中華民國第 63 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

團隊合作獎

030409

三角形面積分割及推廣研究

學校名稱：臺中市立清水國民中學

作者：	指導老師：
國三 陳顥	王永賢
國三 陳于恩	洪嘉祥
國三 陳芊彣	

關鍵詞：莫比烏斯環、單面單邊體、n 等分

摘要

之前我們研究三角形三頂點與其對邊或延長線上的任意分割點相連的直線，探討這三條分割直線所圍之分割三角形與原三角形的面積關係。我們找出所有圖形類型，分別運用孟氏定理計算分割線段長比例，推導分割三角形與原三角形的面積比，並歸納為同一公式表示。

延續自己的研究，將分割點推廣至延長線上的情形，進一步以「解析幾何」及「向量外積」方式，證明分割三角形存在條件及其與原三角形面積比。

因平行四邊形是由兩個全等三角形所組成，猜想推廣到平行四邊形時，應可得到類似結果。先以繪圖模擬，再以「向量外積」方式探討「**平行四邊形**」由頂點與對邊直線上任意分割點連線，所圍的「分割區域」，證明其與原平行四邊形的面積比。

壹、研究動機

去年(第 62 屆)我們研究「非西瓦時三角形面積分割」，即三角形 ABC 中，當 D、E、F 分別為邊$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上異於頂點的任意分割點，不失一般性，假設$m=\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}$，$n=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$，$s=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$。那麼，在非西瓦(即$mns\neq 1$)時，三條分割線$\overline{CF}$、$\overline{AD}$、$\overline{BE}$可圍成分割三角形ΔPQR，且與原三角形ΔABC的面積比$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(mns-1)^2}{(ns+n+1)(sm+s+1)(mn+m+1)}$。(如圖 1)

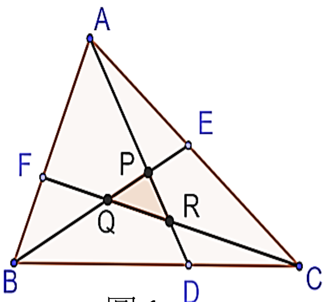


圖 1

接著我們把分割點 D、E、F 位置改為「邊的直線上」，如圖 2，也可以得到很好的結果。

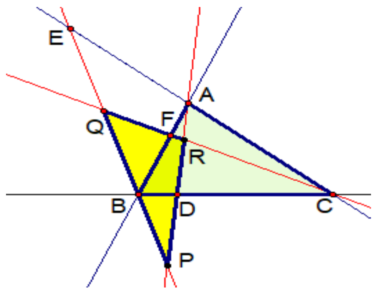


圖 2

即若 D、E、F 分別為直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$上的分割點，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$稱為分割直線，P 為$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$的交點，Q 為$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$的交點，R 為$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CF}$的交點。

(1)當 F 在$\overline{AB}$線段上時，$u=m$；當 F 在$\overline{AB}$的延長線上時，$u=-m$。

(2)當 D 在$\overline{BC}$線段上時，$v=n$；當 D 在$\overline{BC}$的延長線上時，$v=-n$。

(3)當 E 在$\overline{AC}$線段上時，$w=s$；當 E 在$\overline{AC}$的延長線上時，$w=-s$。

(u、v、w 均不為 0、-1)，則當(1)三條分割線不共點(即$uvw\neq 1$)，且(2)三條分割線兩兩不平行時，即$(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)\neq 0$，分割三角形ΔPQR存在，且面積比 $\frac{\Delta \mathbf{PQR}}{\Delta \boldsymbol{ABC}}=\frac{(\boldsymbol{uvw}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}}{|(\boldsymbol{uv}+\boldsymbol{u}+\mathbf{1})(\boldsymbol{vw}+\boldsymbol{v}+\mathbf{1})(\boldsymbol{wu}+\boldsymbol{w}+\mathbf{1})|}$。

之前我們因所學有限，表達與證明過於繁瑣，今年我們以更簡潔的方式證明，並且推廣到平行四邊形的分割探討。

貳、研究目的

繼續我們之前的研究，進一步以「**解析幾何**」及「**向量外積**」方式來證明本研究。希望能讓本研究更加完整，並推廣到平行四邊形，計算「分割區域」與原圖形面積比。

參、研究設備及器材

一、紙、筆。

二、geogebra 繪圖工具。

三、GSP 數學繪圖軟體。

四、因式分解與多項式計算器。

肆、文獻探討：

我們在第 46 屆科展找到一個與面積分割相關的研究，該研究為沿三角形或四邊形的邊以固定方向的縮放，探討與原圖形面積關係，與本研究不同。

我們之前的研究，應用到西瓦定理及孟氏定理與其推廣的延伸性質。這次本研究運用「向量」來解決問題，將向量「純量積、內積與外積」等性質，分述如下。

一、孟氏定理（Menelaus' theorem）：

如圖 3，證明方式很多，其中最簡單易懂的方式就是以面積比例來證明。

【孟氏定理】如果一直線與ΔABC 的邊$\overline{AC}$、$\overline{AB}$、$\overline{BC}$或其延長線分別交於 D、E、F，則有：

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}}=1。$$

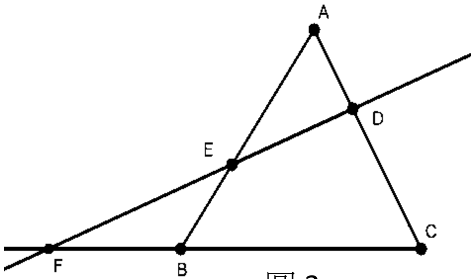


圖 3

【證明】連接$\overline{CE}$及$\overline{AF}$，

因為 $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}=\frac{\Delta ACE+\Delta AFE}{\Delta CFE}$，$\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}=\frac{\Delta AFE}{\Delta AFE+\Delta ACE}$，$\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}}=\frac{\Delta CFE}{\Delta AFE}$

所以 $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}}=\frac{\Delta ACE+\Delta AFE}{\Delta CFE}\times\frac{\Delta AFE}{\Delta AFE+\Delta ACE}\times\frac{\Delta CFE}{\Delta AFE}=1$

二、西瓦定理(Ceva's theorem)：

【西瓦定理】如圖 4，如果ΔABC 的$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 通過同一點 O，

則 $\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{AF}}=1$。

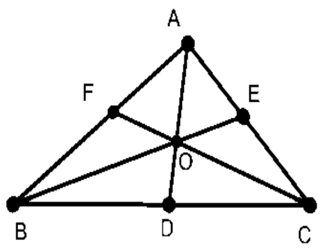


圖 4

【證明】 因為 $\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}=\frac{\Delta ABO}{\Delta BCO}$，$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{\Delta ACO}{\Delta ABO}$，$\frac{\overline{BF}}{\overline{AF}}=\frac{\Delta BCO}{\Delta ACO}$，

所以$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}\times\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{AF}}=\frac{\Delta ABO}{\Delta BCO}\times\frac{\Delta ACO}{\Delta ABO}\times\frac{\Delta BCO}{\Delta ACO}=1$

三、從孟氏定理，得到以下六個延伸性質：

【孟氏定理延伸性質】如圖 5，$\overline{BE}$與$\overline{CF}$交於 R 點，已知$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}=\frac{x}{y}$，$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}=\frac{z}{w}$，$\frac{\overline{FR}}{\overline{CR}}=\frac{a}{b}$，$\frac{\overline{BR}}{\overline{ER}}=\frac{c}{d}$，

根據孟氏定理，可得以下關係式：

(1) $\frac{a}{a+b}=\frac{yz}{yz+w(x+y)}$ (2) $\frac{x}{x+y}=\frac{bz-aw}{bz}$

(3) $\frac{a}{a+b}=\frac{cz}{(c+d)(z+w)}$ (4) $\frac{x}{x+y}=\frac{d(z+w)}{dz+w(c+d)}=\frac{d(w+z)}{cw+d(w+z)}$

(5) $\frac{a}{a+b}=\frac{cx-dy}{x(c+d)}$ (6) $\frac{x}{x+y}=\frac{d(a+b)}{b(c+d)}$。

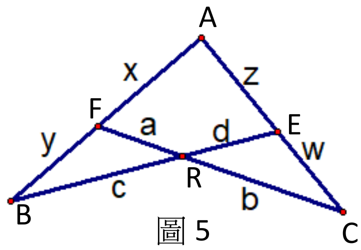


圖 5

【證明】根據孟氏定理，可列出聯立方程式$\begin{cases}\frac{x}{y}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{w}{(w+z)}=1\\ \frac{(x+y)}{y}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{w}{z}=1\end{cases}$，

由②$\frac{a}{b}=\frac{yz}{w(x+y)}$，$\frac{a}{a+b}=\frac{yz}{yz+w(x+y)}$ ……(1)得證，

由①$\frac{x}{y}=\frac{d(w+z)}{cw}$，$\frac{x}{x+y}=\frac{d(w+z)}{cw+d(w+z)}=\frac{d(w+z)}{w(c+d)+dz}$ ……(4)得證，

由②$\frac{y}{x+y}=\frac{aw}{bz}$，$\frac{x}{x+y}=\frac{bz-aw}{bz}$ ……(2)得證，

由(4)可得 $\frac{y}{x+y}=\frac{cw}{w(c+d)+dz}$代入② $\frac{a}{b}=\frac{z}{w}\cdot\frac{y}{x+y}=\frac{z}{w}\cdot\frac{cw}{w(c+d)+dz}=\frac{cz}{w(c+d)+dz}$，

所以$\frac{a}{a+b}=\frac{cz}{cz+w(c+d)+dz}=\frac{cz}{(c+d)(z+w)}$ ……(3)得證，

由①$\frac{z}{w}=\frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y}-1$，代入②$\frac{a}{b}=\frac{z}{w}\cdot\frac{y}{x+y}=(\frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y}-1)\cdot\frac{y}{x+y}=\frac{cx-dy}{d(x+y)}$，

所以$\frac{a}{a+b}=\frac{cx-dy}{cx-dy+d(x+y)}=\frac{cx-dy}{x(c+d)}$ ……(5)得證

由①$\frac{z}{w}=\frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y}-1$代入② $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{x}{y}+1\right)=\frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y}-1$，

$\left(\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{x}{y}=\frac{a}{b}+1$，$\frac{x}{y}=\frac{(a+b)}{b}\cdot\frac{bd}{(bc-ad)}=\frac{d(a+b)}{bc-ad}$，

所以$\frac{x}{x+y}=\frac{d(a+b)}{b(c+d)}$ ……(6)得證。

五、向量之純量積、內積與外積：

(一)**純量積**：

1. 當$\vec{a}$與$\vec{b}$平行，存在非零實數u，使得$\vec{b}=u\vec{a}$。

2. 在座標平面上，當$\vec{a}$與$\vec{b}$平行，假設$\vec{a}=(a_1，a_2)$，$\vec{b}=(b_1，b_2)$，
   則$(b_1，b_2)=u(a_1，a_2)=(ua_1，ua_2)$，其中$u\in R$，$u\neq 0$。
   反之，若存在非零實數u，使得$\vec{b}=u\vec{a}$，則$\vec{a}$與$\vec{b}$平行。

(二)**向量內積**:

1. 定義：若$\vec{a}$與$\vec{b}$為一平面上兩個非零向量，定義$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，其中θ為$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角。
2. 平面上，若兩非零向量$\vec{a}=(a_1，a_2)$、$\vec{b}=(b_1，b_2)$，
   則$\vec{a}$與$\vec{b}$的內積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$。推廣到空間中也成立。

【證明】座標平面上，假設$\overline{OA}=\vec{a}=(a_1，a_2)$，$\overline{OB}=\vec{b}=(b_1，b_2)$，由餘弦定理

$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos\theta$ ，θ為$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角

則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\frac{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-\overline{AB}^2}{2}=\frac{(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-[(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2]}{2}$

化簡得$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$

(三)**向量外積**:

1. $\vec{a}$、$\vec{b}$所夾平行四邊形面積$=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|sin\theta$，其中$\theta$為兩向量所夾角度。

如圖 6，空間中，若非零向量$\vec{a}=(a_1，a_2，a_3)$、$\vec{b}=(b_1，b_2，b_3)$，θ為$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角，

則$\vec{a}$與$\vec{b}$所夾的平行四邊形面積$=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-cos^2\theta}$

$=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2}$

$=\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$

改以行列式表示

$$=\sqrt{\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)^2}$$

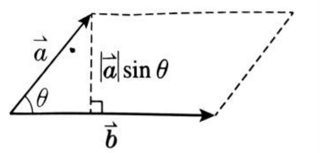


圖 6

也就是說，

$\vec{a}$與$\vec{b}$所夾的平行四邊形面積等於向量$\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)$的長度。

根據向量外積定義，向量$\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)$為$\vec{a}$與$\vec{b}$的外積

記為 $\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)$。

2. 本研究運用到的一些**外積的性質**：
   假設$\vec{a}$、$\vec{b}$為非零向量：

(1)外積向量$\vec{a}\times\vec{b}$與$\vec{a}$、$\vec{b}$均垂直，$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}$，$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$。運用內積即可證明。

【證明】以解析幾何證明

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)\cdot(a_1,a_2,a_3)$$

$$=a_1\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=0$$

得$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}$，同理$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$。

(2)若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，則$\vec{a}\times\vec{b}=0$。反之，$\vec{a}\times\vec{b}=0$，則$\vec{a}\parallel\vec{b}$。

【證明】因$\vec{a}\parallel\vec{b}$，存在非零實數u，使得$\vec{b}=u\vec{a}$，

則$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times u\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\times(ua_1,ua_2,ua_3)$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ ua_2 & ua_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ ua_3 & ua_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ ua_1 & ua_2\end{vmatrix}\right)=(0,0,0)=0$$ 。

(3) $(\vec{b}\times\vec{a})=-(\vec{a}\times\vec{b})$。

【證明】$(\vec{a}\times\vec{b})=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$，

$$(\vec{b}\times\vec{a})=\left(\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_3 & b_1\\ a_3 & a_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\right)=\left(-\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

$=-(\vec{a}\times\vec{b})$。

(4) $\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$。$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$。

【證明】令$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)\neq 0$，

$$\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}c_2 & c_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c_3 & c_1\\ a_3 & a_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\right)+\left(\begin{vmatrix}c_2 & c_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c_3 & c_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

$$=\left(\begin{vmatrix}c_2 & c_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c_2 & c_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c_3 & c_1\\ a_3 & a_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c_3 & c_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

$$=\left(\begin{vmatrix}c_2 & c_3\\ (a_2+b_2) & (a_3+b_3)\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c_3 & c_1\\ (a_3+b_3) & (a_1+b_1)\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ (a_1+b_1) & (a_2+b_2)\end{vmatrix}\right)$$

$=\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})$ 。 同理$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$。

五、分點公式：

本研究在分割點的表示上，我們用到以下性質：

1. 平面上，O 為任意一點，P 在$\overline{AB}$線段上，$\overline{PA}:\overline{PB}=m:n$，則$\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$。

2. 承上，當 A、P、B 共線(或$\overrightarrow{AP}\parallel\overrightarrow{PB}$)，假設$\overrightarrow{AP}=u\overrightarrow{PB}$，($u\neq 0$)，則$\overline{AP}:\overline{PB}=u:1$，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{u+1}\overrightarrow{AB}$。

   反之，當存在 $u\neq 0$使得$\overrightarrow{AP}=u\overrightarrow{PB}$時，則$\overrightarrow{AP}\parallel\overrightarrow{PB}$。

六、座標平面任意三角形面積求法：

在座標平面上ΔABC，A(x_1,y_1)、B(x_2,y_2)、C(x_3,y_3)，

則三角形ΔABC 面積$=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_1\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1\end{matrix}\right\|$。

【證明】令$\overrightarrow{AB}=\vec{a}=(a_1,a_2)=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，

$\overrightarrow{AC}=\vec{b}=(b_1,b_2)=(x_3-x_1,y_3-y_1)$，

則 ABC 面積 $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|sinA=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sqrt{1-cos^2A}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2-|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2cos^2A}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\frac{1}{2}|(a_1b_2-a_2b_1)|$，若以行列式表示

$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_2-x_1 & x_3-x_1\\ y_2-y_1 & y_3-y_1\end{matrix}\right\|$

$=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\right|$

$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_1\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1\end{matrix}\right\|$。

伍、研究過程：

一、 三角形內三分割線所圍分割三角形面積

我們在國中課程學習到「三角形三中線平分三角形為六個面積相等區域」。嘗試計算「三角形面積三分線的分割情形」，運用孟氏定理，即可計算這 19 個區域占原三角形的面積比(如圖 7)。進而分別以 D、E、F 為邊$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上的任意分割點，三條分割線段$\overline{CF}$、$\overline{AD}$、$\overline{BE}$，探討在非西瓦時所圍成的分割三角形ΔPQR 面積。

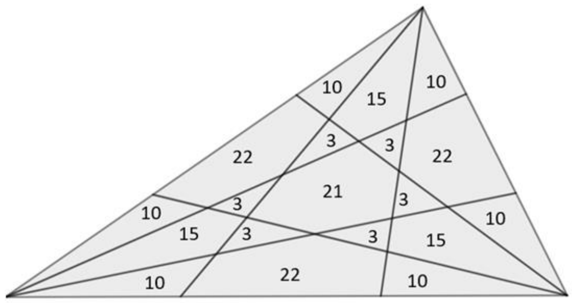
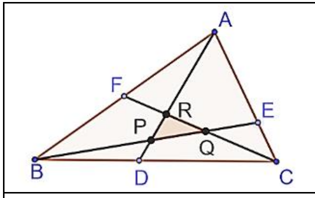
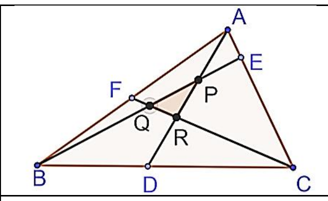
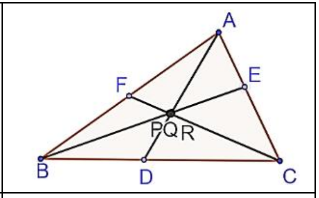


圖 7

如圖 1，若令$\overline{AF}:\overline{BF}=a:b$，$\overline{BD}:\overline{CD}=c:d$，$\overline{CE}:\overline{AE}=e:f$，
因為變數太多，實在太難操作計算，於是我們假設 $m=\frac{a}{b}$、$n=\frac{c}{d}$、$s=\frac{e}{f}$，不失一般性，而且計算將可簡化不少。

不難發現三條分割線的相交情形有三種可能性，如表 1。

表 1：三角形內部分割線相交情形分類

		
$0<mns<1$	$mns>1$	$mns=1$

不管是$0<mns<1$或是$mns>1$，都可以用以下方法計算面積比。

方法一：因為ΔPQR$=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}\cdot\Delta APQ=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}\cdot\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}\cdot\Delta ABE=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}\cdot\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}\cdot\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\cdot\Delta ABC$

方法二：因為ΔPQR$=\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}\cdot\Delta BQR=\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}\cdot\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}\cdot\Delta BCF=\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}\cdot\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}\cdot\frac{\overline{BF}}{\overline{AB}}\cdot\Delta ABC$

方法三：因為ΔPQR$=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\Delta CRP=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\Delta CAD=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}\cdot\Delta ABC$

方法也不只以上三種方式，不過要解決問題，要先計算出「線段比」。

（一）**先計算分割線段比：**

1. 當$0 < mns < 1$時:

如圖 8，可運用孟氏定理，計算得$\overline{AR}:\overline{RD}$及$\overline{AP}:\overline{PD}$，進而得

$\overline{AR}:\overline{PR}:\overline{PD} = \mathrm{m}(n+1)(ns+n+1):(n+1)(1-mns):\mathrm{ns}(mn+m+1)$

所以$\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{AD}} = \frac{(\mathrm{n+1})(\mathbf{1-mns})}{(mn+m+1)(ns+n+1)}$ 。

2. 當 $mns > 1$時：

如圖 9，當 $mns > 1$時，同理得到

$\overline{AP}:\overline{PR}:\overline{RD} = (n+1)(mn+m+1):(n+1)(mns-1):(ns+n+1)$

所以$\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{AD}} = \frac{(\mathrm{n+1})(\mathbf{mns-1})}{(mn+m+1)(ns+n+1)}$ 。

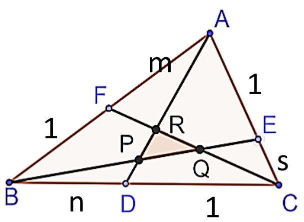


圖 8　$0 < mns < 1$ 時

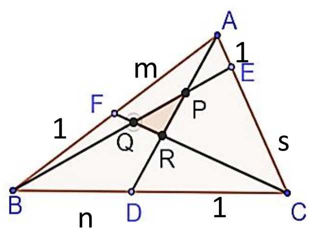


圖 9　$mns > 1$

3. 上述連比，使用**絕對值**，不管$0 < mns < 1$或是$mns > 1$，讓$\overline{\mathrm{PR}}$、$\overline{\mathrm{PQ}}$、$\overline{\mathrm{QR}}$各占所在分割線段長的比值有一致的表示方式。

得 $\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{AD}} = \frac{|(\mathrm{n+1})(\mathrm{mns-1})|}{(mn+m+1)(ns+n+1)}$ ， $\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{BE}} = \frac{|(\mathrm{s+1})(\mathrm{mns-1})|}{(ns+n+1)(sm+s+1)}$ ，$\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{CF}} = \frac{|(\mathrm{m+1})(\mathrm{mns-1})|}{(sm+s+1)(mn+m+1)}$ ，

$\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{AP}} = \frac{|(\mathrm{mns-1})|}{(mn+m+1)}$ ，$\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{BQ}} = \frac{|(\mathrm{mns-1})|}{(ns+n+1)}$ ，$\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{CR}} = \frac{|(\mathrm{mns-1})|}{(sm+s+1)}$ 。

(二)求ΔPQR與ΔABC的面積比：

只要將$\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}} = \left|\frac{(mns-1)}{(mn+m+1)}\right|$ ，$\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{BE}} = \left|\frac{(s+1)(mns-1)}{(sm+s+1)(ns+n+1)}\right|$ ，$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{1}{s+1}$ 代入

$$\Delta\mathrm{PQR} = \frac{\overline{PR}}{\overline{AP}} \times \Delta APQ = \frac{\overline{PR}}{\overline{AP}} \times \frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}} \times \Delta ABE = \frac{\overline{PR}}{\overline{AP}} \times \frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}} \times \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \times \Delta ABC$$

$$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC} = \left|\frac{(mns-1)}{(mn+m+1)}\right| \times \left|\frac{(s+1)(mns-1)}{(sm+s+1)(ns+n+1)}\right| \times \frac{1}{s+1} \text{ ，}$$

$$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC} = \frac{(mns-1)^2}{(ns+n+1)(sm+s+1)(mn+m+1)} \text{。}$$

我們舉一個例子來試算看看。

【例】三角形ΔABC 內，若$\overline{AF}:\overline{BF} = 2:3$，$\overline{BD}:\overline{CD} = 3:4$，$\overline{CE}:\overline{AE} = 4:1$，可轉化為 $\mathrm{m} = \frac{2}{3}$，$\mathrm{n} = \frac{3}{4}$，$\mathrm{s} = \frac{4}{1}$，$mns = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} = 2 \neq 1$，所以ΔPQR 存在，則根據公式

$$\frac{\Delta\mathrm{PQR}}{\Delta ABC} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} - 1\right)^2 \div \left[\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} + \frac{3}{4} + 1\right)\left(\frac{4}{1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{1} + 1\right)\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + 1\right)\right] = \frac{72}{5681} \text{。}$$

二、 分割點推廣三角形三邊直線上

當「**部分或全部**」分割點 D、E、F 在邊的延長線上時，探討分割直線$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$所圍分割三角形 PQR 的存在條件。

一開始為了方便研究，我們依分割點 D、E、F 的位置在邊上或延長線上，將圖形可分為 8 種類型，方便探討。當然後來改用解析幾何及向量積方式證明，就不需要這樣的分類了。

容許我們敘述一下之前的研究過程，方便敘述說明，將本研究的圖形做了以下分類。

【定義 1】依分割點位置分為八種類型，定義為 G(±m, ±n, ±s)。當 F 點在$\overline{AB}$延長線上時，在 m 前面加一個負號表示、當 D 點在$\overline{BC}$延長線上時，在 n 前面加一個負號表示、當 E 點在$\overline{AC}$延長線上時，在 s 前面加一個負號表示。即前面加負(−)號，代表分割點落在邊的延長線上。

例如：當 F 點在延長線上時，D、E 點在邊上，此時圖形表為 G(−m, n, s)；
當 D、E、F 均在延長線上時，圖形表為 G(−m, −n, −s)。

【定義 2】為之後敘述說明方便，將內角$\angle A$的對頂角區域稱為$\angle A$的角區，內角$\angle A$所涵蓋的區域(除了Δ內部外)稱為$\angle A$的廣區，其他區域命名方式相同，如圖 10。

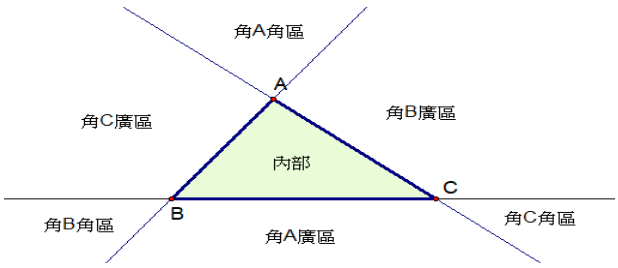


圖 10

【定義 3】因為 P 為$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$交點，P 點位置由 n, s 值決定。定義 P(±n, ±s)若分割點 D 或 E 落在邊的延長線上時，前面加負(−)號代表之圖形。

也就是說，m, n, s 值決定 P、Q、R 的位置。所以，我們逐一探討以下圖形：
1. P(n, s)、 P(−n, s)、P(n, −s)、P(−n, −s)。
2. Q(m, s)、Q(−m, s)、Q(m, −s)、Q(−m, −s)。
3. R(m, n)、R(−m, n)、R(m, −n)、R(−m, −n)。

例如：P(−n，− s)，表示 D、E 點皆在$\overline{BC}$、$\overline{AC}$的延長線上。這時$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$有以下可能：

1. 當 n>1，0<s<1 時，即 D、E 分別在$\overrightarrow{BC}$的 C 點端外的延長線及$\overrightarrow{AC}$的 C 點端外的延長線上時：
   (1)$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$可能平行。
   (2)若有交點，交點 P 可能在$\angle C$的角區或廣區。
2. 當 n>1，s>1 時，即 D、E 分別在$\overrightarrow{BC}$的 C 點端外的延長線及$\overrightarrow{CA}$的 A 點端外的延長線上，此時交點 P 只在$\angle C$的廣區。

3. 當 0<n<1，不管 s>1 或 0<s<1，交點 P 只在$\angle C$的廣區。

我們以數學軟體逐一模擬以上圖形，發現「三條分割直線$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$的相交情形有以下三種狀況：

1. 三條分割線共點。即$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$交於 1 個點。
2. 二條分割線平行。即$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$僅決定 2 個交點。
3. 三條分割線不共點且兩兩不平行。即$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$決定 3 個交點。

以下討論這三種位置關係：

(一) 三條分割線相交情形：

1. 三條分割線共點：

從數學繪圖軟體模擬可知：

(1)G(m, n, s)、G(m, −n, −s)、G(−m, n, −s)、G(−m, −n, s)圖形，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$才可能共點。例如：以 G(m, −n, −s)為例，有兩種可能情形，如圖 11，左圖 0<n<1，s>1，右圖 n>1，0<s<1，由孟氏定理 $\frac{\overline{PE}}{\overline{PB}}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{s-1}{1}=1$，且$\frac{\overline{PE}}{\overline{PB}}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{s-1}{s}=1$，

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PE}}=\frac{n}{1}\cdot\frac{s-1}{1}=\frac{1}{m}\cdot\frac{s-1}{s}\text{，得 } mns=1\text{。}$$

由輪換性可知，G(−m, n, −s)與 G(−m, −n, s)，**三條分割線共點的條件都是$mns=1$。**

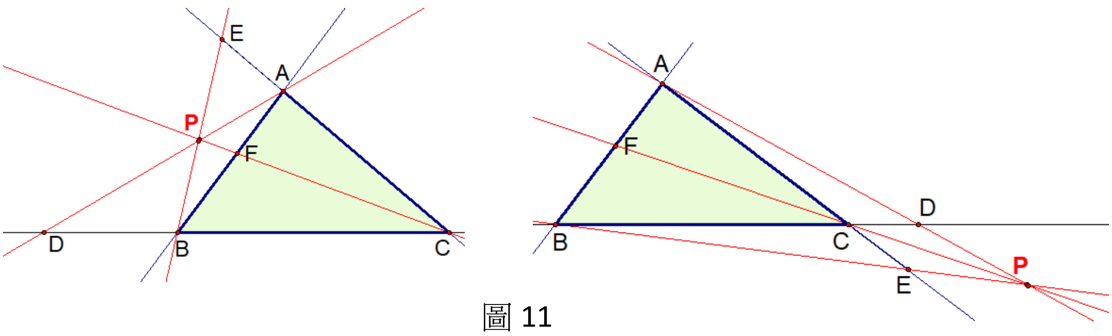


圖 11

2. 二條分割線平行：

若$\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{BE}$，可能情形有三：

(1)P(n, −s)如圖 12：此時 s>1，

因為$\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{BE}$，所以$\frac{\overline{CA}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$，$\frac{s-1}{1}=\frac{1}{n}$，得 $ns-n-1=0$。

反之，當 $ns-n-1\neq 0$，則$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$不平行。$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$交點 P 在$\angle A$的角區或廣區。

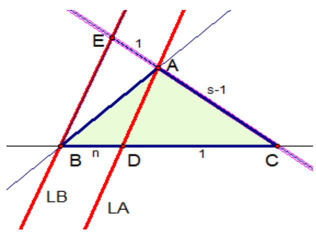


圖 12

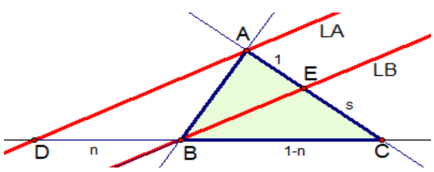


圖 13

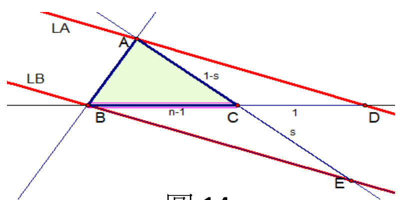


圖 14

(2)P(-n, s)如圖 13：此時 0< n <1，

因為 $\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{BE}$，所以$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$，$\frac{s}{1}=\frac{1-n}{n}$，得 $\mathrm{ns}+\mathrm{n}-1=0$。

反之，當$\mathrm{ns}+\mathrm{n}-1\neq 0$，則$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$不平行。$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$的交點 P 在$\angle B$的角區或廣區。

(3)P(-n, -s)如圖 14：此時 n>1，且 0<s<1，

因為$\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{BE}$，所以$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$，$\frac{1-s}{s}=\frac{1}{n-1}$，得 $\mathrm{ns}-\mathrm{n}+1=0$。

反之，當$\mathrm{ns}-\mathrm{n}+1\neq 0$，則$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$不平行。$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$的交點 P 在$\angle C$的角區或廣區。

同理，$\overleftrightarrow{BE}//\overleftrightarrow{CF}$或$\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{CF}$時，分別有三種情形。上述平行狀況，只要用國中階段「平行線截比例線段」就可以算得，不重複贅述。

3. **三條分割線不共點且兩兩不平行：**

可以得到 P、Q、R 落於各角區或廣區的判別條件，如圖 15。

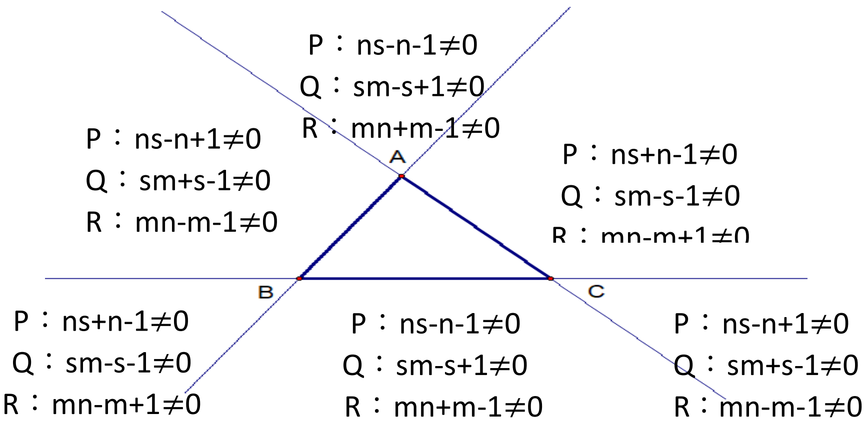


圖 15　P、Q、R 落於各區域的判別條件

綜合上述得到結論：「**當三條分割線不共點，且兩兩不平行時，則分割三角形 PQR 存在**」。

（二）分割線段比：

以數學繪圖軟體模擬所有圖形狀況，得知依 P、Q、R 位置關係共有 73 種，如表 2。

表 2：分割三角形圖形類型及數量

項次	圖形類型	分割點位置	圖形數量
1	G(m, n, s)	D、E、F 三點皆在線段上	2 種
2	G(m, n, -s)	D、F 在線上，E 點在延長線上	4 種
3	G(-m, n, s)	D、E 在線上，F 在延長線上	4 種
4	G(m, -n, s)	E、F 在線上，D 在延長線上	4 種
5	G(m, -n, -s)	F 在線上，D、E 在延長線上	15 種
6	G(-m, n, -s)	D 在線上，E、F 在延長線上	15 種
7	G(-m, -n, s)	E 在線上，D、F 在延長線上	15 種
8	G(-m, -n, -s)	D、E、F 三點皆在延長線上	14 種

不管哪個類型圖形，前述三個面積比計算方法仍能適用。所以先算分割線段比。

以 P(±n, ±s)為例，計算分割線段比$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}$及$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}$，並以 n, s 算式表示。

1. P(n, s)：P 在內部，$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{ns+n+1}$。

2. P(−n, s)：

圖 16～18 為 P(−n, s)的圖例，當 n>1，D 點在 C 點外$\overleftarrow{BC}$延長線上；當 0<n<1，D 點在 B 點外$\overrightarrow{BC}$延長線上。

(1)當 n>1 時，P 只在∠B的廣區：

如圖 16，由孟氏定理延伸性質(3)(4)計算可得

$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns+n-1}$，此時$ns+n-1>0$。

(2)當 0<n<1，P 在∠B的廣區時：

如圖 17，由孟氏定理延伸性質(2)(5)計算可得

$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns+n-1}$，此時$ns+n-1>0$。

(3)當 0<n<1，P 在∠B的角區時：

如圖 18，由孟氏定理延伸性質(2)(5)計算可得

$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{-(ns+n-1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{-(ns+n-1)}$，此時$ns+n-1<0$。

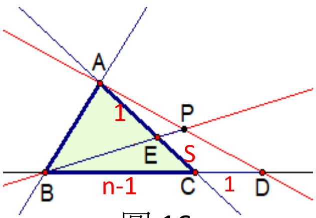


圖 16

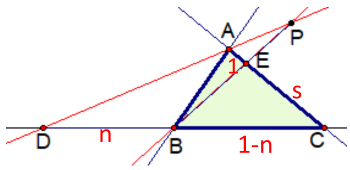


圖 17

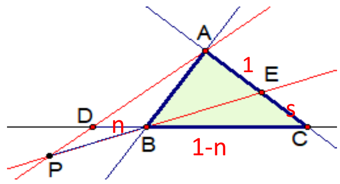


圖 18

3. 同理 P(n, −s)、P(−n, −s)也可以由孟氏定理延伸性質計算$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}$及$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}$。整理得表 3。

表 3：P 點的分割線段比

圖形類型	n、s 條件	P 點位置	判別條件	分割線段比
P(n, s)	--	P 必在內部	$ns+n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{ns+n+1}$
P(−n, s)	n>1	P 只在∠B的廣區	$ns+n-1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns+n-1}$
	0<n<1	P 在∠B的廣區時	$ns+n-1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns+n-1}$
	0<n<1	P 在∠B的角區時	$ns+n-1<0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{-(ns+n-1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{-(ns+n-1)}$
P(n, −s)	s>1	P 在∠A的廣區時	$ns-n-1<0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{-(ns-n-1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{-(ns-n-1)}$
	s>1	P 在∠A的角區時	$ns-n-1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{ns-n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{ns-n-1}$
	0<s<1	P 只在∠A的廣區	$ns-n-1<0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{-(ns-n-1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{-(ns-n-1)}$

P(−n, −s)	n>1、s>1	P 只在$\angle C$的廣區	$ns-n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns-n+1}$
	n>1、0<s<1	P 在$\angle C$的廣區時	$ns-n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns-n+1}$
	n>1、0<s<1	P 在$\angle C$的角區時	$ns-n+1<0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{-(ns-n+1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{-(ns-n+1)}$
	0<n<1、s>1	P 只在$\angle C$的廣區	$ns-n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns-n+1}$
	0<n<1、0<s<1	P 只在$\angle C$的廣區	$ns-n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns-n+1}$

說明：Q 點及 R 點的分割線段比，只要將表 3，以輪換性就可以得到。

（三）計算面積比：

以 G(m, n, −s)其中一圖為例，如圖 19。

當 s>1，P 在∠A 的廣區，Q 在∠C 的廣區，R 在Δ內部，求證：$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(mns+1)^2}{-(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$。

【證明】

因為 s>1，P 在$\angle A$的廣區，Q 在$\angle C$的廣區，R 在Δ內部，由表 2 可知

$ns-n-1<0$，$sm+s-1>0$，$mn+m+1>0$

由 R(m, n)，R 在Δ內部，所以$\frac{\overline{AR}}{\overline{AD}}=\frac{m(n+1)}{mn+m+1}$ ……① ，$\frac{\overline{CR}}{\overline{CF}}=\frac{m+1}{mn+m+1}$ ……②

由 P(n, −s)，s>1，P 在$\angle A$的廣區，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{-(ns-n-1)}$ ……③

由 Q(m, −s)，s>1，Q 在$\angle C$的廣區，$\frac{\overline{CQ}}{\overline{CF}}=\frac{s(m+1)}{sm+s-1}$ ……④

③−① 得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n+1)(mns+1)}{-(ns-n-1)(mn+m+1)}$ ……⑤，

④−② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{(m+1)(mns+1)}{(sm+s-1)(mn+m+1)}$ ……⑥，

⑥÷② 得 $\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{mns+1}{sm+s-1}$ ……⑦，

又 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{n+1}$ ……⑧

由方法三公式及⑤⑦⑧

$$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{(mns+1)^2}{-(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$$ 。

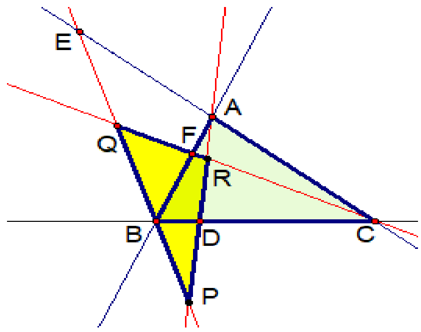


圖 19

後來我們嘗試逐一證明這八類型 73 個圖形，發現所有圖形的證明步驟均為：由表 3 找到需要的分割線段比第①～④式，再根據圖形，當 A 點在 P、R 之間，則③+①計算$\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}$，若 A 點在 P、R 之外，則以$|③-①|$計算$\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}$。同理，以第②④式相加或相減計算$\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}$，再將⑥÷②得$\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}$。最後利用公式⑤求得面積比。我們把 G(m, n, −s)的 4 種圖形類型的面積比公式整理如表 4。

表 4：G(m, n, −s)類型 4 種圖形的面積比

編號	S 值	P、Q、R 位置	判別式	$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}$面積比
1	s >1	P 在$\angle A$的廣區， Q 在$\angle C$的廣區， R 在Δ內部	$ns-n-1<0$， $sm+s-1>0$， $mn+m+1>0$	$\frac{(mns+1)^2}{-(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$

編號	S值	P、Q、R位置	判別式	$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}$面積比
2	s >1	P 在$\angle A$的角區， Q 在$\angle C$的廣區， R 在Δ內部	$ns-n-1>0$， $sm+s-1>0$， $mn+m+1>0$	$\frac{(mns+1)^2}{(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$
3	0< s <1	P 在$\angle A$的廣區， Q 在$\angle C$的角區， R 在Δ內部	$ns-n-1<0$， $sm+s-1<0$， $mn+m+1>0$	$\frac{(mns+1)^2}{(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$
4	0< s <1	P 在$\angle A$的廣區， Q 在$\angle C$的廣區， R 在Δ內部	$ns-n-1<0$， $sm+s-1>0$， $mn+m+1>0$	$\frac{(mns+1)^2}{-(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$

上表公式，分母均為正數，但因為有些公式有負號，為使公式有一致性，可以加上絕對值，得一個相同的公式表示 G(m, n, -s)的面積比 $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\left|\frac{(mns+1)^2}{(ns-n-1)(mn+m+1)(sm+s-1)}\right|$。

同樣方法，我們得到八種類型圖形的面積比，彙整如表 5。

表 5：各種類型圖形面積比

項次	**圖形類型**	$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}$**面積比**
1	G(m, n, s)	$\frac{(mns-1)^2}{\lvert(ns+s+1)(sm+m+1)(mn+n+1)\rvert}$
2	G(m, n, -s)	$\frac{(mns+1)^2}{\lvert(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)\rvert}$
3	G(-m, n, s)	$\frac{(mns+1)^2}{\lvert(ns+n+1)(sm-s-1)(mn+m-1)\rvert}$
4	G(m, -n, s)	$\frac{(mns+1)^2}{\lvert(ns+n-1)(sm+s+1)(mn-m-1)\rvert}$
5	G(m, -n, -s)	$\frac{(mns-1)^2}{\lvert(ns-n+1)(sm+s-1)(mn-m-1)\rvert}$
6	G(-m, n, -s)	$\frac{(mns-1)^2}{\lvert(ns-n-1)(sm-s+1)(mn+m-1)\rvert}$
7	G(-m, -n, s)	$\frac{(mns-1)^2}{\lvert(ns+n-1)(sm-s-1)(mn-m+1)\rvert}$
8	G(-m, -n, -s)	$\frac{(mns+1)^2}{\lvert(ns-n+1)(sm-s+1)(mn-m+1)\rvert}$

發現這八個公式有相似之處，當分割點推廣到延長線上時，重新定義三個變數 u、v、w。
若 F 在 $\overline{AB}$線段上時，令$u=m$；若 F 在 $\overline{AB}$的延長線上時，令$u=-m$。
若 D 在 $\overline{BC}$線段上時，令$v=n$；若 D 在 $\overline{BC}$的延長線上時，令$v=-n$。
若 E 在 $\overline{AC}$線段上時，令$w=s$；當 E 在 $\overline{AC}$的延長線上時，令$w=-s$。

則**八個類型的面積比皆可由同一個公式表示，即** $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(uvw-1)^2}{\lvert(vw+v+1)(wu+w+1)(uv+u+1)\rvert}$。

此時，不管哪一類別的圖形，分割三角形ΔPQR 存在的條件均為：

(1)**三條分割線不共點**(**即**$uvw\neq 1$)，

(2)且**三條分割線兩兩不平行時**(即$(vw+v+1)(wu+w+1)(uv+u+1)\neq 0$)。

陸、討論

以上是我們之前的研究，我們將所有可能圖形全部列出來，尋找它們的特性與關係，雖然可以用簡單的數學方式證明，但圖形太多，這樣方法過於繁雜。

現在我們進一步以「**解析幾何**」及「**向量外積**」的方式來探討，這樣證明就簡化許多。

一、以向量外積計算平行的向量比：

根據向量外積的定義，當遵循座標向量的「右手法則」，兩向量外積的「公垂向量」方向會一致，且兩向量外積絕對值等於所夾平行四邊形面積，因此可以運用此一性質來計算同一平面上的兩平行向量的方向與長度比。

當 P 點在$\overline{AD}$線段上，則 A、D 在$\overleftrightarrow{BE}$的異側，則$\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}$與$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$方向相同；

當 P 點在$\overline{AD}$延長線上，則 A、D 在$\overleftrightarrow{BE}$的同側，則$\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}$與$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$方向相反。

如圖 20，因 A、D 點在$\overleftrightarrow{BE}$的異側，$\overrightarrow{AP}$與$\overrightarrow{PD}$同方向，所以$\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PD}=\text{h}:k$

因為 h、k 分別為ΔABE與ΔBDE之$\left|\overrightarrow{BE}\right|$邊上的高，

所以 $\text{h}=\frac{\left|\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}\right|}{\left|\overrightarrow{BE}\right|}$，$\text{k}=\frac{\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}\right|}{\left|\overrightarrow{BE}\right|}$，

則$\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PD}=\text{h}:k=\frac{\left|\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}\right|}{\left|\overrightarrow{BE}\right|}:\frac{\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}\right|}{\left|\overrightarrow{BE}\right|}$。

又因為$\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}$與$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$相同方向，所以可以去掉絕對值，

則$\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PD}=\frac{\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|}:\frac{\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|}=\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}：\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$

同理，當 A、D 點在$\overleftrightarrow{BE}$的同側，所以$\overrightarrow{AP}$與$\overrightarrow{PD}$方向相反，

則$\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PD}=-\text{h}:k=-\frac{\left|\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}\right|}{\left|\overrightarrow{BE}\right|}:\frac{\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}\right|}{\left|\overrightarrow{BE}\right|}$。

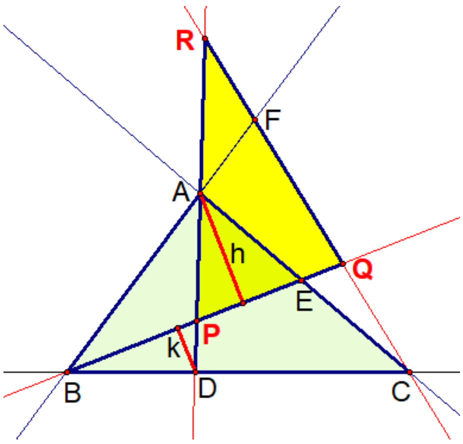


圖 20

因$\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}$與$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$相反方向，

則$(-\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA})$與$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$ 相同方向，再去掉絕對值，

得$\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PD}=-\frac{-(\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA})}{\left|\overrightarrow{BE}\right|}:\frac{\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|}=\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}：\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$

綜合上述，得到求分割線段比的方法：

當 A、P、D 三點共線，則$\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PD}=\frac{\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|}:\frac{\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|}=\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}：\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$。

二、以解析幾何證明面積比：

座標平面上，令 A$(x_1，y_1)$、B$(x_2，y_2)$、C$(x_3，y_3)$，令$m=\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}$，$n=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$，$s=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$，

若 D、E、F 分別在邊$\overline{\text{BC}}$、$\overline{\text{AC}}$、$\overline{\text{AB}}$上的任意分割點，由內分點公式

D 座標為 $(\frac{nx_3+x_2}{n+1}，\frac{ny_3+y_2}{n+1})$，E 座標為 $(\frac{sx_1+x_3}{s+1}，\frac{sy_1+y_3}{s+1})$，F 座標為 $(\frac{mx_2+x_1}{m+1}，\frac{my_2+y_1}{m+1})$。

若 D、E、F 在延長線上時，由外分點公式，

D 座標為 $(\frac{nx_3-x_2}{n-1}，\frac{ny_3-y_2}{n-1})$，E 座標為 $(\frac{sx_1-x_3}{s-1}，\frac{sy_1-y_3}{s-1})$，F 座標為 $(\frac{mx_2-x_1}{m-1}，\frac{my_2-y_1}{m-1})$。

改以向量表示，$\overrightarrow{AF}=u\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{BD}=v\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CE}=w\overrightarrow{EA}$，D、E、F 分別在直線$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$上，且$u$、$v$、$w$均不為 0、-1。

則 D($\frac{vx_3+x_2}{v+1}$ ，$\frac{vy_3+y_2}{v+1}$)，E($\frac{wx_1+x_3}{w+1}$ ，$\frac{wy_1+y_3}{w+1}$)，F($\frac{ux_2+x_1}{u+1}$ ，$\frac{uy_2+y_1}{u+1}$)，

則$\overrightarrow{AD}=(\frac{vx_3+x_2}{v+1}\ ，\frac{vy_3+y_2}{v+1})-(x_1\ ，y_1)=\left(\frac{-(v+1)x_1+x_2+vx_3}{v+1}\ ，\frac{-(v+1)y_1+y_2+vy_3}{v+1}\right)$

同理$\overrightarrow{BE}=(\frac{wx_1+x_3}{w+1}\ ，\frac{wy_1+y_3}{w+1})-(x_2\ ，y_2)=\left(\frac{wx_1-(w+1)x_2+x_3}{w+1}\ ，\frac{wy_1-(w+1)y_2+y_3}{w+1}\right)$

同理$\overrightarrow{CF}=(\frac{ux_2+x_1}{u+1}\ ，\frac{uy_2+y_1}{u+1})-(x_3\ ，y_3)=\left(\frac{x_1+ux_2-(u+1)x_3}{u+1}\ ，\frac{y_1+uy_2-(u+1)y_3}{u+1}\right)$

如圖 20，$\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PD}=\frac{\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BE}|}:\frac{\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{BE}|}=\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}：\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$

$=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})\times\overrightarrow{BA}：\overrightarrow{BD}\times(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})=\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{BA}：\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{CE}$

$=\frac{1}{w+1}\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BA}：\frac{v}{v+1}\overrightarrow{BC}\times\frac{w}{w+1}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{w+1}\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}：\frac{vw}{(v+1)(w+1)}\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$

$=\frac{1}{w+1}：\frac{vw}{(v+1)(w+1)}=(v+1)：vw$　　（其中$vw\neq 0$、$w\neq -1$、$v\neq -1$）

因為 P 點在直線$\overleftrightarrow{AD}$上，所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{v+1}{vw+v+1}\overrightarrow{AD}$。

同理可證 $\overrightarrow{BQ}=\frac{w+1}{wu+w+1}\overrightarrow{BE}$；$\overrightarrow{CR}=\frac{u+1}{uv+u+1}\overrightarrow{CF}$。

所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{v+1}{vw+v+1}\left(\frac{-(v+1)x_1+x_2+vx_3}{v+1}\ ，\frac{-(v+1)y_1+y_2+vy_3}{v+1}\right)=\left(\frac{-(v+1)x_1+x_2+vx_3}{vw+v+1}\ ，\frac{-(v+1)y_1+y_2+vy_3}{vw+v+1}\right)$，

$\overrightarrow{BQ}=\frac{w+1}{wu+w+1}\left(\frac{wx_1-(w+1)x_2+x_3}{w+1}\ ，\frac{wy_1-(w+1)y_2+y_3}{w+1}\right)=\left(\frac{wx_1-(w+1)x_2+x_3}{wu+w+1}\ ，\frac{wy_1-(w+1)y_2+y_3}{wu+w+1}\right)$，

$\overrightarrow{CR}=\frac{u+1}{uv+u+1}\left(\frac{x_1+ux_2-(u+1)x_3}{u+1}\ ，\frac{y_1+uy_2-(u+1)y_3}{u+1}\right)=\left(\frac{x_1+ux_2-(u+1)x_3}{uv+u+1}\ ，\frac{y_1+uy_2-(u+1)y_3}{uv+u+1}\right)$。

P 點座標$\left(\frac{-(v+1)x_1+x_2+vx_3}{vw+v+1}\ ，\frac{-(v+1)y_1+y_2+vy_3}{vw+v+1}\right)+(x_1\ ，y_1)=\left(\frac{vwx_1+x_2+vx_3}{vw+v+1}\ ，\frac{vwy_1+y_2+vy_3}{vw+v+1}\right)$

Q 點座標$\left(\frac{wx_1-(w+1)x_2+x_3}{wu+w+1}\ ，\frac{wy_1-(w+1)y_2+y_3}{wu+w+1}\right)+(x_2\ ，y_2)=\left(\frac{wx_1+wux_2+x_3}{wu+w+1}\ ，\frac{wy_1+wuy_2+y_3}{wu+w+1}\right)$

R 點座標$\left(\frac{x_1+ux_2-(u+1)x_3}{uv+u+1}\ ，\frac{y_1+uy_2-(u+1)y_3}{uv+u+1}\right)+(x_3\ ，y_3)=\left(\frac{x_1+ux_2+uvx_3}{uv+u+1}\ ，\frac{y_1+uy_2+uvy_3}{uv+u+1}\right)$

則 ΔPQR 面積=$\frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}P_x & Q_x & R_x & P_x\\ P_y & Q_y & R_y & P_y\end{pmatrix}\right\|$　（令座標 P(P_x ，P_y)、Q(Q_x ，Q_y) R(R_x ，R_y)）

$=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)}\right|\cdot$

$\left|(uv+u+1)(P_xQ_y-P_yQ_x)+(vw+v+1)(Q_xR_y-Q_yR_x)+(wu+w+1)(R_xP_y-R_yP_x)\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)}\right|\cdot$

$$\begin{aligned}(|&(uv+u+1)[(vwx_1+x_2+vx_3)(wy_1+wuy_2+y_3)-(vwy_1+y_2+vy_3)(wx_1+wux_2+x_3)]\\ &+(vw+v+1)[(wx_1+wux_2+x_3)(y_1+uy_2+uvy_3)-(wy_1+wuy_2+y_3)(x_1+ux_2+uvx_3)]\\ &+(wu+w+1)[(x_1+ux_2+uvx_3)(vwy_1+y_2+vy_3)-(y_1+uy_2+uvy_3)(vwx_1+x_2+vx_3)]|)\end{aligned}$$

不建議直接全部展開，合併同類項，有點複雜，

應依以下項次順序，以分配律找其係數，就很簡單，最後發現：

1. x_1y_1項，x_2y_2項，x_3y_3項係數均為 0；
2. x_1y_2項，x_2y_3項，x_3y_1項係數均為$(\mathrm{uvw}-1)^2$；
3. x_2y_1項，x_3y_2項，x_1y_3項係數均為$-(\mathrm{uvw}-1)^2$。上述算式繼續如下：

$=\frac{1}{2}\left|\frac{(\mathrm{uvw}-1)^2}{(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)}\right|\left|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\right|$

$=\left|\frac{(\mathrm{uvw}-1)^2}{(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)}\right|\cdot\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_1\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1\end{matrix}\right\| =\left|\frac{(\mathrm{uvw}-1)^2}{(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)}\right|\Delta\mathrm{ABC}$

故 $\frac{\Delta\mathrm{PQR}}{\Delta ABC}=\frac{(uvw-1)^2}{|(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)|}$ 。

不失一般性，可進一步改進上述計算，假設 A 為原點(0，0)、B 為$(x_2，y_2)$、為 C$(x_3，y_3)$計算面積比就可以更簡化。不過當 A 為原點，計算 P、Q、R 座標時，就無法運用三角形的輪換性了。於是，我們嘗試找解析幾何以外的證明方式，認為應可以直接用外積來證明面積比。

三、 以向量外積證明面積比：

接著我們直接以向量外積方式，討論分割三角形存在的條件並證明面積比。

(一)探討三角形 PQR 存在的條件：

1.P、Q、R 點存在的條件：

根據前面所述，P 為$\overleftrightarrow{AD}$及$\overleftrightarrow{BE}$交點，所以$\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{BE}$時，P 點不存在。

因為$\overline{AD}//\overline{BE}$，所以外積$\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{BE}=0$。

$\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{BE}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)\times\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}\right)=0$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{CE}=0$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\times\frac{w}{w+1}\overrightarrow{CA}+0+\frac{v}{v+1}\overrightarrow{BC}\times\frac{w}{w+1}\overrightarrow{CA}=0$

$(1-\frac{w}{w+1}+\frac{vw}{(v+1)(w+1)})\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right)=0$，所以 $1-\frac{w}{w+1}+\frac{vw}{(v+1)(w+1)}=0$

化簡得 $vw+v+1=0$

反之，$vw+v+1\neq0$，則$\overleftrightarrow{AD}\nparallel\overleftrightarrow{BE}$，P 點存在。

同理可證，$wu+w+1\neq0$，則$\overleftrightarrow{BE}\nparallel\overleftrightarrow{CF}$，Q 點存在。

$uv+u+1\neq0$，則$\overleftrightarrow{CF}\nparallel\overleftrightarrow{AD}$，R 點存在。

2. P、Q、R 點不共點的條件：

根據西瓦定理，若$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$共點，則$uvw=1$；

反之，若$uvw \neq 1$，則三條分割線不共點。

（二）**向量外積證明面積比：**

當分割三角形 PQR 存在，如同前面以向量外積，證得$\overrightarrow{AP}=\frac{v+1}{vw+v+1}\overrightarrow{AD}$；$\overrightarrow{BQ}=\frac{w+1}{wu+w+1}\overrightarrow{BE}$；

$\overrightarrow{CR}=\frac{u+1}{uv+u+1}\overrightarrow{CF}$。參考圖 21，同理，分別作 B、E 到$\overleftrightarrow{AD}$的垂直線段為$d_1$、$d_2$。

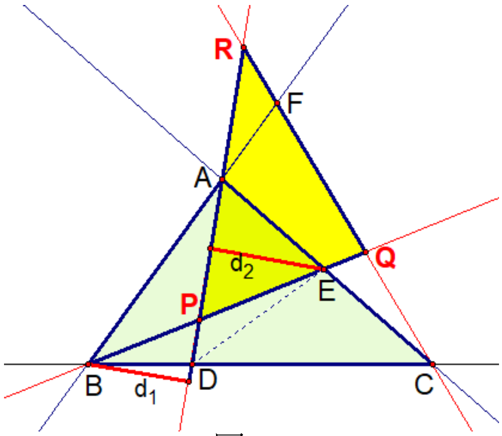


圖 21

由$\overline{BP}:\overline{PE}=\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}:\frac{\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AD}|}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}:\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AE}$，

得$\overline{BP}:\overline{PE}=v(w+1):1$

所以$\overrightarrow{BP}=\frac{v(w+1)}{vw+v+1}\overrightarrow{BE}$；

同理$\overrightarrow{CQ}=\frac{w(u+1)}{wu+w+1}\overrightarrow{CF}$； $\boldsymbol{\overrightarrow{AR}=\frac{u(v+1)}{uv+u+1}\overrightarrow{AD}}$。

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\left(\frac{u(v+1)}{uv+u+1}-\frac{v+1}{vw+v+1}\right)\overrightarrow{AD}$$

$=\frac{(v+1)(uvw-1)}{(uv+u+1)(vw+v+1)}\overrightarrow{AD}$，（當$uvw\neq 1$，$\overrightarrow{PR}\neq 0$）

同理$\overrightarrow{QP}=\frac{(w+1)(uvw-1)}{(vw+v+1)(wu+w+1)}\overrightarrow{BE}$；$\overrightarrow{RQ}=\frac{(u+1)(uvw-1)}{(wu+w+1)(uv+u+1)}\overrightarrow{CF}$

$$\Delta\text{PQR 面積}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{-(w+1)(uvw-1)}{(vw+v+1)(wu+w+1)}\cdot\frac{(v+1)(uvw-1)}{(uv+u+1)(vw+v+1)}\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{AD}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{-(w+1)(uvw-1)}{(vw+v+1)(wu+w+1)}\cdot\frac{(v+1)(uvw-1)}{(uv+u+1)(vw+v+1)}\cdot\left(\frac{-(vw+v+1)}{(v+1)(w+1)}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{(uvw-1)^2}{(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)}\right|\cdot\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

所以 $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(uvw-1)^2}{|(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)|}$ 得證。

柒、推廣及後續研究

因為平行四邊形為兩個全等三角形組合，猜想平行四邊形應有類似的結果。平面上，平行四邊形 ABCD，若 E、F、G、H 分別為$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{DA}$、$\overleftrightarrow{AB}$上異於頂點的分割點，$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$為分割直線，P 為$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$的交點，Q 為$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$的交點，R 為$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$的交點。

令$\overrightarrow{AH}=u\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BE}=v\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CF}=w\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DG}=s\overrightarrow{DA}$（實數$u$、$v$、$w$、s≠0、1）。探討四邊形 PQRS 存在的條件，並嘗試尋找四邊形 PQRS 與平行四邊形 ABCD 的面積比公式。

一、先研究經常遇到的平行四邊形分割問題：

如圖 22，當$\overrightarrow{AH}=u\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BE}=v\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CF}=u\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DG}=v\overrightarrow{DA}$時，

很容易理解四邊形 PQRS 若存在必是平行四邊形。

以向量外積解法，

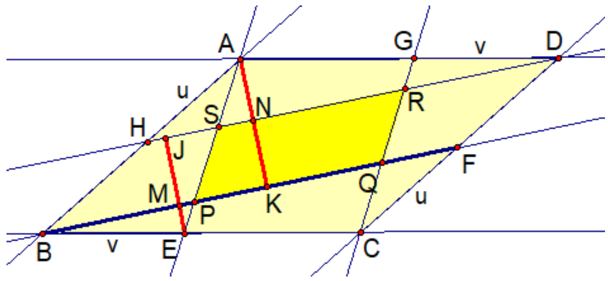


圖 22

$\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PE}=\frac{\overrightarrow{BF}\times\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BF}|}:\frac{\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{BF}|}=\overrightarrow{BF}\times\overrightarrow{BA}:\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BF}$

$=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}:\mathrm{v}\overrightarrow{BC}\times(\overrightarrow{BC}+u\overrightarrow{CD})$

$=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}:\mathrm{uv}\,\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CD}=1:uv$

所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{uv+1}\overrightarrow{AE}$。

同理，$\overrightarrow{AS}:\overrightarrow{SE}=\mathrm{AN}:\overrightarrow{EJ}=\frac{\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DH}}{|\overrightarrow{DH}|}:\frac{\overrightarrow{DH}\times\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{DH}|}$可求得$\overrightarrow{AS}=\frac{u}{uv+1}\overrightarrow{AE}$。

則$\overrightarrow{SP}=\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{u}{uv+1}\right)\overrightarrow{AE}=\frac{1-u}{uv+1}\overrightarrow{AE}$，依對稱性可得$\overrightarrow{PQ}=\frac{1-v}{uv+1}\overrightarrow{BF}$

則 PQRS 面積＝$|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS}|=\left|\frac{1-v}{uv+1}\overrightarrow{BF}\times\frac{1-u}{uv+1}\overrightarrow{AE}\right|=\left|\frac{(1-v)(1-u)}{(uv+1)^2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF})\times(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})\right|$

$=\left|\frac{(1-v)(1-u)}{(uv+1)^2}(uv+1)\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}\right|=\left|\frac{(1-v)(1-u)}{uv+1}\right|\cdot|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}|=\left|\frac{(1-v)(1-u)}{uv+1}\right|\cdot$(ABCD 面積)

所以$\frac{\text{PQRS 面積}}{\text{ABCD 面積}}=\left|\frac{(1-u)(1-v)}{(uv+1)}\right|$。

從上面公式，很容易理解：當$uv+1=0$，則不存在四邊形 PQRS，此時$\overleftrightarrow{AE}//\overleftrightarrow{BF}$且$\overleftrightarrow{CG}//\overleftrightarrow{DH}$。

反之，當$\overleftrightarrow{AE}\nparallel\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}\nparallel\overleftrightarrow{DH}$（即$uv+1=0$)，則分割四邊形 PQRS 存在，且$\frac{\text{PQRS 面積}}{\text{ABCD 面積}}=\left|\frac{(1-u)(1-v)}{(uv+1)}\right|$。

二、再研究$\overrightarrow{AH}=u\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BE}=v\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CF}=w\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DG}=s\overrightarrow{DA}$。

(一)當四邊形 PQRS 存在且為凸四邊形求面積比：

任意凸四邊形可以拆成兩個三角形計算面積，

所以四邊形 PQRS＝ΔQPR＋ΔSPR（連接對角線$\overline{PR}$）

或四邊形 PQRS＝ΔPQS＋ΔRQS（連接對角線$\overline{QS}$）

只要根據外積右手法則，讓外積向量為同方向，計算三角形面積，取絕對值內之值為同號數，就可以先加法合併，再取絕對值。

即四邊形 PQRS 面積＝ΔQPR＋ΔSPR＝$\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{SP}|$ ………第①式

或四邊形 PQRS＝ΔPQS＋ΔRQS＝$\frac{1}{2}|\overrightarrow{SP}\times\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}\times\overrightarrow{RS}|$ ………第②式

其實凸四邊形面積也可以直接以**對角線向量外積的絕對值**即可。

所以凸四邊形 PQRS$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{QS}\right|=\frac{1}{2}\left|(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR})\times(\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS})\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}+(\overrightarrow{PQ}++\overrightarrow{QR})\times\overrightarrow{RS})\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}+(\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SR})\times\overrightarrow{RS})\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{SP}\right|$ 與第①式相同，當然也會等於第②式。

先計算線段比再求面積比，如圖 23，

$\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PE}=\frac{\overrightarrow{BF}\times\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BF}|}:\frac{\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{BF}|}=\overrightarrow{BF}\times\overrightarrow{BA}：\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BF}=1：vw$，

得$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{vw+1}\overrightarrow{AE}$。

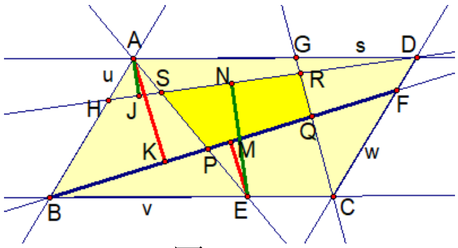


圖 23

$\overrightarrow{AS}:\overrightarrow{SE}=\frac{\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DH}}{|\overrightarrow{DH}|}:\frac{\overrightarrow{DH}\times\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{DH}|}=\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DH}：\overrightarrow{DH}\times\overrightarrow{DE}$

得$\overrightarrow{AS}=\frac{u}{uv+1}\overrightarrow{AE}$。

$\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AS}=\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)\overrightarrow{AE}=\left(\frac{(uv+1)-u(vw+1)}{(vw+1)(uv+1)}\right)\overrightarrow{AE}$ 。

同理可求 $\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\overrightarrow{BF}=\left(\frac{(vw+1)-v(ws+1)}{(ws+1)(vw+1)}\right)\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{QR}=\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)\overrightarrow{CG}=\left(\frac{(ws+1)-w(su+1)}{(su+1)(ws+1)}\right)\overrightarrow{CG}$

$\overrightarrow{RS}=\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\overrightarrow{DH}=\left(\frac{(su+1)-s(uv+1)}{(uv+1)(su+1)}\right)\overrightarrow{DH}$ 。

由第①式，四邊形 PQRS$=\Delta$QPR$+\Delta$SPR$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{SP}\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)\overrightarrow{BF}\times\overrightarrow{CG}+\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)\overrightarrow{DH}\times\overrightarrow{AE}\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\left[\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)(ws+1)+\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(uv+1)\right]\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}\right|$

得$\frac{\text{PQRS 面積}}{\text{ABCD 面積}}=\frac{1}{2}\left|\left[\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)(ws+1)+\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(uv+1)\right]\right|$ **（公式①）**

若四邊形 PQRS 面積，改以第②式計算

則 $\frac{\text{PQRS 面積}}{\text{ABCD 面積}}=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(vw+1)+\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)(su+1)\right|$ **（公式②）**

上述公式①②，其實是相等的。

(二)探討四邊形 PQRS 是否存在：

從前面公式，發現分母必須不為 0，即$vw+1\neq0$、$ws+1\neq0$、$su+1\neq0$、$uv+1\neq0$。所以我們猜想：當分母為 0 時，表示四邊形 PQRS 不存在。探討這個問題，我們先以數學軟體繪圖後發現：當以下幾個情形時，四條分割線無法圍成四邊形 PQRS。

1. **若分割線$\overleftrightarrow{AE}//\overleftrightarrow{BF}$時，則 P 點不存在**，如圖 24。

此時，$\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{BF}=0$，$(\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{BC})\times(\overrightarrow{BC}+w\overrightarrow{CD})=0$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}+vw\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CD}=0$

$(1+vw)(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC})=0$

所以 $vw+1=0$

同理，得到以下結論

(1)若$\overleftrightarrow{AE}//\overleftrightarrow{BF}$，則$vw+1=0$；

反之，$vw+1\neq 0$，$\overleftrightarrow{AE}\nparallel\overleftrightarrow{BF}$，此時才有交點 P。

(2)若$\overleftrightarrow{BF}//\overleftrightarrow{CG}$，則 $ws+1=0$；

反之，$ws+1\neq 0$，$\overleftrightarrow{BF}\nparallel\overleftrightarrow{CG}$，此時才有交點 Q。

(3)若$\overleftrightarrow{CG}//\overleftrightarrow{DH}$，則 $su+1=0$；

反之，$su+1\neq 0$，$\overleftrightarrow{CG}\nparallel\overleftrightarrow{DH}$，此時才有交點 R。

(4)若$\overleftrightarrow{DH}//\overleftrightarrow{AE}$，則 $uv+1=0$；

反之，$uv+1\neq 0$，$\overleftrightarrow{DH}\nparallel\overleftrightarrow{AE}$，此時才有交點 S。

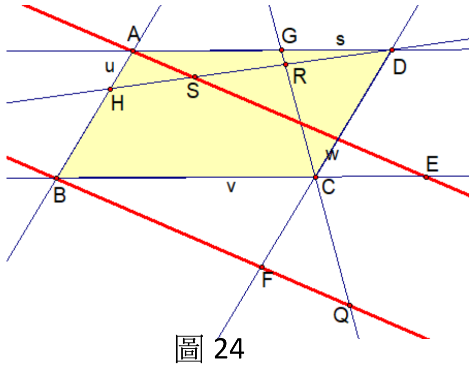


圖 24

2. **當 P、Q、R、S 存在，若僅兩點共點的話，可圍成三角形區域**。

此時，上述公式①與公式②的面積比仍成立。

(1)僅$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$三線共點，此時 P＝Q，所以$\overline{PQ}=0$

即$\overline{PQ}=\left(\frac{(vw+1)-v(ws+1)}{(ws+1)(vw+1)}\right)\overline{BF}=0$，所以$(vw+1)-v(ws+1)=0$。

所圍三角形區域＝ΔPRS＝$\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(uv+1)\right|\cdot$(ABCD 面積)

或ΔQRS＝$\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)(su+1)\right|\cdot$(ABCD 面積)

將$(vw+1)=v(ws+1)$代入前述二式

得$\frac{\text{三角形區域面積}}{\text{ABCD 面積}}=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\left(\frac{uvws-1}{vw+1}\right)\right|$。

反之，當$(vw+1)-v(ws+1)\neq 0$，則$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$三直線不共點，此時 P≠Q。

(2)同理，依輪換性，

僅$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$三線共點(Q＝R)，

得$\frac{\text{三角形區域面積}}{\text{ABCD 面積}}=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)\left(\frac{uvws-1}{ws+1}\right)\right|$；

僅$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$、$\overleftrightarrow{AE}$三線共點(R＝S)，

得$\frac{\text{三角形區域面積}}{\text{ABCD 面積}}=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{uvws-1}{su+1}\right)\right|$；

僅$\overleftrightarrow{DH}$、$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$三線共點(S＝P)

得$\frac{\text{三角形區域面積}}{\text{ABCD 面積}}=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)\left(\frac{uvws-1}{uv+1}\right)\right|$。

(3)若$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$四線共點，此時P＝Q＝R＝S，不能圍成分割區域。

此時，$(vw+1)=v(ws+1)$

$(ws+1)=w(su+1)$

$(su+1)=s(uv+1)$

$(uv+1)=u(vw+1)$

四式相乘得 $uvws=1$ 。即若$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$四線共點，則 $\boldsymbol{uvws=1}$。

反之，$uvws\neq 1$，則$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$四線不共點。

3. **當四點P、Q、R、S存在且不共點：**

若連接P→Q→R→S→P，無法形成一個封閉區域，不能圍成四邊形PQRS。

(1)當四邊形PQRS為凸四邊形，則Q、S必須在對角線直線$\overleftrightarrow{PR}$的異側，則四邊形PQRS存在。

此時依右手定則，$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}$與$\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{SP}$的「方向」相同。

即$\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)(ws+1)$與$\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(uv+1)$為同號數；

同理，改以P、R在對角線直線$\overleftrightarrow{QS}$的異側來看的話，

則$\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(vw+1)$與$\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)(su+1)$是同號數。

此時，**當Q、S在對角線直線$\overleftrightarrow{PR}$的異側且P、R在對角線直線$\overleftrightarrow{QS}$的異側，**

則**凸四邊形PQRS存在存在**。

(2)當四邊形PQRS為凹四邊形，由凹點為P、Q、R、S判斷，有四種可能情形，如圖25。

當四邊形PQRS為凹四邊形，P為凹頂點，則

凹四邊形PQRS面積＝$\boldsymbol{\Delta QPR+\Delta SPR}$

或＝$\boldsymbol{|\Delta PQS-\Delta RQS|}$

此時$\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)(ws+1)$與$\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(uv+1)$為同號數；

$\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(vw+1)$與$\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)(su+1)$為異號數。

所以，凹四邊形ABCD，P為凹頂點時，公式①與②都成立。

(3)當四邊形PQRS為凹四邊形，Q為凹頂點。

當四邊形PQRS為凹四邊形，R為凹頂點。

當四邊形PQRS為凹四邊形，S為凹頂點。也有類似的情形。

綜合上述，得到結果如下:

若$uv+1\neq 0$、$vw+1\neq 0$、$ws+1\neq 0$、$su+1\neq 0$，且$uvws\neq 1$，

(1)當Q、S在對角線直線$\overleftrightarrow{PR}$的異側 **且** P、R在對角線直線$\overleftrightarrow{QS}$的異側時，則分割四邊形PQRS為「**凸四邊形**」，面積比公式①與②都成立。

(2)當Q、S在對角線直線$\overleftrightarrow{PR}$的異側，**且**P、R在對角線直線$\overleftrightarrow{QS}$的同側時，則分割四邊形PQRS為「**凹四邊形**」，此時P或R為凹頂點，面積比公式①與②都成立。

(3)當 P、R 在對角線直線$\overleftrightarrow{QS}$的異側，**且** Q、S 在對角線直線$\overleftrightarrow{PR}$的同側時，則分割四邊形 PQRS 為「**凹四邊形**」，此時 Q 或 S 為凹頂點，面積比公式①與②都成立。

(4)當 P、Q、R、S 存在其中兩點共點，此時**分割區域為「三角形」**，面積比公式①與②也可成立。

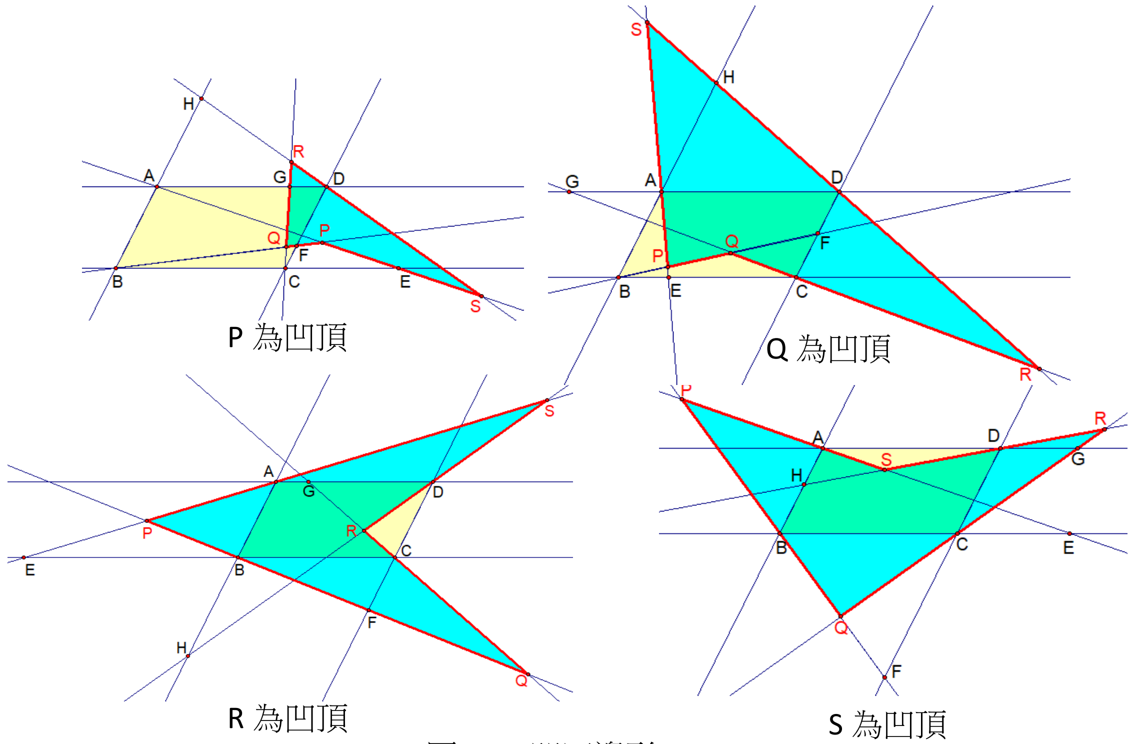


圖 25　凹四邊形

捌、結論與展望

我們以「**平面幾何、解析幾何、向量外積**」三種方式證明分割三角形ΔPQR 存在條件及其與三角形ΔABC 的面積比。並將研究推廣到平行四邊形分割情形，得到以下結論：

一、分割三角形面積比：

ΔABC，若 D、E、F 分別為$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$上異於頂點的分割點，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$為分割直線，若 P 為$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$的交點，Q 為$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$的交點，R 為$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CF}$的交點。

令$\overrightarrow{AF}=u\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{BD}=v\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CE}=w\overrightarrow{EA}$，且$u$、$v$、$w$均不為 0、−1，在三條分割線不共點(即$uvw\neq1$)，且兩兩不平行，即$(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)\neq0$時，則分割三角形

ΔPQR 存在，且$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(uvw-1)^2}{|(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)|}$。

二、平行四邊形分割區域面積比：

平行四邊形 ABCD，若 E、F、G、H 分別為$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$、$\overline{AB}$上異於頂點的分割點，$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$為分割直線，P 為$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$的交點，Q 為$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$的交點，R 為$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$的交點。

令$\overrightarrow{AH}=u\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BE}=v\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CF}=w\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DG}=s\overrightarrow{DA}$，且$u$、$v$、$w$、s 是不為 0、1 的實數。

當滿足以下三條件，則分割四邊形 PQRS 存在。

當相鄰頂點的分割直線不平行且四條分割直線不共點，連接 P→Q→R→S→P 能形成一封閉區域。
此時 $vw+1\neq 0$、$ws+1\neq 0$、$su+1\neq 0$、$uv+1\neq 0$，$uvws\neq 1$。

1. **當任三條分割直線不共點，則 P、Q、R、S 皆不共點**。
   此時 $(vw+1)-v(ws+1)\neq 0$、$(ws+1)-w(su+1)\neq 0$、
   $(ws+1)-w(su+1)\neq 0$、$(uv+1)-u(vw+1)\neq 0$。

2. **當「Q、S 在對角線直線$\overleftrightarrow{PR}$的異側」或「P、R 在對角線直線$\overleftrightarrow{QS}$的異側」**。
   則可為成凸四邊形或凹四邊形。

   此時，分割四邊形 PQRS 與原平行四邊形 ABCD 的面積比為

$$\frac{\text{PQRS 面積}}{\text{ABCD 面積}}=\frac{1}{2}\left|\left[\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)(ws+1)+\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(uv+1)\right]\right| \text{。}$$

$$\text{或 }\frac{1}{2}\left|\left[\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(vw+1)+\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)(su+1)\right]\right| \text{。}$$

   且上述兩個面積比公式，展開後相同。

3. **若三條分割直線共點**，P、Q、R、S 存在其中兩點共點，**則可圍三角形區域**，上述兩個面積比公式仍成立。

三、研究展望：

我們嘗試探討**推廣到任意四邊形**的分割情形，即每一頂點向逆時鐘方向第一個對邊(或延長線)上的任意分割點連線，所圍的分割四邊形與原四邊形面積比，但因為計算太複雜而沒能成功，希望將來學到更佳的數學工具後，能解決此問題。**若任意四邊形的分割情形解決，則任意 n 邊形就解決了**。

另外，也想**推廣到任意正 n 邊形**，猜想應可以用解析幾何及三角函數來解決，希望學到更好數學方法時繼續研究。

玖、 參考資料及其他

一、國中課本第四冊(2021)及第五冊(2022)，南一出版社出版。
二、高中數學課本第四冊 A 本(2022)，鄭惟厚主編，三民書局出版。
三、中華民國第四十六屆中小學科學展覽會(2006)。楊皓崴。三角形與四邊形的切割與變換。
四、中華民國第六十二屆全國科學展覽會(2022)。「非西瓦時」三角形面積分割探討。
五、臺灣國際科學展覽會(2014)。許喬婷。孟氏定理與西瓦定理在多邊形與多面體中的推廣。
六、維基百科：孟氏定理、西瓦定理。

【評語】030409

1. 本作品考慮在△ABC中 D, E, F 分別為 BC 邊，AC 邊和 AB 邊上的點，三條分割線 CF, AD 和 BE 所圍△PQR 面積與原△ABC面積的比例關係。

2. 作者們將去年的作品結果，改以解析及向量的方法得到較簡潔的證明，過程清楚而且完整。此外，作者也延伸考慮平行四邊形的情形，在能圍出凸四邊形的情況下，得到不錯的結果值得肯定。

作品海報

摘要

之前我們研究三角形三頂點與其對邊或延長線上的任意分割點相連的直線，探討這三條分割直線所圍之分割三角形與原三角形的面積關係。我們找出所有圖形類型，分別運用孟氏定理計算分割線段長比例，推導分割三角形與原三角形的面積比，並歸納為同一公式表示。

延續自己的研究，將分割點推廣至延長線上的情形，進一步以「解析幾何」及「向量外積」方式，證明分割三角形存在條件及其與原三角形面積比。

因平行四邊形是由兩個全等三角形所組成，猜想推廣到平行四邊形時，應可得到類似結果。先以繪圖模擬，再以「向量外積」方式探討「平行四邊形」由頂點與對邊直線上任意分割點連線，所圍的「分割區域」，證明其與原平行四邊形的面積比。

壹、研究動機

去年(第62屆)我們研究「非西瓦時三角形面積分割」，即三角形ABC中，當D、E、F分別為邊 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 上異於頂點的任意分割點，不失一般性，假設m= $\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}$，n= $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$，s= $\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$，那麼，在非西瓦(即mns ≠ 1)時，三條分割線 $\overline{CF}$、$\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 可圍成分割三角形ΔABC，且與原三角形ΔPQR的面積比

$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(mns-1)^2}{(ns+n+1)(sm+s+1)(mn+m+1)}$。(如圖1)

把分割點D、E、F推廣到「邊的直線上」，如圖2，也得到很好的結果。

(1) 當F在 $\overline{AB}$ 線段上時，u=m；當F在 $\overline{AB}$ 的延長線上時，u=-m。
(2) 當D在 $\overline{BC}$ 線段上時，v=n；當D在 $\overline{BC}$ 的延長線上時，v=-n。
(3) 當E在 $\overline{AC}$ 線段上時，w=s；當E在 $\overline{AC}$ 的延長線上時，w=-s。
(u、v、w均不為0、-1)，則：

當(1)三條分割線不共點(即 $uvw \neq 1$)，且(2)三條分割線兩兩不平行時，即 $(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)\neq 0$ 分割三角形 ΔPQR 存在，且面積比 $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(uvw-1)^2}{|(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)|}$。

之前我們因所學有限，表達與證明過於繁瑣，今年我們以更簡潔的方式證明，並且推廣到平行四邊形。

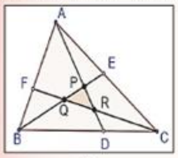


圖1

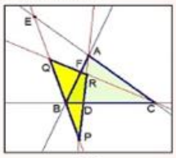


圖2

貳、研究目的

進一步以「解析幾何」及「向量外積」方式來證明本研究。希望能讓本研究更加完整，並推廣到平行四邊形，計算「分割區域」與原圖形面積比。

參、研究設備及器材

一、紙、筆。　二、geogebra繪圖工具。
三、GSP數學繪圖軟體。　四、因式分解與多項式計算器。

肆、文獻探討

我們在第46屆科展找到一個與面積分割相關的研究，該研究為沿三角形或四邊形的邊以固定方向的縮放，探討與原圖形面積關係，與本研究不同。

我們之前的研究，應用到西瓦定理及孟氏定理與其推廣的延伸性質。這次本研究運用「向量」來解決問題，將向量「純量積、內積與外積」等性質，分述如下。

一、向量之純量積、內積與外積：

(一)純量積：

1. 當 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 平行，存在非零實數u，使得 $\vec{b}=u\vec{a}$。
2. 在座標平面上，當 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 平行，假設 $\vec{a}=(a_1, a_2)$，$\vec{b}=(b_1, b_2)$，則 $(b_1, b_2)=u(a_1, a_2)=(ua_1, ua_2)$，其中 $u\in R$，$u\neq 0$。

反之，若存在非零實數u，使得 $\vec{b}=u\vec{a}$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 平行。

(二)向量內積：

1. 定義：若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為一平面上兩個非零向量，定義 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，其中θ為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角。
2. 平面上，若兩非零向量 $\vec{a}=(a_1, a_2)$、$b=(b_1, b_2)$，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的內積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$，推廣到空間中也成立。

(三)向量外積：

1. $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所夾平行四邊形面積 $=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|sin\theta$，其中 θ 為兩向量所夾角度。
2. 本研究運用到的一些外積的性質：
假設 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 為非零向量：
(1) 外積向量 $\vec{a}\times\vec{b}$ 與 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 均垂直，$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}$，$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$。
(2) 若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，則 $\vec{a}\times\vec{b}=0$。反之，$\vec{a}\times\vec{b}=0$，則 $\vec{a}\parallel\vec{b}$。
(3) $(\vec{b}\times\vec{a})=-(\vec{a}\times\vec{b})$。
(4) $\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$，$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$。

二、分點公式：

本研究在分割點的表示上，我們用到以下性質：

1. 平面上，O為任意一點，P 在 $\overline{AB}$ 線段上，$\overline{PA}:\overline{PB}=m:n$，則 $\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$。
2. 承上，當A、P、B共線(或 $\overrightarrow{AP}\parallel\overrightarrow{PB}$)，假設 $\overrightarrow{AP}=u\overrightarrow{PB}$，$(u\neq 0)$ 則 $\overline{AP}:\overline{PB}=u:1$，$\overrightarrow{AP}=\frac{u}{u+1}\overrightarrow{AB}$。
反之，當存在 $u\neq 0$ 使得 $\overrightarrow{AP}=u\overrightarrow{PB}$ 時，則 $\overrightarrow{AP}\parallel\overrightarrow{PB}$。

三、座標平面任意三角形面積求法：

在座標平面上ΔABC，$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$，則三角形ΔABC 面積 $=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\right|$
$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_1\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1\end{matrix}\right\|$。

伍、研究過程

一、三角形內三分割線所圍分割三角形面積

我們動機起於「三角形三中線平分三角形為六個面積相等區域」。運用孟氏定理，嘗試計算「三角形面積三分線的分割情形」，得到這19個區域占原三角形的面積比(如圖3)。進而研究D、E、F為邊 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 上的任意分割點，三條分割線段 $\overline{CF}$、$\overline{AD}$、$\overline{BE}$，在非西瓦時所圍成的分割三角形 ΔPQR 面積。

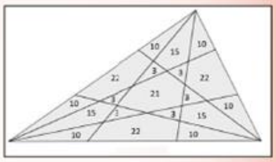
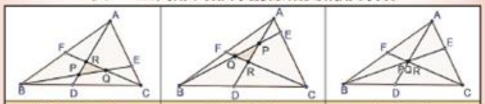


圖3

如圖1，若令 $\overline{AF}:\overline{BF}=a:b$，$\overline{BD}:\overline{CD}=c:d$，$\overline{CE}:\overline{AE}=e:f$，因為變數太多，實在太難操作計算，於是我們假設 $\mathbf{m}=\frac{a}{b}$、$\mathbf{n}=\frac{c}{d}$、$\mathbf{s}=\frac{e}{f}$，不失一般性，而且計算將可簡化不少。

不難發現三條分割線的相交情形有三種可能性，如表1。

表1：三角形內部分割線相交情形分類



$0 < mns < 1$	$mns > 1$	$mns = 1$

不管是 $0 < mns < 1$ 或是 $mns > 1$，都可以用以下方法計算面積比。

方法一：$\Delta PQR=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}\cdot\Delta APQ=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}\cdot\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}\cdot\Delta ABE=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}\cdot\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}\cdot\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\cdot\Delta ABC$

方法二：$\Delta PQR=\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}\cdot\Delta BQR=\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}\cdot\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}\cdot\Delta BCF=\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}\cdot\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}\cdot\frac{\overline{BF}}{\overline{AB}}\cdot\Delta ABC$

方法三：$\Delta PQR=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\Delta CRP=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\Delta CAD=\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}\cdot\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}\cdot\Delta ABC$

方法也不只以上三種方式，不過要解決問題，要先計算出「線段比」。

(一) 先計算分割線段比：

1. 當 $0 < mns < 1$ 時，運用孟氏定理，計算得 $\overline{AR}:\overline{RD}$，及 $\overline{AP}:\overline{PD}$，進而得 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n+1)(1-mns)}{(mn+m+1)(ns+n+1)}$。
2. 當 $mns > 1$ 時，同理得到 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{(n+1)(mns-1)}{(mn+m+1)(ns+n+1)}$。
3. 使用絕對值，不管 $0 < mns < 1$ 或是 $mns > 1$，讓 $\overline{PR}$、$\overline{PQ}$、$\overline{QR}$ 各占所在分割線段長的比值有一致的表示方式。由輪換性可得
$\frac{\overline{PR}}{\overline{AD}}=\frac{|(n+1)(mns-1)|}{(mn+m+1)(ns+n+1)}$，$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}=\frac{|(s+1)(mns-1)|}{(ns+n+1)(sm+s+1)}$，$\frac{\overline{QR}}{\overline{CF}}=\frac{|(m+1)(mns-1)|}{(sm+s+1)(mn+m+1)}$，
$\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}=\frac{|(mns-1)|}{(mn+m+1)}$，$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}=\frac{|(mns-1)|}{(ns+n+1)}$，$\frac{\overline{QR}}{\overline{CR}}=\frac{|(mns-1)|}{(sm+s+1)}$。

(二)求 ΔPQR 與 ΔABC 的面積比：

只要將 $\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}=\left|\frac{(mns-1)}{(mn+m+1)}\right|$，$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}=\left|\frac{(s+1)(mns-1)}{(sm+s+1)(ns+n+1)}\right|$，$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{1}{s+1}$

代入 $\Delta PQR=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}\times\frac{\overline{PQ}}{\overline{BE}}\times\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\times\Delta ABC$

$$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\left|\frac{(mns-1)}{(mn+m+1)}\right|\times\left|\frac{(s+1)(mns-1)}{(sm+s+1)(ns+n+1)}\right|\times\frac{1}{s+1}$$
$$=\frac{(mns-1)^2}{(ns+n+1)(sm+s+1)(mn+m+1)}。$$

二、分割點推廣三角形三邊直線上

當「部分或全部」分割點D、E、F在邊的延長線上時，探討分割直線 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$ 所圍分割三角形PQR的存在條件。我們發現：當三條分割線不共點，且兩兩不平行時，則分割三角形PQR存在。

我們依分割點D、E、F的位置在邊上或延長線上，將圖形可分為8種類型共73個圖形。依P點位置計算分割線段比如表2。

表2：P點的分割線段比

圖形類型	n、s條件	P點位置	判別條件	分割線段比
P(n, s)	--	P 必在內部	$ns+n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{ns+n+1}$
P(-n, s)	n>1	P只在∠B的廣區	$ns+n-1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns+n-1}$
	0<n<1	P在∠B的廣區時	$ns+n-1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{ns+n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns+n-1}$
	0<n<1	P在∠B的角區時	$ns+n-1<0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s+1)}{-(ns+n-1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{-(ns+n-1)}$
P(n, -s)	s>1	P在∠A的廣區時	$ns-n-1<0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{-(ns-n-1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{-(ns-n-1)}$
	s>1	P在∠A的角區時	$ns-n-1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{ns-n-1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{ns-n-1}$
	0<s<1	P只在∠A的廣區	$ns-n-1<0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{-(ns-n-1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n+1}{-(ns-n-1)}$
P(-n, -s)	n>1、s>1	P只在∠C的廣區	$ns-n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns-n+1}$
	n>1、0<s<1	P在∠C的廣區時	$ns-n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{ns-n+1}$
	n>1、0<s<1	P在∠C的角區時	$ns-n+1<0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{-(ns-n+1)}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{n-1}{-(ns-n+1)}$
	0<n<1、s>1	P只在∠C的廣區	$ns-n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(s-1)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns-n+1}$
	0<n<1、0<s<1	P只在∠C的廣區	$ns-n+1>0$	$\frac{\overline{BP}}{\overline{BE}}=\frac{n(1-s)}{ns-n+1}$，$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{1-n}{ns-n+1}$

說明：Q點及R點的分割線段比，以輪換性就可以得到。

三角形面積分割及推廣研究

(一)計算面積比：

不管哪個類型圖形，前述三個面積比計算方法仍能適用。以 G(m, n, -s)其中一圖為例(如圖4)。

證得 $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(mns+1)^2}{-(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)}$ 。

我們逐一驗證八類型73個圖形，得下表：

表3：各種類型圖形面積比

項次	圖形類型	$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}$面積比
1	G(m, n, s)	$\frac{(mns-1)^2}{\lvert(ns+s+1)(sm+m+1)(mn+n+1)\rvert}$
2	G(m, n, -s)	$\frac{(mns+1)^2}{\lvert(ns-n-1)(sm+s-1)(mn+m+1)\rvert}$
3	G(-m, n, s)	$\frac{(mns+1)^2}{\lvert(ns+n+1)(sm-s-1)(mn+m-1)\rvert}$
4	G(m, -n, s)	$\frac{(mns+1)^2}{\lvert(ns+n-1)(sm+s+1)(mn-m-1)\rvert}$
5	G(m, -n, -s)	$\frac{(mns-1)^2}{\lvert(ns-n+1)(sm+s-1)(mn-m-1)\rvert}$
6	G(-m, n, -s)	$\frac{(mns-1)^2}{\lvert(ns-n-1)(sm-s+1)(mn+m-1)\rvert}$
7	G(-m, -n, s)	$\frac{(mns-1)^2}{\lvert(ns+n-1)(sm-s-1)(mn-m+1)\rvert}$
8	G(-m, -n, -s)	$\frac{(mns+1)^2}{\lvert(ns-n+1)(sm-s+1)(mn-m+1)\rvert}$

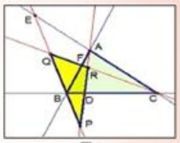


圖4

發現這八個公式有相似之處，當分割點推廣到延長線上時，定義三個變數u、v、w。

若F在$\overline{AB}$線段上時，令u=m；若F在$\overline{AB}$的延長線上時，令u=-m。

若D在$\overline{BC}$線段上時，令v=n；若D在$\overline{BC}$的延長線上時，令v=-n。

若E在$\overline{AC}$線段上時，令w=s；當E在$\overline{AC}$的延長線上時，令w=-s。

則八個類型的面積比皆可由同一個公式表示，

即 $\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(uvw-1)^2}{\lvert(vw+v+1)(wu+w+1)(uv+u+1)\rvert}$

此時，不管哪一類別的圖形，分割三角形 ΔPQR 存在的條件均為：

(1) 三條分割線不共點(即 $uvw\neq 1$)，

(2) 且三條分割線兩兩不平行時

(即 $(vw+v+1)(wu+w+1)(uv+u+1)\neq 0$)。

陸、討論

以上是我們之前的研究，我們將所有可能圖形全部列出來，尋找它們的特性與關係，雖然可以用簡單的數學方式證明，但圖形太多，這樣方法過於繁雜。

我們進一步以「解析幾何」及「向量外積」的方式來探討，這樣證明就可以更一般化。

一、以向量外積計算平行的向量比：

根據向量外積的定義，可遵循座標向量的「右手法則」讓同平面上的兩向量外積的「公垂向量」方向一致，且兩向量外積絕對值等於所夾平行四邊形面積，因此可以運用此一性質來計算同一平面上的兩平行向量的方向與長度比。

當P點在$\overline{AD}$線段上，則A、D在$\overleftrightarrow{BE}$的異側，則$\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}$與$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$方向相同；當P點在$\overline{AD}$延長線上，則A、D在$\overleftrightarrow{BE}$的同側，則$\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}$與$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$方向相反。

如圖5，因A、D點在$\overleftrightarrow{BE}$的異側，$\overrightarrow{AP}$與$\overrightarrow{PD}$同方向，所以$\overline{AP}:\overline{PD}=h:k$ 因為h、k分別為ΔABE與ΔBDE之$\lvert\overrightarrow{BE}\rvert$邊上的高，所以$h=\frac{\lvert\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}\rvert}{\lvert\overrightarrow{BE}\rvert}$，$k=\frac{\lvert\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}\rvert}{\lvert\overrightarrow{BE}\rvert}$，則$\overline{AP}:\overline{PD}=h:k=\frac{\lvert\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}\rvert}{\lvert\overrightarrow{BE}\rvert}:\frac{\lvert\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}\rvert}{\lvert\overrightarrow{BE}\rvert}$ 。

又因為$\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}$與$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$ 相同方向，所以可以去掉絕對值，則

$\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PD}=\frac{\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}}{\lvert\overrightarrow{BE}\rvert}:\frac{\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}}{\lvert\overrightarrow{BE}\rvert}=\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}:\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$ 。

同理，當A、D點在$\overleftrightarrow{BE}$的同側，所以$\overrightarrow{AP}$與$\overrightarrow{PD}$方向相反。

因$\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}$與$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$相反方向，則

$(-\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA})$與$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$ 相同方向，

$\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PD}=-h:k=-\frac{-(\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA})}{\lvert\overrightarrow{BE}\rvert}:\frac{\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}}{\lvert\overrightarrow{BE}\rvert}=\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}:\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$

綜合上述，本研究求分割線段比的方法：

當A、P、D三點共線，則

$\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PD}=\frac{\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}}{\lvert\overrightarrow{BE}\rvert}:\frac{\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}}{\lvert\overrightarrow{BE}\rvert}=\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}:\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}$。

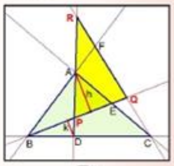


圖5

二、以解析幾何證明面積比：

座標平面上，令$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，為符合之前研究結果，以向量表示，可令$\overrightarrow{AF}=u\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{BD}=v\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CE}=w\overrightarrow{EA}$，D、E、F分別在直線$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$上，且u、v、w均不為0、-1。

依分點公式，則$D(\frac{vx_3+x_2}{v+1},\frac{vy_3+y_2}{v+1})$，$E(\frac{wx_1+x_3}{w+1},\frac{wy_1+y_3}{w+1})$，$F(\frac{ux_2+x_1}{u+1},\frac{uy_2+y_1}{u+1})$

則$\overrightarrow{AD}=(\frac{vx_3+x_2}{v+1},\frac{vy_3+y_2}{v+1})-(x_1,y_1)=\left(\frac{-(v+1)x_1+x_2+vx_3}{v+1},\frac{-(v+1)y_1+y_2+vy_3}{v+1}\right)$

同理$\overrightarrow{BE}=(\frac{wx_1+x_3}{w+1},\frac{wy_1+y_3}{w+1})-(x_2,y_2)=\left(\frac{wx_1-(w+1)x_2+x_3}{w+1},\frac{wy_1-(w+1)y_2+y_3}{w+1}\right)$

同理$\overrightarrow{CF}=(\frac{ux_2+x_1}{u+1},\frac{uy_2+y_1}{u+1})-(x_3,y_3)=\left(\frac{x_1+ux_2-(u+1)x_3}{u+1},\frac{y_1+uy_2-(u+1)y_3}{u+1}\right)$

如圖5，$\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BA}:\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})\times\overrightarrow{BA}:\overrightarrow{BD}\times(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})$

$=\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{BA}:\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{CE}=\frac{1}{w+1}\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BA}:\frac{v}{v+1}\overrightarrow{BC}\times\frac{w}{w+1}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{w+1}\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}:\frac{vw}{(v+1)(w+1)}\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$

$=\frac{1}{w+1}:\frac{vw}{(v+1)(w+1)}=(v+1):vw$（其中$vw\neq 0$、$w\neq -1$、$v\neq -1$）

因為P點在直線$\overleftrightarrow{AD}$上，所以$\overrightarrow{AP}=\frac{v+1}{vw+v+1}\overrightarrow{AD}$。

$\overrightarrow{AP}=\frac{v+1}{vw+v+1}\left(\frac{-(v+1)x_1+x_2+vx_3}{v+1},\frac{-(v+1)y_1+y_2+vy_3}{v+1}\right)=\left(\frac{-(v+1)x_1+x_2+vx_3}{vw+v+1},\frac{-(v+1)y_1+y_2+vy_3}{vw+v+1}\right)$，

P點座標$\left(\frac{-(v+1)x_1+x_2+vx_3}{vw+v+1},\frac{-(v+1)y_1+y_2+vy_3}{vw+v+1}\right)+(x_1,y_1)=\left(\frac{vwx_1+x_2+vx_3}{vw+v+1},\frac{vwy_1+y_2+vy_3}{vw+v+1}\right)$

同理，Q點座標$\left(\frac{wx_1-(w+1)x_2+x_3}{wu+w+1},\frac{wy_1-(w+1)y_2+y_3}{wu+w+1}\right)+(x_2,y_2)=\left(\frac{wx_1+wux_2+x_3}{wu+w+1},\frac{wy_1+wuy_2+y_3}{wu+w+1}\right)$

R點座標$\left(\frac{x_1+ux_2-(u+1)x_3}{uv+u+1},\frac{y_1+uy_2-(u+1)y_3}{uv+u+1}\right)+(x_3,y_3)=\left(\frac{x_1+ux_2+uvx_3}{uv+u+1},\frac{y_1+uy_2+uvy_3}{uv+u+1}\right)$

則ΔPQR面積$=\frac{1}{2}\left\lVert\begin{pmatrix}P_x & Q_x & R_x & P_x\\ P_y & Q_y & R_y & P_y\end{pmatrix}\right\rVert$（令座標$P(P_x,P_y)$、$Q(Q_x,Q_y)$、$R(R_x,R_y)$）

$=\frac{1}{2}\left\lvert\frac{1}{(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)}\right\rvert$

$\cdot\lvert(uv+u+1)(P_xQ_y-P_yQ_x)+(vw+v+1)(Q_xR_y-Q_yR_x)+(wu+w+1)(R_xP_y-R_yP_x)\rvert$

$=\frac{1}{2}\left\lvert\frac{1}{(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)}\right\rvert$

$\cdot(\lvert(uv+u+1)[(vwx_1+x_2+vx_3)(wy_1+wuy_2+y_3)-(vwy_1+y_2+vy_3)(wx_1+wux_2+x_3)]$

$+(vw+v+1)[(wx_1+wux_2+x_3)(y_1+uy_2+uvy_3)-(wy_1+wuy_2+y_3)(x_1+ux_2+uvx_3)]$

$+(wu+w+1)[(x_1+ux_2+uvx_3)(vwy_1+y_2+vy_3)-(y_1+uy_2+uvy_3)(vwx_1+x_2+vx_3)]\rvert)$

不建議直接全部展開，合併同類項，有點複雜，

應依以下項次順序，以分配律找其係數，就很簡單，最後發現：

1. x_1y_1項，x_2y_2項，x_3y_3項係數均為0；
2. x_1y_2項，x_2y_3項，x_3y_1項係數均為$(uvw-1)^2$；
3. x_2y_1項，x_3y_2項，x_1y_3項係數均為$-(uvw-1)^2$。上述算式繼續如下：

$=\frac{1}{2}\left\lvert\frac{(uvw-1)^2}{(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)}\right\rvert\lvert(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\rvert$

$=\left\lvert\frac{(uvw-1)^2}{(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)}\right\rvert\cdot\frac{1}{2}\left\lVert\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_1\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1\end{matrix}\right\rVert=\left\lvert\frac{(uvw-1)^2}{(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)}\right\rvert\Delta ABC$

故$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(uvw-1)^2}{\lvert(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)\rvert}$ 。

不失一般性，尚可改進上述計算，假設A為原點(0，0)、B為(x_2,y_2)、C為(x_3,y_3)計算面積比就可以更簡化。不過當A為原點，計算P、Q、R座標時，就無法運用三角形的輪換性了。另外我們嘗試找解析幾何以外的證明方式，希望以更簡單的方式證明面積比。

三、以向量外積證明面積比：

直接以向量外積方式，討論分割三角形存在的條件並證明面積比。

(一)探討三角形PQR存在的條件：

1. P、Q、R點存在的條件：

若$vw+v+1\neq 0$，則$\overleftrightarrow{AD}\nparallel\overleftrightarrow{BE}$，P點存在。

$wu+w+1\neq 0$，則$\overleftrightarrow{BE}\nparallel\overleftrightarrow{CF}$，Q點存在。

$uv+u+1\neq 0$，則$\overleftrightarrow{CF}\nparallel\overleftrightarrow{AD}$，R點存在。

2. P、Q、R點不共點的條件：若$uvw\neq 1$，則三條分割線不共點。

(二) 向量外積證明面積比：

當分割三角形PQR存在，

$\overrightarrow{AP}=\frac{v+1}{vw+v+1}\overrightarrow{AD}$；$\overrightarrow{BQ}=\frac{w+1}{wu+w+1}\overrightarrow{BE}$；

$\overrightarrow{CR}=\frac{u+1}{uv+u+1}\overrightarrow{CF}$ 。 如圖6，同理，

$\overrightarrow{BP}=\frac{v(w+1)}{vw+v+1}\overrightarrow{BE}$；$\overrightarrow{CQ}=\frac{w(u+1)}{wu+w+1}\overrightarrow{CF}$；

$\overrightarrow{AR}=\frac{u(v+1)}{uv+u+1}\overrightarrow{AD}$。

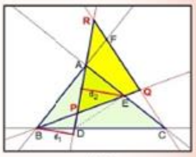


圖6

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}$

$=\left(\frac{u(v+1)}{uv+u+1}-\frac{v+1}{vw+v+1}\right)\overrightarrow{AD}=\frac{(v+1)(uvw-1)}{(uv+u+1)(vw+v+1)}\overrightarrow{AD}$，

同理$\overrightarrow{QP}=\frac{(w+1)(uvw-1)}{(vw+v+1)(wu+w+1)}\overrightarrow{BE}$；$\overrightarrow{RQ}=\frac{(u+1)(uvw-1)}{(wu+w+1)(uv+u+1)}\overrightarrow{CF}$

ΔPQR面積$=\frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\rvert=\frac{1}{2}\left\lvert\frac{-(w+1)(uvw-1)}{(vw+v+1)(wu+w+1)}\cdot\frac{(v+1)(uvw-1)}{(uv+u+1)(vw+v+1)}\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{AD}\right\rvert$

$=\frac{1}{2}\left\lvert\frac{-(w+1)(uvw-1)}{(vw+v+1)(wu+w+1)}\cdot\frac{(v+1)(uvw-1)}{(uv+u+1)(vw+v+1)}\cdot\left(\frac{-(vw+v+1)}{(v+1)(w+1)}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\right\rvert$

$=\left\lvert\frac{(uvw-1)^2}{(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)}\right\rvert\cdot\frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\rvert$

所以$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(uvw-1)^2}{\lvert(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)\rvert}$ 得證。

柒、推廣及後續研究

因為平行四邊形為兩個全等三角形組合，猜想平行四邊形應有類似的結果。平面上，平行四邊形ABCD，若E、F、G、H分別為$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$、$\overline{AB}$上異於頂點的分割點，$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$為分割直線，P為$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$的交點，Q為$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$的交點，R為$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$的交點，S為$\overleftrightarrow{DH}$及$\overleftrightarrow{AE}$的交點。

令$\overrightarrow{AH}=u\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BE}=v\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CF}=w\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DG}=s\overrightarrow{DA}$(實數 u、v、w、s≠0、1)。探討四邊形PQRS存在的條件，並嘗試尋找四邊形PQRS與平行四邊形ABCD的面積比公式。

一、先研究經常遇到的平行四邊形分割問題：

如圖7，當$\overrightarrow{AH}=u\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BE}=v\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CF}=u\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DG}=v\overrightarrow{DA}$時，很容易理解四邊形PQRS若存在必為平行四邊形。

以向量外積解法，

得到 $\frac{\text{PQRS面積}}{\text{ABCD面積}}=\left\lvert\frac{(1-u)(1-v)}{(uv+1)}\right\rvert$。

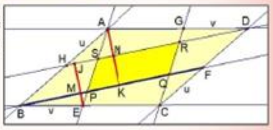


圖7

當$uv+1=0$，則不存在四邊形PQRS，

此時$\overleftrightarrow{AE}//\overleftrightarrow{BF}$且$\overleftrightarrow{CG}//\overleftrightarrow{DH}$。

反之，當$\overleftrightarrow{AE}\nparallel\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}\nparallel\overleftrightarrow{DH}$（即$uv+1\neq 0$），

則分割四邊形PQRS存在，且$\frac{\text{PQRS面積}}{\text{ABCD面積}}=\left\lvert\frac{(1-u)(1-v)}{(uv+1)}\right\rvert$。

二、再研究$\overrightarrow{AH}=u\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BE}=v\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CF}=w\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DG}=s\overrightarrow{DA}$。

(一)當四邊形PQRS存在且為凸四邊形求面積比：

任意凸四邊形可以拆成兩個三角形計算面積，

所以四邊形PQRS＝ΔQPR＋ΔSPR(連接對角線$\overline{PR}$)

或四邊形PQRS＝ΔPQS＋ΔRQS(連接對角線$\overline{QS}$)

只要根據外積右手法則，讓外積向量為同方向，計算三角形面積，因絕對值內之值為同號數，就可以先加法合併，再取絕對值。

即四邊形PQRS $=\Delta QPR+\Delta SPR=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{SP}|$…第①式

或四邊形PQRS $=\Delta PQS+\Delta RQS=\frac{1}{2}|\overrightarrow{SP}\times\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}\times\overrightarrow{RS}|$…第②式

先計算線段比再求面積比，如圖8，

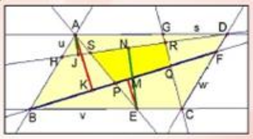


圖8

$\overline{AP}:\overline{PE}=\overline{BF}\times\overline{BA}:\overline{BE}\times\overline{BF}$

$=1:vw$，

得 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{vw+1}\overrightarrow{AE}$ 。

同理 $\overline{AS}:\overline{SE}=$

$\overline{DA}\times\overline{DH}:\overline{DH}\times\overline{DE}$

得 $\overrightarrow{AS}=\frac{u}{uv+1}\overrightarrow{AE}$ 。

$\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AS}=\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)\overrightarrow{AE}=\left(\frac{(uv+1)-u(vw+1)}{(vw+1)(uv+1)}\right)\overrightarrow{AE}$ 。

同理可求 $\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\overrightarrow{BF}=\left(\frac{(vw+1)-v(ws+1)}{(ws+1)(vw+1)}\right)\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{QR}=\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)\overrightarrow{CG}=\left(\frac{(ws+1)-w(su+1)}{(su+1)(ws+1)}\right)\overrightarrow{CG}$

$\overrightarrow{RS}=\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\overrightarrow{DH}=\left(\frac{(su+1)-s(uv+1)}{(uv+1)(su+1)}\right)\overrightarrow{DH}$ 。

由第①式，四邊形PQRS $=\Delta QPR+\Delta SPR=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{SP}|$

$=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)\overrightarrow{BF}\times\overrightarrow{CG}\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)\overrightarrow{DH}\times\overrightarrow{AE}\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\left[\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)(ws+1)\right.\right.$

$\left.\left.+\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(uv+1)\right]\right|\cdot|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}|$

得 $\frac{\text{PQRS面積}}{\text{ABCD面積}}=\frac{1}{2}\left|\left[\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)(ws+1)+\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(uv+1)\right]\right|$（公式①）

若四邊形PQRS面積，改以第②式計算

則 $\frac{\text{PQRS面積}}{\text{ABCD面積}}=\frac{1}{2}\left|\left[\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(vw+1)+\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)(su+1)\right]\right|$（公式②）

上述公式①②，通分展開是相等的。

(二)探討四邊形PQRS是否存在：

1. P、Q、R、S存在條件：

(1)若 $vw+1\neq 0$，$\overleftrightarrow{AE}$ 與 $\overleftrightarrow{BF}$，此時才有交點P。

(2)若 $ws+1\neq 0$，$\overleftrightarrow{BF}$ 與 $\overleftrightarrow{CG}$，此時才有交點Q。

(3)若 $su+1\neq 0$，$\overleftrightarrow{CG}$ 與 $\overleftrightarrow{DH}$，此時才有交點R。

(4)若 $uv+1\neq 0$，$\overleftrightarrow{DH}$ 與 $\overleftrightarrow{AE}$，此時才有交點S。

2. 當P、Q、R、S僅兩點共點的話，可圍成三角形區域。

此時，上述公式①與公式②的面積比仍成立。

(1)僅 $\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$ 三線共點，此時P＝Q，$\overline{PQ}=0$

所以 $(vw+1)-v(ws+1)=0$ 。

所圍三角形區域＝ΔPRS

$=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(uv+1)\right|\cdot$(ABCD面積)

或 $\Delta QRS=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)(su+1)\right|\cdot$(ABCD面積)

將 $(vw+1)=v(ws+1)$ 代入前述二式

得 $\frac{\text{三角形區域面積}}{\text{ABCD 面積}}=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\left(\frac{uvws-1}{vw+1}\right)\right|$ 。

(2)同理，依輪換性，可得Q、R共點，R、S共點，S、P共點時之結果。

(3)若 $\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$ 四線共點，此時P＝Q＝R＝S，不能圍成分割區域。

此時，$(vw+1)=v(ws+1)$，$(ws+1)=w(su+1)$

$(su+1)=s(uv+1)$，$(uv+1)=u(vw+1)$

四式相乘得 $uvws=1$。

即若 $\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$ 四線共點，則 $\boldsymbol{uvws=1}$。

反之，$uvws\neq 1$，則 $\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$ 四線不共點。

3. 當四點P、Q、R、S存在且不共點：

若連接P→Q→R→S→P，無法形成一個封閉區域，不能圍成四邊形PQRS。

(1)當四邊形PQRS為凸四邊形，則Q、S必須在對角線直線 $\overleftrightarrow{PR}$ 的異側，則四邊形PQRS存在。

此時依右手定則，$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{SP}$ 的「方向」相同。

即 $\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)(ws+1)$

與 $\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(uv+1)$ 為同號數；

同理，改以P、R在對角線直線 $\overleftrightarrow{QS}$ 的異側來看的話，

則 $\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(vw+1)$

與 $\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)(su+1)$ 是同號數。

(2)當四邊形PQRS為凹四邊形，由凹點為P、Q、R、S判斷，有2種可能情形，如圖9。

當四邊形PQRS為凹四邊形，P或R為凹頂點，則

凹四邊形PQRS面積 $=\boldsymbol{\Delta QPR+\Delta SPR}$

或 $=|\boldsymbol{\Delta PQS-\Delta RQS}|$

因為 $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}$ 與 $\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{SP}$ 的「方向」相同，

$\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)(ws+1)$

與 $\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(uv+1)$ 為同號數；

因為 $\overrightarrow{SP}\times\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{QR}\times\overrightarrow{RS}$ 的「方向」相反，

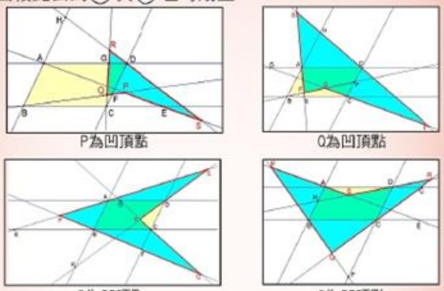
則 $\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(vw+1)$

與 $\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)(su+1)$ 是異號數。

所以面積比公式①與②都成立。

當分割四邊形PQRS為「**凹四邊形**」，Q或S為凹頂點，面積比公式①與②也都成立。

(3)當P、Q、R、S存在其中兩點共點，**分割區域為「三角形」**，面積比公式①與②也可成立。



P為凹頂點　Q為凹頂點

R為凹頂點　S為凹頂點

圖9　凹四邊形

捌、結論與展望

我們以「平面幾何、解析幾何、向量外積」三種方式證明分割三角形 ΔPQR 存在條件及其與三角形 ΔABC 的面積比。並將研究推廣到平行四邊形分割情形，得到以下結論：

一、分割三角形面積比：

ΔABC，若D、E、F分別為 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 上異於頂點的分割點，$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$ 為分割直線，若P為 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$ 的交點，Q為 $\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$ 的交點，R為 $\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{CF}$ 的交點。

令 $\overrightarrow{AF}=u\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{BD}=v\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CE}=w\overrightarrow{EA}$，且 u、v、w 均不為0、-1，在三條分割線不共點(即 $uvw\neq \boldsymbol{1}$)，且兩兩不平行，即 $(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)\neq 0$，則分割三角形 ΔPQR 存在，

$\boldsymbol{\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC}=\frac{(uvw-1)^2}{|(uv+u+1)(vw+v+1)(wu+w+1)|}}$ 。

二、平行四邊形分割區域面積比：

平行四邊形ABCD，若E、F、G、H分別為 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CD}$、$\overleftrightarrow{DA}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 上異於頂點的分割點，$\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$ 為分割直線，P為 $\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{BF}$ 的交點，Q為 $\overleftrightarrow{BF}$、$\overleftrightarrow{CG}$ 的交點，R為 $\overleftrightarrow{CG}$、$\overleftrightarrow{DH}$ 的交點。

令 $\overrightarrow{AH}=u\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BE}=v\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CF}=w\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DG}=s\overrightarrow{DA}$，且 u、v、w、s 是不為0、1的實數。

當滿足以下條件，則分割區域存在。

1. 當相鄰頂點的分割直線不平行且四條分割直線不共點，連接P→Q→R→S→P能形成一封閉區域。

此時 $vw+1\neq 0$、$ws+1\neq 0$、$su+1\neq 0$、$uv+1\neq 0$，$uvws\neq 1$。

2. 任三條分割直線不共點，則P、Q、R、S皆不共點。

此時 $(vw+1)-v(ws+1)\neq 0$、$(ws+1)-w(su+1)\neq 0$、$(ws+1)-w(su+1)\neq 0$、$(uv+1)-u(vw+1)\neq 0$ 。

3.「Q、S在對角線直線 $\overleftrightarrow{PR}$ 的異側」

或「P、R在對角線直線 $\overleftrightarrow{QS}$ 的異側」。

則可為成凸四邊形或凹四邊形，其與原平行四邊形ABCD的面積比為 $\frac{\text{PQRS 面積}}{\text{ABCD 面積}}$

$=\frac{1}{2}\left|\left[\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)(ws+1)\right.\right.$

$\left.\left.+\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(uv+1)\right]\right|$ 。

或 $\frac{1}{2}\left|\left[\left(\frac{1}{ws+1}-\frac{v}{vw+1}\right)\left(\frac{1}{vw+1}-\frac{u}{uv+1}\right)(vw+1)\right.\right.$

$\left.\left.+\left(\frac{1}{su+1}-\frac{w}{ws+1}\right)\left(\frac{1}{uv+1}-\frac{s}{su+1}\right)(su+1)\right]\right|$ 。

且上述兩個面積比公式，展開後相同。

4. 若三條分割直線共點，則P、Q、R、S存在兩點共點，則可圍三角形區域，上述兩個面積比公式仍然成立。

三、研究展望：

我們嘗試探討推廣到任意四邊形的分割情形，即每一頂點向逆時鐘方向第一個對邊(或延長線)上的任意分割點連線，所圍的分割四邊形與原四邊形面積比，但因為計算太複雜而尚未成功，希望將來學到更佳的數學工具後，能解決此問題。若任意四邊形的分割情形解決，則任意n邊形就解決了。

另外，也想推廣到任意正 n 邊形，猜想應可以用解析幾何及三角函數來解決，希望學到更好數學方法時繼續研究。

玖、參考資料及其他

一、國中課本第四冊(2021)及第五冊(2022)，南一出版社出版。

二、高中數學課本第四冊A本(2022)，鄭惟厚主編，三民書局出版。

三、中華民國第四十六屆中小學科學展覽會(2006)。楊皓崴。三角形與四邊形的切割與變換。

四、中華民國第六十二屆全國科學展覽會(2022)。「非西瓦時」三角形面積分割探討。

五、臺灣國際科學展覽會(2014)。許喬婷。孟氏定理與西瓦定理在多邊形與多面體中的推廣。

六、維基百科：孟氏定理、西瓦定理。