $\overleftrightarrow{B(\theta)C(\theta)}$ 上的高之垂足為 $H_A(\theta)$，可得出 $\angle H_B(\theta)H_A(\theta)H_C(\theta) = 180° - 2\angle BAC$，所以 $H_A(\theta)$、$H_B(\theta)$、$H_C(\theta)$ 與動點 $O(\theta)$ 共圓，外心 $O(\theta)$ 的軌跡為 $\triangle AB(\theta)C(\theta)$ 的九點圓的圓弧。

根據定點 $H_B(\theta)$、$H_C(\theta)$ 以及 $B(\theta)$、$C(\theta)$ 的作圖步驟，我們得出 $\triangle AB(\theta)C(\theta)$ 是以 A 點為旋轉中心，將 $\triangle ABC$ 旋轉有向角 $-\theta$，再縮放 $\frac{1}{\cos\theta}$。我們可再推得兩個對應點與旋轉中心構成的角恆為 90 度，例如：$\angle H_B(\theta)H_BA = \angle B(\theta)BA = \angle C(\theta)CA = 90°$。

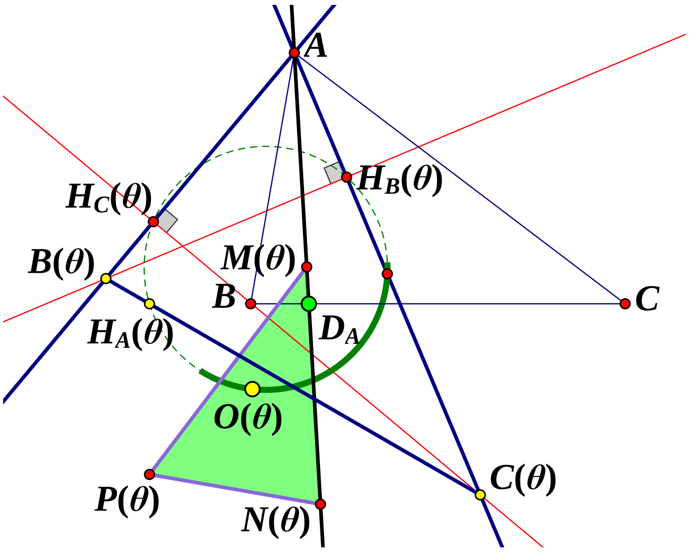


圖 29：外心 $O(\theta)$ 圓弧的幾何意義

定理 10：$\triangle M(\theta)N(\theta)P(\theta)$ 的外心 $O(\theta)$ 的軌跡為圓弧，其圓心角為 $2\angle BAC$。

證明：$O(\theta)$ 軌跡圓弧的左端點為 D_A 與 B 點重合，此時 $M(\theta)$ 點也會與其重合，$\triangle M(\theta)N(\theta)P(\theta)$ 為一直角三角形，因此外心 $O(\theta)$ 在 $\overline{AC}$ 上的高。同理，右端點為 D_A 與 C 點重合，此時外心 $O(\theta)$ 在 $\overline{AB}$ 上的高。

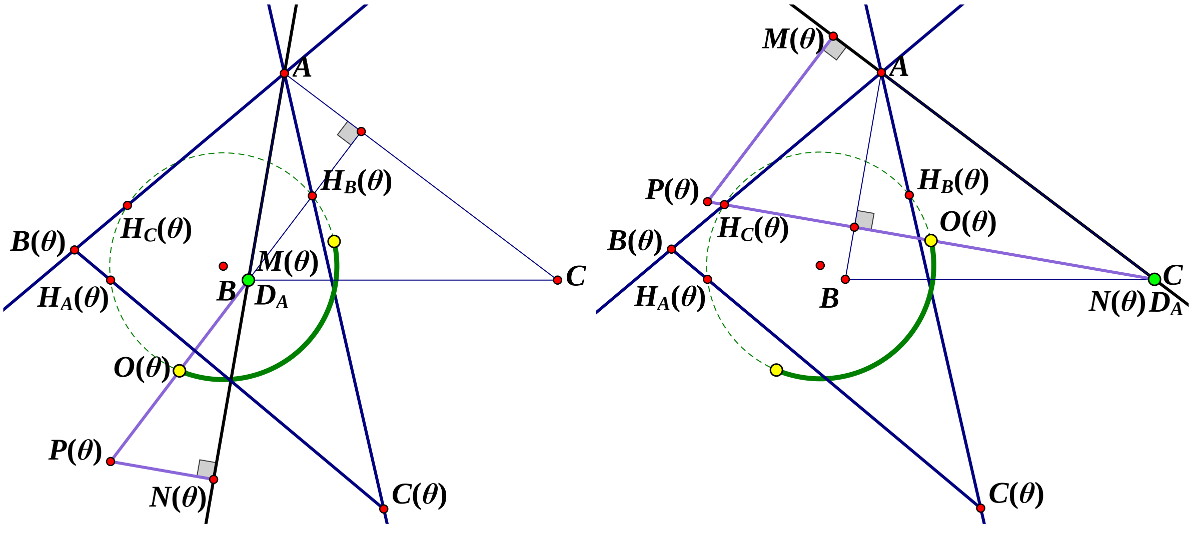


圖 30：圓弧的左右端點

接著討論圓弧的大小，在 $\triangle AB(\theta)C(\theta)$ 中，弧 $H_B(\theta)H_C(\theta) = 2\angle H_B(\theta)H_A(\theta)H_C(\theta) = 2\big(180° - 2\angle B(\theta)AC(\theta)\big) = 2(180° - 2\angle BAC)$。在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = \angle H_B(\theta)FO_2$，所以弧 $H_B(\theta)O_2 +$ 弧 $H_C(\theta)O_1 = 2\angle BAC$，因此 $\widehat{O_1O_2} = 360° - 2(180° - 2\angle BAC) - 2\angle BAC = 2\angle BAC$。

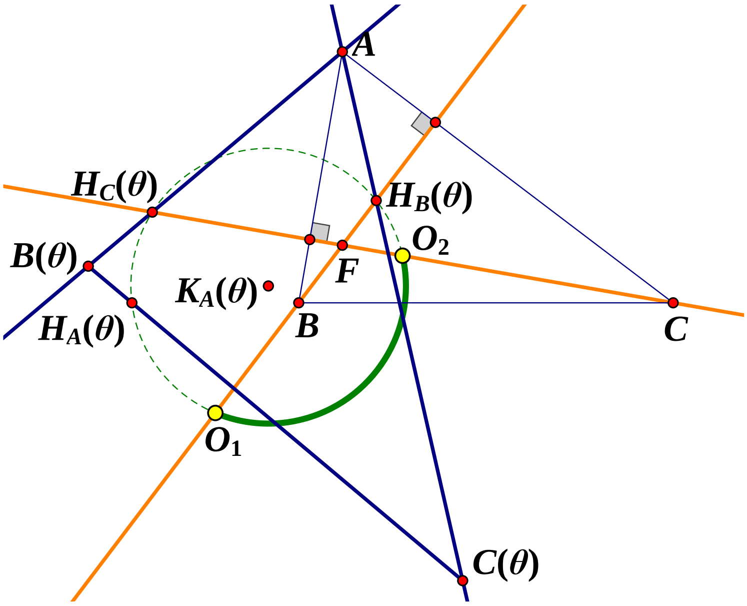


圖 31：外心 $O(\theta)$ 的軌跡圓弧的大小

□

若我們對 $\triangle ABC$ 的三個頂點各進行第一種構圖的一般化角度推廣，得出三個圓心 $K_A(\theta)$、$K_B(\theta)$ 與 $K_C(\theta)$，將圓心連線構成 $\triangle K_A(\theta)K_B(\theta)K_C(\theta)$，我們發現此三角形相似於 $\triangle ABC$！

性質 11：$\triangle K_A(\theta)K_B(\theta)K_C(\theta) \sim \triangle ABC$，縮放比為 $\tan\theta : 1$ 且對應邊恆垂直。

證明：由第一種構圖的一般化角度作圖步驟可得將 $\triangle ABC$ 以三個頂點為旋轉中心各進行旋轉有向角 $-\theta$，再縮放 $\frac{1}{\cos\theta}$，於是兩個對應點與旋轉中心構成的角恆為 90 度，可得 $\angle K_A(\theta)KA = \angle K_B(\theta)KB = \angle K_C(\theta)KC = 90°$，再得出三組相似 $\triangle K_A(\theta)K_B(\theta)K \sim \triangle ABK$、$\triangle K_B(\theta)K_C(\theta)K \sim \triangle BCK$，以及 $\triangle K_C(\theta)K_A(\theta)K \sim \triangle CAK$，因此我們有 $\triangle K_A(\theta)K_B(\theta)K_C(\theta) \sim \triangle ABC$，其縮放比例為 $\overline{K_A(\theta)K} : \overline{KA}$，再因為 $\triangle K_A(\theta)KA$ 為直角三角形且 $\angle K_A(\theta)AK = \theta$，$\overline{K_A(\theta)K} : \overline{KA} = \tan\theta : 1$。

□

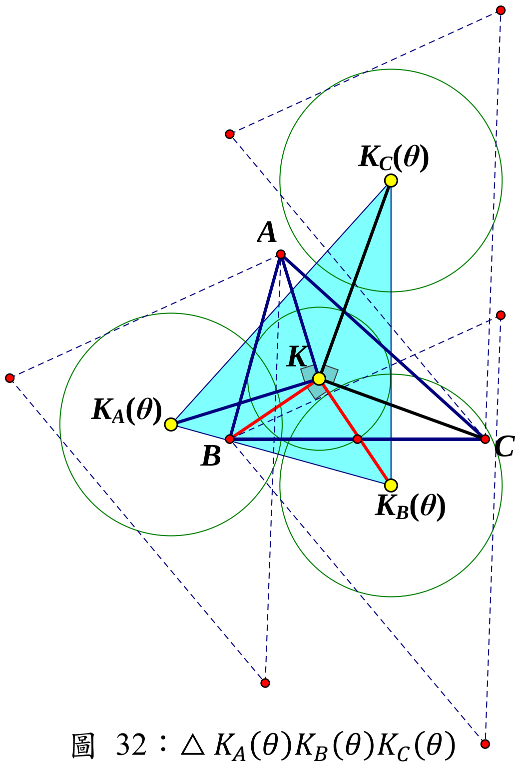


圖 32：$\triangle K_A(\theta)K_B(\theta)K_C(\theta)$

我們完整給出第一種構圖的一般化角度 θ 的幾何結構與性質，尤其是旋轉縮放後的三角形，因此有關一般化角度 θ 的第二種構圖，其幾何結構與相關性質，我們可以仿照 $\theta = 0°$ 時的性質 5、性質 6、性質 7 與性質 8 的方法進行刻劃，因此省略此部分。

三、 對於任意凸凹四邊形，由兩組直線所構造三角形的外心軌跡

回到原始問題的四邊形，我們在四邊形中先構造三角形，並且巧妙轉換其頂角，再透過前兩節的三角形的定點共圓技巧，給出了任意四邊形的兩組直線所構造三角形的外心軌跡結果。四邊形的證明構圖較三角形複雜許多，但是兩者的邏輯是一致，顯示本研究的證明手法具有推廣性。

有關四邊形 $ABCD$ 的兩組直線所構造三角形的外心作圖步驟如下。

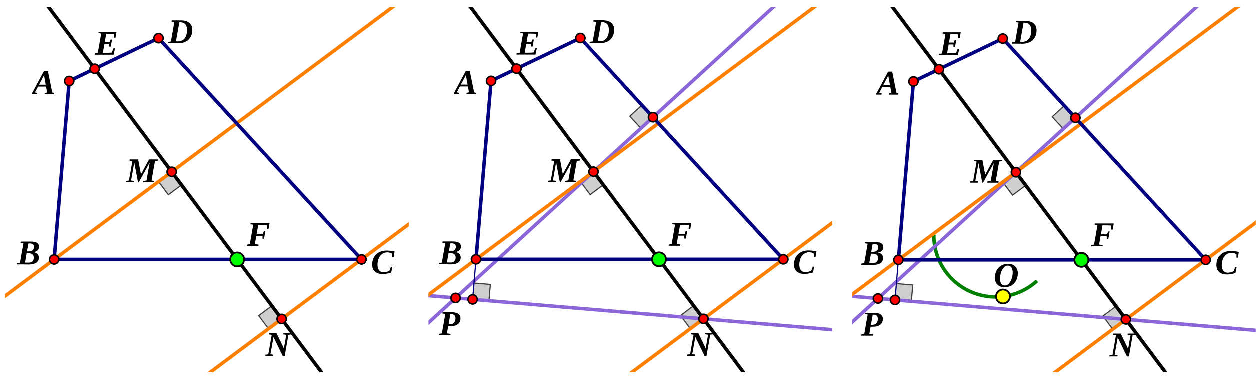


圖 33：四邊形構圖步驟

如上圖，給定非平行四邊形的任意四邊形 $ABCD$，不失一般性令 $\angle A + \angle D > 180°$。$E$ 為 $\overline{AD}$ 上定點（含兩端點），在 $\overline{BC}$ 上取一動點 F，分別過 B 點、C 點作 $\overleftrightarrow{EF}$ 的垂線，垂足分別為 M 點、N 點。再過 M 點作 $\overleftrightarrow{CD}$ 的垂線，過 N 點作 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線，兩線交於 P 點，最後取 $\triangle MNP$ 的外心 O，點 O 為一動點。

（一） 四邊形的第一種構圖的圓弧的定點尋找與構造討論

原始作圖是在四邊形 $ABCD$ 中，$\overleftrightarrow{EF}$ 上 M 點、N 點，過 M 點作 $\overleftrightarrow{CD}$ 的垂線，過 N 點作 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線，於是我們延伸 $\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{CD}$，兩線交於 X 點，觀察 $\triangle XBC$，一樣可得出 $\angle P = \angle BXC$。

四邊形與三角形的研究不同的是 $\overleftrightarrow{EF}$ 不一定通過 X 點，所以必須作新的構造。注意到點 E 為 $\overline{AD}$ 上的定點，我們想利用在三角形上研究的手法來解決四邊形的外心軌跡問題，於是巧妙連接線段 $\overline{EB}$ 以及 $\overline{EC}$，構造一個 $\triangle BEC$ 將四邊形化為三角形思考。

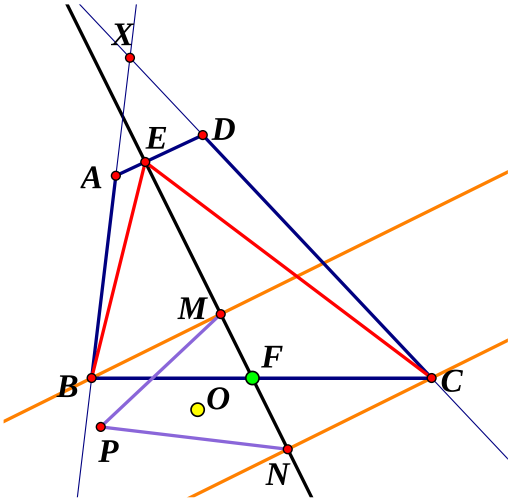


圖 34-1：四邊形轉換為三角形

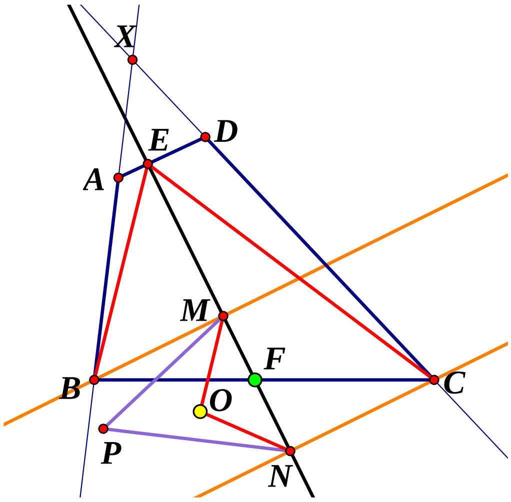


圖 34-2：角度分析

如下圖，因為 O 為 $\triangle MNP$ 的外心，$\angle MON = 2\angle P = 2\angle BXC$，所以 $\angle OMN = 90° - \angle BXC$（註：若 $\angle BXC > 90°$ 時，則 $\angle OMN = \angle BXC - 90°$，不影響後續論證推理），分別連接 $\overline{OM}$ 與 $\overline{ON}$，$\angle OMN$ 為一定角。

在 $\triangle EBC$ 中，因為 $\angle EMB = 90°$，考慮作 $\overline{EB}$ 為直徑的圓，觀察點 E、B、M 與 $\overleftrightarrow{OM}$，令 $\overleftrightarrow{OM}$ 與以 $\overline{EB}$ 為直徑的圓異於 M 的交點為 S_B，注意到 $\angle EMS_B = \angle OMN$（對頂角），又 $\angle OMN = 90° - \angle BXC$ 為一定角且 E 為定點，即 $\widehat{ES_B}$ 為定弧，意思是無論 $\overline{BC}$ 的動點 F 移動，點 S_B 為圓上的一個定點，也是 $\overleftrightarrow{OM}$ 線束的共同交點。同理，我們可以找出另外一個定點 點 S_C，也是 $\overleftrightarrow{ON}$ 線束的共同交點。

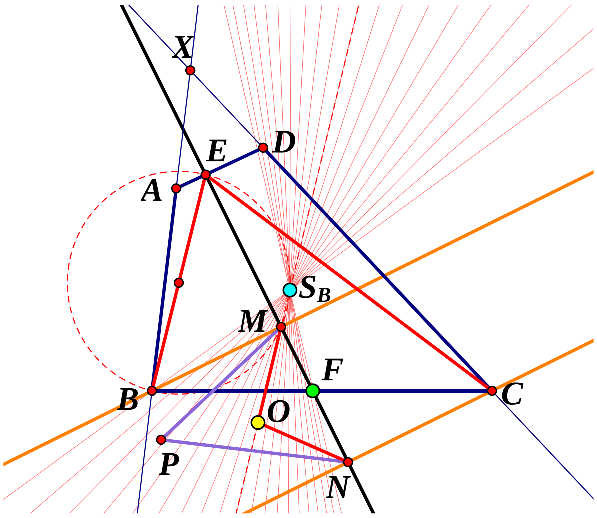


圖 35-1：定點 S_B

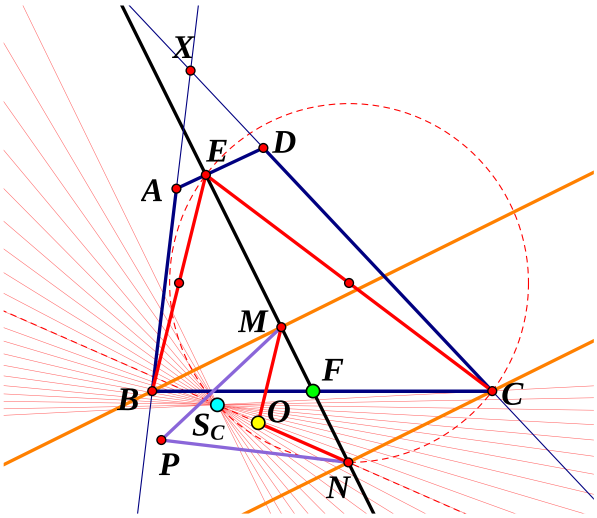


圖 35-2：定點 S_C

接下來就是如何給出定點 S_B 與定點 S_C。

如下圖，注意到 $\angle EBS_B=\frac{\widehat{ES_B}}{2}=\angle EMS_B=90^\circ-\angle BXC$，即 $\angle BES_B=\angle BXC$，其中 E、B 為給定下，給出點 S_B 的作圖方式。接下來的轉換是我們解決四邊形外心軌跡很重要的技巧，也是我們花許多時間鑽研之處。因為要滿足 $\angle BES_B=\angle BXC$，考慮作 $\triangle BES_B$ 的外接圓，圓上任選一點 U 皆有 $\angle BUS_B=\angle BES_B$，再作 $\triangle BXC$ 的外接圓，圓上任選一點 U' 皆有 $\angle BU'C=\angle BXC$，又因為 $\angle BES_B=\angle BXC$，因此點 U 與點 U' 重合。注意到 $\angle BUS_B=\angle BUC$，所以 C、S_B、U 三點共線。於是我們給出了定點 S_B 的作圖構造。

1. 作 $\overline{EB}$ 為直徑的圓以及 $\triangle BXC$ 的外接圓，兩圓交於的點 U（異於 B 點）。
2. 再作 $\overleftrightarrow{CU}$ 交以 $\overline{EB}$ 為直徑的圓於定點 S_B（異於 U 點）」，點 S_B 即為所求。

同理，我們透過一樣的作圖方法也可以給出定點 S_C。

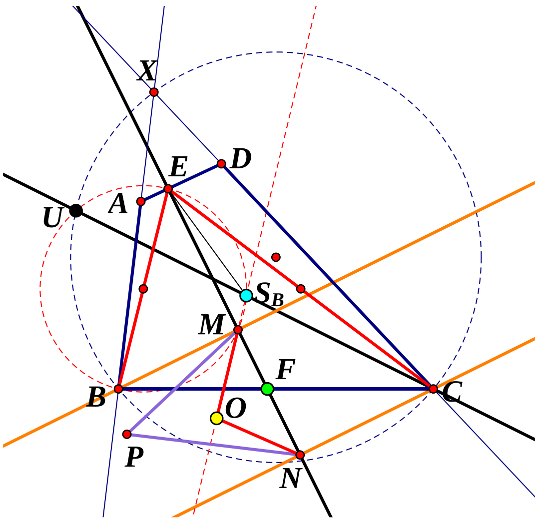


圖 36-1：定點 S_B 作圖法

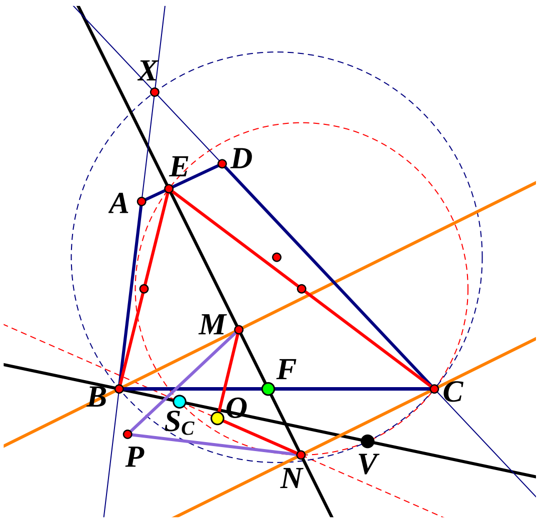


圖 36-2：定點 S_C 作圖法

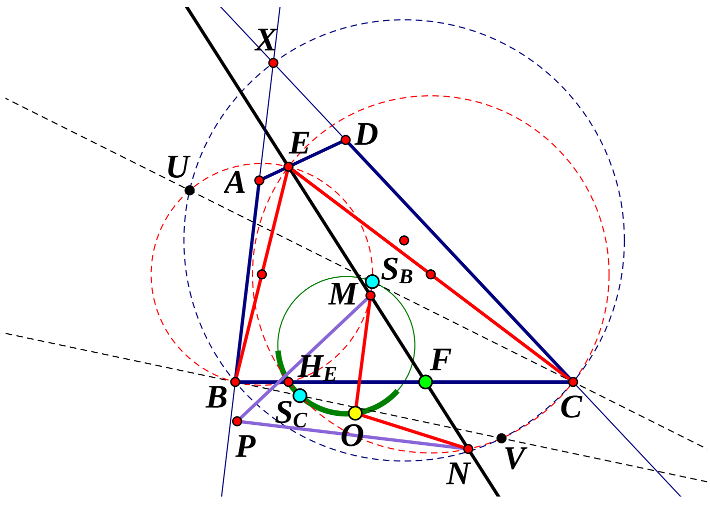


圖 37：四邊形第一種構圖的三角形外心軌跡

（二） 四邊形的第一種構圖之外心軌跡

討論出四邊形 $ABCD$ 的第一種構圖之外心軌跡的定點 S_B 與 S_C 後，證明其外心 O 的軌跡為圓弧的方法與三角形相似，我們在定理 12 的證明就稍微省略簡潔說明。

定理 12：給定非平行四邊形的任意四邊形 $ABCD$，對於定點 E 在 $\overline{AD}$ 上，動點 F 在 $\overline{BC}$ 移動時，$\triangle MNP$ 的外心 O 的軌跡為圓弧，其圓心角為 $2\angle BEC$。

證明：根據前面作圖過程可知點 O、M、S_B 三點共線且點 O、N、S_C 三點共線，又 S_B、S_C 為定點，$\angle S_BOS_C = 180° - \angle MON = 180° - 2\angle MPN = 180° - 2\angle BXC$ 恆為定角，所以 $\triangle MNP$ 的外心 O 的軌跡為圓弧。注意到令 $\overline{BC}$ 邊上的高之垂足為 H_E，利用 $\overline{EB}$ 與 $\overline{EC}$ 的直徑圓，考慮以圓周角拆解 $\angle S_BH_ES_C = \angle S_BH_EC + \angle CH_ES_C$，又 S_B、U、B、H_E 四點共圓，所以 $\angle CH_ES_B = \angle BUS_B = \angle BXC$，同理 $\angle S_CH_EC = \angle BXC$，因此 $\angle S_CH_ES_B = 2\angle BXC$，$\angle S_BOS_C + \angle S_CH_ES_B = 180°$，因此 H_E 點也在此圓上。

□

我們繼續討論四邊形下的 $\triangle MNP$ 的外心 O 軌跡構成的圓弧大小，比較有趣的是，這個圓弧的度數大小（圓心角）並非 2 倍的 $\angle BXC$，而是 2 倍的 $\angle BEC$，這一點與三角形不同，是非常有趣的，以下是我們的證明。

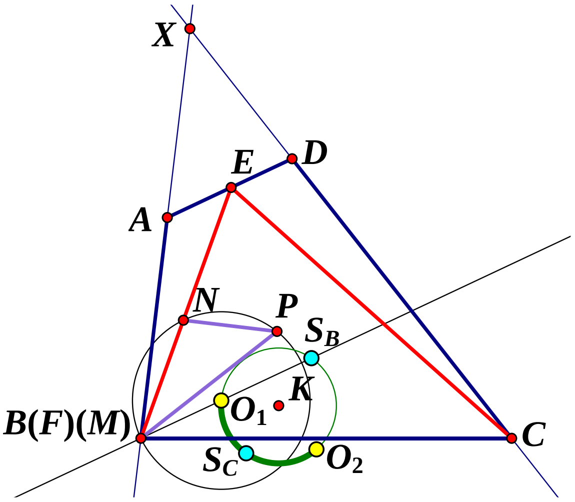


圖 38-1：圓弧的左端點 O_1

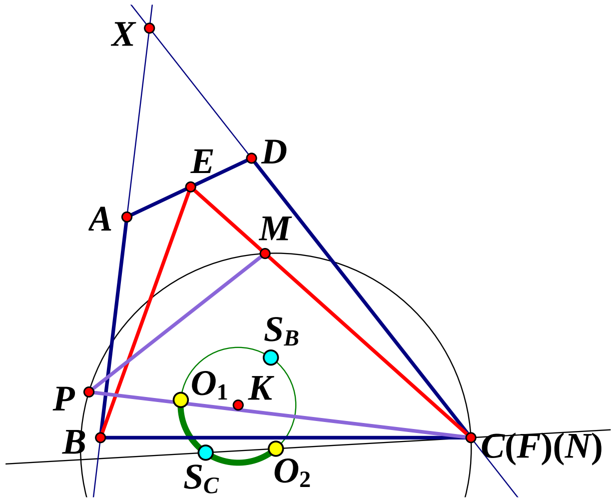


圖 38-2：圓弧的右端點 O_2

如圖，當 F 點與 B 點重合時（M 點也與其重合），可得出外心圓弧的端點 O_1，此時作 $\triangle MNP$ 的外接圓，我們得出 $\angle O_1BE = \frac{180° - \widehat{MN}}{2} = 90° - \angle NPM = 90° - \angle BXC$。同理，當 F 點與 C 點重合時（N 點也與其重合），得出 $\angle ECO_2 = 90° - \angle BXC$。

由前面作圖可知，$B(M)$、S_B、O_1 三點共線，$C(N)$、S_C、O_2 三點共線，令兩直線交於 W 點。觀察到四邊形 $EBWC$，$\angle O_1WO_2 = 360° - \angle O_1BE - 180° - \angle ECO_2 - \angle BEC$ 又 $\angle O_1BE = \angle ECO_2 = 90° - \angle BXC$ 可推得 $\angle O_1WO_2 = 2\angle BXC - \angle BEC$。

由定理 12 可知 $\angle S_BH_ES_C = 2\angle BXC$，所以對同弧的 $\angle S_BO_1S_C = 2\angle BXC$，可得弧 $S_BO_2S_C = 4\angle BXC$，考慮圓外角 $2\angle O_1WO_2 = \widehat{S_BO_2} - \widehat{S_CO_1} = (\widehat{S_BO_2} + \widehat{O_2S_C}) - (\widehat{O_2S_C} + \widehat{S_CO_1})$，又 $\angle O_1WO_2 = 2\angle BXC - \angle BEC$，所以 $(\widehat{S_BO_2} + \widehat{O_2S_C}) - (\widehat{O_2S_C} + \widehat{S_CO_1}) = 4\angle BXC - 2\angle BEC$，故 $\widehat{O_1O_2} = 2\angle BEC$。

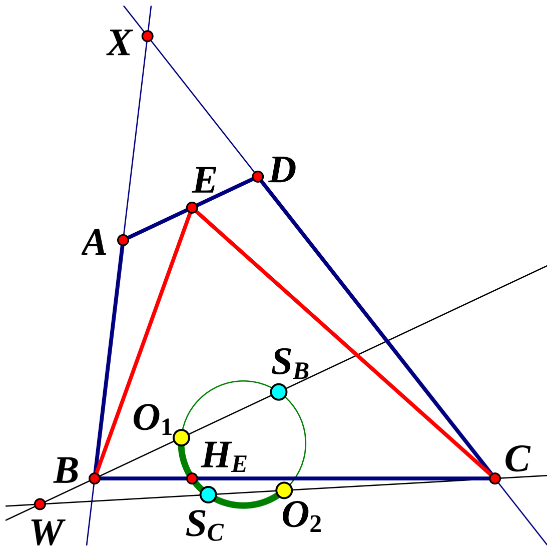


圖 39：外心 O 軌跡圓弧的大小

（三） 將第一種構圖的「對邊」連線，設定為「鄰邊」連線

對於四邊形 $ABCD$，原題假設定點 E 點在 $\overline{AD}$ 上與動點 F 點在對邊 $\overline{BC}$ 上，我們嘗試分別讓動點 F 點鄰邊 $\overline{AB}$ 或 $\overline{CD}$ 上。結果如下圖，其外心軌跡皆為圓弧，原先我們想要依照定理 12 的作圖分析以及證明進行共圓的兩個定點刻劃，但是我們發現另一個更好的對應的觀點來解決「鄰邊連線」所構造的 $\triangle MNP$ 的外心 O 軌跡。

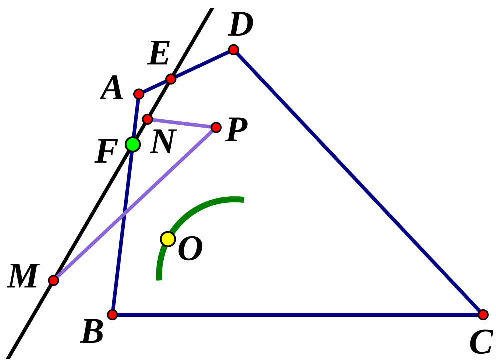


圖 40-1：動點 F 點在鄰邊 $\overline{AB}$ 上

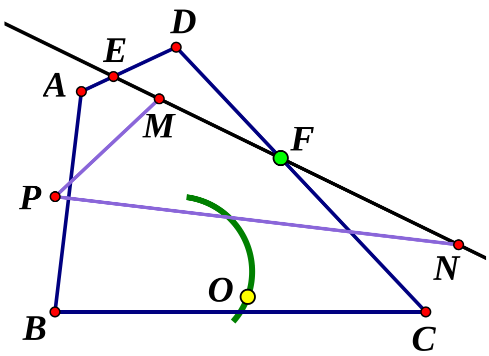


圖 40-2：動點 F 點在鄰邊 $\overline{CD}$ 上

定理 13：給定非平行四邊形的任意四邊形 $ABCD$，對於定點 E 在 $\overline{AD}$ 上，動點 F 在依序在 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 與 $\overline{CD}$ 上移動時，$\triangle MNP$ 的外心 O 的軌跡一個圓。

證明：考慮動點 F 在 $\overline{AB}$ 上（含端點）時，$\overleftrightarrow{EF}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 交於唯一的一點 F' 點，反之亦然，於是可以將兩個點集合視作雙射對應 $F \leftrightarrow F'$，然後同理 $F' \leftrightarrow O$ 也是雙射對應，再

根據定理 12，兩定點 S_B 與 S_C，$\angle S_BOS_C = 180° - 2\angle BXC$ 恆為定角，所以點 O 軌跡為圓弧。當動點 F 接續在 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 時（含端點）亦同，於是三個圓弧恰好合併為一個圓。

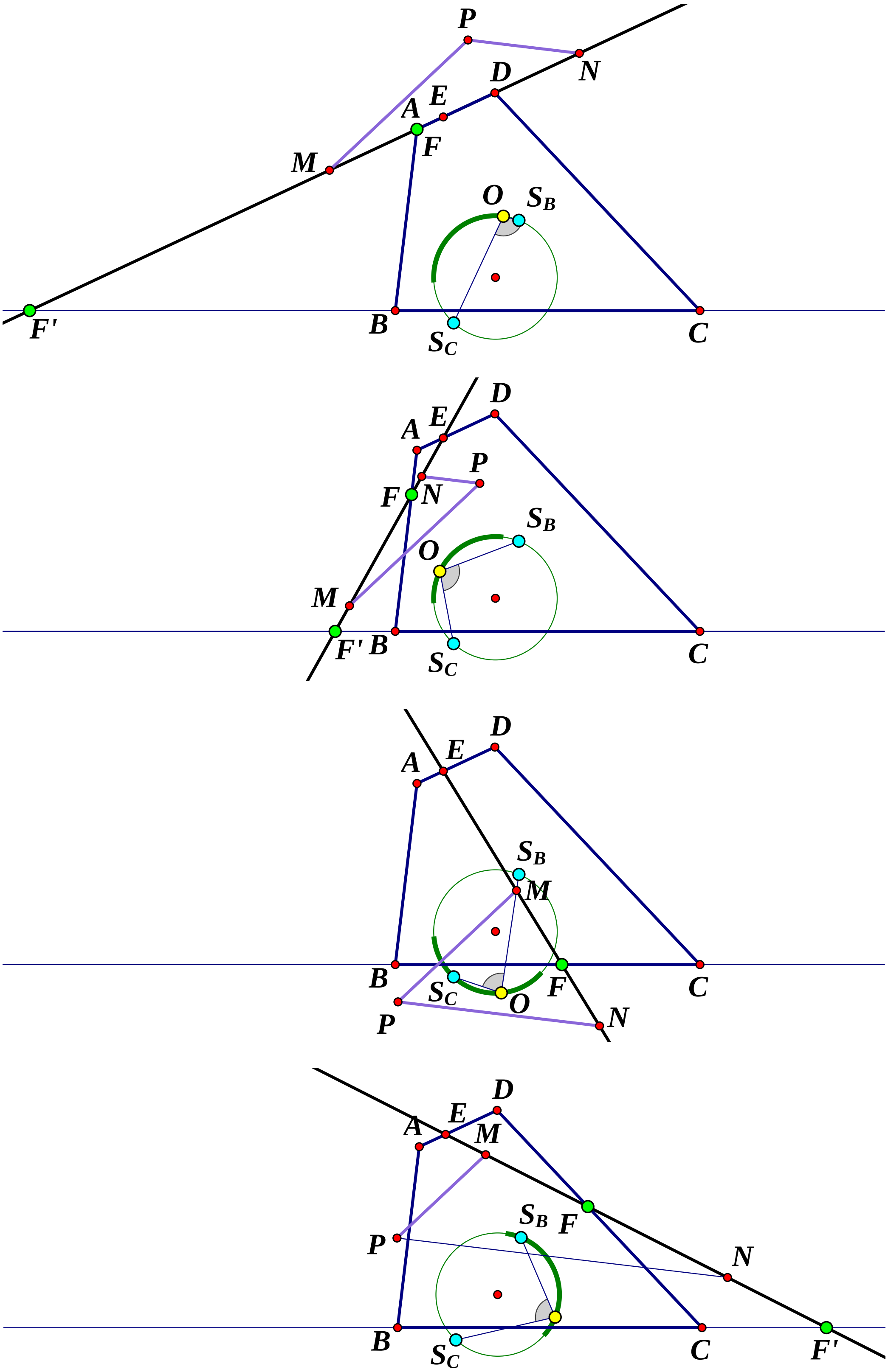


圖 41：動點 F 點依序在鄰邊、對邊、鄰邊上移動

□

（四） 四邊形的第一種構圖之外心軌跡圓弧的幾何意義

在前一節的三角形的第一種構圖之 $\triangle MNP$ 的外心軌跡圓弧為 $\triangle ABC$ 的九點圓圓弧（性質 1），我們再討論第二種構圖之外心軌跡圓弧為第一種構圖 $\triangle ABC$ 的九點圓圓弧旋轉、縮放變換而來（性質 5、6）。繼續推廣第一種構圖的角度，我們得出 $\triangle M(\theta)N(\theta)P(\theta)$ 的外心軌跡圓弧也是 $\triangle ABC$ 的九點圓圓弧旋轉、縮放變換而來（定理 10 與性質 11）。我們完整刻劃了三角形的不同構圖之間的關聯性。

在本節中，我們三角形延伸為四邊形，給出四邊形的 $\triangle MNP$ 的外心軌跡是圓弧（定理 12），接下來繼續刻劃它跟 $\triangle XBC$ 的九點圓圓弧之關係。

在定理 12 我們證明 $\angle CH_ES_B = \angle BXC = \angle CH_ES_C$，也就是 $\angle S_CH_ES_B = 2\angle BXC$，令 $\overline{BC}$ 的中點為 M_X 點，H_B 點為 $\overline{CX}$ 邊上的高之垂足，H_C 點為 $\overline{XB}$ 邊上的高之垂足。

性質 14：點 E 為 $\overline{AD}$ 上定點，動點 F 在 $\overline{BC}$ 移動時，$\triangle MNP$ 的外心 O 的軌跡圓弧的圓通過 $\overline{BC}$ 的中點。

證明：

1. 由構造作圖法得知 U、S_B、C 共線且 U 點為 $\overline{XB}$ 為直徑的圓與 $\triangle XBC$ 的外接圓交點，所以 $\angle BXC = \angle U = \angle BES_B$，因此點 H_B 與點 S_B 互為旋轉與縮放變換對應點（$\overline{XB}$ 為直徑的圓$\leftrightarrow$$\overline{EB}$ 為直徑的圓），推得 $\triangle XBE \sim \triangle H_BBS_B$，所以 $\overline{H_BB}:\overline{BX} = \overline{H_BS_B}:\overline{XE} = \sin\angle BXC:1$，同理可得出點 H_C 與點 S_C 互為旋轉與縮放變換對應點（$\overline{XC}$ 為直徑的圓$\leftrightarrow$$\overline{EC}$ 為直徑的圓）且 $\overline{H_CS_C}:\overline{XE} = \sin\angle BXC:1$，得出 $\overline{H_BS_B} = \overline{H_CS_C}$。

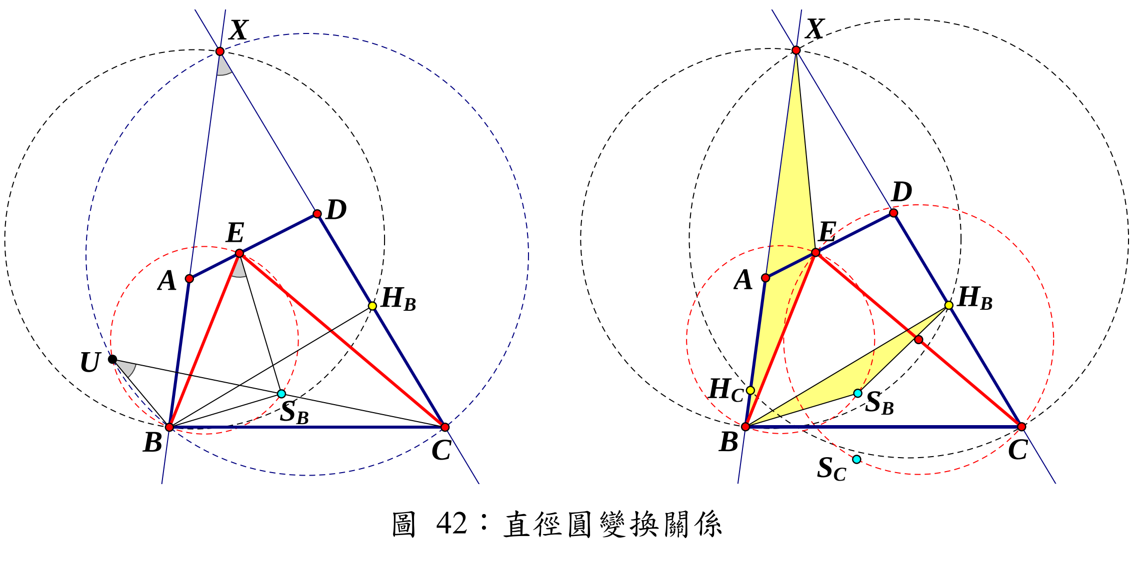


圖 42：直徑圓變換關係

2. 在 $\triangle H_BS_BM_X$、$\triangle H_CS_CM_X$ 中，$\overline{H_BS_B} = \overline{H_CS_C}$、$\overline{H_BM_X} = \overline{H_CM_X}$，$\angle S_BH_BM_X = \angle BH_BM_X - \angle BH_BS_B = (90° - \angle C) - \angle BXE$，同理可得 $\angle S_CH_CM_X = \angle EXC - (90° - \angle B)$，考慮 $\angle S_BH_BM_X - \angle S_CH_CM_X = 180° - \angle B - \angle C - \angle BXE - \angle EXC = 0°$，所以 $\angle S_BH_BM_X = \angle S_CH_CM_X$，因此 $\triangle H_BS_BM_X \cong \triangle H_CS_CM_X$（SAS 全等）。

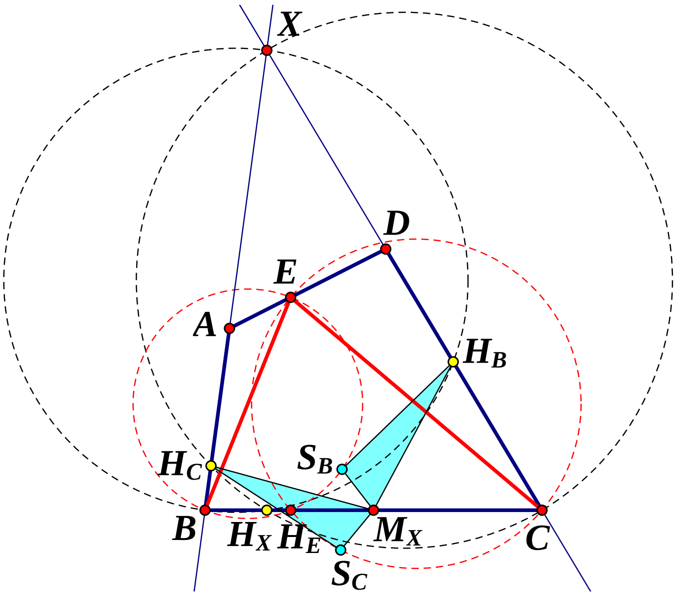


圖 43：對應點與中點構造全等三角形

3. $\triangle H_BS_BM_X \cong \triangle H_CS_CM_X$ 可得 $\angle S_BM_XS_C = \angle H_BM_XH_C$，又 $\angle H_BM_XH_C = \angle H_BH_XH_C = 180° - 2\angle BXE$，在定理 12 得知 $\angle S_CH_ES_B = 2\angle BXC$，$\angle S_BM_XS_C + \angle S_CH_ES_B = 180°$，所以點 S_B、S_C、H_E、M_X 四點共圓。

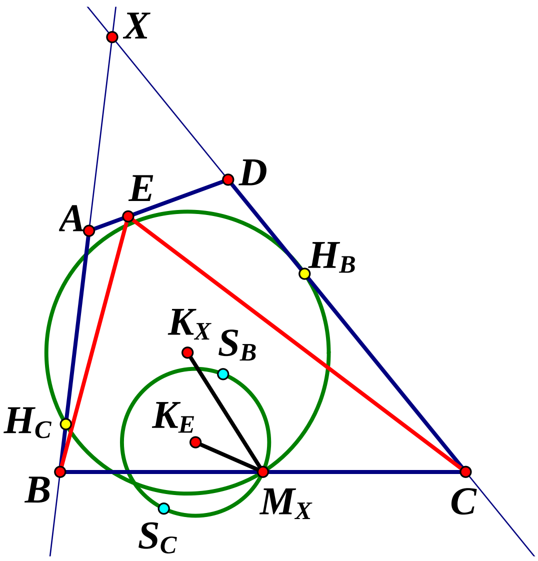


圖 44：四邊形第一種構圖之圓弧的幾何意義

□

（五） 將第一種構圖的「定點 E 與動點 F」設定為「動點 E 與定點 F」

當「定點 E 與動點 F」設定為「動點 E 與定點 F」時，並不影響其幾何結構，我們觀察可以發現圖 35、圖 36、圖 37、圖 38 中，關鍵是定點 E 分別與 B、C 兩點連線 $\overline{EB}$ 與 $\overline{EC}$ 為直徑做的圓，因此我們依照這樣的方法就可以得出新設定條件的作圖，也就是說考慮定點 F 分別與 B、C 兩點連線 $\overline{FB}$ 與 $\overline{FC}$ 為直徑做的圓與 $\triangle BXC$ 的外接圓交點 U 與 V 點，後續作圖步驟如前即可找出圓弧上的定點 S_B 與 S_C，因為版面有限，我們在此省略過程。

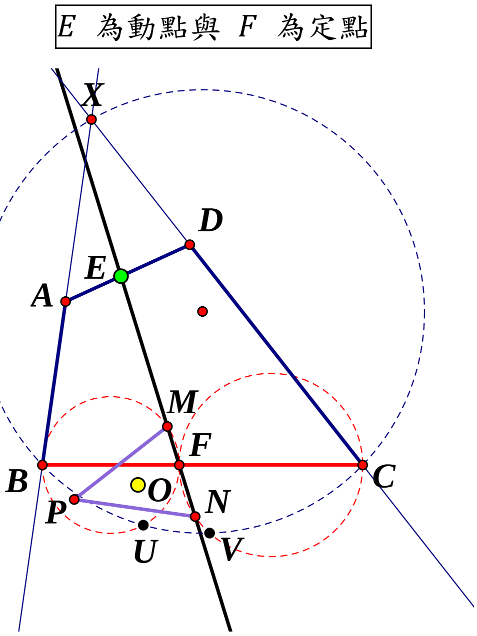


圖 45-1：以 $\overline{FB}$、$\overline{FC}$ 構造直徑圓

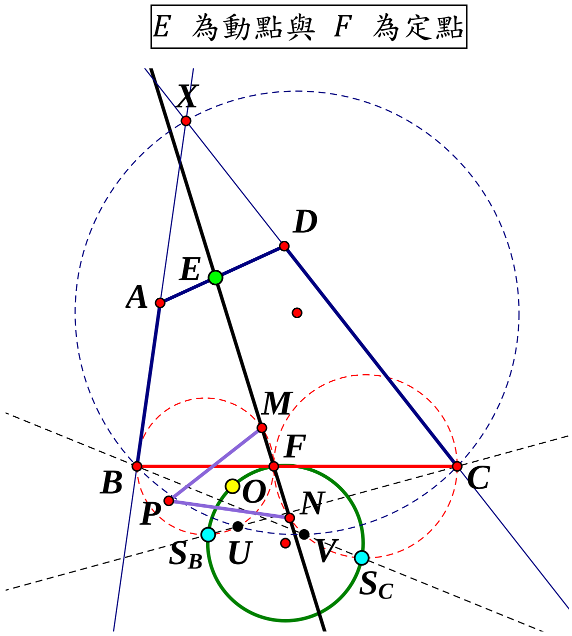


圖 45-2：圓弧上的定點 S_B 與 S_C 作圖

（六） 四邊形的第二種構圖之外心軌跡圓弧及定點

針對四邊形的第二種構圖，如同性質 5 的三角形作法，以 $\overline{EB}$ 為對稱軸將 S_B 鏡射得出定點 S_B'，以 $\overline{EC}$ 為對稱軸將 S_C 鏡射得出定點 S_C'，即可給出第二種構圖之外心軌跡為圓弧，因此我們省略相關過程。

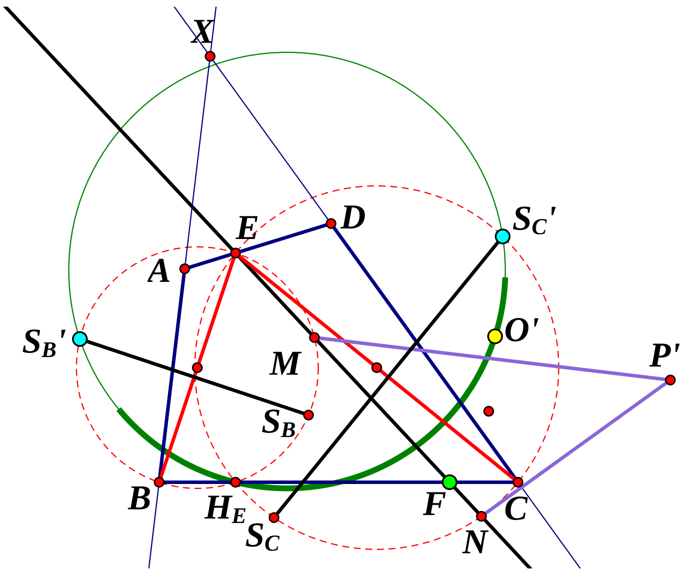


圖 46：四邊形第二種構圖之圓弧

伍、　推廣到形心 X 且 $\angle MXN$ 為定角

三角形常見的形心有外心、重心、垂心、內心、旁心，其中具有定角性質的有外心、垂心、內心、旁心，前幾節研究已經完整刻劃外心的情形，我們繼續推廣到垂心、內心、旁心。

（一）$\triangle ABC$ 的第一種與第二種構圖之「垂心」軌跡

因為動點 H 是 $\triangle MNP$ 的垂心，所以 $\angle MHN$ 是定角（$\angle MHN = 180° - \angle BAC$），與前面研究的外心 O 不同的是 $\overleftrightarrow{HM}$ 與 $\overleftrightarrow{HN}$ 並不是線束，兩直線沒有通過一定點，因此軌跡不是圓。從構圖定義，我們可以知道動點 D_A 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 移動時，$\overleftrightarrow{HM}$ 是一組平行 $\overleftrightarrow{AB}$ 的直線，$\overleftrightarrow{HN}$ 是一組平行 $\overleftrightarrow{CA}$ 的直線。

【第一種構圖】

性質 15：動點 D_A 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 移動時，$\triangle MNP$ 的垂心的軌跡恆為橢圓且中心為頂點 A 點。

證明：

1. 令 $A(0,0)$、$B(b,h)$、$C(c,h)$，x 軸與 $\overrightarrow{AD_A}$ 的有向角為 θ，可得出 $D_A(h\cot\theta, h)$，再得出 $\triangle MNP$ 的頂點 $M\left(\frac{b(\cos 2\theta+1)+h\sin 2\theta}{2}, \frac{h(1-\cos 2\theta)+b\sin 2\theta}{2}\right)$、$N\left(\frac{c(\cos 2\theta+1)+h\sin 2\theta}{2}, \frac{h(1-\cos 2\theta)+c\sin 2\theta}{2}\right)$、$P\left(0, \frac{(bc-h^2)\cos 2\theta+h(b+c)\sin 2\theta+bc-h^2}{2h}\right)$

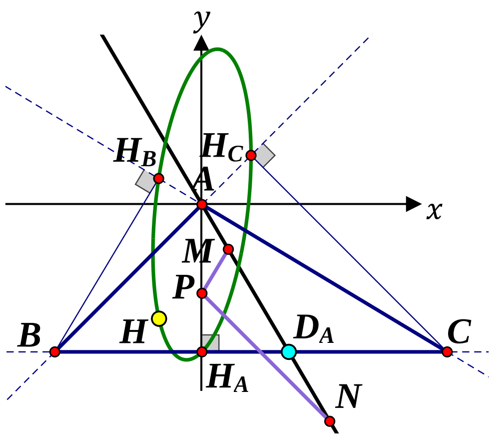


圖 47：垂心 H 的軌跡為橢圓

2. 再求出 $\triangle MNP$ 的垂心 $H\left(\frac{(bc+h^2)\sin 2\theta}{2h}, \frac{(b+c)\sin 2\theta-2h\cos 2\theta}{2}\right)$，令 $x = \frac{(bc+h^2)\sin 2\theta}{2h}$ 且 $y = \frac{(b+c)\sin 2\theta-2h\cos 2\theta}{2}$，解聯立方程式可得出 $\sin 2\theta$ 與 $\cos 2\theta$。

$$\sin 2\theta = \frac{2hx}{bc+h^2}\text{、}\cos 2\theta = \frac{h(b+c)x-(bc+h^2)y}{h(bc+h^2)}$$

利用恆等式 $\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$，消去變數 θ 而得出垂心 H 的軌跡方程式 Γ_H

$$\Gamma_H \equiv (h^2(b+c)^2+4h^4)x^2 - 2h(b+c)(bc+h^2)xy + (bc+h^2)^2y^2 - h^2(bc+h^2)^2 = 0$$

判別式 $\Delta = -32h^6(bc+h^2)^4$、$\delta = -16h^4(bc+h^2)^2$。

(1) 當 $bc+h^2\neq 0$（$\angle A\neq 90°$），可得 $\Delta\neq 0$ 且 $\delta<0$ 所以 Γ_H 為橢圓。

(2) 當 $bc+h^2=0$（$\angle A=90°$），Γ_H 退化為 $\overline{BC}$ 邊上的高。

3. 考慮當 D_A 與 C 點重合時，$\triangle MNP$ 為直角三角形，其垂心 H 與 H_B 重合；當 D_A 與 B 點重合時，$\triangle MNP$ 為直角三角形，其垂心 H 與 H_C 重合。

4. 因為橢圓 Γ_H 的方程式沒有 x 和 y 的一次項，因此橢圓的中心為 $A(0,0)$。

□

【第二種構圖】

性質 16：動點 D_A 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 移動時，$\triangle MNP'$ 的垂心的軌跡為 $\overleftrightarrow{BC}$ 上的線段。

證明：

注意到第二種構圖的 $\triangle MNP'$ 與第一種構圖的 $\triangle MNP$ 可構成一個平行四邊形 $MPNP'$，所以 $\overline{HH'}$ 的中點即為 $\overline{MN}$ 的中點。$\overline{MN}$ 中點坐標為 $\left(\frac{(b+c)(\cos 2\theta+1)+2h\sin 2\theta}{4},\frac{2h(1-\cos 2\theta)+(b+c)\sin 2\theta}{4}\right)$，再推出 $H'\left(\frac{h(b+c)(\cos 2\theta+1)+(h^2-bc)\sin 2\theta}{2h},h\right)$，又 $\overleftrightarrow{BC}: y=h$，因此 $\triangle MNP'$ 的垂心 H' 的軌跡為 $\overleftrightarrow{BC}$ 上的線段。

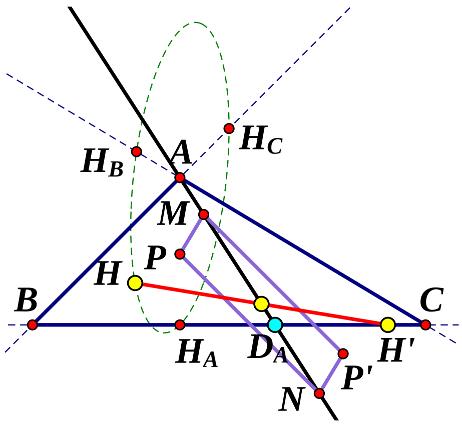


圖 48：垂心 H' 的軌跡為線段

□

（二）$\triangle ABC$ 的第一種與第二種構圖之「內心」與「旁心」軌跡

我們利用軟體實驗發現第一種與第二種構圖的內心與旁心的軌跡不是二次曲線。

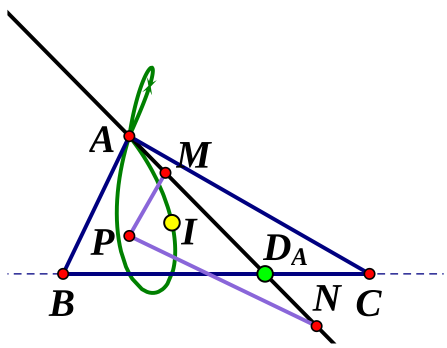


圖 49：內心 I 的軌跡

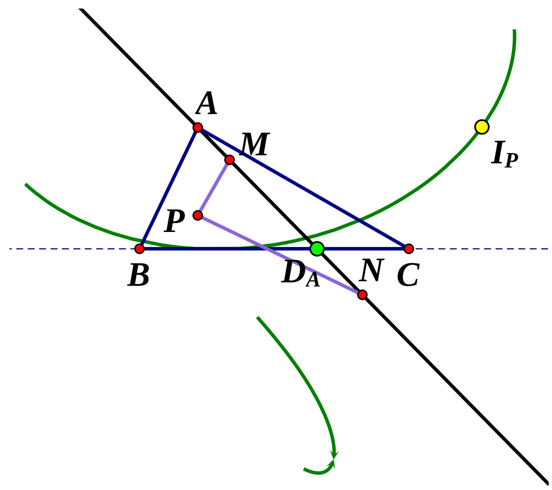


圖 50：旁心 I_P 的軌跡

陸、 結論

一、 對於任意三角形，刻劃兩組直線所構造出的三角形之外心軌跡與性質

對於任意 $\triangle ABC$ 和 $\overline{BC}$ 上的動點所構造的第一種構圖 $\triangle MNP$ 及其動點外心 O，我們先發現 $\angle MPN$ 為定角，再利用多次四點共圓巧妙給出了外心 O 的軌跡為圓弧，值得一提的是該圓弧在 $\triangle ABC$ 的九點圓上。若分別對 $\triangle ABC$ 的三個頂點輪換進行第一種構圖得出的圓弧恰能構成該三角形之九點圓，這個是九點圓的新性質，也是本研究的亮點。本研究創造第二種構圖而得出 $\triangle MNP'$ 及其動點外心 O'，刻劃 O' 點軌跡為圓弧的難度較高，我們給出其對應的定點 S_B 與 S_C 而解決此問題，同樣分別對三頂點輪換構造三段圓弧，雖然無法構成一個圓，但是圓心連線的三角形與 $\triangle ABC$ 相似，這是漂亮的結果！

二、 對於任意三角形，將兩組直線進行旋轉而推廣構造三角形

考慮將過頂點 B、C 的直線進行旋轉 θ 得到一般化情形，再刻畫 $\triangle M(\theta)N(\theta)P(\theta)$ 的外心 $O(\theta)$ 軌跡。我們給出此推廣情形與原本 $\triangle MNP$ 之間的變換結構，並發現彼此之間美麗的幾何性質，建立了統整性的幾何理論。

三、 對於任意四邊形，刻劃兩組直線所構造出的三角形之外心軌跡與性質

對於任意四邊形 $ABCD$，定點 E 位於 $\overline{AD}$，動點 F 位於 $\overline{BC}$，我們刻劃兩種構圖的外心軌跡。相較三角形來說，此時的外心軌跡的難度在於定點 E 不在 $\overline{AB}$ 或 $\overline{CD}$ 上，無法直接仿照三角形方式處理，我們需要做變換。我們巧妙構造了兩個三角形，並且分析給出了兩個定點 S_B 與 S_C 與動點外心 O 構成的 $\angle S_BOS_C$ 恆為定角而解決了此問題。最後推廣動點 F 位於鄰邊 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的情況，我們利用雙射對應方式漂亮刻劃了其結果。

柒、 參考文獻

[1] Luu Dong (2022). Problem 4753. *Crux Mathematicorum*, *48* (6), 347.

[2] The UCLan Cyprus Problem Solving Group (2023). Solutions 4753. *Crux Mathematicorum*, *49* (1), 50-51.

[3] Nine-Point Circle. https://mathworld.wolfram.com/Nine-PointCircle.html

[4] 黃家禮（2000）。幾何明珠：第十五章九點圓，頁 150-156。臺北市：九章出版社。

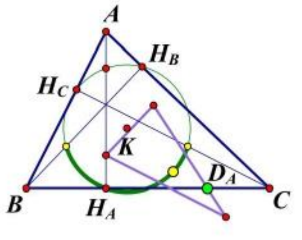
【評語】030410

作品從《Crux Mathematicorum》數學雜誌的一道四邊形動態幾何問題發想，考慮四邊形$ABCD$的一組對邊 AB 和 CD，且對邊非平行，當 E 是 AB 邊上的定點，F 是 CD 邊上的動點，M, N 點分別為過 B, C 作直線 EF 垂線的垂足，過M點作 CD 邊的垂線且過N點作 AB 邊的垂線，兩垂線交於 P 點，構造的三角形MNP的外心O 點的軌跡會是圓弧。本作品的作者們由比較單純的情況出發來思考這樣的問題。他們考慮了當 A、D 兩點縮成同一點（四邊形 ABCD 退化為三角形 ABC）時，三角形 MNP 的外心會具備的特性，意外的發現到在這個退化的情況下，三角形 MNP 的外心的軌跡會有非常漂亮的性質。藉助在解決這個問題的過程中所使用到的技巧，針對原始的問題，作者們也給出了完整的論證。論述十分有條理，結果也很漂亮，是很不錯的一個作品。能由特殊化的問題出發，藉由巧妙的分析手法導出各種性質，找到隱藏在問題背後的漂亮結構，並運用分析過程中所使用到的技巧來解答原始的問題，可以看得出來作者們已經充分的掌握了研究問題的方法，非常值得鼓勵。整體而言這是一件飛成好的作品，但有部分的論述稍嫌簡略了些，一些關鍵的步驟也有符號的錯置問

題。作者們確實得出了很多有趣的結論，但有部分的結果與原本的問題似乎不是那麼的相關。如果可以適當的做一些取捨，刪除掉一些與主題不那麼相關的結論，把一些關鍵的步驟說明的更清楚，應該會更好。另外，該數學雜誌也有提供解答，作品的成果雖然與解答作法完全不同，但應有受解答的一些啟發，報告書應適度的提及解答對本作品的貢獻。

作品海報

兩組直線所構造的三角形外心軌跡性質



壹、前言

我們在數學雜誌《Crux Mathematicorum》發現了十分有趣的平面幾何問題：證明「在任意非平行四邊形中，以定點 E 和動點 F 及兩組直線所構造的 $\triangle MNP$ 之外心為圓弧」。

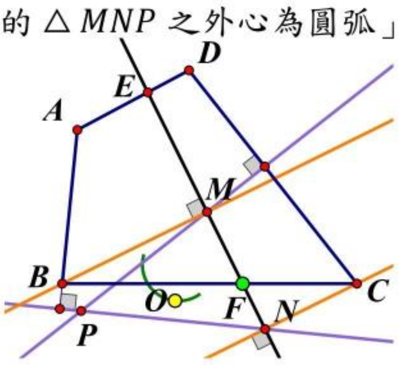


圖 1：原始問題構圖 (第一種構圖)

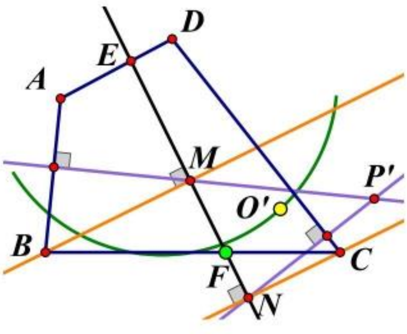


圖 2：延伸第二種構圖

我們有系統地推廣原問題，探討各種條件下構造的 $\triangle MNP$ 之外心軌跡性質。

研究對象

① 三角形與四邊形

② 垂直構造下的第一種構圖、第二種構圖

③ 一般化旋轉有向角 θ 構造的 $\triangle M(\theta)N(\theta)P(\theta)$ 之外心 $O(\theta)$

④ 更換四邊形的定點與動點

研究目的

① 外心軌跡圓弧的圓心角大小、圓心性質

② 兩種構圖之間的變換結構

③ 三角形與四邊形之構圖的變換結構

貳、預備知識

一、九點圓圓心 K 為垂心與外心連線的中點；九點圓的半徑等於其外接圓半徑的一半。

二、垂足構成的角 $\angle H_C H_A H_B = 180° - 2\angle BAC$，$\angle H_B H_C H_A$ 與 $\angle H_A H_B H_C$ 同理。

三、$\triangle AH_BH_C \sim \triangle H_ABH_C \sim \triangle H_AH_BC \sim \triangle ABC$，相似比為 $\cos A : \cos B : \cos C : 1$。

參、研究結果

一、對於任意三角形，兩組直線所構造出的三角形之外心軌跡

(一) 三角形的第一種構圖之外心軌跡

性質1. 動點 D_A 在 $\overline{BC}$ 移動時，$\triangle MNP$ 的外心 O 的軌跡為九點圓之圓弧。

性質2. 動點 D_A 在 $\overline{BC}$ 移動時，$\triangle MNP$ 的頂點 P 的軌跡為線段（$\overline{BC}$ 上的高）。

性質4. 動點 D_A 在 $\overline{BC}$ 移動時，$\triangle MNP$ 的外心 O 的軌跡圓弧的圓心角為 $2\angle BAC$。

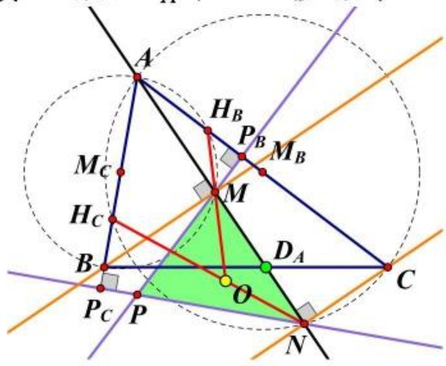


圖 3：三點共線及兩定點

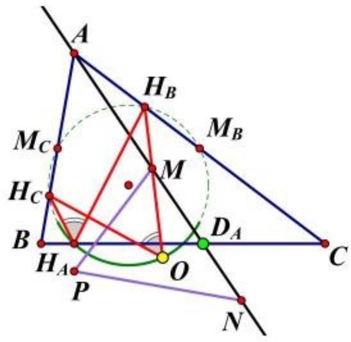


圖 4：外心 O 軌跡為九點圓圓弧

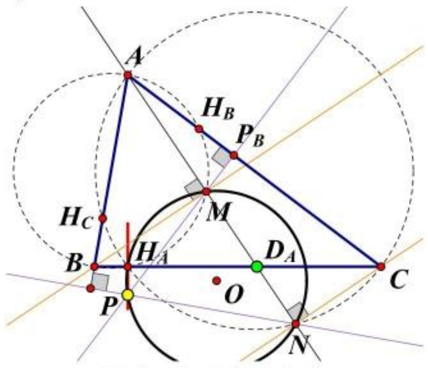


圖 5：P 點軌跡為高

另類構造法
三角形三個方向的第一種構圖之圓弧形成九點圓

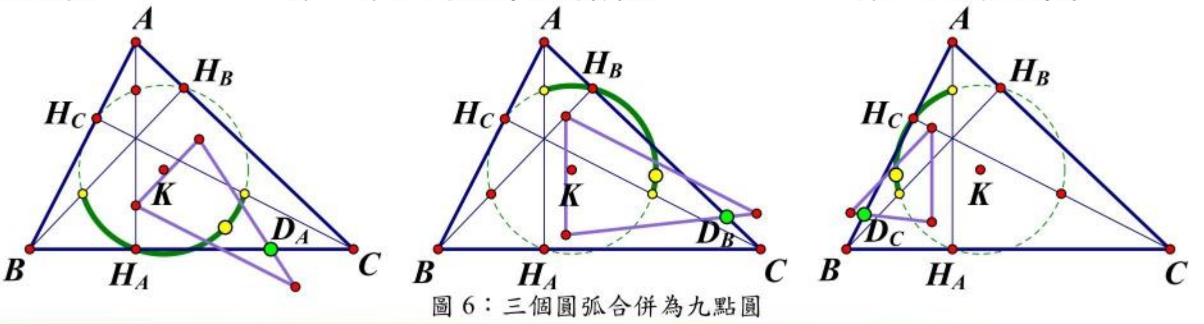


圖 6：三個圓弧合併為九點圓

(二) 三角形的第二種構圖之外心軌跡

性質5. 動點 D_A 在 $\overline{BC}$ 移動時，$\triangle MNP'$ 的外心 O' 的軌跡為圓弧，其圓心角為 $2\angle BAC$。

性質6. 動點 D_A 在 $\overline{BC}$ 移動時，$\triangle MNP'$ 的外心 O' 的軌跡圓弧通過 $\overline{BC}$ 的中點。

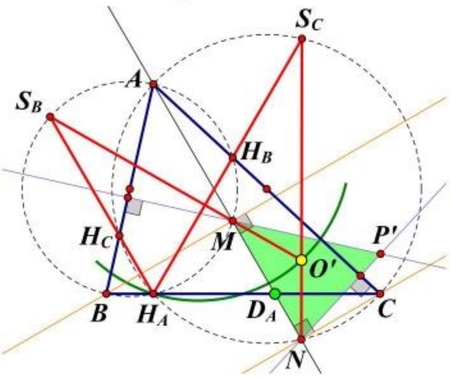


圖 7：刻劃兩定點 S_B 與 S_C

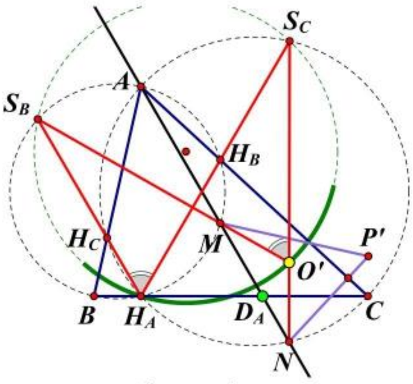


圖 8：第二種構圖之圓弧

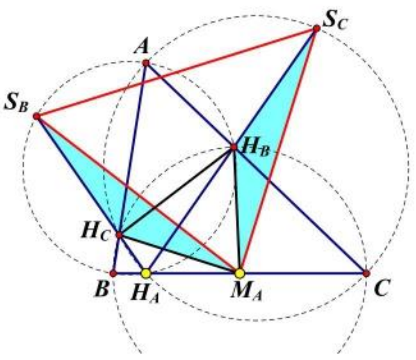


圖 9：S_B、S_C、M_A 與 H_A 四點共圓

性質7. 點 K_A、K_B、K_C 分別是 $\triangle AM_BM_C$、$\triangle BM_CM_A$、$\triangle CM_AM_B$ 的外心。

性質8. $\triangle K_AK_BK_C \sim \triangle ABC$，位似中心為 $\triangle ABC$ 的外心 O 且位似比為 $1:2$。

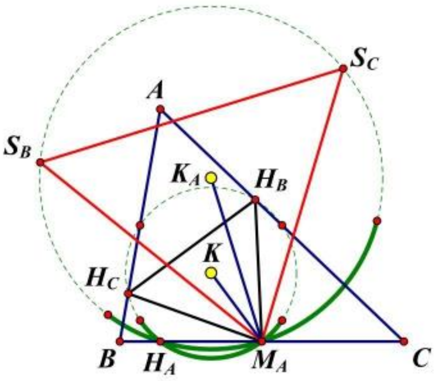


圖 10：兩種構圖的幾何變換關係

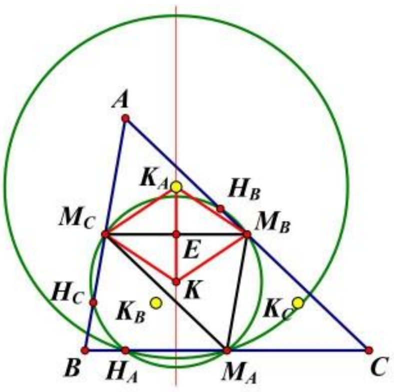


圖 11：$KM_BK_AM_C$ 是菱形

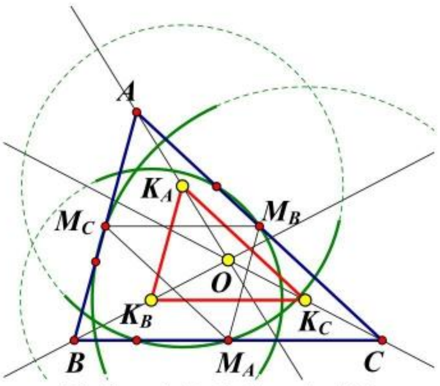


圖 12：$\triangle K_AK_BK_C \sim \triangle ABC$

二、推廣將直線進行旋轉 θ 後構造 $\triangle M(\theta)N(\theta)P(\theta)$

通過 B 點、C 點的兩條直線進行推廣，考慮旋轉有向角 θ 使得 $\angle MBM(\theta)=\angle NCN(\theta)=\theta$

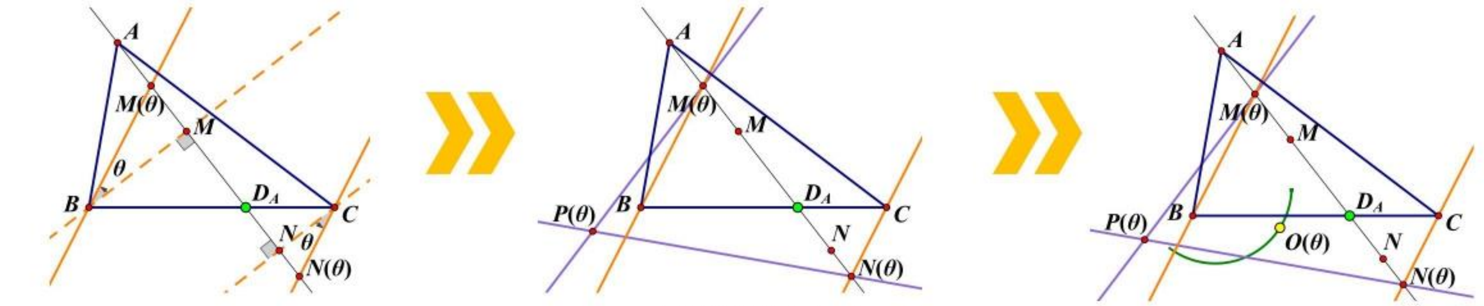


圖 13：$\triangle M(\theta)N(\theta)P(\theta)$ 的構圖步驟

定理9. 動點 D_A 在 $\overline{BC}$ 移動時，$\triangle M(\theta)N(\theta)P(\theta)$ 的外心 $O(\theta)$ 的軌跡為圓弧。

定理10. 外心 $O(\theta)$ 的軌跡圓弧的圓心角為 $2\angle BAC$。

性質11. $\triangle K_A(\theta)K_B(\theta)K_C(\theta)\sim\triangle ABC$，縮放比為 $\tan\theta:1$ 且對應邊恆垂直。

刻劃定點 $H_B(\theta)$ 與 $H_C(\theta)$ 點

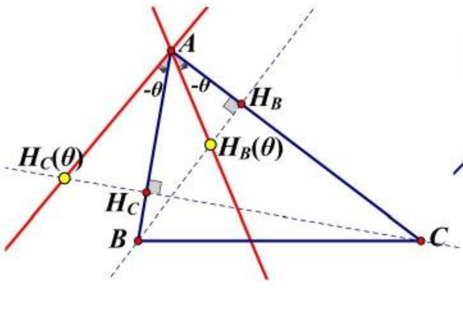


圖 14：共圓的定點刻劃

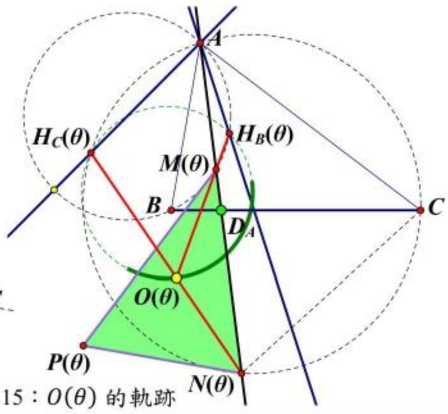


圖 15：$O(\theta)$ 的軌跡

幾何
變換結構

旋轉
有向角 θ

縮放
$\frac{1}{\cos\theta}$

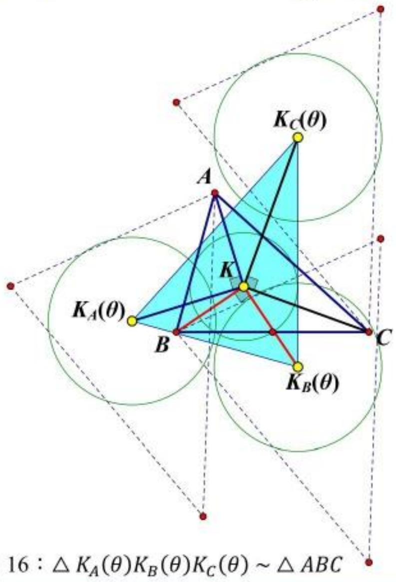


圖 16：$\triangle K_A(\theta)K_B(\theta)K_C(\theta)\sim\triangle ABC$

三、對於任意凸凹四邊形，兩組直線所構造三角形的外心軌跡

(一) 四邊形的第一種構圖的圓弧的定點尋找與構造討論

$\angle MON=2\angle BXC$

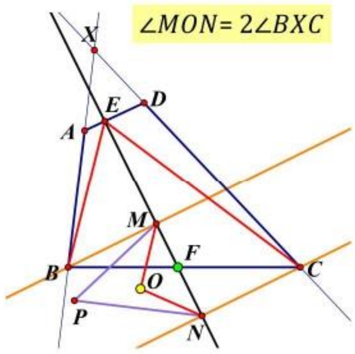


圖 17：$\angle MON$ 角度分析

$\widehat{ES_B}$ 為定弧

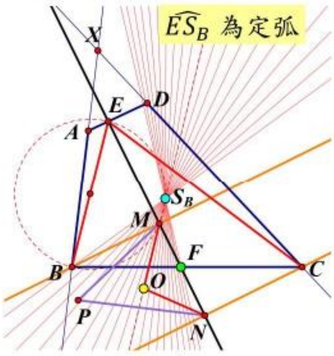


圖 18：觀察定點 S_B

外接圓與直徑圓做變換

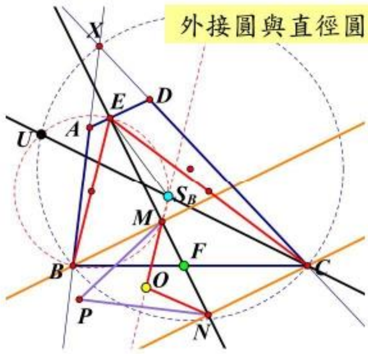


圖 19：定點 S_B 作圖法

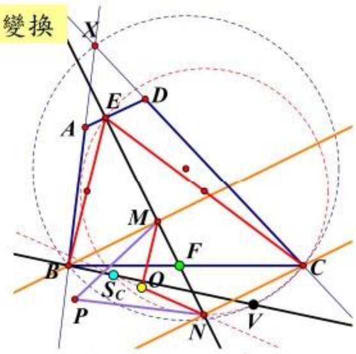


圖 20：定點 S_C 作圖法

(二) 四邊形的第一種構圖之外心軌跡

定理12. 給定任意四邊形 $ABCD$，$\overline{AB}\nparallel\overline{CD}$。對於定點 E 在 $\overline{AD}$ 上，動點 F 在 $\overline{BC}$ 移動時，$\triangle MNP$ 的外心 O 的軌跡為圓弧，其圓心角為 $2\angle BEC$。

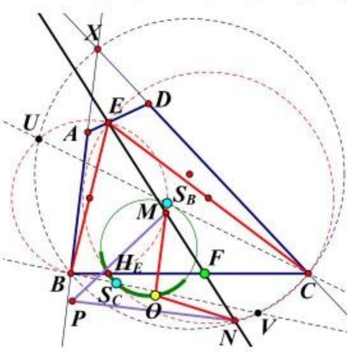


圖 21：$\triangle MNP$ 的外心軌跡

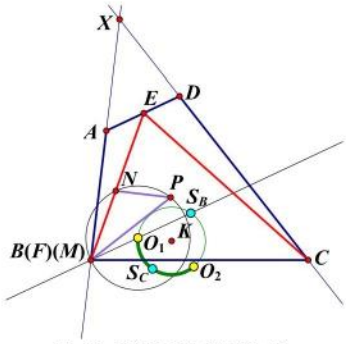


圖 22：圓弧的左端點 O_1

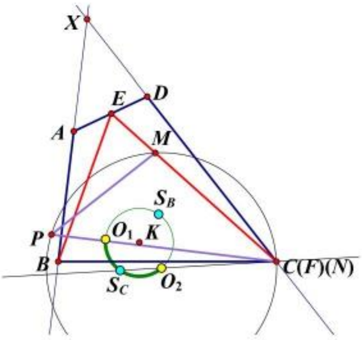


圖 23：圓弧的右端點 O_2

圓心角 $2\angle BEC$

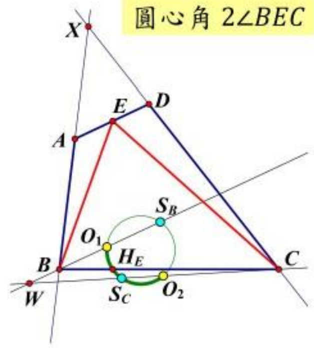


圖 24：外心 軌跡圓弧的圓心角

(三) 將第一種構圖的「對邊」連線，設定為「鄰邊」連線

定理13. 給定任意四邊形 $ABCD$，$\overline{AB}\nparallel\overline{CD}$。對於定點 E 在 $\overline{AD}$ 上，動點 F 在依序在 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 與 $\overline{CD}$ 上移動時，$\triangle MNP$ 的外心 O 的軌跡為一個圓。

雙射對應 $F\leftrightarrow F'$、$F'\leftrightarrow O$

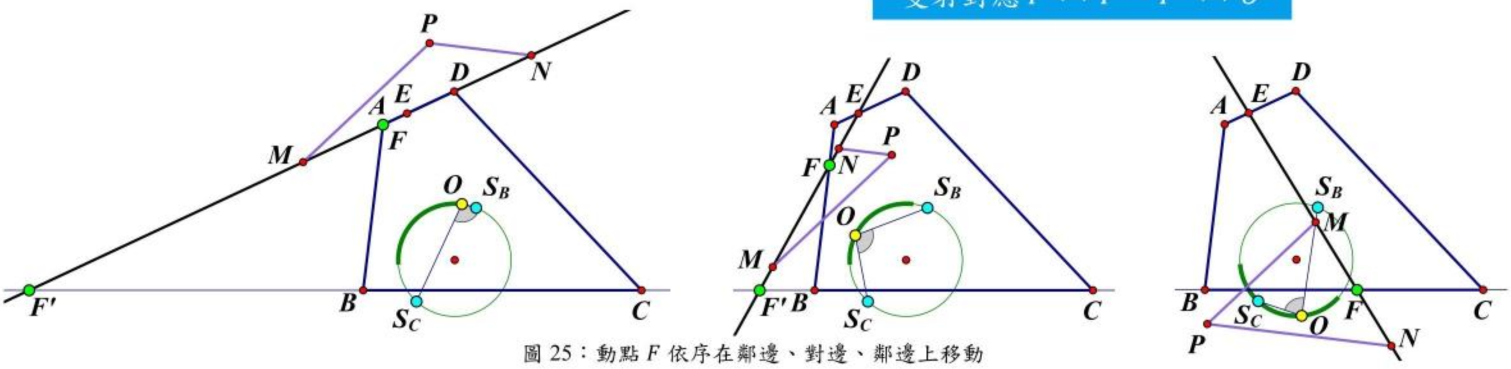


圖 25：動點 F 依序在鄰邊、對邊、鄰邊上移動

(四) 四邊形的第一種構圖之外心軌跡圓弧的幾何意義

性質14. 點 E 為 $\overline{AD}$ 上定點，動點 F 在 $\overline{BC}$ 移動，$\triangle MNP$ 的外心 P 軌跡圓弧的圓通過 $\overline{BC}$ 的中點。

$X \leftrightarrow E$ 且 $H_B \leftrightarrow S_B$
$\overline{H_BS_B}:\overline{XE} = \sin\angle BXC : 1$

幾何變換結構
M_X 為旋轉與位似中心

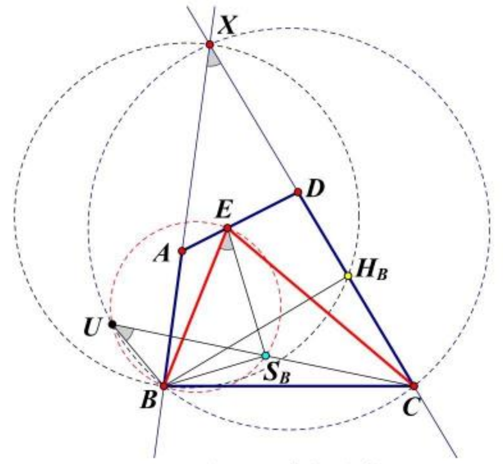


圖 26：直徑圓變換關係

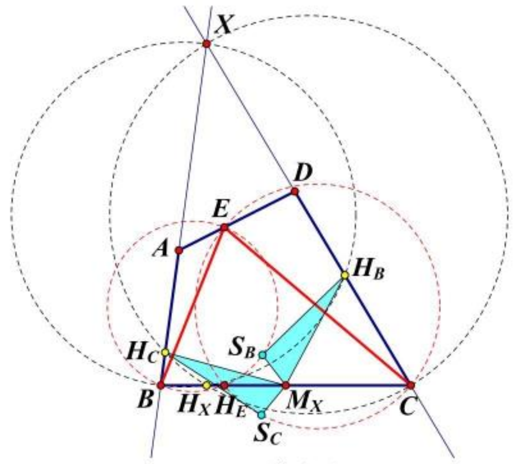


圖 27：全等與共圓

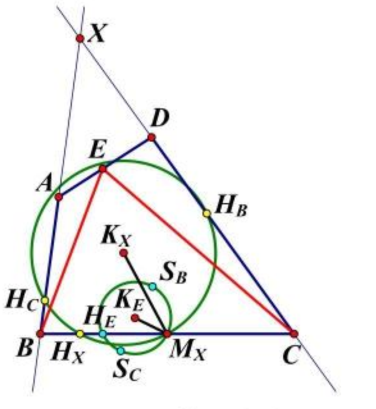


圖 28：圓弧幾何變換

(五) 四邊形的第二種構圖之外心軌跡圓弧及定點

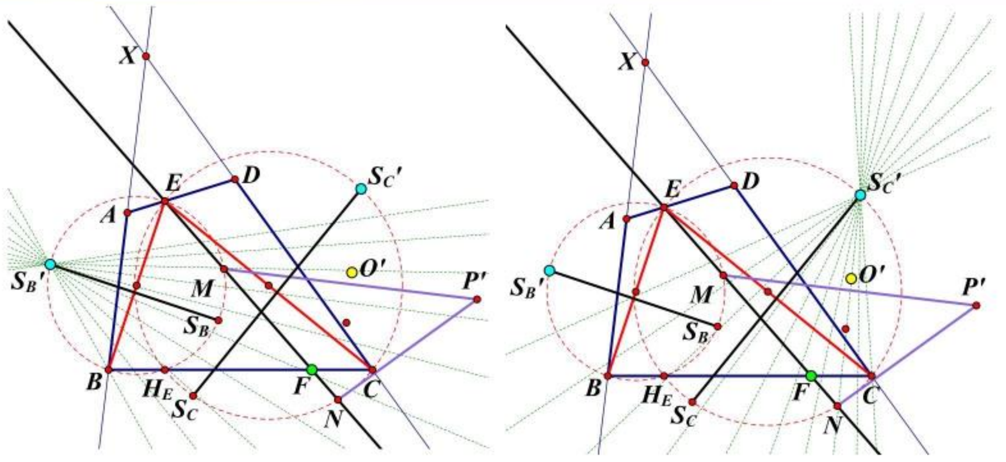


圖 29：刻劃兩定點 S_B' 與 S_C'

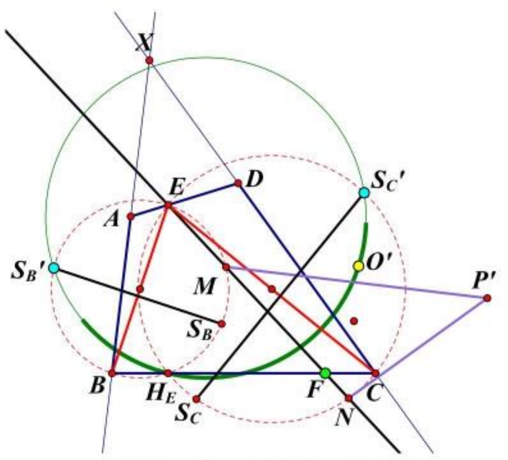


圖 30：第二種構圖之圓弧

四、推廣到形心 R 且 $\angle MRN$ 為定角：垂心、內心與旁心

性質15. 動點 D_A 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 移動時，$\triangle MNP$ 的垂心的軌跡恆為橢圓且中心為頂點 A 點。

證明： 令 $A(0,0)$、$B(b,h)$、$C(c,h)$，x 軸與 $\overrightarrow{AD_A}$ 的有向角為 θ，可得出 $D_A(h\cot\theta, h)$，再求 H 點坐標，最後利用三角函數恆等式給出 H 點的軌跡方程式。

性質16. 動點 D_A 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 移動時，$\triangle MNP'$ 的垂心的軌跡為 $\overleftrightarrow{BC}$ 上的線段。

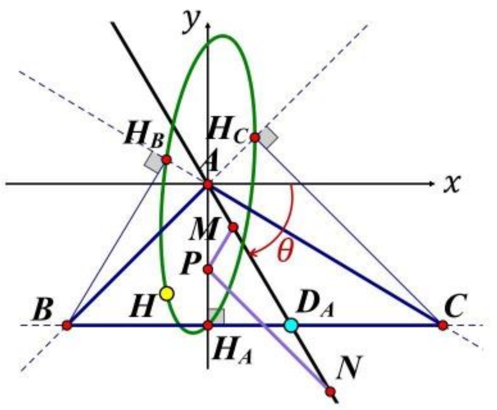


圖 31：垂心 H 的軌跡為橢圓

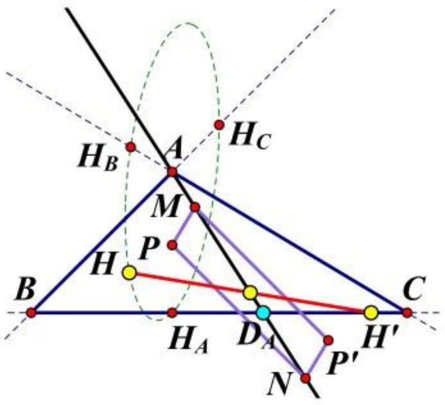


圖 32：垂心 H' 的軌跡為線段

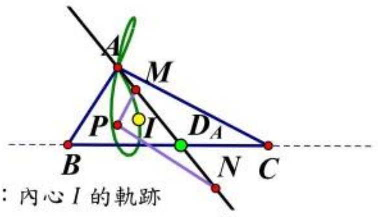


圖 33：內心 I 的軌跡

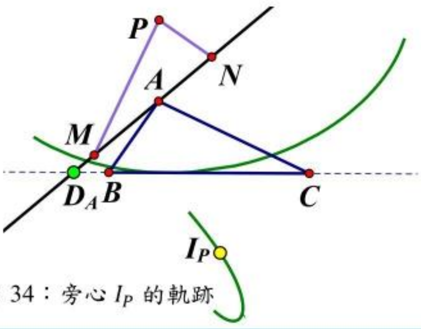


圖 34：旁心 I_P 的軌跡

肆、結論

一、對於任意 $\triangle ABC$，利用定角 $\angle MPN$ 與定點 H_B 與 H_C，給出 $\triangle MPN$ 的外心 O 的軌跡為 $\triangle ABC$ 的九點圓上的圓弧。分別對 $\triangle ABC$ 的三頂點輪換構圖得出的圓弧恰能構成該三角形的九點圓，可視為九點圓的新構圖方法，也是本研究的亮點。對於第二種構圖中 $\triangle MNP'$ 及其外心 O' 軌跡，同樣刻劃出對應定點 S_B 與 S_C 而解決，此時再對三頂點輪換構圖，其圓心連線三角形與 $\triangle ABC$ 相似。

二、在任意 $\triangle ABC$ 中，推廣將過頂點 B、C 的兩直線旋轉有向角 θ 而構造 $\triangle M(\theta)N(\theta)P(\theta)$，我們給出此一般化情形與原本 $\triangle MNP$ 之間的變換結構，建立統整性的幾何理論。

三、對於任意四邊形 $ABCD$，因為無法直接仿照三角形進行處理，所以我們巧妙構造 $\triangle BXC$ 與 $\triangle BEC$，轉換頂角與變換直徑圓給出兩定點，進而刻劃出外心軌跡解決此問題。最後推廣至鄰邊連線時，利用雙射對應觀點簡潔刻劃了軌跡為一個圓。

四、探討其他具有定角的形心。關於第一種構圖的 $\triangle MNP$ 的垂心 H 軌跡，我們利用恆等式 $\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ 消去變數 θ 給出 H 軌跡方程為橢圓且中心為頂點 A；關於第二種構圖，則利用第二種構圖與第一種構圖的點對稱性質給出 H' 的軌跡為 $\overleftrightarrow{BC}$ 上的線段。對於內心與旁心，我們發現其軌跡皆不是二次曲線。因此構成二次曲線的結構不是具有定角的形心。

伍、參考文獻

[1] Luu Dong (2022). Problem 4753. *Crux Mathematicorum*, *48* (6), 347.
[2] The UCLan Cyprus Problem Solving Group (2023). Solutions 4753. *Crux Mathematicorum*, *49* (1), 50-51.
[3] Nine-Point Circle. https://mathworld.wolfram.com/Nine-PointCircle.html
[4] 黃家禮（2000）。**幾何明珠：第十五章九點圓**，頁150-156。臺北市：九章出版社。