中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030407

大馬小馬走天下

學校名稱：桃園市立青埔國民中學

作者：	指導老師：
國二 紀言蓁 國二 陳法敦 國二 陳秉政	汪政緯

關鍵詞：騎士巡邏、馬步、漢米爾頓

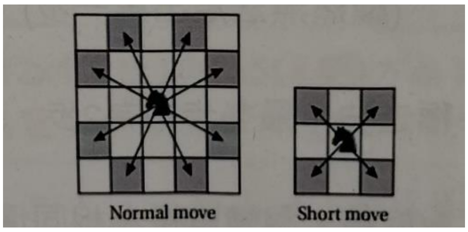
摘要

有個經典的騎士巡邏問題:騎士用馬步移動，每個格子至多走一次，試圖找出最多步。我們定義 2x3 的矩形方格圖中走對角線為大馬步，2x2 的方格中走對角線為小馬步。依照大馬步、小馬步輪流交錯走，我們發現:若指定特殊起始點，在(偶數 m) x (偶數 n)的矩形中可以走完所有的格子。若騎士能將格子走完，本質上非常類似漢米爾頓路徑。其它無交錯的走法(如連續大馬步或連續小馬步)，我們也找出最多步的一般式。本作品的價值在於擴充馬步為大馬步與小馬步，推廣正方形為任意比例的矩形，並用深度優先搜索(Depth First Search，以下簡稱 DFS)驗証結果。關鍵論証在於著色法與 DFS ，若騎士無法走完，著色法能証明步數的最大值，DFS 能讀完圖中所有資訊。結論的一般式紀錄於後。

壹、研究動機

一、偶然的情況下，老師介紹了 Baltic Way 2017 (2017 波羅地海競賽試題)。原題如下：

A chess knight has injured his leg and is limping. He alternates between a normal move and a short move where he moves to any diagonally neighbouring cell. The limping knight moves on a 5x6 cell chessboard starting with a normal move. What is the largest number of moves he can make if he is starting a cell of his own choices and is not allowed to visit any cell (including the initial cell) more than once？



翻譯如下：在 5x6 的方格圖中，騎士因故受傷，只能依序用大馬步(Normal move)、 小馬步(Short move)輪流交錯走。任選一格開始走且大馬步先走，每個格子至多走一次，試計算最多能走幾步？

我們產生了好奇心，原題目暗示著騎士走不完所有格子。

顯然只走小馬步也無法走完所有格子。我們查閱文獻，發現只走大馬步，居然可以走完邊長皆大於 4 格的各式矩形方格圖。故我們對馬步交錯產生了好奇心，想知道馬步輪流交錯走各式矩形的最多步走法。

依照上述的大馬步與小馬輪流交錯走，是否存在能全部走完的矩形方格圖？

如果有？該矩形方格圖有何特徵？是否存在有系統的走完策略？

如果無？是否能找到最多步數的走法？該如何証明上述步數是最大值？

若以不同型式的馬步輪流交錯走？會發生何事？

本作品與教材相關性：

在圖論中，路徑是在無向圖或有向圖中，恰好能將圖中所有頂點各拜訪一次的路徑。我們研究主題中的每個方格都可以對應到點，每個馬步都可以對應到邊，故我們的作品就能轉換到漢米爾頓路徑。不過漢米爾頓路徑複雜度過高，本作品可視為漢米爾頓路徑的一個問題。

貳、研究目的

一、矩形方格圖中，依照大馬步、小馬步輪流交錯走的規則(大馬先走)，每個格子至多走一次，走至不能走為止。

(一) 我們試圖找出各式矩形的最多步走法。

(二) 用演算法驗証上述的答案。

(三) 我們試圖找出特殊圖形的最多步走法 : 含俄羅斯方塊與 3 個特殊圖形。

二、矩形方格圖中，依照小馬步、大馬步輪流交錯走的規則(小馬先走) ，每個格子至多走一次，走至不能走為止。

(一) 我們試圖找出各式矩形的最多步走法。

三、矩形方格圖中，依照小馬步連續走(每一步都走小馬步)。

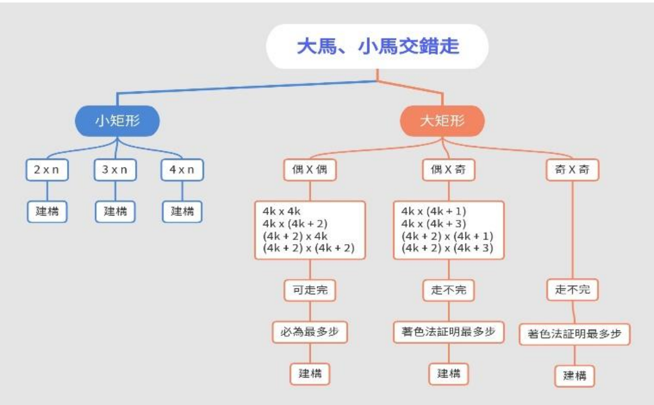
(一)我們試圖找出各式矩形的最多步數。

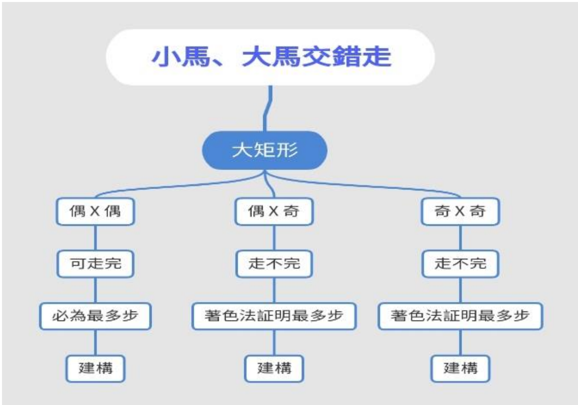
(二)用演算法驗証上述的答案。

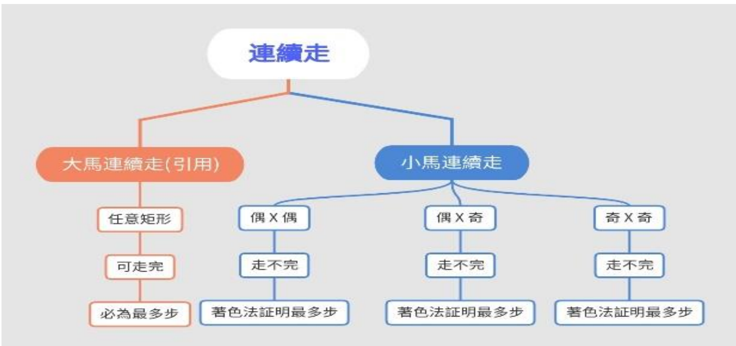
以下樹狀圖呈現研究細節 :

註 1 : 樹狀圖中的大矩形指的是長寬皆 8 格以上的矩形方格圖。

註 2 : 本作品的首要目標是找出各類馬步交錯走法中，各式矩形最多步數的一般式。我們雖然也有討論邊長 5.6.7 格的中矩形，但礙於科展作品有 30 頁的限制且對於一般式的推論無直接助益，故我們選擇放入研究日誌中，將來也許有一天會用到。







參、文獻回顧

一、漢米爾頓路徑(Hamitonian Path)：我們閱讀圖論的文獻後發現，尤拉路徑較關心邊，漢米爾頓路徑較關心點。尤拉路徑已有學者找到充要條件，但漢米爾頓路徑目前雖有愈來愈進步的充分條件，但離充要條件還有一段距離。另外，已有的馬步文獻對正方形方格圖有豐富的探討，但沒有討論 2 種馬步交錯的問題，也較少著墨在任意邊長比例的矩形。尤其是當無法完成漢米爾頓路徑時，是否存在最大的路徑數？如果存在該如何証明？

二、騎士巡邏(Knight's tour)：在矩形方格圖中，只用大馬步移動且每個格子至多走一次，走到不能走為止，最多能走幾步？在第 45 屆全國科展作品(棋盤上的馬步)中，已利用演算法証明邊長皆大於 4 格的矩形方格圖都可以走完。以下是我們閱讀相關文獻後歸納整理出的幾種解決騎士巡邏問題的策略。

(一)串接法：先完成各式小模組(小圖形)，再利用小模組的接點將彼此串接在一起。

(二)洋蔥法：不確定是誰先提出，但非常可能是肯佩倫在 1770 年的作品(土耳其行棋傀儡)中發明，本質上是那個時代利用齒輪等機械自動執行的演算法。從任一角落開始，以順時針或逆時針方式繞圈，從外層依序繞行，並逐漸往內層前進，大部分的正方形方格圖都能解決。

(三)迷宮法：判斷迷宮的起點與終點後，從起點出發，若中途迷路，則由終點反向推理，直到與迷路點相遇。

(四) 自由度法：馮·汪斯道夫(H. C. von Warnsdorff)在 1823 年提出了第一個系統化解決騎士巡邏問題的方法，後人又稱為”汪斯道夫規則”。以僅走大馬步而言，先定義自由度。所謂自由度指的是能走到該格子的方法數，以 4X5 的方格圖為例，如下圖，格子內的數字即代表能走到該格的方法數。先計算每一個格子的自由度，之後依序先走自由度小的，再走自由度大的。若自由度一樣，則任選一格走。每走一格，部分格子的自由度會更新，故可以利用電腦程式(演算法)解決。依照這一規則往往可以找到一條路徑，但不保証此路徑為最長路徑，更不保証能走完所有格子。此方法不適用於指定起點與終點的路徑，故與迷宮法互補。

三、前述文獻對我們問題的侷限：

(一)串接法的侷限：受限於接點的位置固定，無法串接完成任意邊長比例的矩形。

(二)洋蔥法的侷限：依照我們的馬步交錯規則，在由外往內繞行的過程中，若繞的是正方形，非常好用。但若繞的是矩形，最內層的形狀會變形，故不適用。

(三)迷宮法的侷限：依照我們的馬步規則走矩形方格圖，因為沒有固定的起點與終點，故無法將中段迷路的走法串接在一起。

(四)自由度法的侷限：依照我們的馬步規則，每個格子會有 2 個自由度，故不適用。

肆、定義名詞與符號

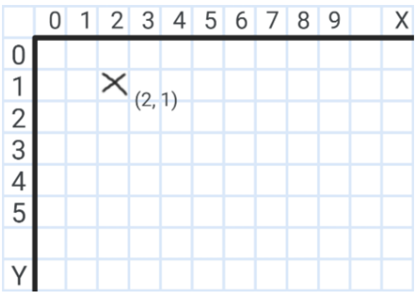
一、定義名詞

(一)大馬步、小馬步

1.大馬步：如下圖，類似於 2X3 或 3X2 方格圖的對角線，大馬步共有 8 種走法。

2. 小馬步：如下圖，類似於 2X2 方格圖的對角線，小馬步共有 4 種走法。

(二) 座標表示法：在演算法中，為了要表示點的位置，我們使用座標系統，X,Y 坐標軸如下圖(為了程式語言方便，以 0 做為為兩軸的最小值)，圖中的點表示為(2, 1)。



(三) 第 0 步：在矩形方格圖中，我們指定特殊的一個格子當第 0 步，通常為左上角的格子(0,0)，之後依馬步規則依序放上棋子並紀錄。

(四) 各式馬步走法的規則：

1.大小馬交錯走：第 0 步後，第 1 步為大馬步，第 2 步為小馬步，之後大馬步與小馬步輪流交錯走，每個格子至多走一次，走至不能走為止。

2.小大馬交錯走：第 0 步後，第 1 步為小馬步，第 2 步為大馬步，之後小馬步與大馬步輪流交錯走，每個格子至多走一次，走至不能走為止。

3.大馬連續走：第 0 步後，第 1、2、3 、......步都為大馬步，每個格子至多走一次，走至不能走為止。

4.小馬連續走：第 0 步後，第 1、2、3 、......步都為小馬步，每個格子至多走一次，走至不能走為止。

(五) 紀錄方式：

1.方格圖裡的數字 0 代表起始方格，1 代表走完第 1 步後所在的方格，2 代表走完第 2 步後所在的方格，3 代表......，依此類推。

2. 本作品提到的 m x n 矩形方格圖時，統一定義豎邊的長度為 m，橫邊的長度為 n。

3. 為了方便閱讀，我們有些時候會使用箭頭的符號代替已知的走法，如圖 1。

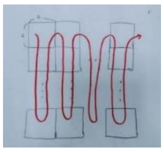
4. 因為在大小馬交錯走的登記過程中，奇數都代表大馬步，偶數都代表小馬步。為了避免數字太大導致登記錯誤，我們有些時候會將偶數改登記為 0，奇數改登記為 1 ，如圖 2，不影響我們的馬步規則。

(六) 定義 H 走法：依照我們的馬步規則，從第 0 步開始，若能依序將矩形內所有格子都恰好走完一次，類似於有漢米爾頓路徑(Hamiltonian Path)，故稱此圖形有 H 走法。考慮第 0 步後，H 走法的步數為：總格子數減 1。

(七) 圖形有解或無解：當圖形有 H 走法時，我們稱此圖形有解。如此就能接續探討圖形的解是否具唯一性？當圖形無解時，代表無 H 走法，討論步數最大值才有意義。另外，可經由旋轉或翻轉的 H 走法，我們視為同一組解。起點或終點互換的 H 走法，我們亦視為同一組解。

(八) 橫波串接法：我們創新的走法，流程類似國中理化課本教的橫波的前進方式，故命名為橫波串接法。可以解決 2 種馬步互相干擾的困境，以下為串接流程的簡圖，每個 4x4 的正方形方格圖約略走完半數的格子後，就沿著橫波的行進方向，再繼續往下完成下一個正方形的半數格子，反覆操作，直到橫波終點。讀者可先跳過這段，後文會有走法的詳細說明。

註 3：走完半數格子的意思與第 12.13 頁綠色螢光筆畫線的半成品是同一件事。



伍、研究過程

研究過程中的一至十討論大小馬交錯走的最多步，其中九驗証大小馬交錯走的結論。

十一討論小大馬交錯走的最多步。

十二討論小馬連續走的最多步，十三驗証小馬連續走的結論。

一、2 x n 方格的討論與建構，其中 n 為自然數

(一)2 x n 方格的討論

1. 2 x 1 方格最多可走 0 步 :

0

2. 2 x 2 方格最多可走 0 步 :

0	

3. 2 x 3 方格最多可走 2 步 ：

0	2	
		1

4. 2 x 4 方格有 H 走法，此解唯一，步數為 7 步 :

0	6	4	2
5	3	1	7

可簡記為

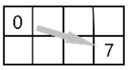
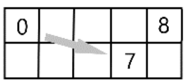


圖 1

5. 2 x 5 方格最多可走 8 步 : 如下圖，因為 2 x 5 方格中最多能放入 4 個大馬步，又每個大馬步最多能接 1 個小馬步，故最多 8 步。



(二)2 x n 方格的建構 :

我們原本打算找出 2 x n 方格的一般式，研究後發現只能分成 4 組討論，無法合併。

1. 2 x 4k 方格，有 H 走法，此解唯一，步數為(8k-1)步。

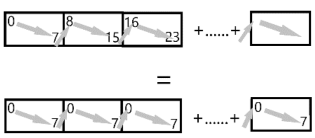
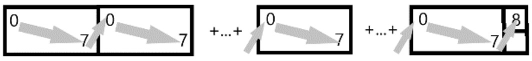
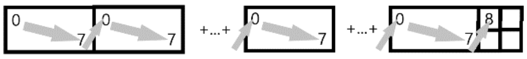


圖 2

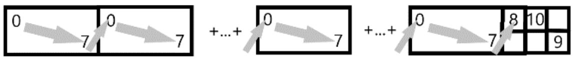
2. 2 x (4k+1)方格，最多可走 8k 步 :



3. 2 x (4k+2)方格，最多可走 8k 步 :



4. 2 x (4k+3)方格，最多可走(8k+2)步 :



二、3 x n 方格的討論與建構，其中 n 為自然數

(一) 3 x n 方格的討論 :

1. 3 x 1 方格，最多可走 0 步 :

0

或

0

2. 3 x 2 方格，最多可走 2 步 :

0	
2	
	1

3. 3 x 3 方格，最多可走 4 步 :

0		
2	4	
	1	3

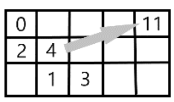
4. 3 x 4 方格，最多可走 9 步 :

0	5	3	9
2	8	6	4
7	1		

5. 3 x 5 方格，最多可走 11 步 :

0	9	7	5	11
2	4	10	8	6
	1	3		

簡記為



6. 3 x 6 方格，最多可走 13 步 :

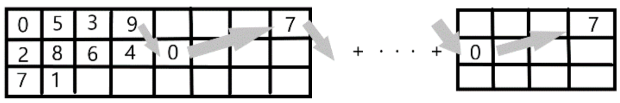
簡記為

(二) 3 x n 方格的建構 :

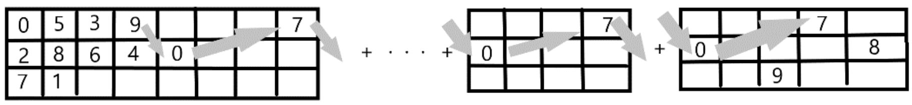
我們原本打算找出 3 x n 方格的一般式，研究後發現只能分成 4 組討論，無法合併。

我們發現，欲完成 3 x 4、3 x 5、 3 x 6 方格的最多步走法，偶數(小馬步)都需刻意放在第 2 列，故 3 x n 方格中最多有 n 個小馬步，理論上最多步數可能為(2n+1)步，如能建構出(2n+1)步的走法，則該步數必為最大值。以下為建構方式 :

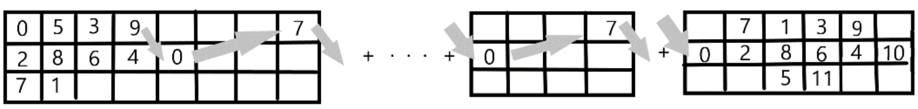
1. 3 x 4k 方格，最多可走(8k+1)步 :



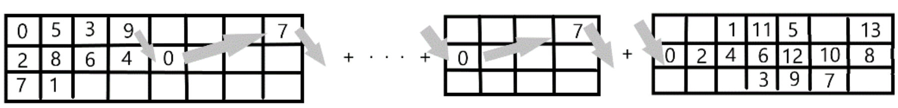
2. 3 x (4k+1)方格，最多可走(8k+3)步:



3. 3 x (4k+2)方格，最多可走(8k+5)步 :



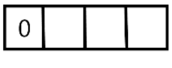
4. 3 x (4k+3)方格，最多可走(8k+7)步 :



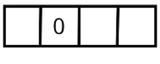
三、4 x n 方格的討論與建構，其中 n 為自然數

(一) 4 x n 方格的討論 :

1. 4 x 1 方格，最多可走 0 步 。



或



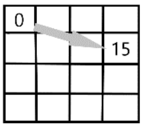
2. 4 x 2 方格，同 2 x 4 方格，有 H 走法，此解唯一，步數為 7 步 :

3. 4 x 3 方格 : 同 3 x 4 方格。

4. 4 x 4 方格 ，有 H 走法，此解唯一，步數為 15 步 。

0	10	8	6
9	7	5	15
11	1	3	13
2	12	14	4

簡記為



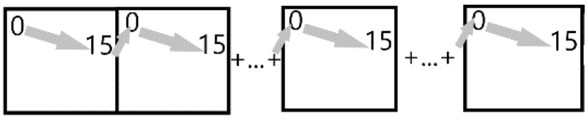
(二) 4 x n 方格的建構 :

我們原本打算找出 4 x n 方格的一般式，研究後發現只能分成 2 組討論(其中一組有 H 走法)，無法合併。有 H 走法的那一組，在研究過程中讓我們明白接點的侷限性，需要多一些的工具才能克服，故才有後文中建講工具(半成品與完成品)的發想。

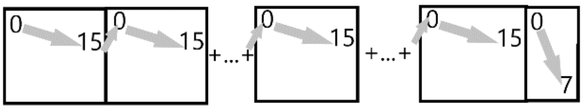
1. 4 x 偶數 n 方格有 H 走法，步數為(4n-1)步，建構如下 :

此解非唯一，亦可用後文的橫波串接法建構。

(1) 4 x 4k 方格

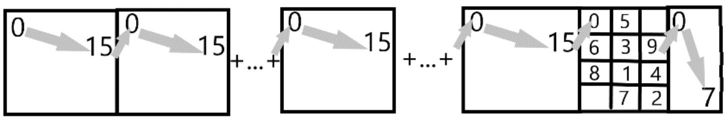


(2) 4 x (4k+2)方格

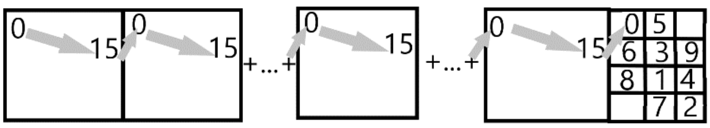


2. 4 x 奇數 n 方格，最多可走(4n-3)步，建構如下 :

(1) 4 x (4k+1)方格，最少空 2 格 :



(2) 4 x (4k+3)方格，最少空 2 格 :



四、著色法與大小馬步

(一)大馬步數至多比小馬步數多 1 :

觀察大小馬交錯走的規則，由起始點開始，依序為大馬步、小馬步、大馬步、小馬步、大馬步……(走至不能走為止)。我們發現大馬步數至多比小馬步數多 1。

(二)小黑馬步數與小白馬步數至多差 1 :

如圖 3，將矩形內的方格依序黑白著色後，我們可以將上述的小馬步細分為小黑馬步(兩端點都在黑格上)與小白馬步(兩端點都在白格上)。

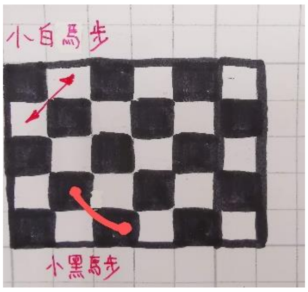


圖 3

走法若選黑色格子為起始點，依序為大馬步、小白馬步、大馬步、小黑馬步、大馬步、小白馬步、大馬步、小黑馬步……。我們發現不論起始點的顏色為何，小黑馬步數與小白馬步數至多差 1。

五、5 x n 方格的的討論(含競賽試題的分析)

4 x n 方格與著色法的內容足以接續討論任意邊長比例矩形的大小馬問題，我們討論 5 x n 方格是為了回應老師當初給我們的波羅地海競賽試題。

(一) 5 x n 方格的的討論 :

1. 5 x 1、5 x2、5 x 3、5 x 4 方格 : 同 1 x 5、2 x 5、3 x5、4 x 5 方格。
2. 5 x 5 方格，最多可走 19 步 :

如圖 4，第二列與第四列中共有 4 個黑格。

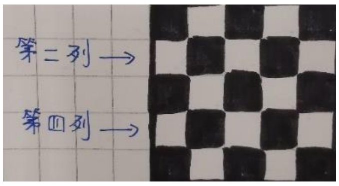
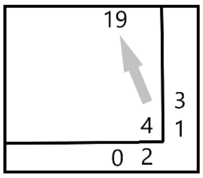


圖 4

走任意一個小黑馬步時必會用到上述的黑格之 1，所以小黑馬步數至多為 4，小白馬步數至多為 5(比 4 多 1)，合計小馬步數至多為 9。大馬步數至多為 10(比 9 多 1)，故最多步數(可能)為 19，如能建構 19 步的走法，19 即為最大步數。以下為建構細節。

8	17	19	10	
18	7	9	12	
16	5	11	14	3
6	15	13	4	1
		0	2	

簡記為



3. 5 x 6 方格，最多可走 25 步 : (競賽試題的分析)

如圖 5，第二列與第四列中共有 6 個黑格。

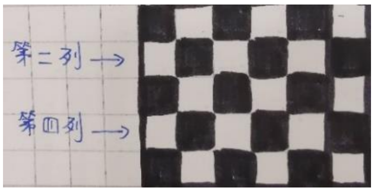


圖 5

走任意一個小黑馬步時必會用到上述的黑格之 1，所以小黑馬步數至多為 6。同理小白馬步數至多也為 6，合計小馬步數至多為 12。大馬步數至多為 13(比 12 多 1)，故最多步數(可能)為 25，如能建構 25 步的走法，25 即為最大步數。以下為建構細節，左下角的 0 為起始點。

12	5	7	14		7
6	11	13	8		
4	9	15	2		
10	3	1	16	0	
0					17

六、(偶數 m) x (偶數 n)方格的 H 走法

(一)建構半成品與完成品 :

半成品指的是將正方形方格圖裡的 16 格走完半數。若全部走完，我們稱為完成品。半成品與完成品都是為了橫波串接法做準備。

以下的簡記符號因為起始點與終點可以互換，所以常會有 2 種簡記方式。

為了討論方便，我們也會使用以打勾的符號(✓)代表已知的走法，將該格子所代表的數字省略，如下圖。

1. 建構大馬步開始的 4 x 4 半成品。

(1)

6			0
	5	7	
	3	1	
4			2

簡記為

v			0
	v	7	
	v	v	
v			v

或

✓			7
	✓	0	
	✓	✓	
✓			✓

(2)

	6	0	
5			7
3			1
	4	2	

簡記為

	v	0	
v			7
v			v
	v	v	

或

	✓	7	
✓			0
✓			✓
	✓	✓	

2. 建構大馬步開始的 4 x 4 完成品。

6	11	13	0
12	5	7	14
10	3	1	8
4	9	15	2

簡記為

v	v	v	0
v	v	v	v
v	v	v	v
v	v	15	v

或

✓	✓	✓	15
✓	✓	✓	✓
✓	✓	✓	✓
✓	✓	0	✓

3. 建構小馬步開始的 4 x 4 半成品。

(1)

7			1
	8	2	
	6	4	
5			3

簡記為

v			1
	8	v	
	v	v	
v			v

或

✓			8
	1	✓	
	✓	✓	
✓			✓

(2)

	1	7	
2			8
4			6
	3	5	

簡記為

	1	v	
v			8
v			v
	v	v	

或

	8	✓	
✓			1
✓			✓
	✓	✓	

4. 建構小馬步開始的 4 x 4 完成品。

(1)

14	7	1	16
8	13	15	2
6	11	9	4
12	5	3	10

簡記為

v	v	1	16
v	v	v	v
v	v	v	v
v	v	v	v

或

✓	✓	16	1
✓	✓	✓	✓
✓	✓	✓	✓
✓	✓	✓	✓

(2)

7	14	12	1
13	8	2	11
15	6	4	9
5	16	10	3

簡記為

v	v	v	1
v	v	v	v
v	v	v	v
v	16	v	v

或

✓	✓	✓	16
✓	✓	✓	✓
✓	✓	✓	✓
✓	1	✓	✓

(二)利用半成品與完成品建構(偶數 m) x (偶數 n)方格的 H 走法，其中 k_1 與 k_2 為自然數：

註 4：若無特別說明，我們都刻意選擇(0,0)為第 0 步，後文會再用到。

註 5 : 接下來我們會使用橫波串接法(參見第 6 頁的黃色螢光筆畫線處)，並反覆使用半成品與完成品，除了最底層的圖形使用完成品之外，其餘的正方形幾乎都是使用半成品。

1. $4k_1 \times 4k_2$ 的 H 走法。

流程圖如圖 6，串接數個相同的 $4k_1 \times 4$，即可完成建構圖圖 7-1 或圖 7-2。我們附上圖 7-2 是為了確認解法不具唯一性。

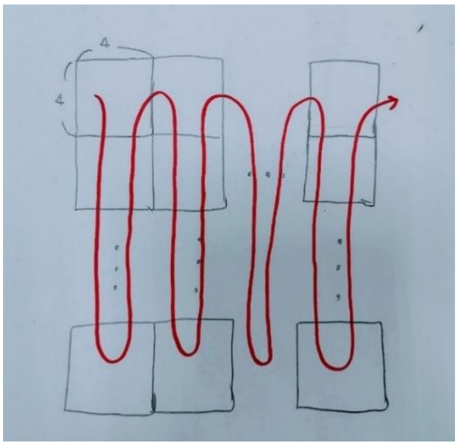


圖 6

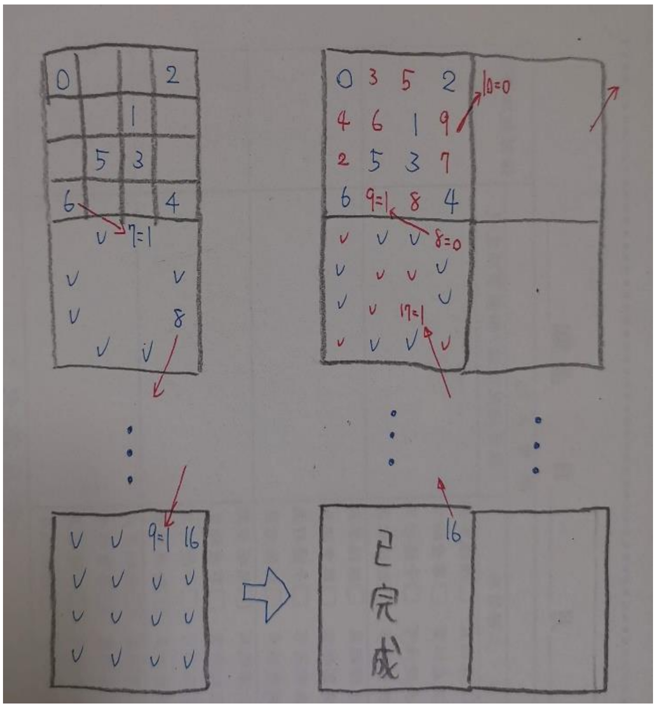


圖 7-1(藍色先，紅色後)

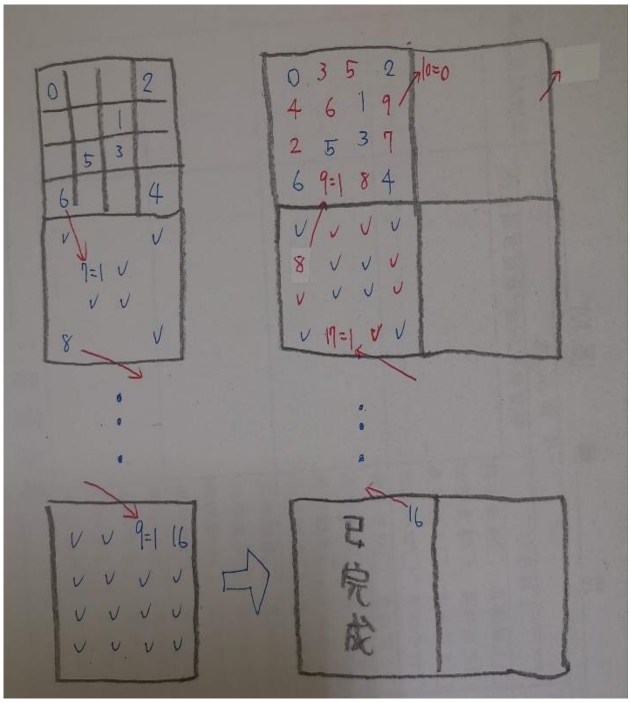


圖 7-2(藍色先，紅色後)

2. $4k_1 \times (4k_2 + 2)$ 的 H 走法。

承接圖 7-1 或圖 7-2，完成後再多串接一個 $4k_1 \times 2$，即可完成圖 8，故解法不具唯一

性。

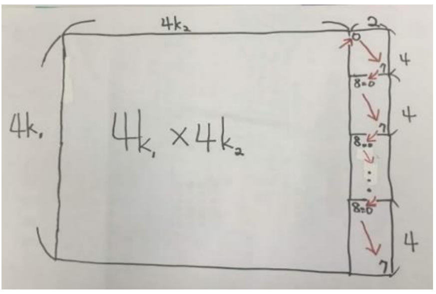
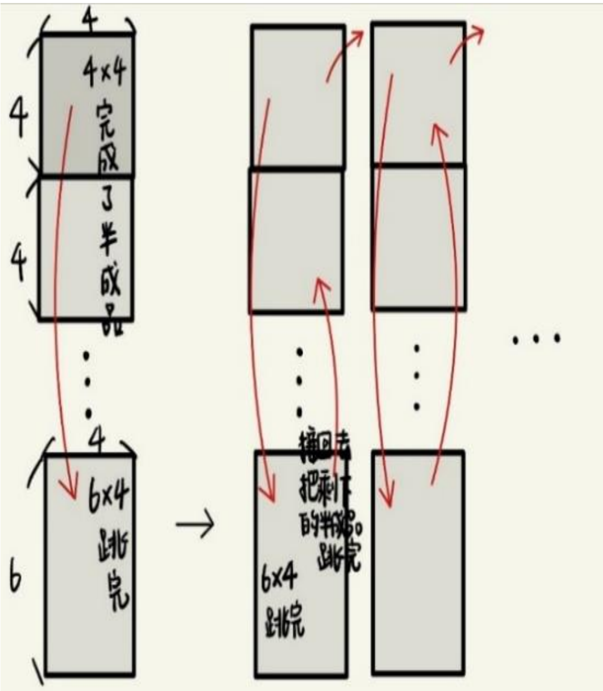


圖 8

3. $(4k_1 + 2) \times 4k_2$ 的 H 走法。

與 $4k_1 \times (4k_2 + 2)$的方格圖本質是一樣的，我們用不同方法建構，是因為後文會再到。流程圖如圖 9，串接數個相同的$(4k_1 + 2) \times 4$，即可完成建構圖圖 10。



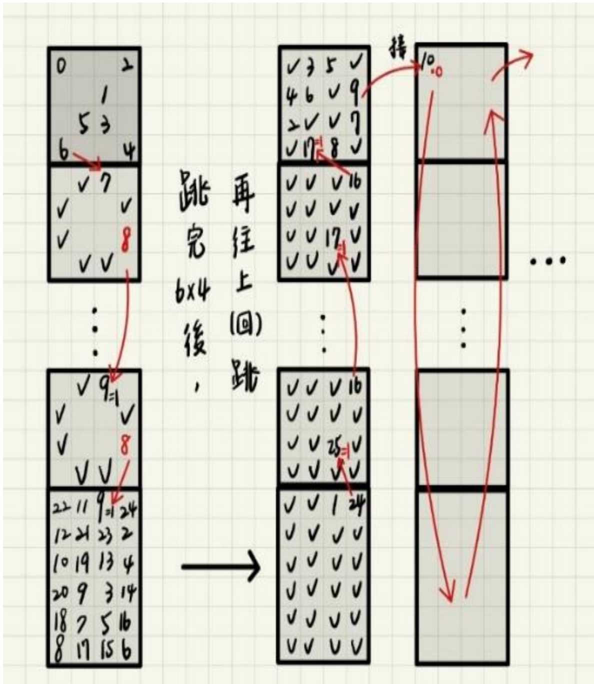


圖 9

圖 10

4. $(4k_1 + 2) \times (4k_2 + 2)$ 的 H 走法。

流程圖如圖 11，串接數個相同的$(4k_1 + 2) \times 4$，最後一個需調整為$(4k_1 + 2) \times 6$，即可完成建構圖圖 12-1 或圖 12-2。我們附上圖 12-2 是為了確認解法不具唯一性。

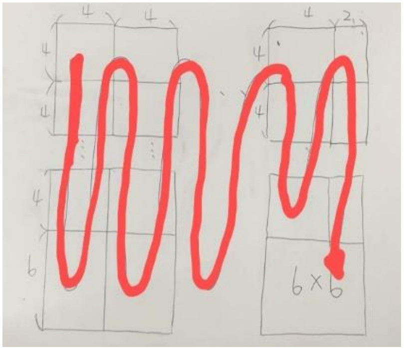


圖 11

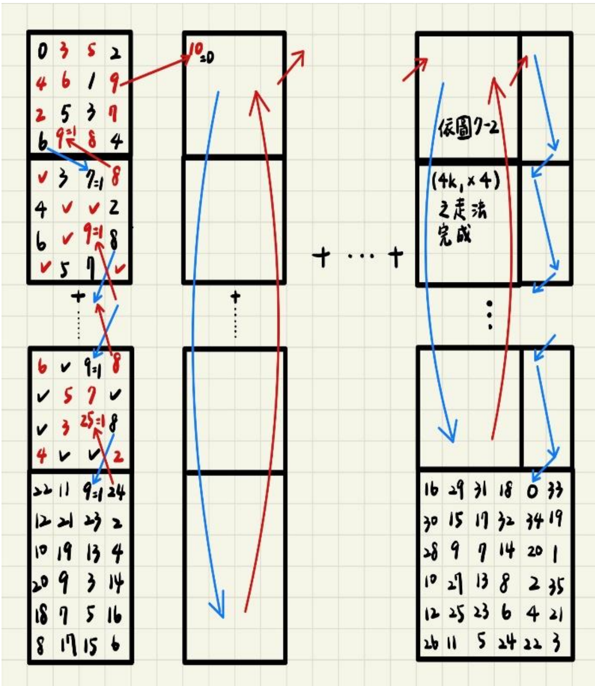


圖 12-1(黑色先，紅色後)

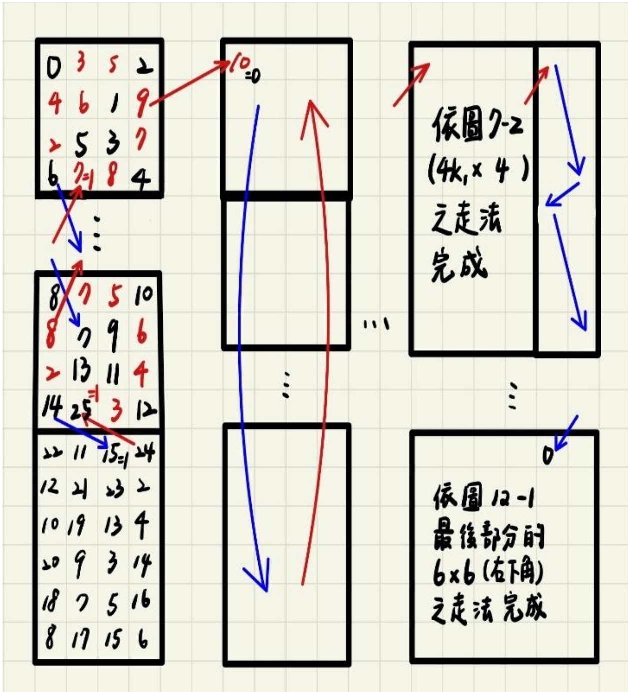


圖 12-2(黑色先，紅色後)

七、(奇數 m) x (偶數 n)方格的最多步猜想、証明與建構

(一) 猜想 :

我們猜想(奇數 m) x (偶數 n)方格的最多步數應為 : (m-1) x n + 1。

我們知道(m-1) x n 方格有 H 走法，步數為 : (m-1) x n - 1。故猜想中的最多步數應為 : 走完圖形內最大 H 走法的步數後，再多走 2 步。

(二)証明最多步 : (m-1) x n + 1

如圖 13，第二四六八......列中共有 $\frac{m-1}{2}$ x $\frac{n}{2}$ 個黑格，走任意一個小黑馬步時必會用到上述的黑格之 1。

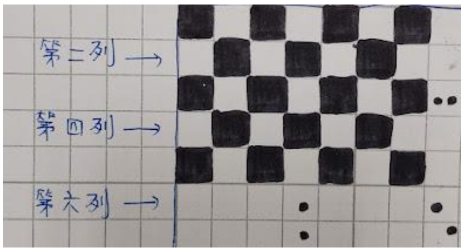


圖 13

所以小黑馬步數最多為 $\frac{m-1}{2}$ x $\frac{n}{2}$，同理小白馬步的步數同上，合計小馬步數為[$\frac{m-1}{2}$ x $\frac{n}{2}$ x 2]。又大馬步數比小馬步數至多多 1 步，故最多步數(可能)為[$\frac{m-1}{2}$ x $\frac{n}{2}$ x 2] x2+1 = (m-1) x n + 1 ，如能建構 [(m-1) x n + 1] 步數的走法，則該步數即為最大值，以下為建構細節。

(三) 建構 :

建構(奇數 m) x (偶數 n)方格的最多步走法，其中 k_1 與 k_2 為自然數 :

1.建構 $(4k_1+2) \times (4k_2+3)$方格的最多步走法 :

承接圖 12-1 或圖 12-2，我們打算將右下角的 6x6 方格擴大為 6x7 方格，並將 6x7 方格中的 6x6 方格走完，再多走 2 步，即可完成圖 14。

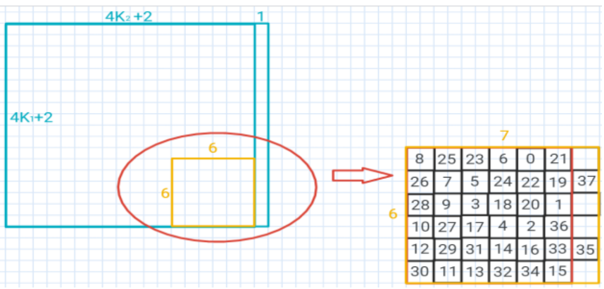


圖 14

2.建構 $(4k_1+2) \times (4k_2+1)$ 方格的最多步走法 :

承接圖 10，我們打算將右上角的 8x4 方格擴大為 8x5 方格，並將 8x5 方格中的 8x4 方格走完，再多走 2 步，即可完成圖 15。

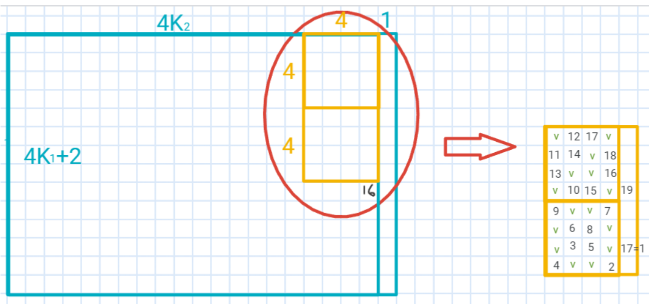


圖 15

3.建構 $4k_1 \times (4k_2+1)$ 方格的最多步走法 :

承接圖 7-1 或 7-2，我們打算將右上角的 8x4 方格擴大為 8x5 方格，並將 8x5 方格中的 8x4 方格走完，再多走 2 步，即可完成圖 16。

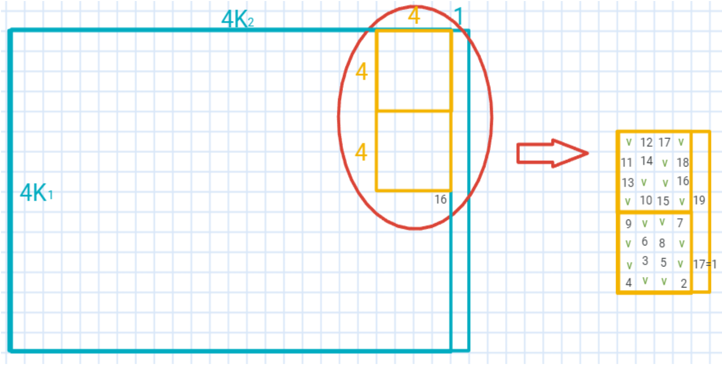


圖 16

4.建構 $4k_1$ x $(4k_2 + 3)$ 方格的最多步走法：

承接圖 8，我們打算將右上角的 8x2 方格擴大為 8x3 方格，並將 8x3 方格中的 8x2 方格走完，再多走 2 步，並往下串接數個有 H 走法的 4x2 方格，即可完成圖 17。

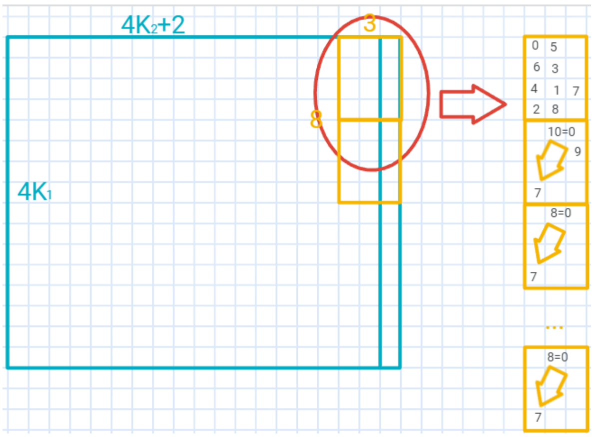


圖 17

八、(奇數 m) x (奇數 n)方格的最多步猜想、証明與建構

(一) 猜想：

我們猜想(奇數 m) x (奇數 n)方格的最多步數量應為 ：(m-1) x (n-1) +3 。

我們知道(m-1) x (n-1)方格中有 H 走法，步數為(m-1) x (n-1) – 1 。故猜想中的最多步數量應為：走完圖形內最大 H 走法的步數後，再多走 4 步。

(二)証明最多步：(m-1) x (n-1) +3

如圖 18，第二四六八......列中共有 $\frac{m-1}{2}$ x $\frac{n-1}{2}$ 個黑格，走任意一個小黑馬步時必會用到上述的黑格之 1。

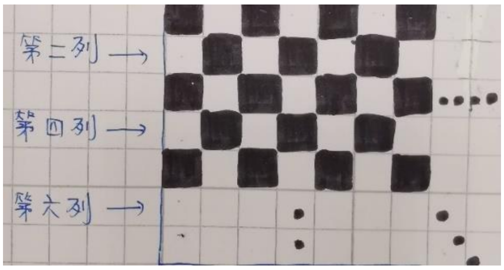


圖 18

所以小黑馬步數最多為 $\frac{m-1}{2}$ x $\frac{n-1}{2}$ ，又小白馬步的步數至多比上述多 1，合計小馬步數最多為[$\frac{m-1}{2}$ x $\frac{n-1}{2}$ x 2 +1]。又大馬步數比小馬步數至多多 1，故最多步數(可能)為[$\frac{m-1}{2}$ x $\frac{n-1}{2}$ x 2+ 1] x2+1 = (m-1) x (n-1) +3，如能建構[(m-1) x (n-1) +3]步數的走法，則該步數即為最大值，以下為建構細節。

(三) 建構：

我們知道所有(偶數 m) x (偶數 n)方格都有 H 走法，且我們建構的方式都是選(0,0)為第 0 步。我們打算將 m x n 方格擴大為(m+1) x (n+1)方格，但我們調整順序，先走完 4 格，再串接一個(偶數 m) x (偶數 n)方格的 H 走法，即可完成圖 19。

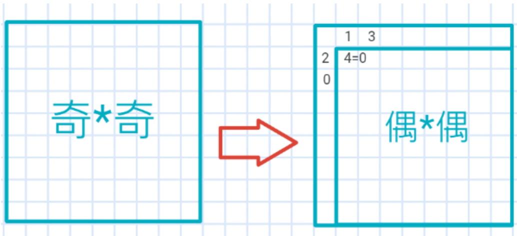


圖 19

九、演算法驗証大小馬交錯走的結論

以下參考 Yihda Yol。圖論初階(民 105) 2.2 圖的遍歷方法 DFS 4-5

(一)流程：

為了確認我們的推理，我們使用演算法中的 DFS 檢索所有分支，試圖找出有最多節點的最長分支，每個最長分支都能對應到最多步。

流程圖如圖 20，圖 21 為 3x3 的方格用 DFS 產生的搜尋樹(DFS tree)。

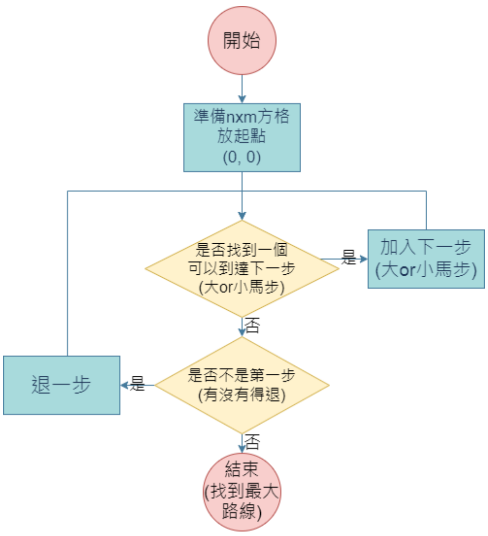


圖 20

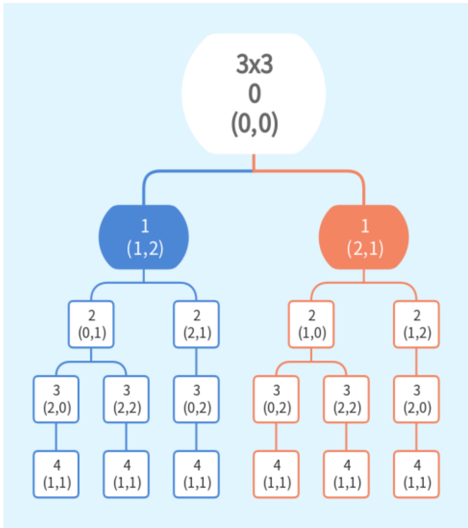


圖 21

(二)驗證：

我們原本打算找更大的矩形驗証，但因為演算法運算量有其極限，常常發生電腦的運算時間要好幾天，故選了幾個運算時間我們能接受的圖來驗証。

1. (偶數 m) x (偶數 n)的矩形：演算法是為了驗證無 H 走法的矩形，故(偶數 m) x (偶數 n)的矩形方格圖中，只需驗証 2 x (4k+2)的矩形。以 2x10 的矩形為例，如圖 22，最長 16 = 8x2，與推理結果相符。另外，我們也測試了 2 x 4k 的矩形，確認 h 走法具有唯一性。

圖 22

2. (偶數 m) x (奇數 n)的矩形：

(1) $(4k_1 + 2) \times (4k_2 + 3)$：以 6x7 為例，如圖 23，最長 37=(7-1)x6+1 ，與推理結果相符。

(2) $(4k_1 + 2) \times (4k_2+1)$：以 6x5 為例，如圖 24，最長 25 = (5-1)x6+1，與推理結果相符。

(3) $4k_1 \times (4k_2 + 1)$：以 4x5 為例，如圖 25，最長 17=(5-1)x4+1，與推理結果相符。

(4) $4k_1 \times (4k_2 + 3)$：以 4x7 為例，如圖 26，最長 25=(7-1)x4+1，與推理結果相符。

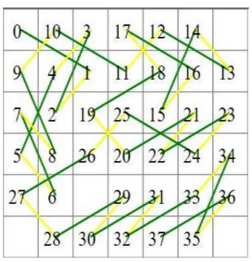


圖 23

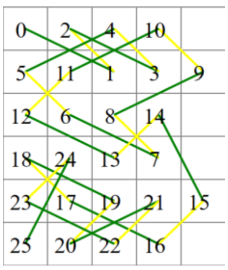


圖 24

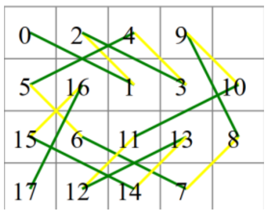


圖 25

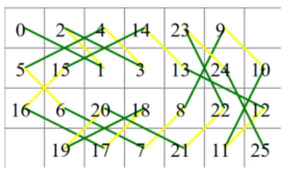


圖 26

3. (奇數 m) x (奇數 n)的矩形 : 以 5x7 為例，如圖 27，最長 27=(5-1)x(7-1)+3，與推理結果相符。

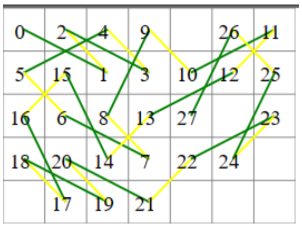
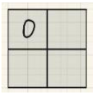
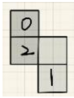
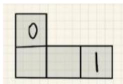
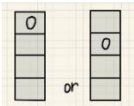
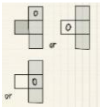


圖 27

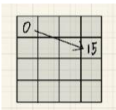
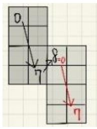
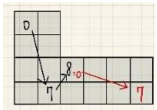
十、特殊圖形的大小馬走法

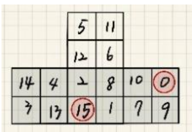
(一) 俄羅斯方塊 : 有 5 種，因為圖形太小，都沒有 H 走法。

(可經由旋轉或翻轉重合的俄羅斯方塊圖形，我們視為同一種。)

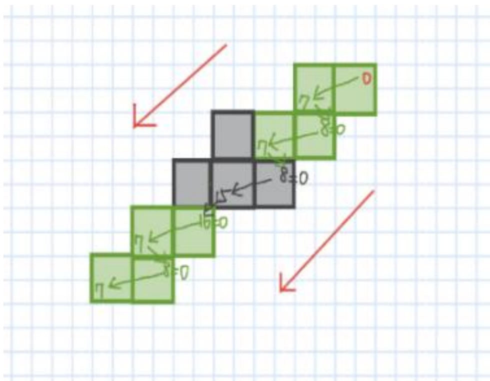
(二) 2 倍格子數的俄羅斯方塊 : 有 5 種，都有 H 走法，建構如下。其中 2 倍格子數的俄羅斯方塊指的是與一般俄羅斯方塊的形狀一樣，但格子數放大 2 倍。

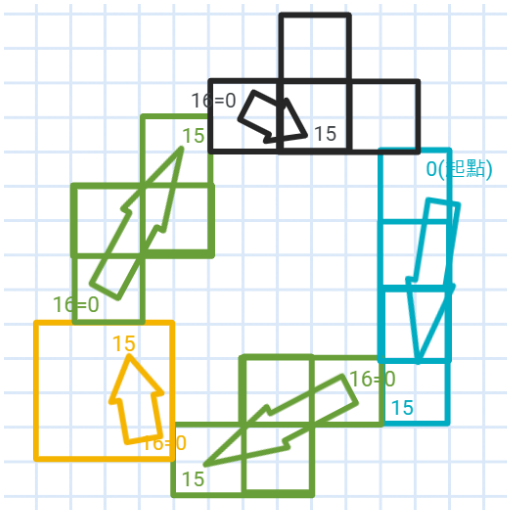


(三) 不規則圖形的 H 走法 : 建構如下。

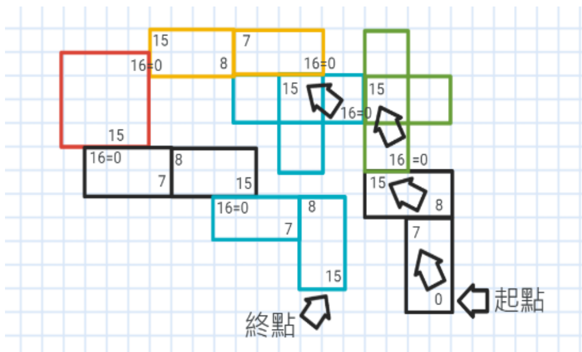
1.下階梯(右上角的紅色 0 為起點) ，如下圖 :



2.手環(右上角的藍色 0 為起點)，如下圖：



3.手槍(右下角的黑色 0 為起點)，如下圖：



十一、小大馬交錯走的最多步。

著色法依然生效，唯因小馬步為起始步，著色法的結論需調整為小馬步數至多比大馬步數多 1。另一個結論不變(小黑馬步數與小白馬步數至多差 1)。

(一) (偶數 m) x (偶數 n)方格的 H 走法與建構圖

1.$4k_1$ x $4k_2$ 的 H 走法。

流程圖如圖 6，串接數個相同的 $4k_1$ x 4，即可完成建構圖圖 28-1 或圖 28-2，其中圖 28-2 右上角的 8=0 即可再串接圖 7-1。我們附上圖 28-2 是為了確認解法不具唯一性。

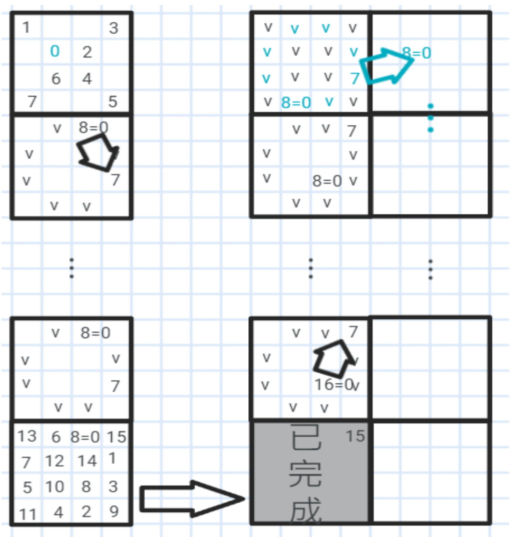


圖 28-1

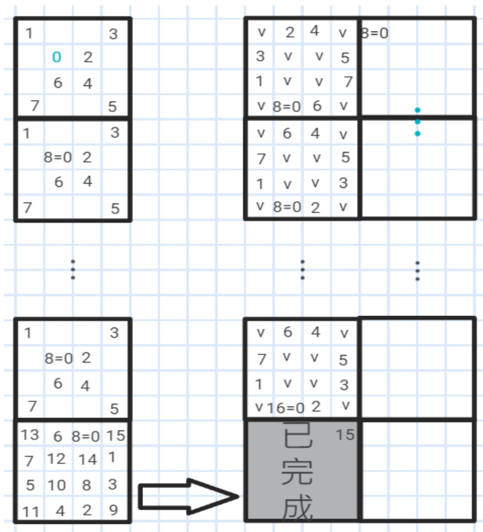


圖 28-2

2.$(4k_1 + 2) \times 4k_2$ 的 H 走法。

流程圖如圖 9，串接數個相同的$(4k_1 + 2) \times 4$，即可完成建構圖圖 29-1 或圖 29-2，其中圖 29-2 右上角的 8=0 即可再串接圖 10。我們附上圖 29-2 是為了確認解法不具唯一性。

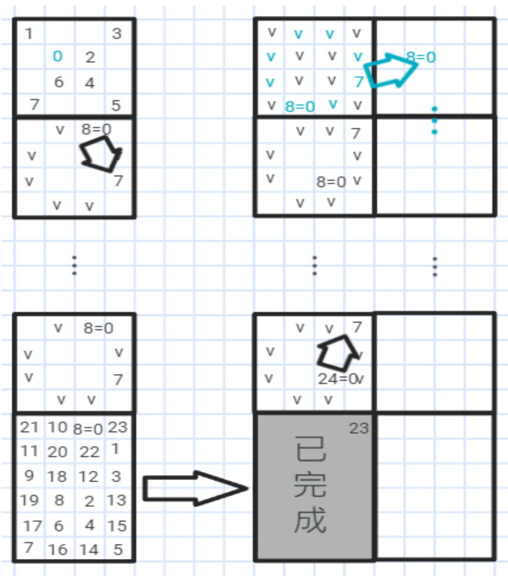


圖 29-1

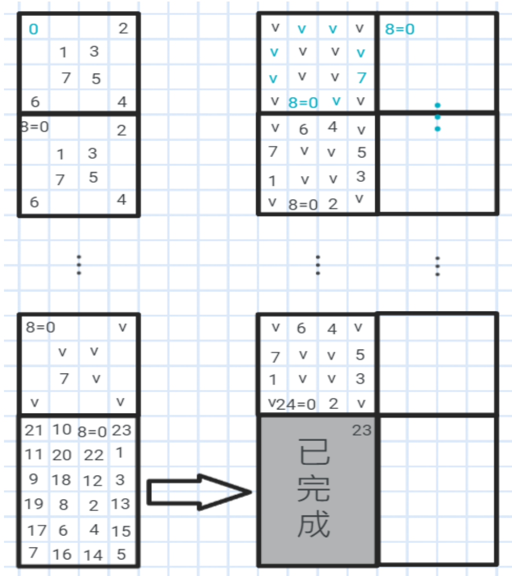


圖 29-2

3.$(4k_1 + 2) \times (4k_2 + 2)$ 的 H 走法。

流程圖如圖 30，串接數個相同的$(4k_1 + 2) \times 4$，最後一個改為$(4k_1 + 2) \times 6$ 即可完成建構圖圖 31-1 或圖 31-2。我們附上圖 31-2 是為了確認解法不具唯一性。

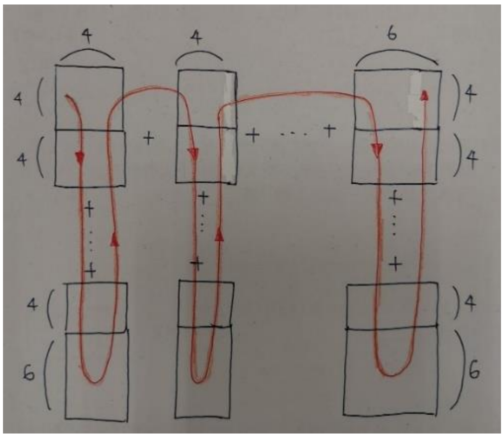


圖 30

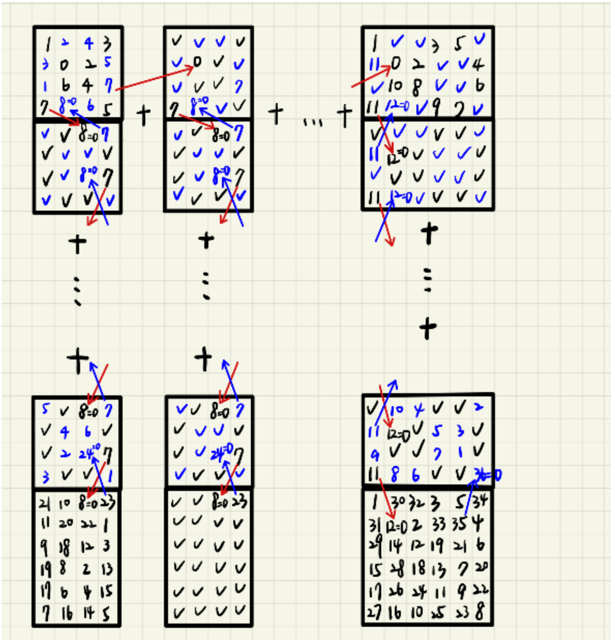


圖 31-1(黑色先，藍色後)

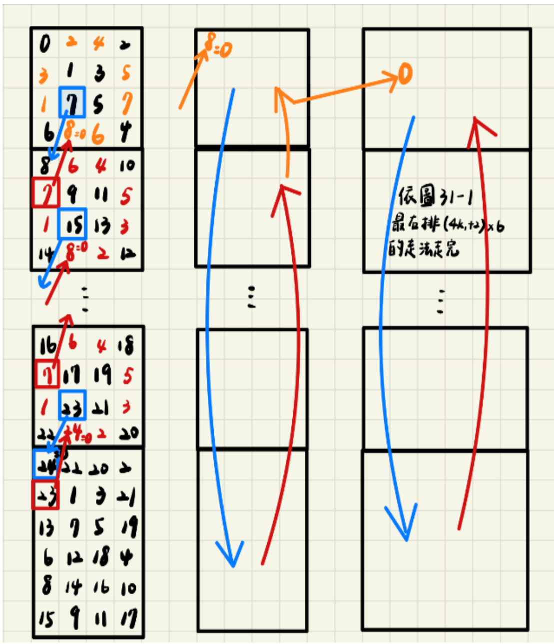


圖 31-2(黑色先走，紅色其次，黃色最後)

(二) (奇數 m) x (偶數 n)方格最多步的証明與建構

1. 証明最多步 : (m-1) x n

如圖 13，第二四六八......列中共有 $\frac{m-1}{2}$ x $\frac{n}{2}$ 個黑格，走任意一個小黑馬步時必會用到上述的黑格之 1。所以小黑馬步數最多為 $\frac{m-1}{2}$ x $\frac{n}{2}$，同理小白馬步的步數同上，合計小馬步數為[$\frac{m-1}{2}$ x $\frac{n}{2}$ x 2]。又大馬步數至多和小馬步數步相等，故最多步數(可能)為 [$\frac{m-1}{2}$ x $\frac{n}{2}$ x 2] x2 = (m-1) x n，如能建構 [(m-1) x n] 步數的走法，則該步數即為最大值。以下為建構方式。

2. 建構 :

上述圖形中，小大馬交錯僅比大小馬交錯少走 1 步。如圖 14、圖 15、圖 16、圖 17，刪去第 0 步，依 1，2，3，.....走法，即為所求。

(三) (奇數 m) x (奇數 n)方格最多步的証明與建構

1 .証明最多步：(m-1) x (n-1) +2

如圖 18，第二四六八......列中共有 $\frac{m-1}{2}$ x $\frac{n-1}{2}$ 個黑格，走任意一個小黑馬步時必會用到上述的黑格之 1。所以小黑馬步數最多為 $\frac{m-1}{2}$ x $\frac{n-1}{2}$ ，又小白馬步的步數至多比上述多 1，合計小馬步數最多為[$\frac{m-1}{2}$ x $\frac{n-1}{2}$ x 2 +1]。又大馬步數至多和小馬步數步相等，故最多步數(可能)為[$\frac{m-1}{2}$ x $\frac{n-1}{2}$ x 2+ 1] x2 = (m-1) x (n-1) +2，如能建構[(m-1) x (n-1) +2]步數的走法，則該步數即為最大值。以下為建構方式。

2.建構

上述圖形中，小大馬交錯僅比大小馬交錯少走 1 步。如圖 19，刪去第 0 步，依 1，2，3，.....走法，即為所求。

十二、小馬連續走的最多步。

因為小馬連續走的建構難度不高，但過程繁複，故以下只証明，將建構過程省略。

(一) (偶數 m) x (奇數 n)方格沒有 H 走法，最多步為 $\frac{m(n-1)}{2}$。

証明如下：

利用著色法，如下圖 32，我們將圖中的黃格分別命名為黃 1 與黃 2，若走黃格時，走法只會是 121212......或 212121...。經計算發現黃 1 總格子數為 $\frac{m(n+1)}{4}$ ，黃 2 總格子數為 $\frac{m(n-1)}{4}$。顯然黃 2 總格子數較少，又能走的格子最多為：(黃 2 總格子數)x2+1= $\frac{m(n-1)}{4}$x2+1。故最多步為上述能走的格子數減 1：$\frac{m(n-1)}{2}$。又因為黃白格對稱，走白格時結論亦同。

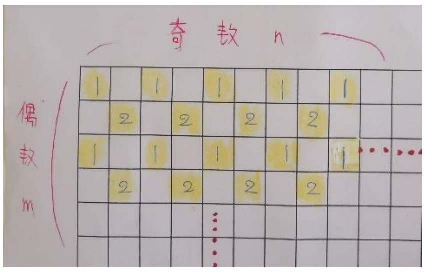


圖 32

(二) (奇數 m) x (奇數 n)方格沒有 H 走法，m≤n，最多步為 $\frac{(m-1)(n+1)}{2}$。

証明如下：

利用著色法，如下圖 33，我們將圖中的黃格分別命名為黃 1 與黃 2，圖中白格分別命名為白 3 與白 4，若走黃格時，走法只會是 121212......或 212121...。經計算發現

黃 1 總格子數為 $\frac{(m+1)(n+1)}{4}$ ，黃 2 總格子數為 $\frac{(m-1)(n-1)}{4}$。顯然黃 2 總格子數較少，故走黃格時，最多步為 : (黃 2 總格子數)x2 = $\frac{(m-1)(n-1)}{2}$。我們接著討論走白格，同理走法只會是 343434……或 434343……。經計算發現白 3 總格子數為 $\frac{(m+1)(n-1)}{4}$ ， 白 4 總格子數為 $\frac{(m-1)(n+1)}{4}$。又 m≤n，故白 4 總格子數較少，故走白格時，最多步為 : (白 4 總格子數)x2 = $\frac{(m-1)(n+1)}{2}$。我們比較走黃格與走白格的最多步，取較大值為 $\frac{(m-1)(n+1)}{2}$，得証。

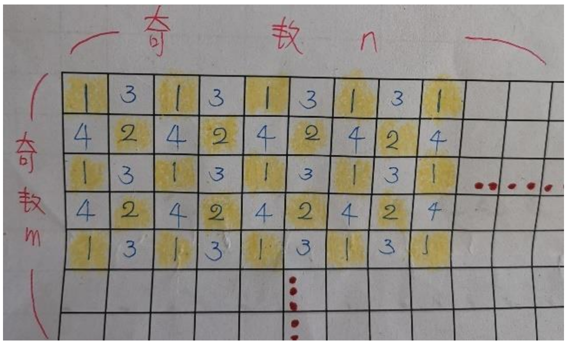


圖 33

(三) (偶數 m) x (偶數 n)方格沒有 H 走法，m≤n，最多步為 $\frac{m(n-1)}{2}$。

證明如下 :

如圖 34，因為圖形對稱，只需觀察小馬步在 1 與 2 的前進方式，經過幾次試驗，我們發現缺格皆在小馬步轉彎時發生。若未碰到邊框就提早轉彎，會出現較多缺格或持續走一小段便無法前進。因此我們選擇遇到邊框才轉彎，此時會有 2 種情況，以下詳述。

註 6 : 缺格指的是無法走到的格子。

註 7 : 轉彎指的是前進方向轉 90 或 180 度，較難用言語形容。如圖 35-1 與 35-2，我們將轉彎處用綠筆圈出來標示。

第 1 種情況 : 如圖 35-1(共轉彎 2 次，每次新增一個缺格)。

每次轉彎至少會多一個缺格，因此推論轉彎次數愈少，缺格愈少。又 m≤n，轉彎次數至少為 ($\frac{m}{2}-1$)，而缺格數同上，故走過的格子數為 : $\frac{mn}{2}-\left(\frac{m}{2}-1\right)=\frac{m(n-1)}{2}+1$，故最多步為 : $\frac{m(n-1)}{2}$。

第 2 種情況 : 如圖 35-2(共轉彎 3 次，每次新增一個缺格，但第一次轉彎無缺格)。

第一次轉彎時，有一方向轉彎後無產生缺格(此例為往下)。往下後，若希望轉彎次數最少且維持遇到邊框才轉彎的原則，總轉彎次數就會比第 1 種情況多 1 次，但考慮第一次轉彎無缺格，結論就會同第 1 種情況。

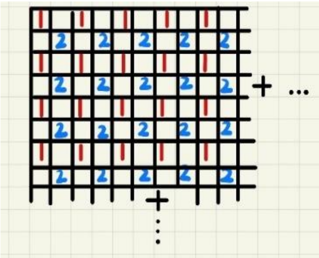


圖 34

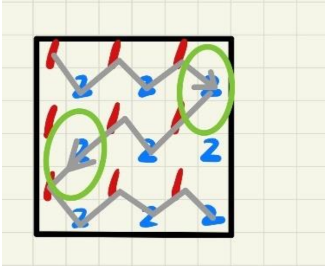


圖 35-1

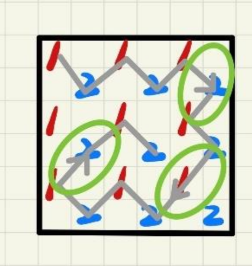
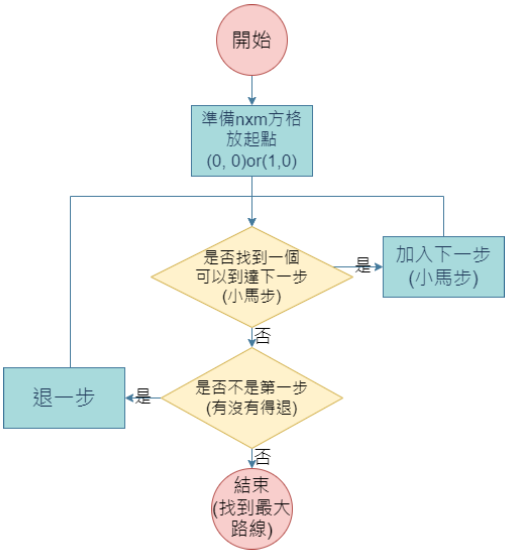


圖 35-2

十三、演算法驗証小馬連續走的結論

(一)流程：我們再次用 DFS 檢索所有分支，試圖找出有最多節點的最長分支，就能對應到最多步。流程圖如圖 36，圖 37 為 3x3 的方格用 DFS 產生的搜尋樹(DFS tree)。



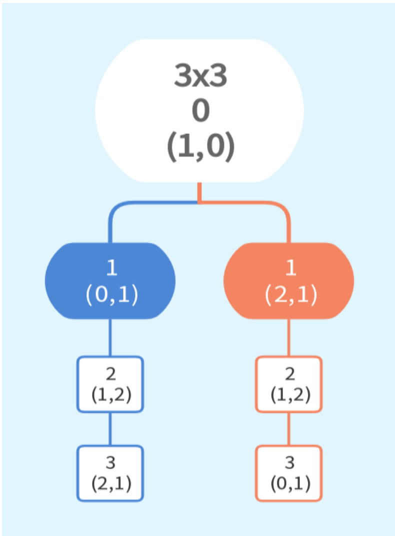


圖 36

圖 37

(二)驗證：遷就於電腦的運算時間，我們找了幾個矩形驗證。

1. (偶數 m) x (奇數 n)的矩形：

以 8x9 為例，如圖 38，最長 32=8x(9-1)/2=32，與推理結果相符。

2. (奇數 m) x (奇數 n)的矩形：

以 7x9 為例，如圖 39，最長 30=(7-1)x(9+1)/2，與推理結果相符。

3. (偶數 m) x (偶數 n)的矩形：

以 8x10 為例，如圖 40，最長 36=8x(10-1)/2=36，與推理結果相符。

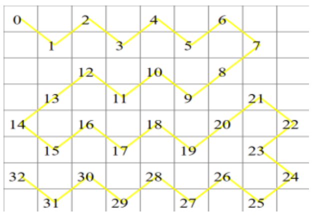


圖 38

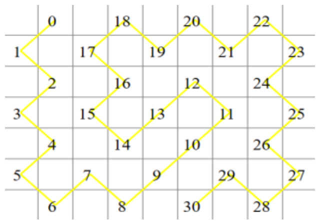


圖 39

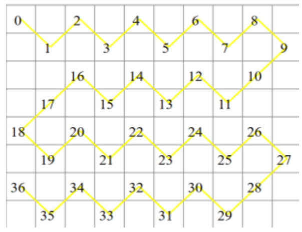


圖 40

(三)時間複雜度 O：

比較演算法的優劣在於電腦所需要的執行時間。在電腦科學中，演算法的時間複雜度是一個函數，它描述了該演算法的執行時間。時間複雜度常用大 O 符號表示，不包括這個函數的低階項和首項係數。

1. DFS 的複雜度為 O(V)，其中 V 代表樹中的節點數。樹越大，需要的時間大約是與 V 成正比，但隨著棋盤格數和形狀的成長，會產生出的節點數關係遠超過 V > (n x m)，甚至可能是 V > (n x m)^(n x m)，其中 n x m 代表方格圖中的總格子數。
2. 因為只需帶入數字運算，我們的推理結果複雜度為 O(1)，優於最大搜尋演算法。也因為只有一種馬步需要搜尋，複雜度也相對優於大小馬步交錯的演算法(九、演算法驗証大小馬交錯走的結論)。

陸、研究結果

一、大小馬交錯走：

(一) 2 x n 方格，n 與 k 為任意正整數，第 0 步座標為(0,0)。

1. 2 x 4k 方格，有 H 走法，解法唯一，步數為(8k-1)步。
2. 2 x (4k+1)方格，最多可走 8k 步。
3. 2 x (4k+2)方格，最多可走 8k 步 。
4. 2 x (4k+3)方格，最多可走(8k+2)步 。

(二) 3 x n 方格，n 與 k 為任意正整數，第 0 步座標為(0,0)。

1. 3 x 4k 方格，最多可走(8k+1)步 。
2. 3 x (4k+1)方格，最多可走(8k+3)步。
3. 3 x (4k+2)方格，最多可走(8k+5)步 。
4. 3 x (4k+3)方格，最多可走(8k+7)步 。

(三) 4 x n 方格，n 為任意正整數，第 0 步座標為(0,0)。

1. 4 x (偶數 n)方格有 H 走法，解法非唯一，步數為(4n-1)步。
2. 4 x (奇數 n)方格，最多可走(4n-3)步。

(四) (偶數 m) x (偶數 n)方格，m 與 n 皆大於或等於 8，有 H 走法，解法非唯一。

第 0 步座標為(0,0)，步數為 : m x n-1。

(五) (奇數 m) x (偶數 n)方格，m 與 n 皆大於或等於 8，沒有 H 走法。

第 0 步座標為(0,0)，最多步為 : (m-1) x n + 1。

(六) (奇數 m) x (奇數 n)方格，m 與 n 皆大於或等於 8，沒有 H 走法。

第 0 步座標為(0,2)，最多步為 : (m-1) x (n-1) +3 。

二、小大馬交錯走 : m 與 n 皆大於或等於 8

(一) (偶數 m) x (偶數 n)方格有 H 走法，解法非唯一。

第 0 步座標為(0,0)或(1,1)，步數為 : m x n-1，

(二) (奇數 m) x (偶數 n)方格沒有 H 走法

第 0 步座標為(2,1)，最多步為 : (m-1) x n 。

(三) (奇數 m) x (奇數 n)方格沒有 H 走法

第 0 步座標為(1,0)，最多步為 : (m-1) x (n-1) +2 。

三、大馬連續走 (引用第 45 屆全國科展作品 : 棋盤上的馬步) :

邊長皆大於四格任意比例的矩形方格圖都有 H 走法，解法非唯一，步數為 : 格子數 -1。

四、小馬連續走 : m 與 n 為任意正整數

(一) (偶數 m) x (奇數 n)方格，沒有 H 走法。

第 0 步座標為(0,0)，最多步為 : $\frac{m(n-1)}{2}$。

(二) (奇數 m) x (奇數 n)方格，m≤n，沒有 H 走法。

第 0 步座標為(1,0)，最多步為 : $\frac{(m-1)(n+1)}{2}$。

(三) (偶數 m) x (偶數 n)方格，m≤n，沒有 H 走法。

第 0 步座標為(0,0)，最多步為 : $\frac{m(n-1)}{2}$。

柒、結論與討論

一、結論 :

(一)大小馬交錯走 : 只有(偶數 m) x (偶數 n)方格圖有 H 走法。

(二)小大馬交錯走 : 只有(偶數 m) x (偶數 n)方格圖有 H 走法。

(三)大馬連續走 : 邊長皆大於 4 格的任意矩形方格圖都有 H 走法。

(引用第 45 屆全國科展作品 : 棋盤上的馬步)

(四) 小馬連續走 : 都沒有 H 走法。

二、討論：

(一)我們認為數學和電腦科學應該是合作而非競爭關係。本作品利用了電腦科學中的遍歷(大量檢索資料)來作為數學驗算(以實例確認答案是否正確)。我們希望利用實例，作為歸納推理與演繹推理之間溝通的橋樑。因為在處理更複雜的馬步交錯時，倘若只有演繹推理，探索期時就會令人力不從心。故對馬步有興趣的學者可以考慮調整順序，先用遍歷來歸納推理出”模糊的正確”，再用演繹推理找出”精準的證明”。

(二) 若以特殊型式的馬步交錯走，以下大代表大馬步，小代表小馬步。如：大大小大大、大大小大大大、……、大大小大大、……。是否有 H 走法？

我們猜想有 H 走法的充分條件可能為：

1.每組特殊的馬步循環中(上例為大大小大大)，至少有一步需為大馬步。

2.矩形需為(偶數 m) x (偶數 n)的方格圖。

此類問題若交由人腦探索，過程會過於繁複。建議由歸納推理(演算法或人工 AI)來協助處理，再用演繹推理找出其中的關鍵。

(三)在大小馬交錯走的規則中，我們已有所有 2 倍格子數俄羅斯方塊的 H 走法，也有 3 個特殊圖形的 H 走法，將來可再利用串接法與程式語言發展電腦遊戲，吸引有興趣的人更深入地研究。

(四) 若以特殊型式的馬步交錯走，在無解的矩形方格圖中，將原矩形分割成數個小矩形，是否存在最小的分割數？使得每一個小矩形都有 H 走法。

(五) 若以特殊型式的馬步交錯走，有 H 走法的充要條件？若有找出來，期待能給研究漢米爾頓路徑充要條件的學者一點靈感。

捌、參考資料

一、第 38 屆全國中小學科展作品(國中組)，馬步的擴張

二、第 45 屆全國中小學科展作品(國中組)，棋盤上的馬步

三、第 38 屆全國中小學科展作品(高中組)，馬步玄機

四、維基百科條目：騎士巡邏

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E9%A8%8E%E5%A3%AB%E5%B7%A1%E9%82%8F

五、Yihda Yol。圖論初階(民 105)

2.2 圖的遍歷方法 深度優先搜索（Depth-First Search, DFS）4-5

https://tioj.ck.tp.edu.tw/uploads/attachment/5/13/3.pdf

【評語】030407

由 m×n（m≤n）的長方形棋盤上一點出發，交替走馬步（棋盤上騎士的走法）、小馬步（從一個位置移到斜對角的位置），在限制走過的位置不能再走過的前提下，是否可以走遍整個棋盤？如果無法走完整個棋盤，最多可以走多少步？這是由一個競賽試題所衍生出的、非常有趣的問題。本作品的作者們針對 m≥5 的棋盤上最多能走幾步，是否可以走完棋盤這兩個問題作了完整的分析，對於 m≤4 的棋盤也做了一些討論。不論是構造下界，或是分析理論上界，都交代的很清楚，非常難得。在談完理論的部分後，又特別提到要透過程式來驗證，這部分有點奇怪。如果論述的過程沒有瑕疵，理論上會得出甚麼樣的結果是清楚的，再用程式檢驗意義不大，可以考慮刪除。針對 m=3 的情況，應該可以仿照 m=5 的論述方式說明清楚，這部分如果可以補上，那剩下的就只有 m=2 和 m=4 的情況還沒完全解決。針對這兩種情況，是否能給出一個分析理論上界的方法？如果能把這一部份補齊，作品會更完整也更好。

作品海報

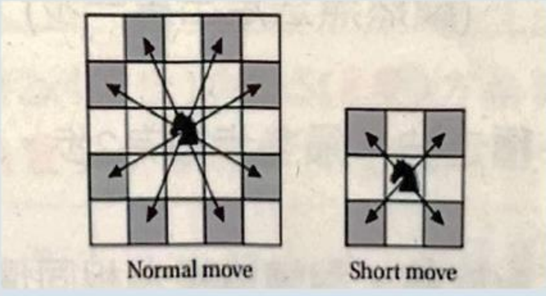
大馬小馬走天下

摘要

有個經典的騎士巡邏問題：騎士用馬步移動，每個格子至多走一次，試圖找出最多步。我們定義2x3的矩形方格圖中走對角線為大馬步，2x2的方格中走對角線為小馬步。依照大馬步、小馬步輪流交錯走，我們發現：若指定特殊起始點，在(偶數m) x (偶數n)的矩形中可以走完所有的格子。若騎士能將格子走完，本質上非常類似漢米爾頓路徑。其它無交錯的走法(如連續大馬步或連續小馬步)，我們也找出最多步的一般式。本作品的價值在於擴充馬步為**大馬步與小馬步**，推廣正方形為**任意比例的矩形**，並用深度優先搜索(Depth First Search，以下簡稱DFS)驗証結果。關鍵論証在於**著色法與DFS**，若騎士無法走完，著色法能証明步數的最大值，DFS能讀完圖中所有資訊。最多步的**一般式**紀錄於後。

壹、研究動機

某天老師介紹了Baltic Way 2017 :在5x6的方格圖中，騎士因故受傷，只能依序用大馬步(Normal move)、 小馬步(Short move)輪流交錯走。任選一格開始走且大馬步先走，每個格子至多走一次，試計算最多能走幾步？



原題目暗示著騎士走不完所有格子。我們查閱文獻後發現只走大馬步，居然可以走完邊長皆大於或等於5格的各式矩形方格圖。故我們對馬步交錯產生了好奇心，想知道馬步輪流交錯走各式矩形的最多步走法。本作品與教材相關性：在圖論中，漢米爾頓路徑是在無向圖或有向圖中，恰好能將圖中所有點各拜訪一次的路徑。我們研究主題中的每個方格都可以對應到點，每個馬步都可以對應到邊，故我們的作品就能轉換到漢米爾頓路徑。不過漢米爾頓路徑複雜度過高，本作品可視為漢米爾頓路徑的一個問題。(引用自維基百科：騎士巡邏)

貳、研究目的

矩形方格圖中，每個格子至多走一次，走至不能走為止。
依照以下三種不同的馬步規則，找出各式矩形的最多步走法。
並用DFS驗証結論是否正確？

一、依照大小馬步輪流交錯走的規則(大馬先走)。
二、依照小大馬步輪流交錯走的規則(小馬先走) 。
三、依照小馬步連續走(每一步都走小馬步)。

參、文獻回顧

一、**漢米爾頓路徑(Hamitonian Path)**：閱讀圖論的文獻後發現，尤拉路徑已有學者找到充要條件，但漢米爾頓路徑目前雖有愈來愈進步的充分條件，但離充要條件還有一段距離。

二、**騎士巡邏(Knight's tour)**的文獻策略：(一)串接法。(二)洋蔥法。 (三)迷宮法。 (四) 自由度法。

三、前述文獻對我們問題的侷限：(後文會簡述侷限的細節)(引用自棋盤上的馬步)

(一)串接法的侷限：受限於接點的位置固定。 (二)洋蔥法的侷限： 最內層的形狀會變形。

(三)迷宮法的侷限： 沒有固定的起點與終點。 (四)自由度法的侷限： 每個格子會有2個自由度。

肆、定義名詞與符號

一、定義名詞：

(一) 1.大馬步：如圖1，類似於2X3或3X2方格圖的對角線，大馬步共有8種走法。

2. 小馬步：如圖2，類似於2X2方格圖的對角線，小馬步共有4種走法。

(二) 座標表示法：在演算法中，為了要表示點的位置，我們使用座標系統，X,Y坐標軸如圖3。

圖1

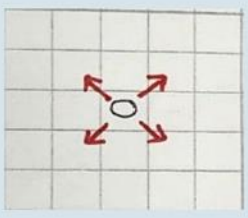


圖2

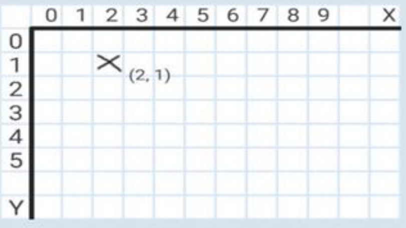


圖3

(三) 第0步：我們指定**特殊的一個格子**當第0步，通常為(0,0)，之後依馬步規則依序放上棋子並紀錄。

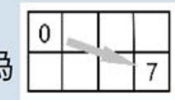
(四) 各式馬步走法的規則 (每個格子至多走一次，走至不能走為止)：

1.大小馬交錯走：第0步後，第1步為大馬步，第2步為小馬步，之後大小馬步輪流交錯走。
2.小大馬交錯走：第0步後，第1步為小馬步，第2步為大馬步，之後小大馬步輪流交錯走。
3.大馬連續走：第0步後，第1.2.3...步都為大馬步。
4.小馬連續走：第0步後，第1.2.3...步都為小馬步。

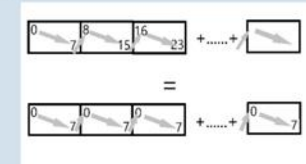
(五) 紀錄方式：

1. 數字0代表第0步，1代表走完第1步後所在的方格，2代表走完第2步後所在的方格，以下同理。
2. 本作品提到的m x n矩形方格圖時，統一定義豎邊的長度為m，橫邊的長度為n。
3. 為了方便閱讀，我們有些時候會使用**箭頭的符號**代替已知的走法，如

0	6	4	2
5	3	1	7

可簡記為  。

4. 在大小馬交錯走的規則中，**奇數都代表大馬步，偶數都代表小馬步**。但在登記的過程中，為了方便，我們有些時候會將**偶數改登記為0，奇數改登記為1**，如右圖。同理小大馬交錯走的規則中，我們一樣會調整偶數與奇數。調整數字並不會影響矩形是否能走完的結論。



(六) 定義H走法：從第0步開始，若能依序將矩形內**所有格子**都恰好走完一次，類似於有漢米爾頓路徑(Hamiltonian Path)， 故稱此圖形有H走法。考慮第0步後，H走法的步數為：總格子數減1。

(七) 圖形有解或無解：當圖形有H走法時，我們稱此圖形有解。如此就能接續探討圖形的解是否具唯一性？當圖形無解時，代表無H走法，討論步數最大值才有意義。

另外，可經由旋轉或翻轉的H走法，我們視為同一組解。起點或終點互換的H走法，我們亦視為同一組解。

伍、研究過程

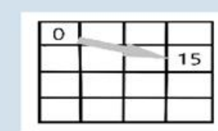
一、大小馬交錯走的最多步

(一) 4 x n方格的討論：4 x 4方格 ，有H走法，此解非唯一：

0	10	8	6
9	7	5	15
11	1	3	13
2	12	14	4

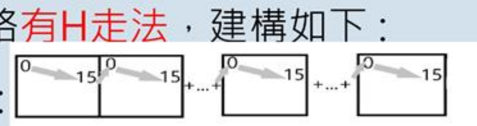
或

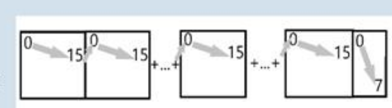
0	14	8	2
13	7	1	15
11	5	3	9
6	12	10	4

可簡記為 

(二) 4 x n方格的建構：

1. 4 x 偶數n方格有H走法，建構如下：

(1) 4 x 4k方格： 

(2) 4 x (4k+2)方格： 

2. 4 x 奇數n方格，沒有H走法，最多步省略。

(三)著色法：如圖4，將矩形方格依序黑白著色後，我們可以將上述的小馬步細分為小黑馬步(兩端點都在黑格上)與小白馬步(兩端點都在白格上)。我們發現不論起始點的顏色為何，小黑馬步數與小白馬步數至多差1。

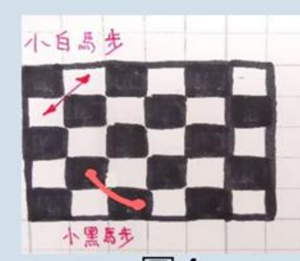
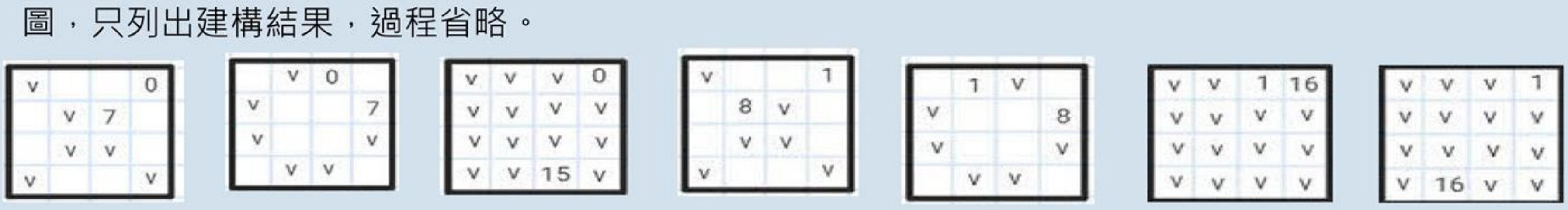


圖4

(四) (偶數m) x (偶數n)方格的H走法

1.建構半成品與完成品：半成品指的是將正方形方格圖裡的16格走完半數。若全部走完，我們稱為完成品。半成品與完成品都是為了橫波串接法做準備。以下的簡記符號因為起始點與終點可以互換，所以常會有2種簡記方式。為了討論方便，我們也會使用以打勾的符號(✓)代表已知的走法，將該格子所代表的數字省略，以下7個圖，只列出建構結果，過程省略。



2.利用半成品與完成品建構(偶數m) x (偶數n)方格的H走法，其中k_1與k_2為自然數：

接下來我們會使用**橫波串接法**(流程如圖5，類似國中理化課本教的橫波的前進方式)，並反覆使用半成品與完成品，除了最底層的圖形使用完成品之外，其餘的正方形幾乎都是使用半成品。串接數個相同的$4k_1$ x 4(圖6左)，即可建構$4k_1$ x $4k_2$ (圖6右)。每個4x4的正方形方格圖約略走完半數的格子後，就沿著橫波的行進方向，再繼續往下完成下一個正方形的半數格子，反覆操作，直到橫波終點才停止。其它情況的(偶數m)x(偶數n)也都有H走法，建構方式省略。

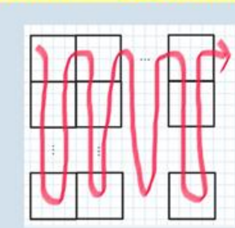


圖5

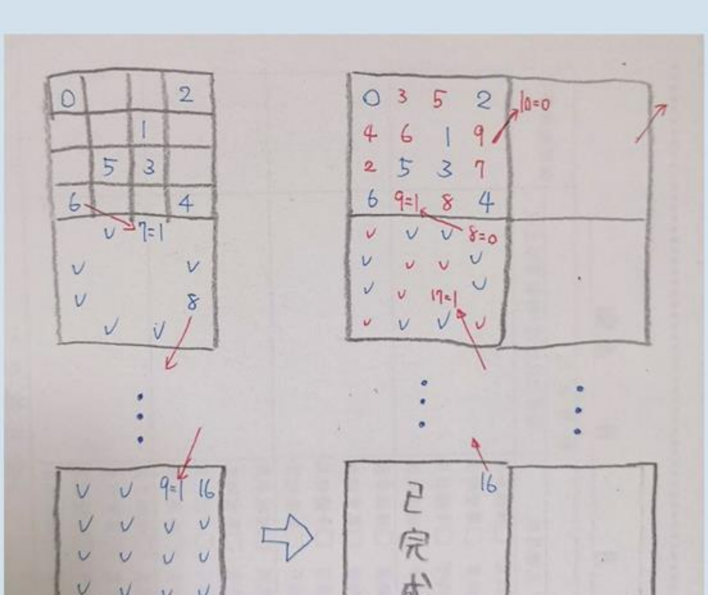
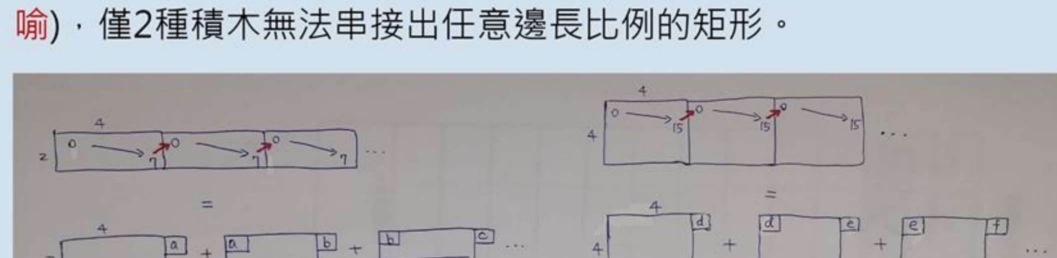


圖6左　　圖6右(藍色先走，紅色後走)

(1) 串接法的侷限：如下圖，類似於手邊只有2種積木數個(接點用a.b.c...比喻)，僅2種積木無法串接出任意邊長比例的矩形。



(2)洋蔥法的侷限： 如下圖，最內層的形狀會變形。

(五) (偶數m) x (偶數n)之外其它的矩形都沒有H走法：都可利用著色法証明最多步，也都可利用橫波串接法建構圖形。

(六)演算法驗証大小馬交錯走的結論：

使用演算法中的DFS檢索所有分支，每個最長分支都能對應到最多步。流程圖如圖7，圖8為3x3的方格用DFS產生的搜尋樹(DFS tree)，可以驗証我們的結論是否正確。(引用自圖論初階)

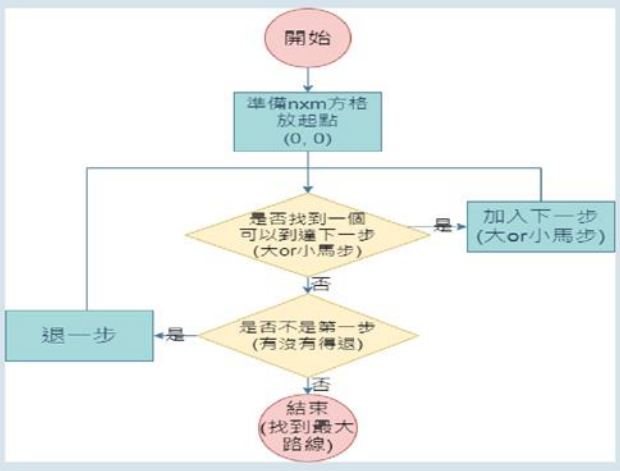


圖7

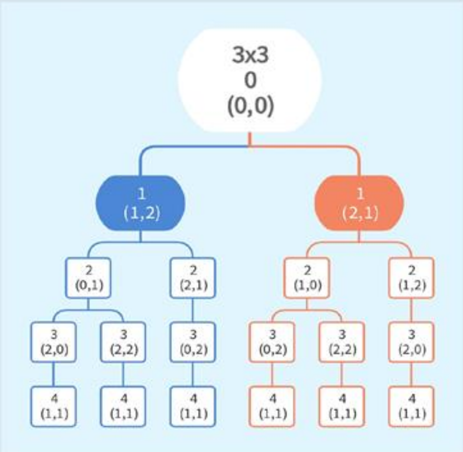


圖8

二、小大馬交錯走的最多步：可以利用著色法証明最多步，也可利用橫波串接法建構圖形。

部分結論同大小馬交錯走：只有長寬皆為偶數才有H走法。其它無H走法的矩形，最多步比大小馬交錯走少1步。

三、小馬連續走的最多步：不論矩形的比例為何，都沒有H走法。都可利用著色法証明最多步。

陸、研究結果

一、有一邊長小於或等於5格的矩形，除了下面的2組矩形之外，都沒有H走法，

(一) 2 x 4k方格，**有H走法，解法唯一**，第0步座標為(0,0)。

(二) 4 x (偶數n)方格，**有H走法，解法非唯一**，第0步座標為(0,0)。

二、大小馬交錯走的最多步：m與n皆大於或等於8

(一) (偶數m) x (偶數n)方格，**有H走法，解法非唯一**，第0步座標為(0,0) 。

(二) (奇數m) x (偶數n)方格，沒有H走法，最多步為：(m-1) x n+1，第0步座標為(0,0)。

(三) (奇數m) x (奇數n)方格，沒有H走法，最多步為：(m-1) x (n-1)+3，第0步座標為(0,2)。

三、小大馬交錯的最多步：m與n皆大於或等於8

(一) (偶數m) x (偶數n)方格**有H走法，解法非唯一**，第0步座標為(0,0)或(1,1)。

(二) (奇數m) x (偶數n)方格沒有H走法，最多步為：(m-1) x n，第0步座標為(2,1)。

(三) (奇數m) x (奇數n)方格沒有H走法，最多步為：(m-1) x (n-1)+2，第0步座標為(1,0)。

四、大馬連續走的最多步：邊長皆大於或等於5格的矩形**有H走法**。 (引用自棋盤上的馬步)

五、小馬連續走的最多步：m與n為任意正整數

(一) (偶數m) x (奇數n)方格，沒有H走法，最多步為 $\frac{m(n-1)}{2}$ ，第0步座標為(0,0)。

(二) (奇數m) x (奇數n)方格，m≤n，沒有H走法，最多步為 $\frac{(m-1)(n+1)}{2}$ ，第0步座標為(1,0)。

(三) (偶數m) x (偶數n)方格，m≤n，沒有H走法，最多步為 $\frac{m(n-1)}{2}$ ，第0步座標為(0,0)。

柒、結論與未來展望

一、結論：矩形方格圖中

(一)大小馬交錯走有H走法的充要條件：長寬皆為偶數。

(二)小大馬交錯走有H走法的充要條件：長寬皆為偶數。

(三)小馬連續走：都沒有H走法。

(四)大馬連續走有H走法的充要條件：長寬皆需大於或等於5格。(引用自棋盤上的馬步)

二、未來展望：

(一)本作品利用了電腦科學中的遍歷(大量檢索資料)來作為數學驗算(以實例確認答案是否正確)。我們希望利用實例，作為歸納推理與演繹推理之間溝通的橋樑。故對馬步有興趣的學者可以考慮調整順序，先用遍歷來歸納推理出 "模糊的正確" ，再用演繹推理找出 "精準的證明" 。

(二) 若以任意型式的不同馬步交錯走，有H走法的充要條件為何？若有找出來，期待能給研究漢米爾頓路徑充要條件的學者一點靈感。

(三) 若以任意型式的不同馬步交錯走，在無解的矩形方格圖中，將原矩形分割成數個小矩形，是否存在最小的分割數？使得每一個小矩形都有H走法。

捌、參考資料

一、科展作品：第45屆棋盤上的馬步

二、維基百科：騎士巡邏

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E9%A8%8E%E5%A3%AB%E5%B7%A1%E9%82%8F

三、Yihda Yol。圖論初階(民105)　https://tioj.ck.tp.edu.tw/uploads/attachment/5/13/3.pdf