中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030408

環環相切——三角形中的多「圓」宇宙

學校名稱：宜蘭縣立國華國民中學

作者：	指導老師：
國二 崔恩睿 國二 康秉叡 國二 陳其寬	吳浩誠 沈志強

關鍵詞：三角形、內切圓、二次曲線

環環相切——三角形中的多「圓」宇宙

摘要

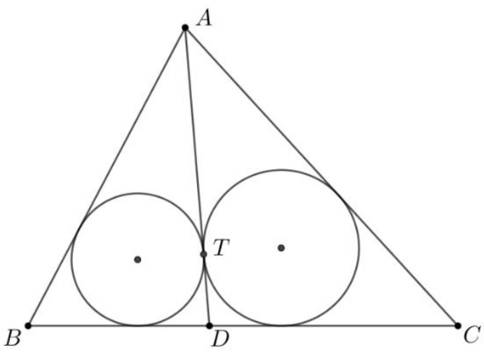
本篇主要在探討三角形內多圓連續相切的幾何問題，並將狀況依序分為二、三、四圓，其中完整分析出正三角形及等腰三角形的分割線段長比，而任意三角形則於坐標化後才討論。過程中為更進一步探討任意數量分割圓的性質，我們將三角形其中一頂點置於原點上觀察，以此發現並證明了所有圓心會共同一條拋物線、雙曲線之漸近線通過分割點且垂直底邊、存在公切圓且此圓會過三角形頂點等幾何性質。

此外為求分割點坐標，我們利用內切圓的相關性質得出兩迭代公式，以此解決了原題的一般化情形，而在延伸討論中，我們探討了分別與雙邊及單邊相切的圓，前者為文獻中的「馬爾法蒂問題」，後者我們則是分析「分割中心」的存在性及其所在位置。

壹、 研究動機

我們在數學網站「***CRUX***」上找題目練習時，一道特別的題目吸引了我們的目光，題目如下（取自 *CRUX* 第 45 屆 1 月期刊）：

Find a nice description of the point D on side $\overline{BC}$ of a given triangle $\triangle ABC$ so that the incircles of the resulting triangles $\triangle ABD$ and $\triangle ADC$ are tangent to one another at a point of their common tangent line $\overline{AD}$.



中文翻譯：在 $\triangle ABC$ 的 $\overline{BC}$ 邊上取一點 D，使得 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ADC$ 的內切圓會切於內公切線 $\overline{AD}$ 上的同一點，如圖中的 T 點。

在進行初步的觀察和探討後，發現運用簡單的觀念就可以發現 D 點，但這也引起了我們的好奇，如果將給定的三角形分割為更多三角形，是否存在所有相鄰內切圓都相切的情況？而這樣的情況又是否是唯一的？能否跟原題一樣求出 D 點位置，並得出其坐標公式？而除了通式外，如此三角形內連續相切的圓之間是否還有任何特殊的幾何性質，有待我們更進一步研究討論。

貳、 研究目的

一、任意三角形取一、二、三個分割點時的分割線段長比。

二、證明任意三角形取 n 個分割點的存在性與唯一性。

三、探討任意三角形取 n 個分割點時分割圓的幾何性質。

四、建立任意三角形取 n 個分割點時的迭代公式並探討其應用。

五、探討任意多邊形中「分割中心」的存在性及其所在位置。

參、 研究架構

肆、 研究工具

一、***GeoGebra***：一個方便的幾何繪圖工具。

二、***MATLAB***：可用於數值計算的進階技術計算語言和互動式環境。

三、***WalframAlpha***：能夠解方程式、化簡算式的數位工具。

伍、 研究過程

一、 名詞定義

(一) 分割點、分割圓 （※ 分割點的「存在性與唯一性」將在後續文中說明）

在一個 $\triangle ABC$ 內，在 $\overline{BC}$ 上取 n 個點 D_1、D_2、⋯、D_n，並稱此 n 個點為「**分割點**」，其可使得 $\triangle ABD_1$ 內切圓 O_1 與 $\triangle AD_1D_2$ 內切圓 O_2 相切、$\triangle AD_1D_2$ 內切圓 O_2 與 $\triangle AD_2D_3$ 內切圓 O_3 相切、⋯、$\triangle AD_{n-1}D_n$ 內切圓 O_n 與 $\triangle AD_nC$ 內切圓 O_{n+1} 相切，如圖 5-1-1，我們稱此 $n+1$ 個內切圓為「**分割圓**」。

(二) 分切點

延續上述，令圓 O_1 切 $\overline{AB}$ 於 T_B、切 $\overline{AD_1}$ 於 T_1，圓 O_2 切 $\overline{AD_1}$ 於 T_1，切 $\overline{AD_2}$ 於 T_2，依此類推，則圓 O_{n+1} 切 $\overline{AD_n}$ 於 T_n、切 $\overline{AC}$ 於 T_C，如圖 5-1-2，我們稱此 $n+2$ 個切點為「**分切點**」。

(三) 分割線段

若在三角形的底邊 $\overline{BC}$ 上取 n 個分割點 D_1、D_2、⋯、D_n，則底邊將被分成 $n+1$ 條線段 $\overline{BD_1}$、$\overline{D_1D_2}$、⋯、$\overline{D_nC}$，如圖 5-1-2，我們稱此 $n+1$ 條線段為「**分割線段**」，其長度則稱為「分割線段長」。

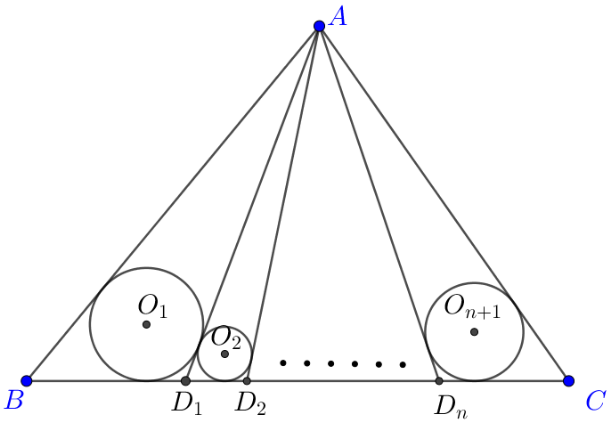


圖 5-1-1

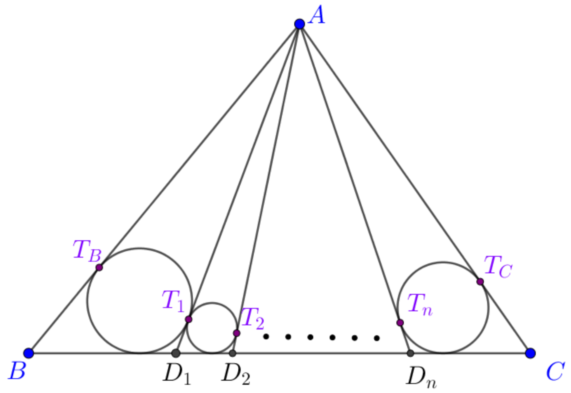


圖 5-1-2

二、 基本定理

定理一：自圓外一點 A 對圓 O 作兩條切線分別切圓於 B、C 兩點，如圖 5-2-1，則：

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

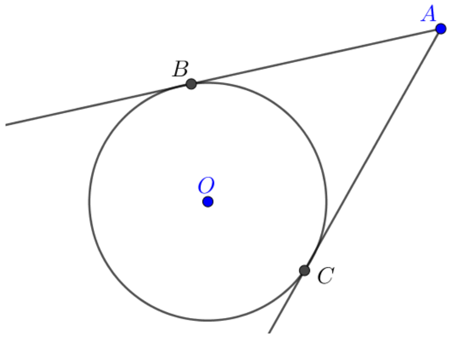


圖 5-2-1

定理二：在 $\triangle ABC$ 中有一內切圓 O 分別切 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 於 D、E、F 三點，如圖 5-2-2，則可由定理一推導出：

$$\overline{BD} = \overline{BF} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{CA}}{2}$$

同理可得：

$$\overline{AE} = \overline{AF} = \frac{\overline{BA} + \overline{AC} - \overline{CB}}{2}$$

$$\overline{CE} = \overline{CD} = \frac{\overline{AC} + \overline{CB} - \overline{BA}}{2}$$

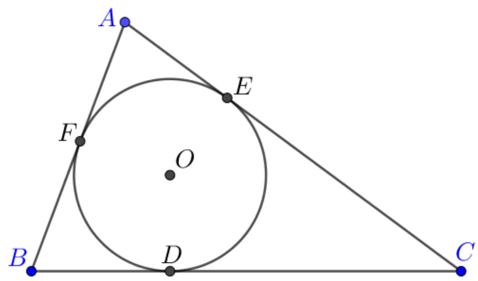


圖 5-2-2

三、 分割點數量與分割線段長

首先，我們想探討在取一、二、三個分割點時，不同三角形的分割線段長之比，以下就正三角形、等腰三角形、直角三角形依序分析，並將結果以「**連比**」的方式呈現。

(一) 取一個分割點（二個分割圓）

我們先假設在三角形內可放入兩個相切於一點的分割圓，其分別與各邊皆相切，研究時將情況分成如下二種：

1. **正三角形與等腰三角形**

   顯而易知，正三角形因為左、右對稱的關係，所以分割點應在「底邊的中點」，而等腰三角形依相同的道理，分割點也必在底邊的中點，如圖 5-3-1。

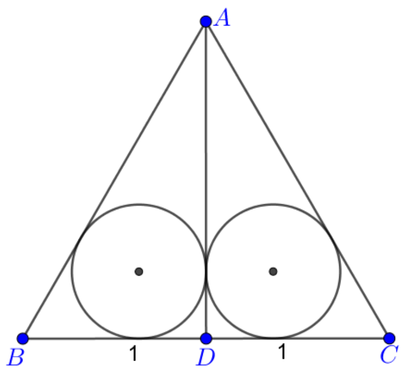


圖 5-3-1

結論一：當 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，若於底邊 $\overline{BC}$ 上取一分割點 D 點，則 D 點恰落在「$\overline{BC}$ 的中點」上，且分割線段長比為：

$$\overline{BD}:\overline{DC}=1:1$$

2. 任意三角形

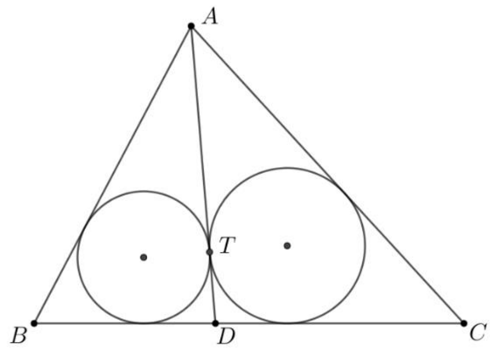


圖 5-3-2

首先運用原題的假設，三角形三點依序為 A、B、C，我們以 $\overline{BC}$ 為底邊說明，設 $\overline{BC}$ 邊上的分割點為 D、兩分割圓相切於 T 點，如圖 5-3-2。

接著，運用定理二便可得：

$$\overline{AT}=\frac{\overline{AB}+\overline{AD}-\overline{BD}}{2}=\frac{\overline{AD}+\overline{AC}-\overline{DC}}{2}$$

再化簡可得：

$$\overline{AB}-\overline{BD}=\overline{AC}-\overline{DC}=\overline{AC}-\left(\overline{BC}-\overline{BD}\right)$$

$$\Rightarrow 2\overline{BD}=\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{AC}\Rightarrow\overline{BD}=\frac{\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{AC}}{2}$$

令 $\overline{AB}=c$、$\overline{AC}=b$、$\overline{BC}=a$，代入前式得：

$$\overline{BD}:\overline{DC}=\frac{c+a-b}{2}:\left(a-\frac{c+a-b}{2}\right)=(c+a-b):(b+a-c)$$

這表示 D 點所在位置即為原 $\triangle ABC$ 內切圓與 $\overline{BC}$ 的交點，這同樣適用於解釋正三角形與等腰三角形的狀況，其底邊分割點即為內切圓的切點，同時此結果即為本篇研究之原題的答案。

結論二：當 $\triangle ABC$ 為任意三角形時，令 $\overline{AB}=c$、$\overline{AC}=b$、$\overline{BC}=a$，若於底邊 $\overline{BC}$ 上取一分割點 D 點，則 D 點恰落在 $\triangle ABC$ 內切圓與 $\overline{BC}$ 之切點上，且分割線段長比為：

$$\overline{BD}:\overline{DC}=(c+a-b):(b+a-c)$$

(二) 取二個分割點（三個分割圓）

我們假設可在三角形內取二個分割點，使得分割出三個三角形的內切圓會兩兩相切，並分成以下二種情形討論，但因任意三角形的狀況較為特殊，所以我們會在後面另外說明。

1. 正三角形

令在正 $\triangle ABC$ 內有三個分割圓，分割點為 D_1、D_2，由於對稱的性質，可假設底邊的分割線段長分別為 a、b、a，則三角形邊長即為 $2a+b$，如圖 5-3-3。

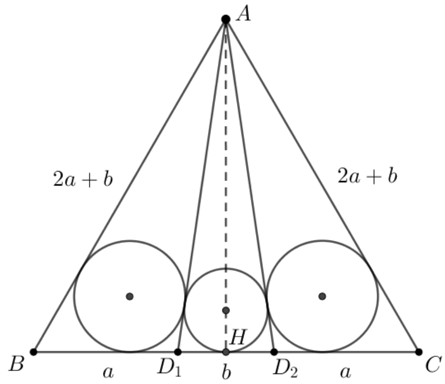


圖 5-3-3

首先由定理二可得：

$$\frac{\overline{AB}+\overline{AD_1}-\overline{BD_1}}{2}=\frac{\overline{AD_1}+\overline{AD_2}-\overline{D_1D_2}}{2}=\frac{\overline{AD_2}+\overline{AC}-\overline{D_2C}}{2}$$

再代入 a、b 並化簡又可知：

$$\overline{AD_1}=\overline{AD_2}=a+2b$$

作 $\overline{BC}$ 上的高 $\overline{AH}$，然後由畢氏定理得出：

$$\overline{AB}^2-\overline{BH}^2=\overline{AD_1}^2-\overline{D_1H}^2 \Rightarrow (2a+b)^2-\left(a+\frac{b}{2}\right)^2=(a+2b)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

化簡此式即得：

$$2a=3b \Rightarrow a:b=3:2$$

故分割線段長比為：

$$\overline{BD_1}:\overline{D_1D_2}:\overline{AD_2}=a:b:a=3:2:3$$

結論三：當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，若於底邊 $\overline{BC}$ 上取二分割點 D_1、D_2 點，則分割線段長比為：

$$\overline{BD_1}:\overline{D_1D_2}:\overline{D_2C}=3:2:3$$

2. **等腰三角形**

令在等腰 $\triangle ABC$ 內有三個分割圓，分割點為 D_1、D_2，設兩腰長為 b，底邊為 a，且 $\overline{D_1D_2}=x$，如圖 5-3-4。

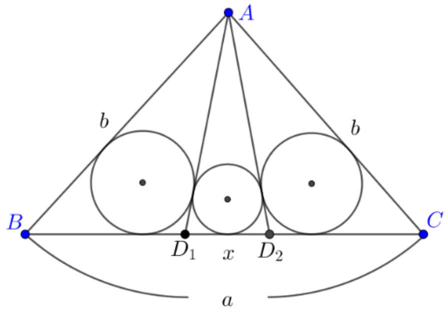


圖 5-3-4

可由畢氏定理得知：

$$\overline{AD_1}=\overline{AD_2}=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{4b^2-a^2+x^2}}{2}\ \ldots ①$$

由定理二知：

$$\frac{\overline{AD_1}+\overline{AD_2}-\overline{D_1D_2}}{2}=\frac{\overline{AD_2}+\overline{AC}-\overline{D_2C}}{2}$$

化簡得：

$$\overline{AD_1}-\overline{D_1D_2}=\overline{AC}-\overline{D_2C}\ \ldots ②$$

將 ①、$\overline{AC}=b$、$\overline{D_1D_2}=x$、$\overline{D_2C}=\frac{a-x}{2}$ 代入 ② 得：

$$\frac{\sqrt{4b^2-a^2+x^2}}{2}-x=b-\frac{a-x}{2}$$

將其平方移項可得：

$$4x^2+3(2b-a)x+a(a-2b)=0$$

使用一元二次方程式的公式解得：

$$x=\frac{-3(2b-a)\pm\sqrt{9(2b-a)^2-16a(a-2b)}}{8}$$

因 x 為負時不合，故得：

$$x=\frac{3a-6b+\sqrt{36b^2-4ab-7a^2}}{8}$$

令 $W=\sqrt{36b^2-4ab-7a^2}$ 化簡得底邊分割線段長比為：

（算式見下頁）

$$\overline{BD_1}:\overline{D_1D_2}:\overline{D_2C}=\frac{a-x}{2}:x:\frac{a-x}{2}$$

$$=\frac{a-\left(\frac{3a-6b+W}{8}\right)}{2}:\left(\frac{3a-6b+6W}{8}\right):\frac{a-\left(\frac{3a-6b+W}{8}\right)}{2}$$

$$=(5a+6b-W):(6a-12b+2W):(5a+6b-W)$$

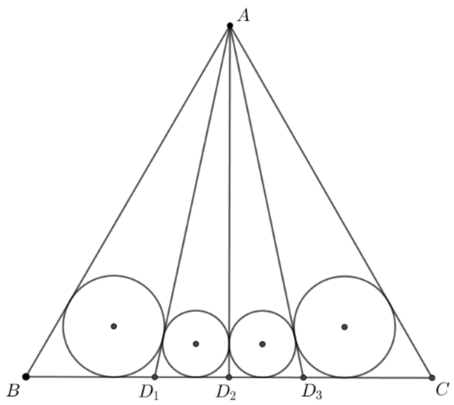
> **結論四**：當 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，令 $\overline{AB}=\overline{AC}=b$、$\overline{BC}=a$，若於底邊 $\overline{BC}$ 上取二分割點 D_1,D_2 點，並令 $W=\sqrt{36b^2-4ab-7a^2}$，則分割線段長比為：
>
> $$\overline{BD_1}:\overline{D_1D_2}:\overline{D_2C}=(5a+6b-W):(6a-12b+2W):(5a+6b-W)$$

(三) 取三個分割點（四個分割圓）

同樣先假設可在三角形內找出三個分割點的位置，使得所有相鄰的內切圓都相切，探討時我們將情況分成以下兩種，而任意三角形的情況如同取二分割點，將放在後面一同說明。

1. 正三角形

由於正三角形的對稱性質，可將之先以對稱軸分割為兩個全等的直角三角形，而需要處理的就變為直角三角形取一分割點的問題，如圖 5-3-5，我們可以只探討正 $\triangle ABC$ 的 $\triangle ABD_2$ 部分。



如圖 5-3-5

因 $\triangle ABD_2$ 為 $30°-60°-90°$ 的直角三角形，故可得 $\overline{BD_2}:\overline{AD_2}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$，再由定理二得：

$$\overline{BD_1}:\overline{D_1D_2}=\left(\frac{\overline{AB}+\overline{BD_2}-\overline{D_2A}}{2}\right):\left(\frac{\overline{BD_2}+\overline{D_2A}-\overline{AB}}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{2+1-\sqrt{3}}{2}\right):\left(\frac{1+\sqrt{3}-2}{2}\right)=\sqrt{3}:1$$

同理可得 $\overline{CD_3}:\overline{D_2D_3}=\sqrt{3}$：1，兩者合併可知當取三個分割點時，正三角形底邊的分割線段比為：

$$\overline{BD_1}:\overline{D_1D_2}:\overline{D_2D_3}:\overline{D_3C}=\sqrt{3}:1:1:\sqrt{3}$$

> 結論五：當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，若於底邊 $\overline{BC}$ 上取三分割點 D_1,D_2,D_3 點，則分割線段長比為：
>
> $$\overline{BD_1}:\overline{D_1D_2}:\overline{D_2D_3}:\overline{D_3C}=\sqrt{3}:1:1:\sqrt{3}$$

2. **等腰三角形**

令三角形 $\triangle ABC$ 內有 4 個分割圓，分割點為 D_1、D_2、D_3，設兩腰長為 b，底邊為 a，如圖 5-3-6，由畢氏定理可知：

$$\overline{AD_2}=\sqrt{\overline{AB}^2-\left(\overline{BD_2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$$

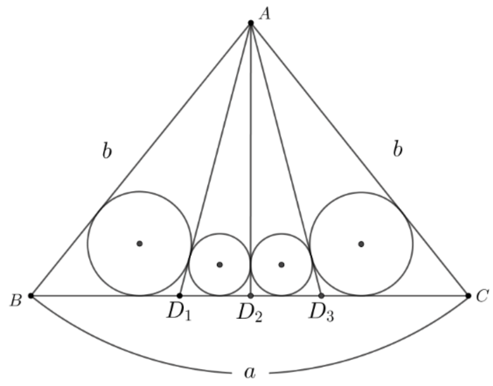


圖 5-3-6

再藉由定理二可得：

$$\overline{BD_1}=\overline{D_3C}=\frac{b+\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}}{2}=\frac{2b+a-\sqrt{4b^2-a^2}}{4}$$

$$\Rightarrow\overline{D_1D_2}=\overline{D_2D_3}=\frac{\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}-b+\frac{a}{2}}{2}=\frac{\sqrt{4b^2-a^2}-2b+a}{4}$$

化簡後得：

$$\overline{BD_1}:\overline{D_1D_2}:\overline{D_2D_3}:\overline{D_3C}=\left(\sqrt{4b^2-a^2}\right):(2b-a):(2b-a):\left(\sqrt{4b^2-a^2}\right)$$

$$=\sqrt{2b+a}:\sqrt{2b-a}:\sqrt{2b-a}:\sqrt{2b+a}$$

> 結論六：當 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，令 $\overline{AB}=\overline{AC}=b$、$\overline{BC}=a$，若於底邊 $\overline{BC}$ 上取三分割點D_1,D_2,D_3 點，則分割線段長比為：
>
> $$\overline{BD_1}:\overline{D_1D_2}:\overline{D_2D_3}:\overline{D_3C}=\sqrt{2b+a}:\sqrt{2b-a}:\sqrt{2b-a}:\sqrt{2b+a}$$

(四) 任意三角形取二、三個分割點（三、四個分割圓）

運用與前述類似的方法，我們導出了含有三、四個分割圓的任意三角形分割線段長的關係式，但由於式子的化簡難度高，我們並未在此著墨太多，而是在本篇研究後半段將三角形頂點坐標化後繼續討論。

1. **任意三角形取二個分割點**

如圖 5-3-7，由定理二得出：

$$\overline{AB}-\overline{BD_1}=\overline{AD_2}-\overline{D_1D_2}\ \dots\ ①$$

$$\overline{AD_1}-\overline{D_1D_2}=\overline{AC}-\overline{D_2C}\ \dots\ ②$$

利用 ①＋② 並移項化簡得：

$$\overline{AB}+\overline{D_2C}+\overline{AD_1}=\overline{AD_2}+\overline{BD_1}+\overline{AC}$$

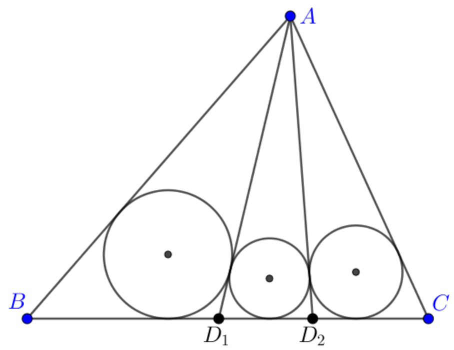


圖 5-3-7

2. **任意三角形取三個分割點**

如圖 5-3-8，由定理二得出：

$$\overline{AB}+\overline{AD_1}+\overline{D_2D_3}$$

$$=\overline{AD_2}+\overline{AD_3}+\overline{BD_1}\ \dots\ ①$$

$$\overline{AD_1}+\overline{AD_2}+\overline{D_3C}$$

$$=\overline{AD_3}+\overline{AC}+\overline{D_1D_2}\ \dots\ ②$$

利用 ①－② 並移項化簡得：

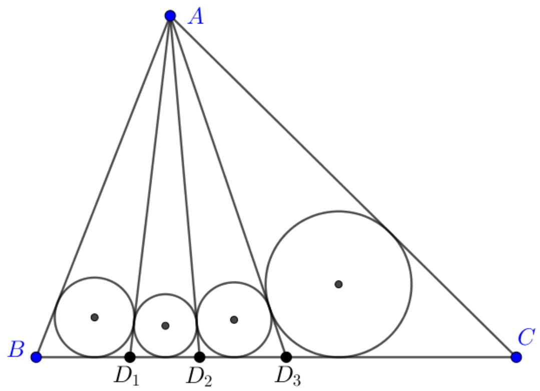


圖 5-3-8

$$\overline{AB}+\overline{D_1D_3}+\overline{AC}=2\overline{AD_2}+\overline{BD_1}+\overline{D_3C}$$

由於在取四個以上分割點時，列式後的計算與化簡將會變得複雜且難以化簡，因此我們選擇略過這部份的說明，直接進一步介紹當任意三角形取 n 個分割點時的情形，首先做的便是證明分割點的存在性與唯一性，為方便往後的探討我們將頂點坐標化，再嘗試尋找其擁有的幾何性質。

四、 分割點的存在性與唯一性

在 $\triangle ABC$ 裡，設在 $\overline{BC}$ 上有 n 個分割點 D_1、D_2、⋯、D_n，如圖 5-4-1，使得 $\triangle ABD_1$ 的內切圓 O_1 切 $\overline{AB}$、$\overline{AD_1}$ 於 T_B、T_1，$\triangle AD_1D_2$ 的內切圓 O_2 切 $\overline{AD_1}$、$\overline{AD_2}$ 於 T_1、T_2，依此類推，則 $\triangle AD_nC$ 的內切圓 O_{n+1} 切 $\overline{AD_n}$、$\overline{AC}$ 於 T_n、T_C。

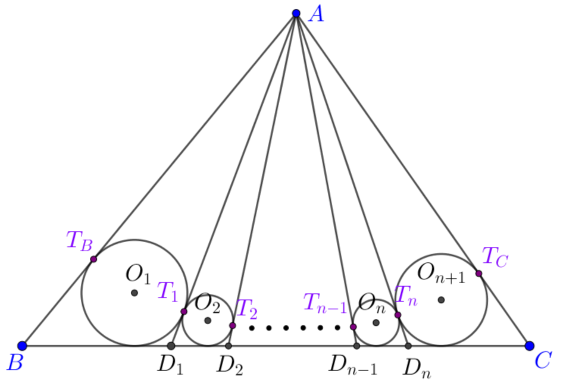


圖 5-4-1

我們透過固定 $\overline{AB}$、$\angle ABC$，探討 $\overline{BC}$ 的大小變化對分切點 T_B、T_1、T_2、$\cdots T_n$、T_C 的位移影響，再由此說明任意三角形中取任意數量分割點的方式皆是存在且唯一的。

(一) 當無分割點時，觀察內切圓的切點位置。

設 C' 在 $\overrightarrow{BC}$ 上，且 $\overline{BC} < \overline{BC'}$，觀察 $\triangle ABC$、$\triangle ABC'$ 的內切圓，前者切 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 T_B、T_C，後者切 $\overline{AB}$、$\overline{AC'}$ 於 $T_B{}'$、$T_C{}'$，如圖 5-4-2。

由 $\overline{AC'} - \overline{AC} < \overline{CC'}$ 得：

$$
\begin{aligned}
&\overline{AT_B{}'} - \overline{AT_B} \\
&= \frac{\overline{AB} + \overline{AC'} - \overline{BC'}}{2} - \frac{\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}}{2} \\
&= \frac{\left(\overline{AC'} - \overline{AC}\right) - \left(\overline{BC'} - \overline{BC}\right)}{2} \\
&= \frac{\left(\overline{AC'} - \overline{AC}\right) - \overline{CC'}}{2} < 0
\end{aligned}
$$

故 $\overline{AT_B} > \overline{AT_B{}'}$

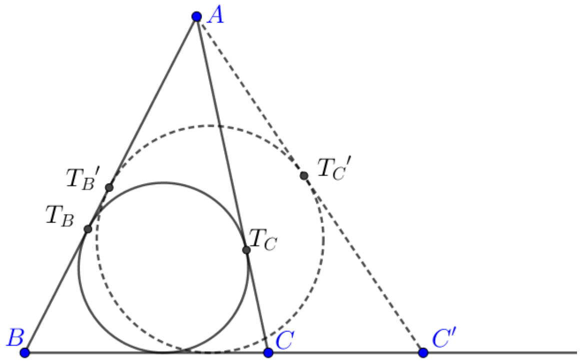


圖 5-4-2

(二) 當取一個分割點時，觀察分割圓的切點位置。

在 $\triangle ABC$、$\triangle ABC'$ 各取一個分割點 D_1、$D_1{}'$，如下頁圖 5-4-3，由結論二可知這二點分別為 $\triangle ABC$、$\triangle ABC'$ 內切圓與底邊的切點，此時 $\overline{BD_1} < \overline{BD_1{}'}$。

設 $\triangle ABD_1$、$\triangle ABD_1'$ 內切圓分別切 $\overline{AB}$ 於 T_B、T_B'，由（一）可推得 $\overline{AT_B} > \overline{AT_B'}$，又由定理一可知：$\overline{AT_B'} - \overline{AT_B} = \overline{AT_1'} - \overline{AT_1} = \overline{AT_C'} - \overline{AT_C}$，因此 $\overline{AT_1} > \overline{AT_1'}$ 且 $\overline{AT_C} > \overline{AT_C'}$。

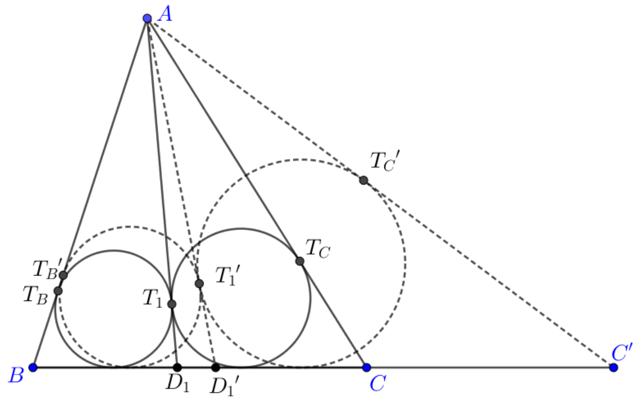


圖 5-4-3

(三) 當取 n 個分割點時，觀察分割圓的切點位置。

由（一）、（二）可類推如下，若在 $\triangle ABC$、$\triangle ABC'$ 各取 n 個分割點，令分切點分別為 T_B、T_1、T_2、⋯、T_n、T_C 與 T_B'、T_1'、T_2'、⋯、T_n'、T_C'，則 $\overline{AT_B'} - \overline{AT_B} = \overline{AT_1'} - \overline{AT_1} = \cdots = \overline{AT_n'} - \overline{AT_n} = \overline{AT_C'} - \overline{AT_C} < 0$，即當 $\triangle ABC$ 的底邊 $\overline{BC}$ 愈長，則 $\overline{AT_B}$、$\overline{AT_1}$、$\overline{AT_2}$、⋯、$\overline{AT_n}$、$\overline{AT_C}$ 愈短。

(四) 探討取 n 個分割點的存在性與唯一性

首先在 $\triangle ABC$ 的底邊 $\overline{BC}$ 上取一點 D_n，並假設在 $\triangle ABD_n$ 的底邊 $\overline{BD_n}$ 可取 $n-1$ 個分割點 D_1、D_2、⋯、D_{n-1}，此時我們只需說明 D_n 恰只在特定一位置上能使得 $\triangle AD_{n-1}D_n$、$\triangle AD_nC$ 的內切圓在 $\overline{AD_n}$ 上的切點 T_n、T_n' 兩者重合，即 $\overline{AT_n} = \overline{AT_n'}$。

1. **當 D_n 趨近 B 點：**

此時 $\overline{BD_n}$ 趨近於 0，使得 $\triangle AD_{n-1}D_n$ 的內切圓 O_n 在 $\overline{AD_n}$ 上的切點 T_n 趨近 D_n，即 $\overline{AT_n}$ 趨近 $\overline{AD_n}$，又 $\overline{AD_n}$ 趨近 $\overline{AB}$，故 $\overline{AT_n}$ 趨近 $\overline{AB}$，如圖 5-4-4，另設 $\triangle AD_nC$ 的內切圓 O_{n+1} 在 $\overline{AD_n}$ 上的切點為 T_n'，則 $\overline{AT_n'}$ 趨近於 $\frac{\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}}{2}$。

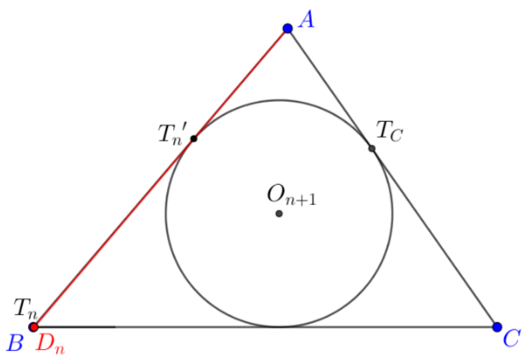


圖 5-4-4

2. **當 D_n 趨近 C 點：**

此時 $\overline{D_nC}$ 趨近於 0，使得 $\triangle AD_nC$ 的內切圓 O_{n+1} 在 $\overline{AD_n}$ 上的切點 $T_n{}'$ 趨近 C，即 $\overline{AT_n{}'}$ 趨近 $\overline{AC}$，如圖 5-4-5，而 $\overline{AT_n}$ 的長度則介於 $\frac{\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}}{2}$ 與 $\overline{AC}$ 之間。

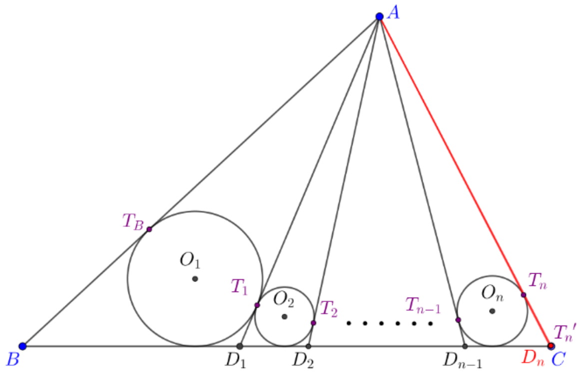


圖 5-4-5

3. **移動 $\overline{BC}$ 上的 D_n**

由前述可知，當 D_n 由 B 點向 C 點移動，$\overline{AT_n}$ 會隨 $\overline{BD_n}$ 增加而減少，$\overline{AT_n{}'}$ 則會隨 $\overline{BD_n}$ 增加而增加，又 $\frac{\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}}{2} < \overline{AT_n{}'} < \overline{AC}$，且 $\overline{AT_n}$ 的上界為 $\overline{AB}$、下界大於 $\frac{\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}}{2}$，其中 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的大小關係未定，如圖 5-4-6，因此必存在唯一的 D_n 使得 $\overline{AT_n} = \overline{AT_n{}'}$，如圖 5-4-7，此即可說明取任意數量分割點的方式都是存在且唯一的。

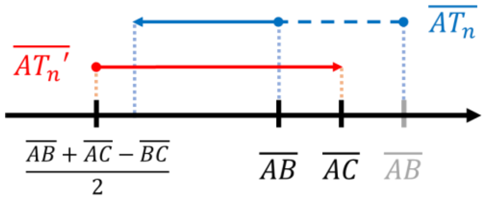


圖 5-4-6

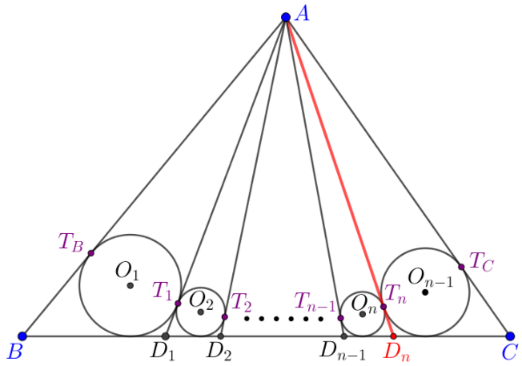


圖 5-4-7

五、 坐標化後的分割圓性質

為了進行更深入的研究分析，我們有必要將 $\triangle ABC$ 坐標化後再來討論，首先將 A 點置於直角坐標平面的原點 $O(0,0)$ 上，且使得 $\overline{BC}$ 與 x 軸平行，並改稱此三角形為 $\triangle OBC$，設其底邊 $\overline{BC}$ 上的高為 h。

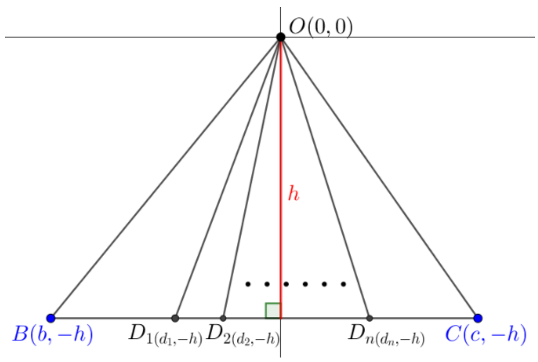


圖 5-5-1

此時底邊端點坐標為 $B(b,-h)$、$C(c,-h)$，如圖 5-5-1，當取 n 個分割點時，其坐標依序為 $D_1(d_1,-h)$、$D_2(d_2,-h)$、$D_3(d_3,-h)$、⋯、$D_n(d_n,-h)$。

(一) 分切點共圓

根據定理一，$\triangle OBC$ 的分切點 T_B、T_1、T_2、⋯、T_n、T_C 皆與原點 O 等距，故分切點 T_B、T_1、T_2、⋯、T_n、T_C 共圓，此圓我們稱「**切點圓**」，原點 O 為其圓心，如圖 5-5-2。

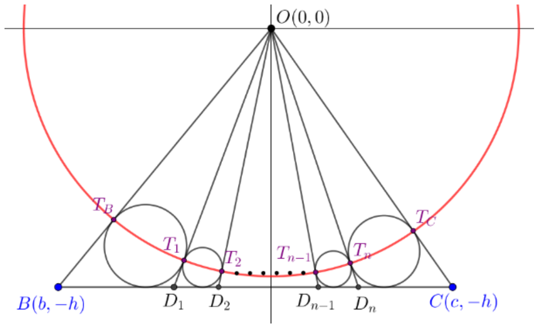


圖 5-5-2

性質一：任意三角形的所有分切點必共圓。

(二) 分割圓之圓心共拋物線

在 $\triangle OBC$ 中，取 n 個分割點，且分割圓之圓心為 $O_i(x_i, y_i)$、半徑為 $y_i - (-h) = y_i + h$，其中 $i \in \{1,2,\ldots,n,n+1\}$，如圖 5-5-3。

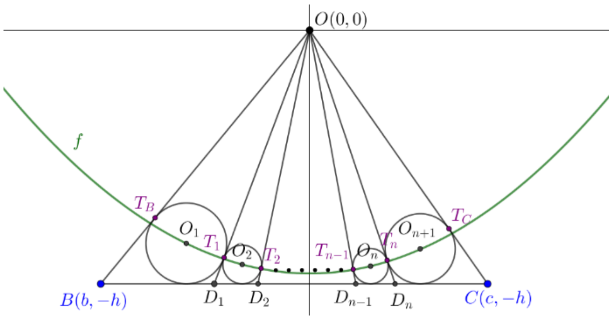


圖 5-5-3

根據性質一可知：

$$\overline{OT_B} = \overline{OT_1} = \overline{OT_2} = \cdots = \overline{OT_n} = \overline{OT_C} = R \ \text{(切點圓半徑)}$$

假設任一分割圓之圓心為 (x, y)，關係式如下：

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 - (y+h)^2}$$

整理後得到：

$$R^2 = x^2 + y^2 - (y^2 + 2hy + h^2)$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{1}{2h}\right)x^2 - \frac{R^2 + h^2}{2h}$$

由上可知分割圓之圓心皆會落在此二次函數上，因為 $h > 0$，所以更準確地說它是一條開口向上的拋物線，又因此式中缺少 x 項，可知其頂點、焦點皆位在 y 軸上，故求其與 y 軸交點即可得頂點坐標為：

$$\left(0, -\frac{R^2 + h^2}{2h}\right)$$

再透過與拋物線標準式 $x^2 = 4cy$ 作係數比較，其中 c 為焦距，我們可知：

$$\frac{1}{2h} = \frac{1}{4c} \Rightarrow c = \frac{h}{2}$$

由頂點座標及焦距可得其焦點坐標為：

$$\left(0, -\frac{R^2 + h^2}{2h} + \frac{h}{2}\right) = \left(0, -\frac{R^2}{2h}\right)$$

同樣由頂點座標及焦距可再得準線方程式為：

$$y = -\frac{R^2 + h^2}{2h} - \frac{h}{2} \Rightarrow y = -\frac{R^2 + 2h^2}{2h}$$

性質二：任意三角形的分割圓之圓心必共拋物線。

若 $\triangle OBC$ 的高為 h，且公切圓半徑為 R，則：

1. 分割圓之圓心所共拋物線為 $y = \left(\frac{1}{2h}\right)x^2 - \frac{R^2+h^2}{2h}$。
2. 此拋物線的頂點為 $\left(0, -\frac{R^2+h^2}{2h}\right)$、焦點為 $\left(0, -\frac{R^2}{2h}\right)$。
3. 此拋物線的準線方程式為 $y = -\frac{R^2+2h^2}{2h}$。

(三) 分割圓存在公切圓且圓心為拋物線焦點

在得知所有分割圓圓心會通過同一條拋物線後，可以推導出一個與所有分割圓都相切的公切圓，如圖 5-5-4。令拋物線的準線為 L，且 $i \in \{1,2,\ldots,n,n+1\}$，由拋物線的定義可得：

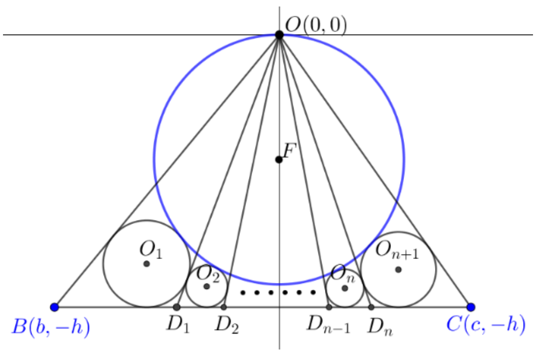


圖 5-5-4

$$\overline{FO_i} = d(O_i, L)$$

又 $\overline{FO_i} - r_{O_i} = d(\overline{BC}, L)$，其中 r_{O_i} 為圓 O_i 半徑，故存在一圓與所有分割圓相切，我們稱為「公切圓」，其圓心為拋物線焦點 F，半徑為 $d(\overline{BC}, L)$。

性質三：存在一圓與所有分割圓相切，且其圓心為拋物線焦點。

(四) 公切圓必過三角形的頂點 $\boldsymbol{O(0,0)}$

由性質二可知：

$$\overline{OF}=0-\left(-\frac{R^2}{2h}\right)=\frac{R^2}{2h}$$

再由性質三知公切圓 F 的半徑為 $d(\overline{BC},L)$，可得：

$$d(\overline{BC},L)=-h-\left(-\frac{R^2+2h^2}{2h}\right)=\frac{R^2}{2h}=\overline{OF}$$

因此公切圓必過三角形的頂點 O（原點）。

性質四：公切圓必過三角形的頂點 $O(0,0)$，且其半徑為 $\frac{R^2}{2h}$。

(五) 作雙曲線之漸近線必通過分割點且垂直底邊

當以相鄰兩分割圓的圓心為焦點，過此兩圓間的分切點作雙曲線，發現其漸近線會通過兩分割圓間的分割點且垂直底邊，為方便證明我們將分切點平移至原點 $O(0,0)$，並以原點為中心旋轉兩分割圓，使得兩圓心落在 x 軸上，如圖 5-5-5。假設兩分割圓半徑分別為 r_1、r_2，其中 $r_1>r_2$，則兩圓的圓心分別為 $O_1(-r_1,\ 0)$、$O_2(r_2,\ 0)$。

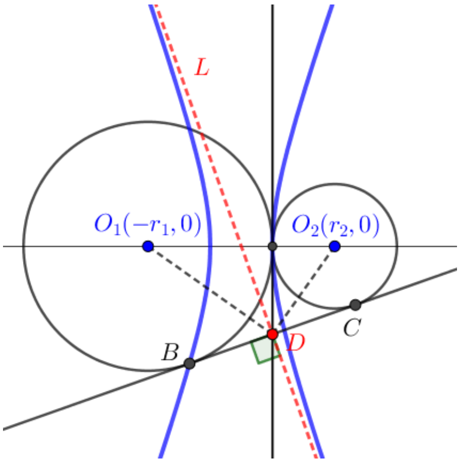


圖 5-5-5

令 D 點為兩分割圓間的分割點，則其必落在兩分割圓的內公切線與下側外公切線 $\overleftrightarrow{BC}$（原三角形底邊）的交點上，此時連接 $\overline{O_1D}$、$\overline{O_2D}$ 可發現其分別為 $\angle BDO$、$\angle CDO$ 的角平分線，故 $\overline{O_1D}\perp\overline{O_2D}$，再由母子相似性質，可得 $\overline{OD}=\sqrt{r_1r_2}$，即 $D(0,-\sqrt{r_1r_2})$，接著依雙曲線定義可得其標準式為：

$$\frac{\left(x-\frac{(-r_1)+r_2}{2}\right)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{\left(x+\frac{r_1-r_2}{2}\right)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

再由標準式得其漸近線方程式為：

$$b\left(x+\frac{r_1-r_2}{2}\right)\pm ay=0$$

其中貫軸 $2a = r_1 - r_2$、焦距 $2c = r_1 + r_2$，可推得共軛軸為：

$$2b = 2\sqrt{c^2 - a^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

整理可知 $a = \frac{r_1 - r_2}{2}$、$b = \sqrt{r_1 r_2}$、$c = \frac{r_1 + r_2}{2}$，並將之代入漸近線方程式得：

$$\sqrt{r_1 r_2}\left(x + \frac{r_1 - r_2}{2}\right) \pm \left(\frac{r_1 - r_2}{2}\right) y = 0$$

$$\Rightarrow 2x\sqrt{r_1 r_2} + (r_1 - r_2)\sqrt{r_1 r_2} \pm (r_1 - r_2) y = 0$$

此時取漸近線斜率為負者，將 $x = 0$ 代入求其與 y 軸的交點坐標：

$$2x\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_1 r_2}(r_1 - r_2) + (r_1 - r_2) y = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{r_1 r_2}(r_1 - r_2) + (r_1 - r_2) y = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{r_1 r_2}$$

由上得交點坐標為 $(0, -\sqrt{r_1 r_2})$，其恰與分割點 D 重合，意即「雙曲線漸近線必通過分割點」證明完成，接下來將說明漸近線必與 $\overleftrightarrow{BC}$（原三角形底邊）垂直，首先計算 $\overleftrightarrow{BC}$ 的斜率：

$$m_{BC} = \frac{r_1 - r_2}{\overline{BC}} = \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}} = \frac{r_1 - r_2}{2\sqrt{r_1 r_2}}$$

又由雙曲線漸近線方程式得其斜率：

$$m_L = -\frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2}$$

將兩直線斜率相乘得：

$$m_{BC} \times m_L = \frac{r_1 + r_2}{2\sqrt{r_1 r_2}} \times \left(-\frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2}\right) = -1$$

故雙曲線漸近線與 $\overleftrightarrow{BC}$ 垂直，即「漸近線與原三角形底邊垂直」。

性質五：以相鄰分割圓的圓心為焦點，作過分切點之雙曲線，其漸近線必會通過分割點且垂直底邊。

六、 分割點的迭代公式及性質

(一) 分割點的迭代公式

1. **已知分割點推論接續分割點坐標**

在 $\triangle OBC$ 的 $\overline{BC}$ 邊上取 n 個分割點，為了能藉其中任兩個相鄰的分割點 $D_{k-2}(d_{k-2},\ -h)$、$D_{k-1}(d_{k-1}, -h)$ 推出接續分割點的坐標，如圖 5-6-1，我們試著推導以下公式。

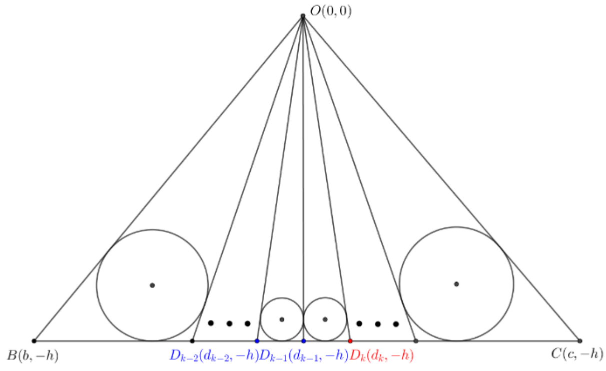


圖 5-6-1

首先設接續分割點為 $D_k(d_k,\ -h)$，由定理二得：

$$\overline{OD_{k-1}}+\overline{OD_{k-2}}-\overline{D_{k-1}D_{k-2}}=\overline{OD_{k-1}}+\overline{OD_k}-\overline{D_{k-1}D_k}$$

$$\Rightarrow \overline{OD_{k-2}}-\overline{D_{k-1}D_{k-2}}=\overline{OD_k}-\overline{D_{k-1}D_k}$$

利用坐標計算各邊的長度後代入前式得：

$$\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}-(d_{k-1}-d_{k-2})=\sqrt{{d_k}^2+h^2}-(d_k-d_{k-1})$$

$$\Rightarrow \sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}+d_{k-2}-2d_{k-1}+d_k=\sqrt{{d_k}^2+h^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}+d_{k-2}-2d_{k-1}+d_k=\sqrt{{d_k}^2+h^2}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}+d_{k-2}-2d_{k-1}\right)^2+2d_k\left(\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}+d_{k-2}-2d_{k-1}\right)+{d_k}^2={d_k}^2+h^2$$

$$\Rightarrow {d_{k-2}}^2+h^2+{d_{k-2}}^2+4{d_{k-1}}^2+2d_{k-2}\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}-4c\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}$$

$$-4d_{k-2}d_{k-1}+2d_k\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}+2d_{k-2}d_k-4d_{k-1}x=h^2$$

$$\Rightarrow 2{d_{k-2}}^2-4d_{k-2}d_{k-1}+4{d_{k-1}}^2+2d_{k-2}\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}-4d_{k-1}\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}$$

$$=-2d_k\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}-2d_{k-2}d_k+4d_{k-1}d_k$$

$$\Rightarrow {d_{k-2}}^2-2d_{k-2}d_{k-1}+2{d_{k-1}}^2+d_{k-2}\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}-2d_{k-1}\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}$$

$$=-d_k\left(\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}+d_{k-2}-2d_{k-1}\right)$$

$$\Rightarrow d_k=\frac{-{d_{k-2}}^2+2d_{k-2}d_{k-1}-2{d_{k-1}}^2-d_{k-2}\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}+2d_{k-1}\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}}{\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}+d_{k-2}-2d_{k-1}}$$

$$=\frac{2{d_{k-1}}^2-2d_{k-2}d_{k-1}+(2d_{k-1}-d_{k-2})\left(\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}+d_{k-2}-2d_{k-1}\right)}{\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}+d_{k-2}-2d_{k-1}}$$

$$=(2d_{k-1}-d_{k-2})+\frac{2d_{k-1}(d_{k-1}-d_{k-2})}{\sqrt{{d_{k-2}}^2+h^2}+d_{k-2}-2d_{k-1}}$$

公式一：已知 $\triangle OBC$ 的高為 h，若 $D_{k-2}(d_{k-2},-h)$、$D_{k-1}(d_{k-1},-h)$ 為其相鄰兩分割點，則接續分割點為 $D_k(f(d_{k-2},d_{k-1}),-h)$，其中：

$$f(x,y)=(2y-x)+\frac{2y(y-x)}{\sqrt{x^2+h^2}+x-2y}$$

2. 已知兩側分割點推論其中間分割點坐標

公式一採用的是由已知前兩分割點推論接續分割點，而此部分則希望由已知兩側分割點推論其中間分割點，承先前結論二的內容我們直接以在 $\triangle OBC$ 的底邊上取一分割點 D 的情況作說明。

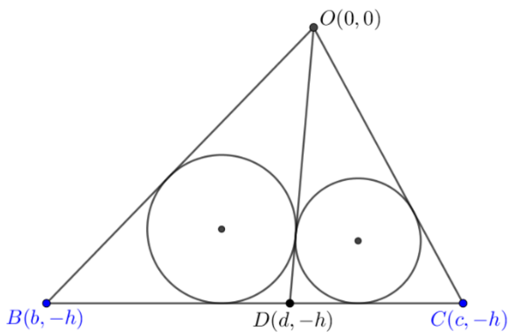


圖 5-6-2

令 $\triangle OBC$ 底邊端點坐標為 $B(b,-h)$、$C(c,-h)$，而分割點為 $D(d,\ -h)$，如圖 5-6-2，接著利用定理二可得如下：

$$\overline{OB}-\overline{BD}=\overline{OC}-\overline{CD}$$

$$\sqrt{b^2+h^2}-(d-b)=\sqrt{c^2+h^2}-(c-d)$$

$$2d=\sqrt{b^2+h^2}-\sqrt{c^2+h^2}+b+c$$

$$d=\frac{\sqrt{b^2+h^2}-\sqrt{c^2+h^2}+b+c}{2}$$

將上述 B、C 替換為 $D_{k-1}(d_{k-1},-h)$、$D_{k+1}(d_{k+1},-h)$，並寫為公式二。

公式二：已知 $\triangle OBC$ 的高為 h，若 $D_{k-1}(d_{k-1},-h)$、D_k、$D_{k+1}(d_{k+1},-h)$ 為其連續三分割點，則 D_k 坐標為 $(g(d_{k-1},d_{k+1}),-h)$，其中：

$$g(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+h^2}-\sqrt{y^2+h^2}+x+y}{2}$$

(二) 藉迭代公式推導之性質

1. 任意三角形取二個分割點的性質

當將二分割點的坐標代入 $g(x,y)$ 時，我們偶然間發現一特殊情形，利用 d_1 與 d_2 之和相當於 $g(b,d_2)$ 與 $g(d_1,c)$ 之和，說明如下：

$$\begin{aligned} d_1+d_2&=g(b,d_2)+g(d_1,c)\\ &=\frac{\sqrt{b^2+h^2}-\sqrt{d_2^2+h^2}+b+d_2}{2}+\frac{\sqrt{d_1^2+h^2}-\sqrt{c^2+h^2}+d_1+c}{2}\\ &=\frac{\sqrt{b^2+h^2}-\sqrt{c^2+h^2}+b+c}{2}+\frac{\sqrt{d_1^2+h^2}-\sqrt{d_2^2+h^2}+d_1+d_2}{2}\\ &=g(b,c)+g(d_1,d_2)\end{aligned}$$

此結果代表若令分割點 D_1、D_2 的中點為 M，且 $\triangle OBC$ 內切圓與 $\overline{BC}$ 交點為 P、第二分割圓與 $\overline{BC}$ 交點為 Q，則 $\overline{PQ}$ 的中點與 M 重合，如圖 5-6-3。

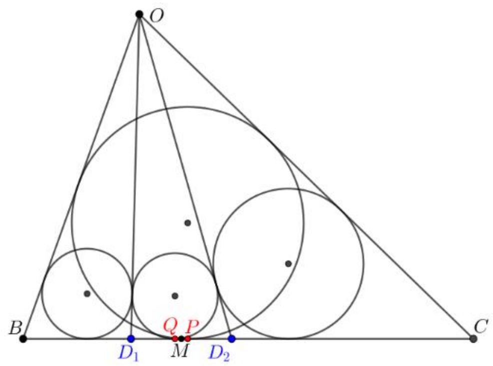


圖 5-6-3

性質六：當任意三角形底邊取二分割點 D_1、D_2，並令其內切圓、第二分割圓分別與底邊切於 P、Q 兩點，則 $\overline{D_1D_2}$ 中點與 $\overline{PQ}$ 中點重合。

2. 任意三角形取三個分割點的性質

當將三分割點的坐標代入 $g(x,y)$ 時，再次發生類似情形，利用 d_1 與 d_3 之和相當於 $g(b,d_2)$ 與 $g(d_2,c)$ 之和，說明如下：

（算式見下頁）

$$d_1+d_3=g(b,d_2)+g(d_2,c)$$
$$=\frac{\sqrt{b^2+h^2}-\sqrt{d_2^2+h^2}+b+d_2}{2}+\frac{\sqrt{d_2^2+h^2}-\sqrt{c^2+h^2}+d_2+c}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{b^2+h^2}-\sqrt{c^2+h^2}+b+c}{2}+d_2$$
$$=g(b,c)+d_2$$

此結果代表若令分割點 D_1、D_3 的中點為 M，且 $\triangle OBC$ 內切圓與 $\overline{BC}$ 交點為 P，則 P 與分割點 D_2 的中點與 M 重合，如圖 5-6-4。

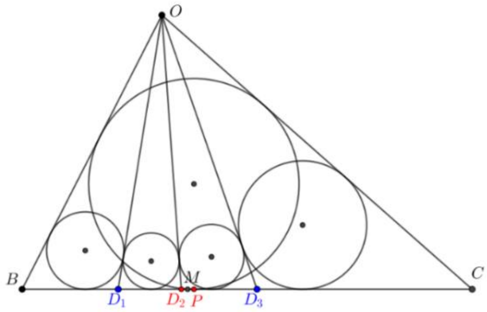


圖 5-6-4

> 性質七：當任意三角形底邊取三分割點 D_1、D_2、D_3，並令其內切圓與底邊切於 P 點，則 $\overline{D_1D_3}$ 中點與 $\overline{PD_2}$ 中點重合。

3. **任意三角形取 n 個分割點的性質**

我們將上述情況延伸至取 n 個分割點時，仍然保有如性質六、七的特性，說明如下：

$$g(b,d_{n-1})+g(d_{n-1},c)$$
$$=\frac{\sqrt{b^2+h^2}-\sqrt{{d_{n-1}}^2+h^2}+b+d_{n-1}}{2}+\frac{\sqrt{{d_{n-1}}^2+h^2}-\sqrt{c^2+h^2}+d_{n-1}+c}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{b^2+h^2}-\sqrt{c^2+h^2}+b+c}{2}+d_{n-1}=g(b,c)+d_{n-1}$$

此結果代表若令 $\triangle OBD_{n-1}$ 內切圓與 $\overline{BC}$ 的切點為 Q，且 Q 與分割點 D_n 的中點為 M、$\triangle OBC$ 內切圓與 $\overline{BC}$ 切點為 P，則 P 與分割點 D_{n-1} 的中點與 M 重合，如圖 5-6-5。

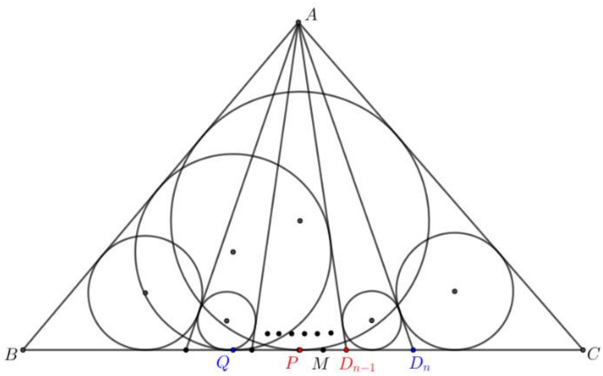


圖 5-6-5

(三) 取任意數量分割點時的分割點坐標

在給定 $\triangle OBC$ 的底邊上取 n 個分割點，其中底邊端點為 $B(b,-h)$、$C(c,-h)$，而分割點依序為 $D_1(d_1,-h)$、$D_2(d_2,-h)$、…、$D_n(d_n,-h)$，已知利用迭代公式 $f(x,y)$ 可由前兩分割點 $D_{k-2}(d_{k-2},-h)$、$D_{k-1}(d_{k-1},-h)$ 推導接續分割點 $D_k(d_k,-h)$ 的 x 坐標，即 $d_k=f(d_{k-2},d_{k-1})$，因此可自 $\triangle OBC$ 頂點 B 與分割點 D_1 開始，重複套用公式推導至分割點 D_n，最後寫回 $\triangle OBC$ 頂點 C，列式如下：

$$f(b,d_1)=d_2、f(d_1,d_2)=d_3、f(d_2,d_3)=d_4、、\cdots、f(d_{n-1},d_n)=c$$

$$\Rightarrow c=f(d_{n-1},d_n)=f\big(f(d_{n-3},d_{n-2}),f(d_{n-2},d_{n-1})\big)=\cdots=F(d_1)$$

上述算式中的 $F(x)$ 表示由 $f(x,y)$ 迭代出來的結果，因此透過求解 $c=F(d_1)$ 中的 d_1 即可得分割點 D_1 坐標，進而求出所有分割點坐標，也就是說到此我們找到了解決「<u>取任意數量分割點時，求所有分割點坐標</u>」的方式。

陸、 延伸討論

一、 分別與三角形兩邊相切的三個圓

本篇所探討的所有分割圓皆是切在底邊上，於是我們想如果在三角形內有三個兩兩相切的圓，且他們分別與三角形的兩邊相切，這樣的情況是否會存在？在網路上查詢相關文獻資料時，我們發現上述所講的狀況是在「**六圓定理**」中的一種特殊情形，同時也正是一個稱作「**馬爾法蒂問題**」的內容，其描述如下：

馬爾法蒂問題：
「在一個已知三角形內畫三個圓，每個圓與其他兩個圓以及三角形的兩邊相切。」

根據文獻資料，此問題的作圖方式如下：

(一) 作 $\triangle ABC$ 的三條角平分線，交點為內心 I，如圖 6-1-1。

(二) 作 $\triangle IAB$、$\triangle IBC$、$\triangle ICA$ 的內切圓，其兩兩之間已有一條內公切線，即 $\overline{IA}$、$\overline{IB}$、$\overline{IC}$，再分別作另一條內公切線 $\overline{OP}$、$\overline{QR}$、$\overline{ST}$，如圖 6-1-2。

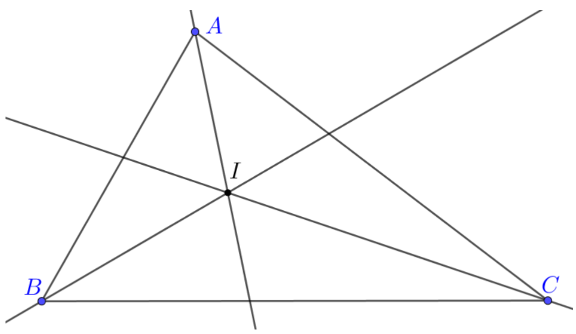


圖 6-1-1

(三) 令 $\overline{OP}$、$\overline{QR}$、$\overline{ST}$ 三線交於 U 點，如圖 6-1-3，作四邊形 $ARUS$、$BPUR$、$CSUP$ 的內切圓，則此三圓即為所求。

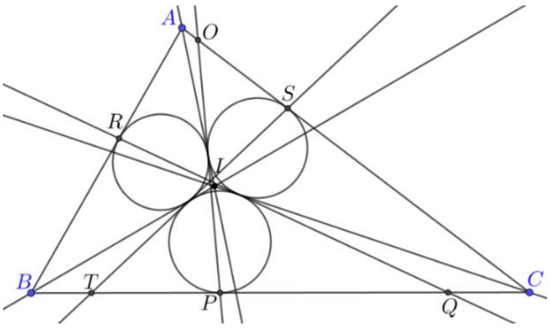


圖 6-1-2

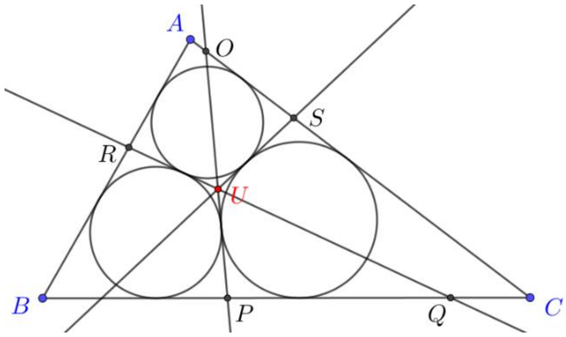


圖 6-1-3

二、　分別與多邊形單邊相切的多個圓

在討論完分別與三角形兩邊相切的三個圓後，我們也想試著討論另一種原題的變化型，即「如何在 $\triangle ABC$ 內部取一點 K，使得 $\triangle ABK$、$\triangle BCK$、$\triangle CAK$ 的內切圓兩兩相切」，如圖 6-2-1，我們稱滿足這樣條件的 K 點為「分割中心」，同樣的若繼續延伸此問題，想在任意多邊形內取分割中心 K 點，如圖 6-2-2，又要如何做呢？

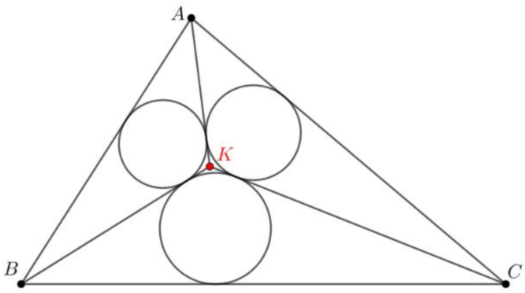


圖 6-2-1

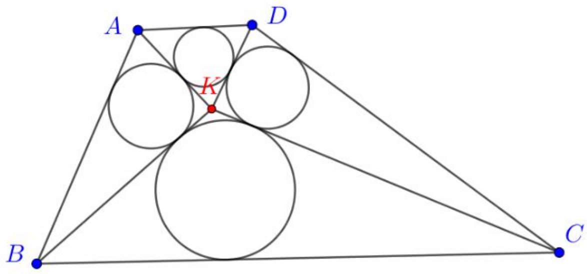


圖 6-2-2

(一) 三角形的分割中心

若在 $\triangle ABC$ 內取分割中心 K 點，且 T_A、T_B、T_C 為切點，如圖 6-2-3，則：

1. $\overline{KT_A} = \overline{KT_B} = \overline{KT_C}$

   利用定理一即可得此結果。

2. $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{KB} - \overline{KC}$

   由定理二可得：

$$\overline{AK} + \overline{KB} - \overline{AB} = \overline{AK} + \overline{KC} - \overline{AC}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} - \overline{AC} = \overline{KB} - \overline{KC}$$

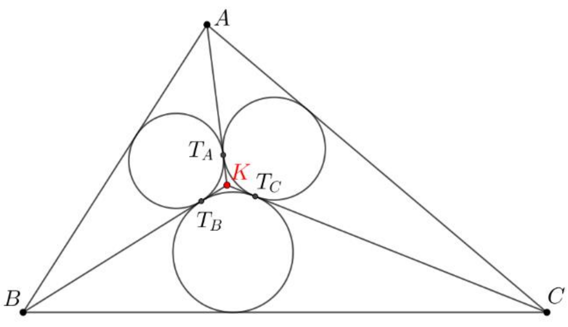


圖 6-2-3

3. **過 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的三條雙曲線交點為 $\boldsymbol{K}$ 點**

由 2. 知 $\overline{AB}-\overline{AC}=\overline{KB}-\overline{KC}$，再由定義可知以 B、C 為焦點且通過 A 的雙曲線，同時也會通過 K 點，同理以 A、B 為焦點且通過 C 的雙曲線，及以 A、C 為焦點且通過 B 的雙曲線也都會通過 K 點，如圖 6-2-4。

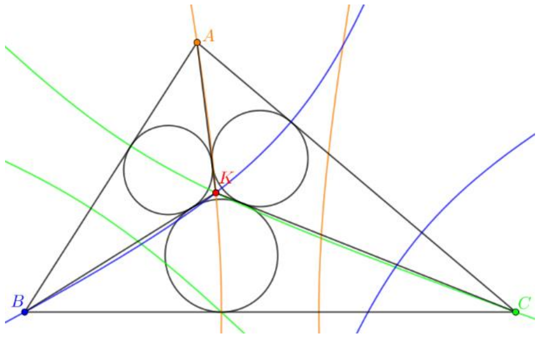


圖 6-2-4

(二) 四邊形的分割中心

若在四邊形 $ABCD$ 內取分割中心 K 點，且 T_A、T_B、T_C、T_D 為切點，如圖 6-2-5，則：

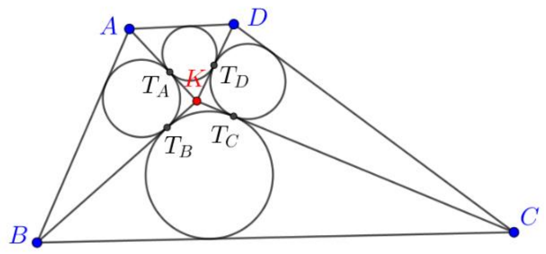


圖 6-2-5

1. $\boldsymbol{\overline{KT_A}=\overline{KT_B}=\overline{KT_C}=\overline{KT_D}}$

   利用定理一即可得此結果。

2. $\boldsymbol{\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}}$

   由定理二可得：

$$\overline{AB}+\overline{CD}=(\overline{AT_A}+\overline{BT_B})+(\overline{CT_C}+\overline{DT_D})$$

$$=(\overline{AT_A}+\overline{DT_D})+(\overline{BT_B}+\overline{CT_C})=\overline{AD}+\overline{BC}$$

3. **若四邊形 $\boldsymbol{ABCD}$ 存在內切圓，則分割中心 $\boldsymbol{K}$ 點也存在。**

   上述 2. 的敘述即為「四邊形的對邊和相等」，而這樣的四邊形正是擁有內切圓的四邊形，因此若四邊形的內切圓不存在，則其不存在分割中心，反之存在。

柒、 研究結論

一、 分割點數量與分割線段長的關係

設 $\triangle ABC$ 的 $\overline{BC}$ 為底邊，且 $\overline{AB}=c$、$\overline{AC}=b$、$\overline{BC}=a$。

(一) 取一個分割點（二個分割圓）

1. 正三角形與等腰三角形的分割線段長比為 $1:1$。
2. 任意三角形的分割線段長比為 $(c+a-b):(b+a-c)$。

(二) 取二個分割點（三個分割圓）

1. 正三角形的分割線段長比為 $3:2:3$。
2. 若令 $W=\sqrt{36b^2-4ab-7a^2}$，則等腰三角形的分割線段長比為：

$$(5a+6b-W):(6a-12b+2W):(5a+6b-W)$$

(三) 取三個分割點（四個分割圓）

1. 正三角形的分割線段長比為 $\sqrt{3}:1:1:\sqrt{3}$。
2. 等腰三角形的分割線段長比為 $\sqrt{2b+a}:\sqrt{2b-a}:\sqrt{2b-a}:\sqrt{2b+a}$。

二、 分割點的存在與唯一性

藉說明 $\triangle ABC$ 取 n 個分割點時，存在唯一的 D_n 使得 $\overline{AT_n}=\overline{AT_n{}'}$ 得證。

三、 坐標化後的分割圓性質

設 $\triangle OBC$ 的高為 h，且頂點坐標分別為 $O(0,0)$、$B(b,-h)$、$C(c,-h)$。

(一) 任意三角形的所有分切點必共圓，其圓心為 $O(0,0)$、半徑為 R。

(二) 任意三角形的分割圓之圓心必共拋物線 f，其焦點為 F、準線為 L：

$$f: y=\left(\frac{1}{2h}\right)x^2-\frac{R^2+h^2}{2h},\quad F\left(0,-\frac{R^2}{2h}\right),\quad L: y=-\frac{R^2+2h^2}{2h}$$

(三) 存在一圓與所有分割圓相切，且其圓心為拋物線焦點 F。

(四) 公切圓必過三角形的頂點 $O(0,0)$，且其半徑為 $\frac{R^2}{2h}$。

(五) 以分割圓的圓心為焦點，作過分切點之雙曲線，其漸近線必過分割點且垂直底邊。

四、 坐標化後的分割點迭代公式及性質

設 $\triangle OBC$ 的高為 h，在 $\overline{BC}$ 上取 n 個分割點依序為 D_1、D_2、$\cdots$、D_n。

(一) 若 $D_{k-2}(d_{k-2},-h)$、$D_{k-1}(d_{k-1},-h)$ 的接續分割點為 $D_k(f(d_{k-2},d_{k-1}),-h)$，則：

$$f(x,y)=(2y-x)+\frac{2y(y-x)}{\sqrt{x^2+h^2}+x-2y}$$

(二) 若 $D_{k-1}(d_{k-1},-h)$、$D_{k+1}(d_{k+1},-h)$ 之間的分割點為 $D_k(g(d_{k-1},d_{k+1}),-h)$，則：

$$g(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+h^2}-\sqrt{y^2+h^2}+x+y}{2}$$

(三) 當任意三角形底邊取二個分割點 D_1、D_2，並令其內切圓、第二分割圓分別與底邊切於 P、Q 兩點，則 $\overline{D_1D_2}$ 的中點與 $\overline{PQ}$ 的中點重合。

(四) 當任意三角形底邊取三個分割點 D_1、D_2、D_3，並令其內切圓與底邊切於 P 點，則 $\overline{D_1D_3}$ 的中點與 $\overline{PD_2}$ 的中點重合。

(五) 當任意三角形底邊取 n 個分割點 D_1、D_2、⋯、D_n，並令其內切圓與底邊切於 P 點，且 $\triangle OBD_{n-1}$ 內切圓與 $\overline{BC}$ 的切點為 Q，則 $\overline{PD_{n-1}}$ 中點與 $\overline{QD_n}$ 中點重合。

(六) 取任意數量分割點時，可藉由求解 $c = F(d_1)$，進而求出所有分割點坐標。

五、 分別與三角形兩邊相切的三個圓

根據文獻，此即「六圓定理」中的特例，同時也與「馬爾法蒂問題」相同。

六、 分別與多角形單邊相切的多個圓

(一) 任意三角形皆存在分割中心 K 點，若分別以三角形的兩頂點為焦點，作過第三頂點的雙曲線，則此三條雙曲線的交點即為 K 點。

(二) 若四邊形的對邊和相等，則此四邊形存在分割中心，此意即若四邊形的內切圓不存在，則其必不存在分割中心。

捌、 未來展望

一、 分割圓的幾何性質

有關分割圓的幾何性質，尚有部分未完成證明，分別敘述如下：

(一) 以每 k 個分割後的三角形作內切圓，其圓心會共雙曲線的一支，如圖 8-1-1。（$k \geq 2$）

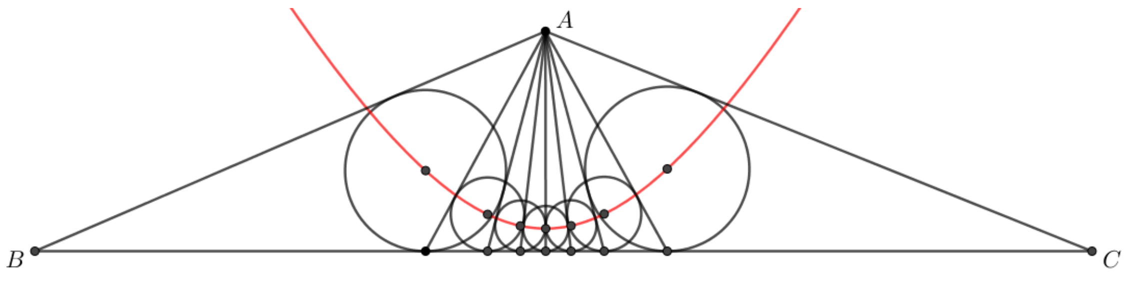


圖 8-1-1

(二) 若以分割點、分切點、分割圓的圓心及其與底邊的切點作四邊形，則此四邊形的內切圓圓心共雙曲線的一支，如圖 8-1-2。

(三) 若以頂點 A、兩分切點及分割圓的圓心作四邊形，則此四邊形的內切圓圓心會共橢圓，如圖 8-1-3。

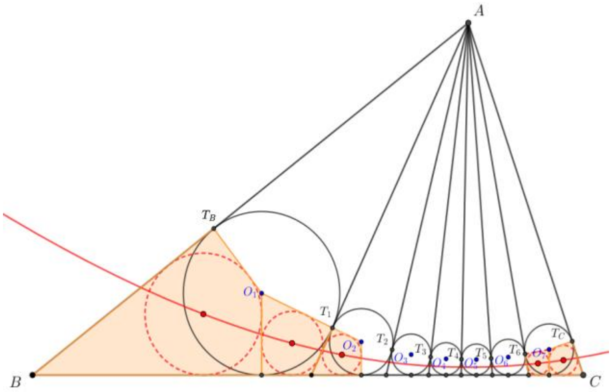


圖 8-1-2

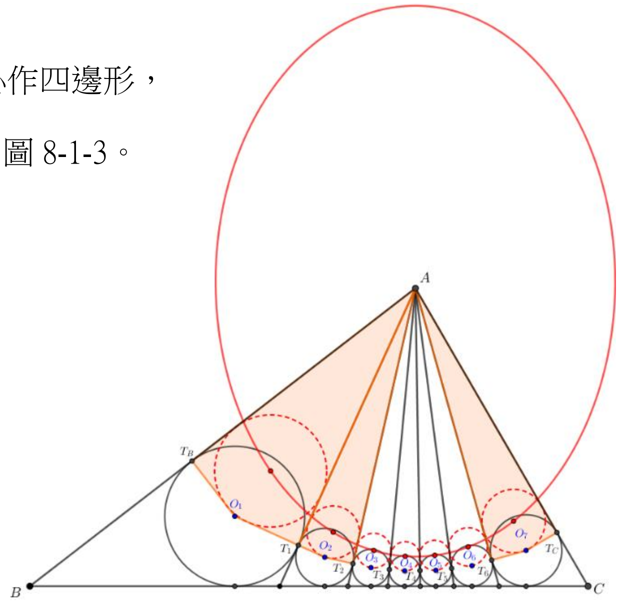


圖 8-1-3

二、 延伸討論中的分割中心

在探討完三角形及四邊形的分割中心後，我們尚未進一步討論在更多邊形時的情形，而首要可研究的為「任意多邊形需滿足哪些條件，其分割中心才會存在」，接著則是該如何使用幾何作圖或代數計算的方式找尋此點位置。

三、 三角形中心百科全書（ETC）

本篇研究中觸及多項有關三角形的定理及性質，因此老師曾向我們提到「三角形中心百科全書」這個網站，其中登錄有數萬個三角形相關的中心，我們試著找尋過是否有與本篇作品相關的理論，但目前尚無結果。

玖、　參考資料

一、*Crux Mathematicorum*

https://cms.math.ca/publications/crux/

二、*Encyclopedia of Triangle Centers*（*ETC*）

https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

三、*Malfatti's Problem*（馬爾法蒂問題）

https://www.newton.com.tw/wiki/%E9%A6%AC%E7%88%BE%E6%B3%95%E8%92%82%E5%95%8F%E9%A1%8C/899709

四、臺灣 2008 年國際科學展覽會：六圓定理（曾士豪）

https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=124&a=6822&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=22&sid=3188

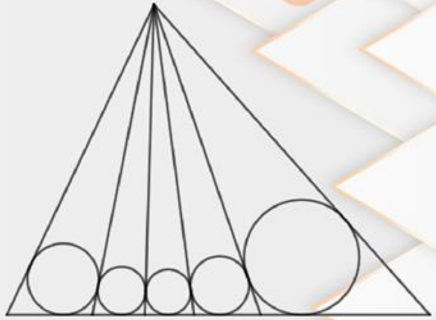
五、翰林高中選修數學甲（下）第一章：二次曲線

【評語】030408

作品從數學網站 CRUX 的一則問題發想：在三角形ABC的 BC 邊上取一點D，使得三角形ABD和三角形ADC的內切圓相切，描述D點的性質。作者從這個問題衍生出新的問題，探討是否有可能在 BC 邊上取 n 個點將三角形ABC分割成 n+1 個子三角形使得相鄰子三角形的內切圓相切，如果可以，這些點該怎麼找呢？作者們針對這樣的問題做了討論，對於任意的 n 值，給出了找尋這 n 個分割點的規則（對於 n≤2，或是 n=3，且三角形ABC為等腰三角形的情況，給出了確切的答案）。對於這 n+1 個圓所具有的一些特性，也作了一些分析。論述清楚而且精簡，得出的結論也很漂亮，是非常好的一個作品。藉由迭代的方式來導出關係並求解當然是處理問題的一種方法，但這樣的方式總讓人覺得過於繁複，不是那麼優美。是不是有可能可以藉由刻畫一些性質來得出找分割點更有效、更簡單的方法？如果能在這方面有進一步的突破，結果會更完整也更好。

作品海報

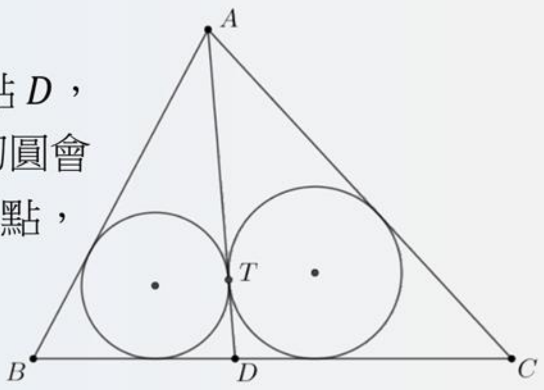
環環相切



——三角形中的多「圓」宇宙

原題說明

在 $\triangle ABC$ 的 $\overline{BC}$ 邊上取一點 D，使 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ADC$ 的內切圓會切於內公切線 $\overline{AD}$ 上的同一點，如圖中的 T 點。

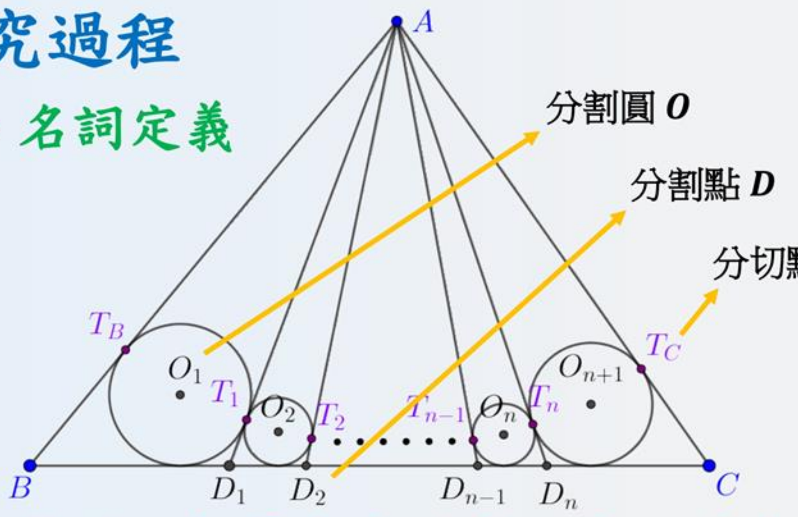


研究目的

一、任意三角形取一到三個分割點時的分割線段長比。
二、證明任意三角形取 n 個分割點的存在性與唯一性。
三、探討任意三角形取 n 個分割點時分割圓的幾何性質。
四、任意三角形取 n 個分割點時的迭代公式及其應用。
五、探討任意多邊形中分割中心的存在性及其所在位置。

研究過程

一、名詞定義



二、分割點數量與分割線段長的關係

(一) 取一個分割點（二個分割圓）

1. 正三角形與等腰三角形

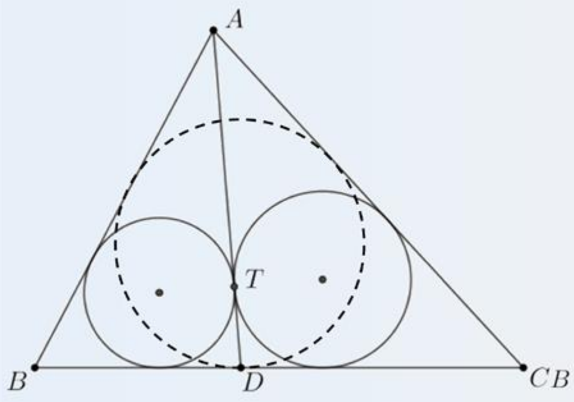
正三角形因左、右對稱，分割點的位置將在底邊的中點，等腰三角形亦是如此，得 $\boldsymbol{\overline{BD}:\overline{DC}=1:1}$。

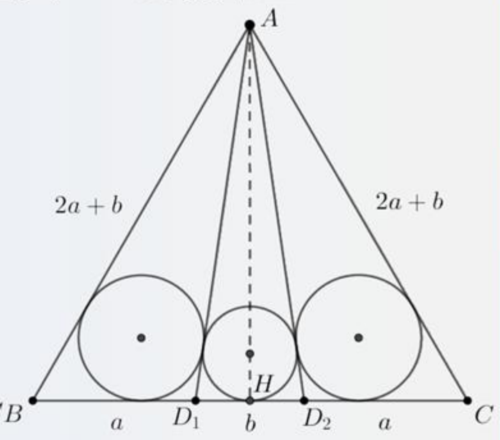
2. 任意三角形

運算得 D 點就是原 $\triangle ABC$ 內切圓與 $\overline{BC}$ 的交點，並令 $\overline{AB}=c$、$\overline{AC}=b$、$\overline{BC}=a$，分割線段長比為：

$$\boldsymbol{\overline{BD}:\overline{DC}=(c+a-b):(b+a-c)}$$

故 D 點將落在 $\triangle ABC$ 內切圓與 $\overline{BC}$ 之切點上。





(二) 取二個分割點（三個分割圓）

1. 正三角形

令正 $\triangle ABC$ 內有三個分割圓，分割點為 D_1、D_2，由於正三角形的對稱性質，可假設底邊的分割線段長分別為 a、b、a，則邊長即為 $2a+b$，於是可列出：

$$\frac{\overline{AB}+\overline{AD_1}-\overline{BD_1}}{2}=\frac{\overline{AD_1}+\overline{AD_2}-\overline{D_1D_2}}{2}=\frac{\overline{AD_2}+\overline{AC}-\overline{D_2C}}{2}$$

代入 a、b 並化簡得 $\overline{AD_1}=\overline{AD_2}=a+2b$。

作 $\overline{BC}$ 上的高 $\overline{AD}$，由畢氏定理得：

$$\overline{AB}^2-\overline{BD}^2=\overline{AD_1}^2-\overline{D_1D}^2$$

$$\Rightarrow (2a+b)^2-\left(a+\frac{b}{2}\right)^2=(a+2b)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$a:b=3:2\Rightarrow \boldsymbol{\overline{BD_1}:\overline{D_1D_2}:\overline{AD_2}=3:2:3}$$

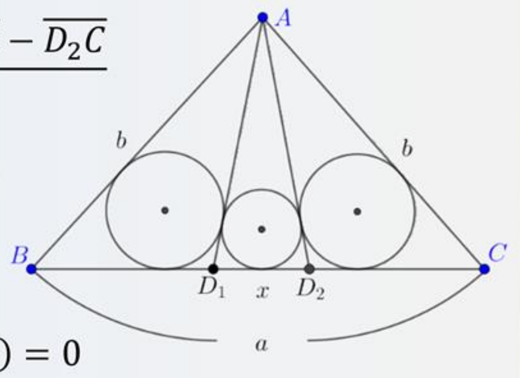
2. 等腰三角形

令在等腰 $\triangle ABC$ 內有三個分割圓，而其分割點為 D_1、D_2，設兩腰長為 b，底邊為 a，$\overline{D_1D_2}=x$。

$$\frac{\overline{AD_1}+\overline{AD_2}-\overline{D_1D_2}}{2}=\frac{\overline{AD_2}+\overline{AC}-\overline{D_2C}}{2}$$

$$\sqrt{b^2-\left(\frac{a^2}{2}\right)+\left(\frac{x^2}{2}\right)}-x$$

$$=b-\frac{a-x}{2}$$



$$4x^2+3(2b-a)x+a(a-2b)=0$$

$$x=\frac{3a-6b+\sqrt{36b^2-4ab-7a^2}}{8}$$

將之代回，並令 $W=\sqrt{36b^2-4ab-7a^2}$：

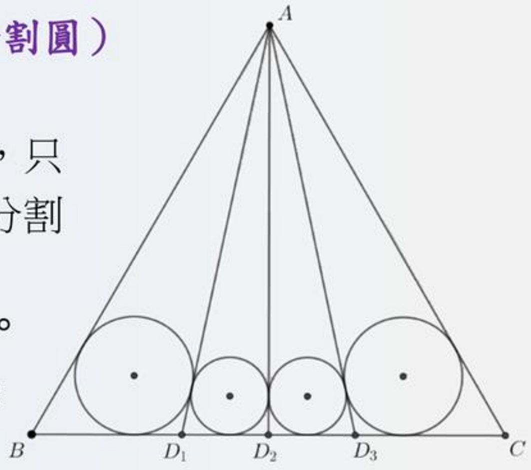
$$\boldsymbol{\overline{BD_1}:\overline{D_1D_2}:\overline{D_2C}=(5a+6b-W):(6a-12b+2W):(5a+6b-W)}$$

(三) 取三個分割點（四個分割圓）

1. 正三角形

由於正三角形的對稱性質，只需要處理直角三角形取一分割點的問題。

$\triangle ABD_2$ 為 $30°-60°-90°$ 的直角三角形，因此可得：



$$\overline{BD_2}:\overline{AD_2}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$$

$$\overline{BD_1}:\overline{D_1D_2}=\left(\frac{\overline{AB}+\overline{BD_2}-\overline{D_2A}}{2}\right):\left(\frac{\overline{BD_2}+\overline{D_2A}-\overline{AB}}{2}\right)=\sqrt{3}:1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\overline{BD_1}:\overline{D_1D_2}:\overline{D_2D_3}:\overline{D_3C}=\sqrt{3}:1:1:\sqrt{3}}$$

2. 等腰三角形

令在等腰 $\triangle ABC$ 內有 4 個分割圓，分割點為 D_1、D_2、D_3，兩腰長為 b，底邊為 a，接著由畢氏定理可得：

$$\overline{AD_2}=\sqrt{\overline{AB}^2-\left(\overline{AD_2}\right)^2}=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$$

$$\overline{BD_1}=\overline{D_3C}=\frac{b+\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}}{2}=\frac{2b+a-\sqrt{4b^2-a^2}}{4}$$

$$\Rightarrow \overline{D_1D_2}=\overline{D_2D_3}=\frac{\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}-b+\frac{a}{2}}{2}=\frac{\sqrt{4b^2-a^2}-2b+a}{4}$$

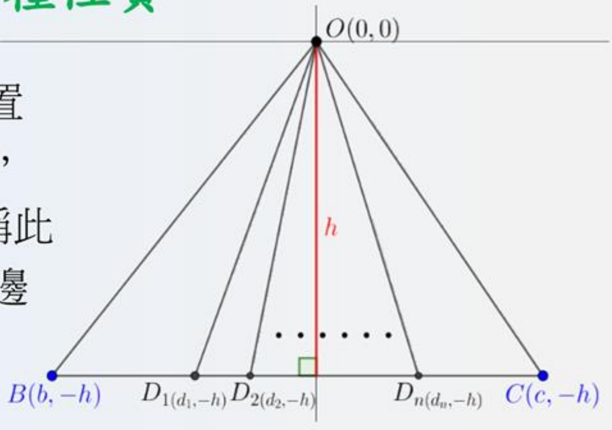
$$\Rightarrow \boldsymbol{\overline{BD_1}:\overline{D_1D_2}:\overline{D_2D_3}:\overline{D_3C}=\sqrt{2b+a}:\sqrt{2b-a}:\sqrt{2b-a}:\sqrt{2b+a}}$$

四、分割點的存在與唯一性

由觀察分割點 D_n 的移動證明了分割點的存在與唯一性。

五、坐標化後的各種性質

我們將 $\triangle ABC$ 坐標化以利進行探討。將 A 點置於平面坐標的原點 O 上，且使 $\overline{BC}$ 與 x 軸平行，稱此三角形為 $\triangle OBC$，設底邊 $\overline{BC}$ 上的高為 h，其餘坐標定義如下：



1. $\triangle OBC$：$O(0,0)$、$B(b,-h)$、$C(c,-h)$
2. 分割點：$D_1(d_1,-h)$、$D_2(d_2,-h)$、$D_3(d_3,-h)$、⋯、$D_n(d_n,-h)$

(一) 分切點共圓

根據定理一，$\triangle OBC$ 的分切點 T_B、T_1、T_2、⋯、T_n、T_C 皆與原點 O 等距，故分切點 T_B、T_1、T_2、⋯、T_n、T_C 共圓，此圓我們稱「**切點圓**」，原點 O 為其圓心。

(二) 分割圓之圓心共拋物線

在 $\triangle OBC$ 中，取 n 個分割點，且分割圓之圓心為 $O_i(x_i,y_i)$、半徑為 $y_i-(-h)=y_i+h$，其中 $i\in\{1,2,\dots,n,n+1\}$。根據性質一可知：

$$\overline{OT_B}=\overline{OT_1}=\overline{OT_2}=\cdots=\overline{OT_n}=\overline{OT_C}=R\text{ (切點圓半徑)}$$

假設任一分割圓之圓心為 (x,y)，關係式如下：

$$R=\sqrt{x^2+y^2-(y+h)^2}$$

整理後得到：

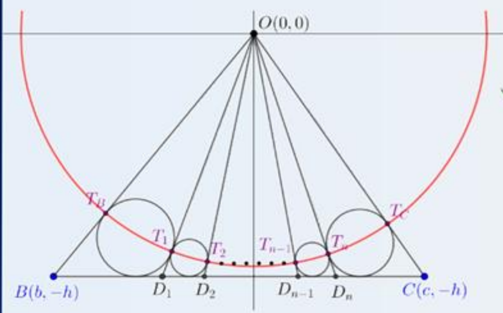
$$y=\left(\frac{1}{2h}\right)x^2-\frac{R^2+h^2}{2h}$$

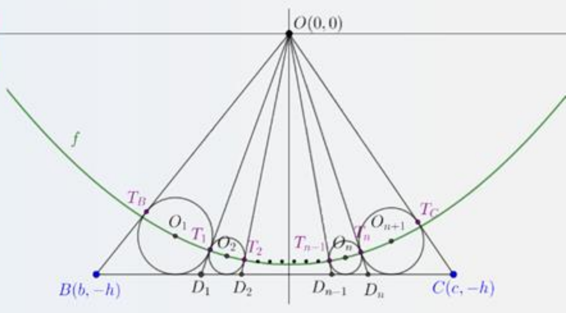
由上可知分割圓之圓心皆會落在此頂點為 $(0,-\frac{R^2+h^2}{2h})$ 的二次函數上，因為 $h>0$，所以更準確地說它是一條開口向上的拋物線，透過與拋物線標準式 $x^2=4cy$ 係數比較，其中 c 為焦距，我們可知：

$$\frac{1}{2h}=\frac{1}{4c}\Rightarrow c=\frac{h}{2}$$

即得其焦距為 $\frac{h}{2}$，焦點為 $(0,-\frac{R^2}{2h})$，準線方程式為：

$$y=-\frac{R^2+2h^2}{2h}$$





（三）分割圓存在公切圓且圓心為拋物線焦點

令上個性質的拋物線的準線為 L，由拋物線的定義可得：

$$\overline{FO_i} = d(O_i, L)\text{，其中 } i \in \{1,2,\dots,n,n+1\}$$

又 $\overline{FO_i} - r_{O_i} = d(\overline{BC}, L)$，其中 r_{O_i} 為圓 O_i 半徑，故存在一圓與所有分割圓相切，我們稱為「公切圓」，其圓心為拋物線焦點，半徑為 $d(\overline{BC}, L)$。

（四）公切圓必過三角形的頂點 $O(0,0)$

由性質二可知：

$$\overline{OF} = 0 - \left(-\frac{R^2}{2h}\right) = \frac{R^2}{2h}$$

再由性質三知公切圓 F 半徑為 $d(\overline{BC}, L)$，可得：

$$d(\overline{BC}, L) = -h - \left(-\frac{R^2 + 2h^2}{2h}\right) = \frac{R^2}{2h} = \overline{OF}$$

因此公切圓必過三角形的頂點 O（原點）。

（五）作雙曲線之漸近線必通過分割點且垂直底邊

當以相鄰兩分割圓圓心為焦點，過此兩圓間的分切點作雙曲線，其漸近線會通過兩分割圓間的分割點且垂直底邊。將分切點平移至原點 $O(0,0)$，以原點為中心旋轉兩分割圓，使兩圓心落在 x 軸上，設兩分割圓半徑分別為 r_1、r_2，則兩圓的圓心分別為 $O_1(-r_1,\ 0)$、$O_2(r_2,\ 0)$。令 D 點為兩分割圓間的分割點，可得 $\overline{OD} = \sqrt{r_1 r_2}$，即 $D(0,\ -\sqrt{r_1 r_2})$，接著依雙曲線定義可得其標準式：

$$\frac{\left(x - \frac{(-r_1) + r_2}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{\left(x + \frac{r_1 - r_2}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

再由標準式得其漸近線方程式為：

$$b\left(x + \frac{r_1 - r_2}{2}\right) \pm ay = 0$$

其中貫軸 $2a = r_1 - r_2$、焦距 $2c = r_1 + r_2$，可推得共軛軸為：

$$2b = 2\sqrt{c^2 - a^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

整理知 $a = \frac{r_1 - r_2}{2}$、$b = \sqrt{r_1 r_2}$、$c = \frac{r_1 + r_2}{2}$，並代入漸近線方程式得：

$$2x\sqrt{r_1 r_2} + (r_1 - r_2)\sqrt{r_1 r_2} \pm (r_1 - r_2)y = 0$$

取漸近線斜率為負者，將 $x = 0$ 代入求其與 y 軸的交點坐標：

$$2x\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_1 r_2}(r_1 - r_2) + (r_1 - r_2)y = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{r_1 r_2}$$

得交點坐標為 $(0,\ -\sqrt{r_1 r_2})$，其恰與分割點 D 重合，意即「雙曲線漸近線必通過分割點」，接下來計算 $\overleftrightarrow{BC}$ 的斜率：

$$m_{BC} = \frac{r_1 - r_2}{\overline{BC}} = \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}} = \frac{r_1 - r_2}{2\sqrt{r_1 r_2}}$$

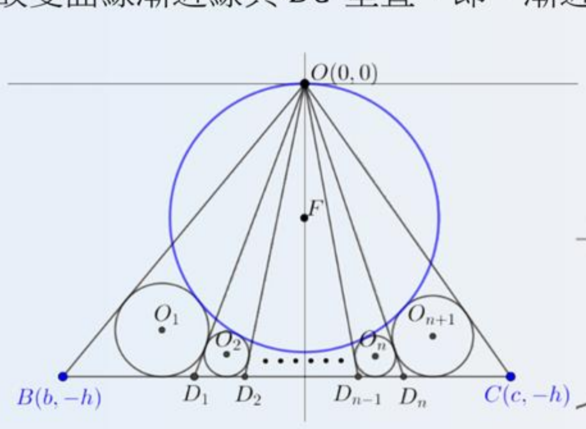
又由曲線漸近線方程式得其斜率：

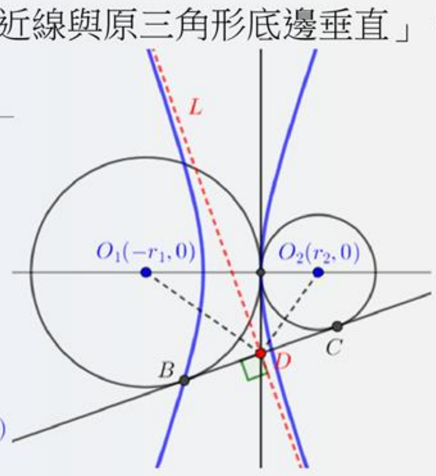
$$m_L = -\frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2}$$

將兩直線斜率相乘得：

$$m_{BC} \times m_L = \frac{r_1 + r_2}{2\sqrt{r_1 r_2}} \times \left(-\frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 + r_2}\right) = -1$$

故雙曲線漸近線與 $\overleftrightarrow{BC}$ 垂直，即「漸近線與原三角形底邊垂直」。





六、坐標化後的分割點迭代公式及性質

（一）分割點的迭代公式

1. 已知分割點求下個分割點

在 $\triangle OBC$ 中，我們推導出由已知三點 O、D_{k-2}、D_{k-1}推下一分割點的公式，先令 O、D_{k-2}、D_{k-1} 三點坐標分別為 $(0,0)$、$(d_{k-2},\ -h)$、$(d_{k-1}, -h)$，D_k坐標為 $(d_k,\ -h)$，由切線段等長得：

$$\overline{OD_{k-1}} + \overline{OD_{k-2}} - \overline{D_{k-1}D_{k-2}} = \overline{OD_{k-1}} + \overline{OD_k} - \overline{D_{k-1}D_k}$$

$$\Rightarrow \overline{OD_{k-2}} - \overline{D_{k-1}D_{k-2}} = \overline{OD_k} - \overline{D_{k-1}D_k}$$

將邊長數值代入前式後得

$$\sqrt{{d_{k-2}}^2 + h^2} - (d_{k-1} - d_{k-2}) = \sqrt{{d_k}^2 + h^2} - (d_k - d_{k-1})$$

化簡得：

$$d_k = (2d_{k-1} - d_{k-2}) + \frac{2d_{k-1}(d_{k-1} - d_{k-2})}{\sqrt{{d_{k-2}}^2 + h^2} + d_{k-2} - 2d_{k-1}}$$

則接續的分割點為 $D_k(f(d_{k-2}, d_{k-1}), -h)$、$D_{k+1}(f(d_{k-1}, (f(d_{k-2}, d_{k-1}), -h)), -h)$

公式一：已知 $\triangle OBC$ 的高為 h，若 $D_{k-2}(d_{k-2}, -h)$、$D_{k-1}(d_{k-1}, -h)$ 為其相鄰兩分割點，則接續分割點為 $D_k(f(d_{k-2}, d_{k-1}), -h)$，其中：

$$f(x,y) = (2y - x) + \frac{2y(y - x)}{\sqrt{x^2 + h^2} + x - 2y}$$

2. 已知兩側分割點推論其中間分割點坐標

我們令 $\triangle OBC$ 三頂點坐標為 $O(0,0)$、$B(b, -h)$、$C(c, -h)$，並取一個分割點，假設其為 $D(d,\ -h)$，用切線段等長可得如下：

$$\overline{OB} - \overline{BD} = \overline{OC} - \overline{DC}$$

$$\sqrt{b^2 + h^2} - (d - b) = \sqrt{c^2 + h^2} - (c - d)$$

$$\Rightarrow d = \frac{\sqrt{b^2 + h^2} - \sqrt{c^2 + h^2} + b + c}{2}$$

公式二：已知 $\triangle OBC$ 的三頂點坐標為 $O(0,0)$、$B(b, -h)$、$C(c, -h)$，若於 $\overline{BC}$ 上取一個分割點，則分割點為$D(g(b,c),\ -h)$，其中：

$$\boldsymbol{g(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 + h^2} - \sqrt{y^2 + h^2} + x + y}{2}}$$

（二）任意三角形套用迭代公式的性質

1. 任意三角形取二個分割點（三個分割圓）

將二分割點的坐標代入 $g(x,y)$ 並相加，得

$$d_1 + d_2 = g(b, d_2) + g(d_1, c) = g(b, c) + g(d_1, d_2)$$

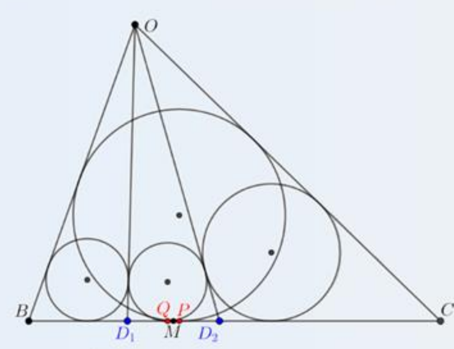
即當令分割點 D_1、D_2 的中點為 M，且 $\triangle OBC$ 內切圓與 $\overline{BC}$交點為 P、第二分割圓與 $\overline{BC}$ 交點為 Q，則 $\overline{PQ}$ 的中點與 M 重合。

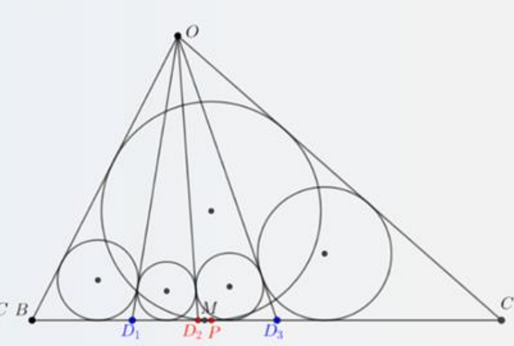
2. 任意三角形取三個分割點（四個分割圓）

將三分割點的坐標代入 $g(x,y)$ 並相加，得

$$d_1 + d_3 = g(b, d_2) + g(d_2, c) = g(b, c) + d_2$$

即當令分割點 D_1、D_3 的中點為 M，且 $\triangle OBC$ 內切圓與 $\overline{BC}$ 交點為 P，則 P 與分割點 D_2 的中點與 M 重合。



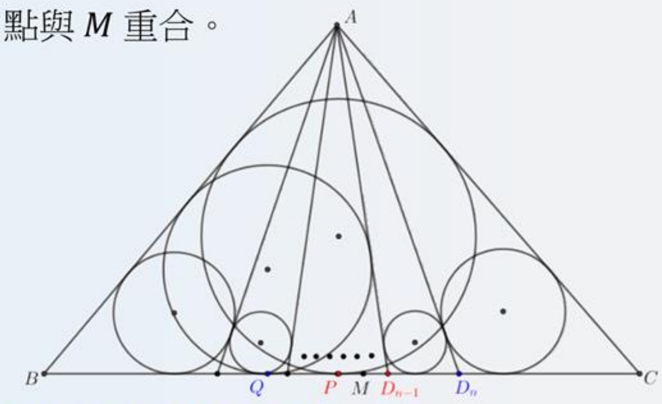


3. 任意三角形取 n 個分割點

將上述情況延伸至取 n 個分割點時，得

$$g(b, d_{n-1}) + g(d_{n-1}, c) = g(b, c) + d_{n-1}$$

即當令$\triangle OBD_{n-1}$ 內切圓與 $\overline{BC}$ 的切點為 Q，且 Q 與分割點 D_n 的中點為 M、$\triangle OBC$ 內切圓與 $\overline{BC}$ 切點為 P，則 P 與分割點 D_{n-1} 的中點與 M 重合。



（三）取任意數量分割點時的分割點坐標

在給定 $\triangle OBC$ 的底邊上取 n 個分割點，其中底邊端點為 $B(b, -h)$、$C(c, -h)$，而分割點依序為 $D_1(d_1, -h)$、$D_2(d_2, -h)$、…、$D_n(d_n, -h)$，已知利用迭代公式 $f(x,y)$ 可由前兩分割點 $D_{k-2}(d_{k-2}, -h)$、$D_{k-1}(d_{k-1}, -h)$ 推導接續分割點 $D_k(d_k, -h)$ 的 x 坐標，因此可自 $\triangle OBC$ 頂點 B 與分割點 D_1 開始，重複套用公式推導至分割點 D_n，最後寫回 $\triangle OBC$ 頂點 C，列式如下：

$$f(b, d_1) = d_2\text{、}f(d_1, d_2) = d_3\text{、}\dots\text{、}f(d_{n-1}, d_n) = c$$

$$\Rightarrow c = f(d_{n-1}, d_n) = f\big(f(d_{n-3}, d_{n-2}), f(d_{n-2}, d_{n-1})\big) = \cdots = F(d_1)$$

上述算式中的 $F(x)$ 表示由 $f(x,y)$ 迭代出來的結果，因此透過求解 $c = F(d_1)$ 中的 d_1 即可得分割點 D_1 坐標，進而求出所有分割點坐標，也就是說我們找到了解決「取任意數量分割點時，求所有分割點坐標」的方式。

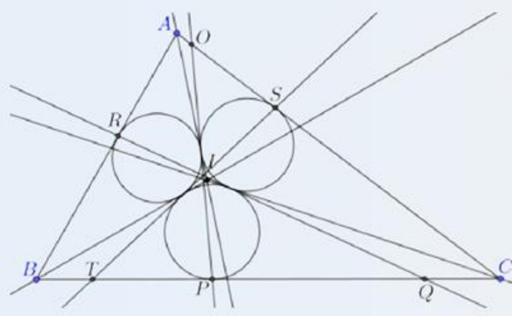
延伸討論

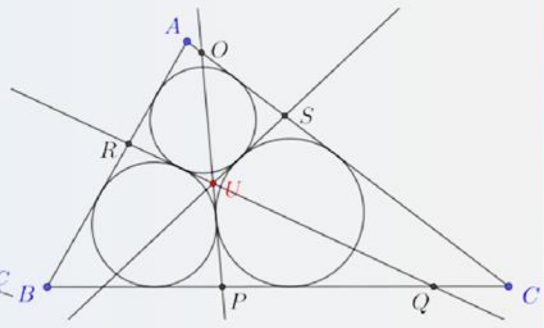
一、 分別與三角形兩邊相切的三個圓

我們想如果在三角形內有三個兩兩相切的圓，且他們分別與三角形的兩邊相切，會不會存在這種情況？又該如何尋找？在查詢文獻後發現上述的狀況是在「六圓定理」中的一種情形，同時也是「馬爾法蒂問題」的內容。

【馬爾法蒂問題】

在一已知三角形內畫三個圓，每個圓與其他兩個圓以及三角形的兩邊相切。





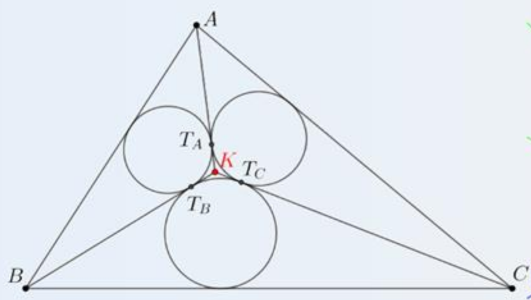
《解法》作四邊形 $ARUS$、$BPUR$、$CSUP$ 的內切圓，則此三圓即為所求。

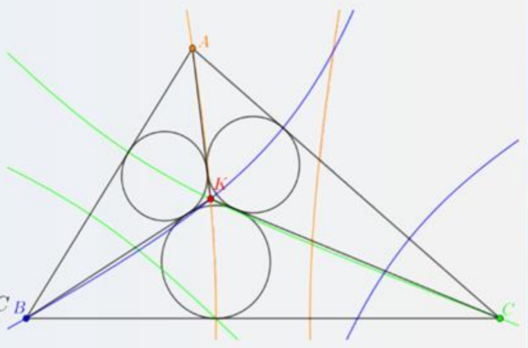
二、分別與多邊形單邊相切的多個圓

如何在多邊形內部取分割中心 K，使其與頂點連線時，所分割開的相鄰三角形的內切圓兩兩相切。

(一) 三角形取分割中心

1. $\overline{KT_A}=\overline{KT_B}=\overline{KT_C}$
2. $\overline{AB}-\overline{AC}=\overline{KB}-\overline{KC}$
3. K 點即為 A、B、C 三條雙曲線的交點。



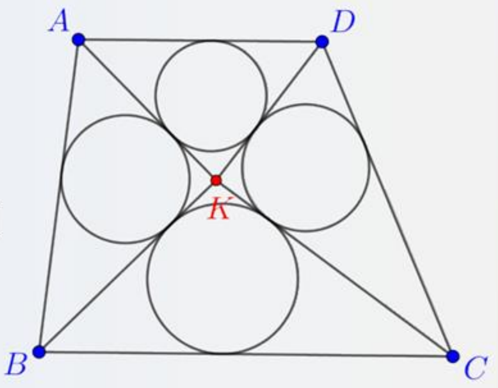


(二) 四邊形取分割中心

1. $\overline{KT_A}=\overline{KT_B}=\overline{KT_C}=\overline{KT_D}$
2. $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$
3. 四邊形 $ABCD$ 存在內切圓

⇕

分割中心 K 點必存在



研究結論

一、分割點數量與分割線段長的關係

	二圓	三圓	四圓	n 圓
正三角形	1:1	3:2:3	$\sqrt{3}$:1:1:$\sqrt{3}$	迭代公式
等腰三角形	✔	✔	✔	
任意三角形	✔	關係式求解		

※ ✔：由於其算式過長故在此省略，完整結果請見說明書。

二、分割點的存在與唯一性

藉說明 $\triangle ABC$ 取 n 個分割點時，存在唯一的 D_n 使得 $\overline{AT_n}=\overline{AT_n{}'}$ 得證。

三、坐標化後的分割圓性質

設 $\triangle OBC$ 的高為 h，其頂點坐標分別為 $O(0,0)$、$B(b,-h)$、$C(c,-h)$。

(一) 任意三角形的所有分切點必共圓，其圓心為 $O(0,0)$、半徑為 R。

(二) 任意三角形的分割圓之圓心必共拋物線 f，其焦點為 F、準線為 L：

$$f:y=\left(\frac{1}{2h}\right)x^2-\frac{R^2+h^2}{2h}\text{、}F\left(0,-\frac{R^2}{2h}\right)\text{、}L:y=-\frac{R^2+2h^2}{2h}$$

(三) 存在一圓與所有分割圓相切，圓心為拋物線焦點 F。

(四) 公切圓必過三角形的頂點 $O(0,0)$，其半徑為 $\frac{R^2}{2h}$。

(五) 以兩分割圓的圓心為焦點，過此兩圓間的分切點作雙曲線，其漸近線必過分割點且垂直底邊。

四、坐標化後的分割點迭代公式及性質

設 $\triangle OBC$ 的高為 h，在 $\overline{BC}$ 上取 n 個分割點依序為 D_1、D_2、…、D_n。

(一) 若 $D_{k-2}(d_{k-2},-h)$、$D_{k-1}(d_{k-1},-h)$ 的接續分割點為 $D_k(f(d_{k-2},d_{k-1}),-h)$，則：

$$f(x,y)=(2y-x)+\frac{2y(y-x)}{\sqrt{x^2+h^2}+x-2y}$$

(二) 若 $D_{k-1}(d_{k-1},-h)$、$D_{k+1}(d_{k+1},-h)$ 之間的分割點為 $D_k(g(d_{k-1},d_{k+1}),-h)$，則：

$$g(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+h^2}-\sqrt{y^2+h^2}+x+y}{2}$$

(三) 當任意三角形底邊取二個分割點 D_1、D_2，並令其內切圓、第二分割圓分別與底邊切於 P、Q 兩點，則 $\overline{D_1D_2}$ 的中點與 $\overline{PQ}$ 的中點重合。

(四) 當任意三角形底邊取三個分割點 D_1、D_2、D_3，並令其內切圓與底邊切於 P 點，則 $\overline{D_1D_3}$ 的中點與 $\overline{PD_2}$ 的中點重合。

(五) 當任意三角形底邊取 n 個分割點 D_1、D_2、…、D_n，並令其內切圓與底邊切於 P 點，且 $\triangle OBD_{n-1}$ 內切圓與 $\overline{BC}$ 的切點為 Q，則 $\overline{PD_{n-1}}$ 中點與 $\overline{QD_n}$ 中點重合。

(六) 取任意數量分割點時，可藉由求解 $c=F(d_1)$，進而求出所有分割點坐標。

五、分別與三角形兩邊相切的三個圓

根據文獻，此即「六圓定理」中的特例，同時也與「馬爾法蒂問題」相同。

六、分別與多角形單邊相切的多個圓

(一) 任意三角形皆存在分割中心 K 點，若分別以三角形的兩頂點為焦點，作過第三頂點的雙曲線，則此三條雙曲線的交點即為 K 點。

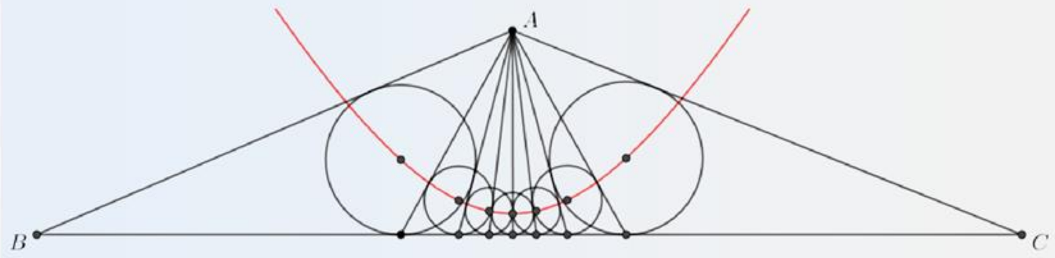
(二) 若四邊形的對邊和相等，則此四邊形存在分割中心，此意即若四邊形的內切圓不存在，則其必不存在分割中心。

未來展望

一、分割圓的幾何性質

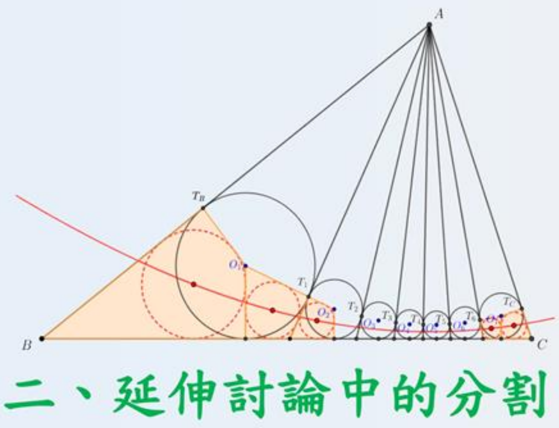
有關分割圓的幾何性質，尚有部分未證明，分別如下：

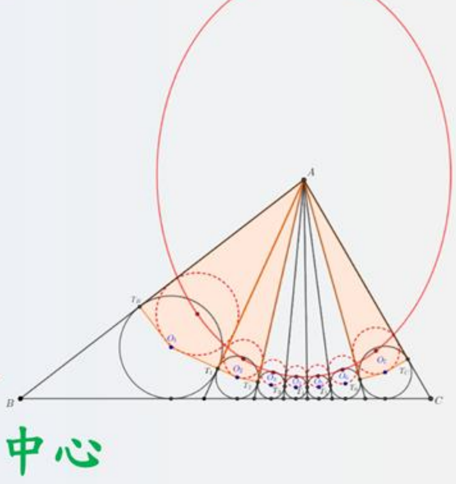
(一) 以每 k 個分割後的三角形作內切圓，其圓心會共雙曲線的一支。（$k\geq 2$）



(二) 若以分割點、分切點、分割圓的圓心及其與底邊的切點作四邊形，四邊形的內切圓圓心共雙曲線的一支。

(三) 若以頂點 A、兩分切點及分割圓的圓心作四邊形，則此四邊形的內切圓圓心會共橢圓。





二、延伸討論中的分割中心

在探討完三角形及四邊形的分割中心後，尚未進一步討論在更多邊形時的情況，而首要可研究的為「任意多邊形需滿足哪些條件，其分割中心才會存在」，接著則是該如何找尋此點位置。

三、三角形中心百科全書（ETC）

本篇研究中觸及多項有關三角形的定理及性質，因此老師曾向我們提到（ETC）這個網站登錄有數萬個三角形相關的中心，我們試著找尋過是否有與本篇作品相關的理論，但目前尚無結果。