中華民國第 63 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030406

變色龍的神奇方陣

學校名稱： 新北市立福和國民中學

作者：	指導老師：
國二 蔡湧潔 國二 江佳臻 國二 江昱嫺	黃元占

關鍵詞： 基本變換、最少變換、方陣

摘要

在制定的變換規則下，找出**六種變換性質**，探討 *n* 種變色龍中只有兩種變色龍的數量發生改變，稱為**基本變換**。我們以 *n=4* 為例，列出變換次數與基本變換數碼之方程式，令第一種變色龍的變換次數為零，以最簡單整數比求出所有變色龍的變換次數與基本變換數碼。接著以相同的方法完成 *n=5*、*n=6*，並將結果寫成方陣。

觀察方陣，發現其中有基本變換式的存在，即形成差成等比的基本變換數列，經由算式推導後可得**基本變換數碼的三個疊代關係式**，及**基本變換數碼的一般式**，另外我們也發現基本變換方陣具有**對稱性**，並以數學歸納法證明之。在我們了解基本變換的特性後，便可以另一種方式完成方陣，讓填寫方陣能更快速。

壹、前言

一、研究動機

我們在《台灣網路科教館》找到一個題目：「一個島上有銅色、銀色、金色三種變色龍共 62、70、68 隻；生物學家發現當兩隻不同顏色的變色龍相遇時，這兩隻會同時變成第三種顏色。一名生物數學家研究這個現象後，斷定這 200 隻變色龍有機會全部變成同一種顏色。結果還真的發生了！請問是怎麼變的？這個顏色是什麼？」[1] 我們發現，**只要其中任意兩種變色龍的數量對 3 同餘即可**[2]。我們對這個數學問題非常有興趣，想進一步深入了解。

二、研究目的

(一)在制定的規則之下，發現變換的性質，利用這些性質作為本研究的方法

(二)尋找基本變換的特性，發現基本變換式及基本變換數碼， 並推導出基本變換數碼之遞迴關係式及一般式

(三)將各基本變換模式寫成基本變換方陣，發現具有對稱性，並證明其對稱性

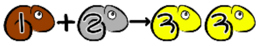
貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦

參、研究過程與方法

前述的題目還可繼續推廣至四種變色龍，當其中三隻不同顏色的變色龍相遇時，會同時變成第四種顏色，在第 60 屆中小學科學展覽會－國小組：變色龍問題探討[3]我們發現**若其中任意三種變色龍的數量對 4 同餘即可**；以此類推， n 種變色龍中，**若其中任意 $n-1$ 種變色龍的數量對 n 同餘即可**。因此我們想改變規則，使得題目產生一些變化，看看能不能發現有趣的結果。

一、規則

假設共有 n 種變色龍，分別為 1 號變色龍、 2 號變色龍、 3 號變色龍…… n 號變色龍，簡稱 M_1、M_2、M_3……M_n；規定只有在連續兩號變色龍各一隻相遇時，才會同時變為下一號變色龍，並且可循環，稱之為**變換**。例如：  以符號表示為 ： $1M_1+1M_2\to 2M_3$，$1M_2+1M_3\to 2M_4$，……$1M_{n-1}+1M_n\to 2M_1$，$1M_n+1M_1\to 2M_2$。且**不連續號碼的變色龍相遇不會產生變化**。

二、名詞定義

(一)x_t：第 t 號變色龍 M_t 的變換次數，即 x_t 隻 $t-2$ 號變色龍 M_{t-2} 與 x_t 隻 $t-1$ 號變色龍M_{t-1} 相遇，同時變為 $2x_t$ 隻 t 號變色龍 M_t（$3\le t\le n$），即 $x_tM_{t-2}+x_tM_{t-1}\to 2x_tM_t$（$3\le t\le n$），另外：$x_1M_{n-1}+x_1M_n\to 2x_1M_1$；$x_2M_n+x_2M_1\to 2x_2M_2$。

(二)基本變換：若 n 種變色龍僅其中兩種產生變化且變化量最少，即 $(-k_n,k_n)$，同時變換次數亦最少。例如：當 $n=3$ 時，若 M_1、M_2、M_3 的最少變化量為 -3、0、3，此時 $x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=2$ 為最少變換次數。

(三)**基本變換數碼 k_n**：n 種變色龍完成一種基本變換後的最少變化量。例如：當 $n=3$ 時，基本變換數碼 $k_3=3$ 為最少變化量。

(四) **基本變換數列**：數列 $\langle a_n\rangle$ 中任意連續三項之關係式為 $\boldsymbol{2a_{t-2}=a_{t-1}+a_t}$ $\boldsymbol{(3\le t\le n)}$，例如：$\langle a_n\rangle$：11,10,12,8,16。

(五) **基本變換式**：基本變換數列 $\langle a_n\rangle$ 中任意連續三項的關係式 $\boldsymbol{2a_{t-2}=a_{t-1}+a_t}$ **$\boldsymbol{(3\le t\le n)}$ 稱為基本變換式**。

三、性質研究

（一）性質一：任何變換之後，總量不變

若 $x_t = p \qquad (p \in N)$

$$\begin{array}{ccc} M_{t-2} & M_{t-1} & M_t \\ -p & -p & +2p \end{array}$$

$(-p)+(-p)+2p=0$

（二）性質二：加法變換

以四種變色龍為例：

1.若第一次變換 $x_3 = 4$，$x_4 = 7$，第二次變換 $x_1 = 3$，$x_3 = 5$

$$\begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ -4 & -4 & 8 & \\ & -7 & -7 & 14 \\ \hline -4 & -11 & 1 & 14 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ 6 & & -3 & -3 \\ -5 & -5 & 10 & \\ \hline 1 & -5 & 7 & -3 \end{array}$$

兩次變換結果疊加

$$\begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ -4 & -11 & 1 & 14 \\ 1 & -5 & 7 & -3 \\ \hline -3 & -16 & 8 & 11 \end{array}$$

2.將兩次變換合併為一次

$x_1 = 3$，$x_3 = 9$，$x_4 = 7$

$$\begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ 6 & & -3 & -3 \\ -9 & -9 & 18 & \\ & -7 & -7 & 14 \\ \hline -3 & -16 & 8 & 11 \end{array}$$

變換可疊加

（三）性質三：倍數變換

以四種變色龍為例：

1.若 $x_3 = 2$，$x_4 = 3$

$$
\begin{array}{cccc}
M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\
-2 & -2 & 4 & \\
 & -3 & -3 & 6 \\
\hline
-2 & -5 & 1 & 6
\end{array}
$$

2.若 $x_3 = 2p$，$x_4 = 3p$ $(p \in N)$

$$
\begin{array}{cccc}
M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\
-2p & -2p & 4P & \\
 & -3p & -3p & 6p \\
\hline
-2p & -5p & p & 6p
\end{array}
$$

若所有變換皆變為 p 倍，則所有變色龍的變化量也變為 p 倍。

（四）性質四：變換的交換律

若經過兩次變換，第一次 $x_3 = 1$，第二次 $x_4 = 1$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\
\text{第一次} & -1 & -1 & 2 & \\
\text{第二次} & & -1 & -1 & 2 \\
\hline
 & -1 & -2 & 1 & 2
\end{array}
$$

將兩次變換順序互調，即第一次 $x_4 = 1$，第二次 $x_3 = 1$

	M_1	M_2	M_3	M_4
第一次		-1	-1	2
第二次	-1	-1	2	
	-1	-2	1	2

我們發現結果相同，表示 x_t 具有變換的交換律。

（五）**性質五：單位變換**

若所有變色龍皆變換一次，即 $x_1 = 1$，$x_2 = 1$……$x_n = 1$

M_1	M_2	M_3	$\cdots$	M_{n-2}	M_{n-1}	M
2			$\cdots$		-1	-1
-1	2					-1
-1	-1	2				
	-1	-1	2			
			$\cdots$			
			-1	-1	2	
			$\cdots$	-1	-1	2
0	0	0	$\cdots$	0	0	0

結果所有變色龍數量皆不變，稱為**單位變換**。

（六）**性質六：最少變換**

由**性質五單位變換**得知，若所有變換皆增加 p $(p \in N)$，僅會增加變換次數，不會影響各變色龍最終變量；同理，在不產生負數的情況之下，若所有變換皆減少 p，僅減少變換次數，不會影響各變色龍最終變量。因此，我們可以將所有變換皆減少 p，使得原本各變色龍的變換中，次數最少的變為 0，此時總變換次數必最少。例：

x_1	x_2	x_3	x_4
2	3	4	5

≡

x_1	x_2	x_3	x_4
1	2	3	4

≡

x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	2	3

最少變換為 $x_1 = 0$，$x_2 = 1$，$x_3 = 2$，$x_4 = 3$。

肆、研究結果

一、基本變換之研究

1. $n = 4$

假設其中兩種變色龍數量變化為 $-k_4, k_4$，其餘皆不變，且固定 M_1 之變化量為 $-k_4$，則共有三種不同的模式

(1) M_1 模式 1

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4
變化量	$-k_4$	0	0	k_4

$$
\begin{array}{cccc}
M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\
2x_1 & & -x_1 & -x_1 \\
-x_2 & 2x_2 & & -x_2 \\
-x_3 & -x_3 & 2x_3 & \\
 & -x_4 & -x_4 & 2x_4 \\
\hline
-k_4 & 0 & 0 & k_4
\end{array}
$$

可得到 4 個方程式：

$$
\begin{aligned}
&2x_1 - x_2 - x_3 = -k_4 \\
&2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\
&2x_3 - x_4 - x_1 = 0 \\
&2x_4 - x_1 - x_2 = k_4
\end{aligned}
$$

依據**最少變換性質**，由於 M_1 減少最多，因此令 $x_1 = 0$，並將方程式寫成增廣矩陣

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & -k_4 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & k_4 \end{array}\right] \end{array}$$

依據**總量不變性質**，第 4 列必然成立，因此可將第 4 列刪除，再將各列同乘（-1）

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & k_4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

由第 3 列可得 $x_3：x_4 = 1：2$

代入第 2 列可得 $x_2：x_3：x_4 = 3：2：4$

代入第 1 列可得 $x_2：x_3：k_4 = 3：2：5$

x_2, x_3, x_4, k_4 皆為正整數

可得最少變換：$x_1 = 0$，$x_2 = 3$，$x_3 = 2$，$x_4 = 4$，此時 $k_4 = 5$

我們將上列過程表格化：

	x_2	x_3	x_4
由第 3 列		1	2
代入第 2 列	**3**	**2**	**4**

由第 1 列得到**基本變換數碼** $k_4 = x_2 + x_3 = 5$

(2) M_1 模式 2

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4
變化量	$-k_4$	0	k_4	0

得增廣矩陣

$$\begin{array}{c} \quad x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & k_4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

	x_2	x_3	x_4
由第 3 列	2		1
代入第 2 列	**2**	**3**	**1**

由第 1 列得到**基本變換數碼　$k_4 = 2 + 3 = 5$**

(3) M_1模式 3

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4
變化量	$-k_4$	k_4	0	0

$$\begin{array}{c} \quad x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & k_4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

x_2	x_3	x_4
	1	2
4	**1**	**2**

基本變換數碼　$k_4 = 4 + 1 = 5$

將以上三種基本變換模式之結果寫成基本變換方陣

x_2	x_3	x_4
3	2	4
2	3	1
4	1	2

2. $n = 5$

假設其中兩種變色龍數量變化為 $-k_5, k_5$ ，其餘皆不變，且固定 M_1 之變化量為 $-k_5$ ，則共有四種不同的模式

(1) M_1 模式 1

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
變化量	$-k_5$	0	0	0	k_5

$$\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & k_5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

x_2	x_3	x_4	x_5
		1	2
	3	2	4
5	**6**	**4**	**8**

$$\boldsymbol{k_5 = 5 + 6 = 11}$$

(2) M_1模式 2

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
變化量	$-k_5$	0	0	k_5	0

$$\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & k_5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

x_2	x_3	x_4	x_5
2			1
6	**5**	**7**	**3**

$$\boldsymbol{k_5 = 6 + 5 = 11}$$

(3) M_1模式 3

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
變化量	$-k_5$	0	k_5	0	0

$$
\begin{array}{cccc}
x_2 & x_3 & x_4 & x_5
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & k_5 \\
-2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -2 & 0
\end{array}\right]
$$

x_2	x_3	x_4	x_5
2			1
4		1	2
4	**7**	**1**	**2**

$\boldsymbol{k_5 = 4 + 7 = 11}$

(4) M_1模式 4

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
變化量	$-k_5$	k_5	0	0	0

$$
\begin{array}{cccc}
\mathrm{x}_2 & \mathrm{x}_3 & \mathrm{x}_4 & \mathrm{x}_5
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{k}_5 \\
0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -2 & 0
\end{array}\right]
$$

x_2	x_3	x_4	x_5
2			1
4		1	2
8	**3**	**2**	**4**

$\boldsymbol{k_5 = 8 + 3 = 11}$

將以上四種基本變換模式之結果寫成基本變換方陣

x_2	x_3	x_4	x_5
5	6	4	8
6	5	7	3
4	7	1	2
8	3	2	4

3. $n = 6$

假設其中兩種變色龍數量變化為 $-k_6, k_6$ ，其餘皆不變，且固定 M_1 之變化量為 $-k_6$ ，則共有五種不同的模式

(1) M_1模式 1

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
變化量	$-k_6$	0	0	0	0	k_6

$$\begin{array}{ccccc} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & k_6 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			1	2
		3	2	4
	5	6	4	8
11	**10**	**12**	**8**	**16**

$\boldsymbol{k_6 = 11 + 10 = 21}$

(2) M_1模式 2

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
變化量	$-k_6$	0	0	0	k_6	0

$$\begin{array}{ccccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & k_6 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2				1
10	**11**	**9**	**13**	**5**

$$\boldsymbol{k_6 = 10 + 11 = 21}$$

(3) M_1模式 3

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
變化量	$-k_6$	0	0	k_6	0	0

$$\begin{array}{ccccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & k_6 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2				1
4			1	2
4	3	5	1	2
12	**9**	**15**	**3**	**6**

$$\boldsymbol{k_6 = 12 + 9 = 21}$$

[註]：M_1模式3所得到之k_6值與其他模式不同，原因將在「討論」中說明，此處先將求得之x值皆變為3倍，使得$k_6 = 21$

(4) M_1模式 4

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
變化量	$-k_6$	0	k_6	0	0	0

$$\begin{array}{ccccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & k_6 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2				1
4			1	2
8		3	2	4
8	**13**	**3**	**2**	**4**

$$\boldsymbol{k_6 = 8 + 13 = 21}$$

(5) M_1模式 5

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
變化量	$-k_6$	k_6	0	0	0	0

$$\begin{array}{ccccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & k_6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2				1
4			1	2
8		3	2	4
16	**5**	**6**	**4**	**8**

$$\boldsymbol{k_6 = 16 + 5 = 21}$$

將以上五種基本變換模式之結果寫成基本變換方陣

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
11	10	12	8	16
10	11	9	13	5
12	9	15	3	6
8	13	3	2	4
16	5	6	4	8

二、基本變換方陣之研究

1.我們觀察以上三種基本變換方陣

$n = 4$, $k_4 = 5$

表 1、$n = 4$ 的基本變換方陣

3	2	4
2	3	1
4	1	2

$n = 5$, $k_5 = 11$

表 2、$n = 5$ 的基本變換方陣

5	6	4	8
6	5	7	3
4	7	1	2
8	3	2	4

$n = 6$, $k_6 = 21$

表 3、$n = 6$ 的基本變換方陣

11	10	12	8	16
10	11	9	13	5
12	9	15	3	6
8	13	3	2	4
16	5	6	4	8

發現具有下列特性：

(1)每一列從左邊第一個數字向右至黃色數字，為一差成等比的數列（公比$r=-2$)

(2)每一列從黃色數字向右至最後一個數字，為一差成等比的數列（公比$r=-2$）

(3) $n=t$ 時，基本變換方陣之基本變換數碼 k_t 值為各列前 2 格之和，且皆出現在 $n=t+1$ 時，基本變換方陣之左上角，$k_4=5$，$k_5=11$，$k_6=21$。

(4)每一基本變換方陣，關於左上至右下之對角線對稱

2.我們發現基本變換方陣各列中，連續三項多存在有**基本變換式**的關係，進而將此關係數列化。

(1) 數列〈a_n〉: $\boldsymbol{2a_{t-2}=a_{t-1}+a_t}$（$3\le t\le n$）

$$\Rightarrow a_t=2a_{t-2}-a_{t-1}$$

$$\begin{aligned}a_t-a_{t-1}&=2a_{t-2}-a_{t-1}-a_{t-1}\\&=2(a_{t-2}-a_{t-1})\\&=-2(a_{t-1}-a_{t-2})\end{aligned}$$

〈a_n〉各項滿足基本變換式，我們稱之為**基本變換數列**，其差成等比，令差 $d_{t-1}=a_t-a_{t-1}$ 則 $d_{t-1}=(-2)d_{t-2}$

觀察數列〈d_n〉: 若首項 $d_1=1$，則 $d_2=-2$，$d_3=4$，$d_4=-8$……為公比 $r=-2$ 的等比數列。此數列的等比級數：

$$Sd_n=a_{n+1}-a_1=\frac{d_1(1-r^n)}{1-r}=\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}=\frac{1-(-2)^n}{3}$$

$$Sd_1=\frac{1-(-2)}{3}=1$$

$$Sd_2=\frac{1-(-2)^2}{3}=-1$$

$$Sd_3=\frac{1-(-2)^3}{3}=3$$

$$Sd_4=\frac{1-(-2)^4}{3}=-5$$

……

$$2Sd_n - Sd_{n+1} = \frac{2[1-(-2)^n]}{3} - \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} = \frac{1+2(-2)^{n+1}}{3} = \frac{1-(-2)^{n+2}}{3} = Sd_{n+2}$$

將 Sd_n 取絕對值：$|Sd_1| = 1$，$|Sd_2| = 1$，$|Sd_3| = 3$，$|Sd_4| = 5$……

我們發現 $\boldsymbol{k_n = |Sd_n| = |a_{n+1} - a_1|}$

由於 $Sd_n = \frac{1-(-2)^n}{3} > 0$（$n$ 為奇數）

$Sd_n = \frac{1-(-2)^n}{3} < 0$（$n$ 為偶數）

因此 $2|Sd_n| + |Sd_{n+1}| = |Sd_{n+2}|$

$\boldsymbol{\Rightarrow 2k_n + k_{n+1} = k_{n+2}}$

基本變換數碼 $\boldsymbol{k_n}$ 為基本變換的最少變量，也是基本變換數列第 1 項與第 $\boldsymbol{n+1}$ 項的差：$\boldsymbol{k_n = |Sd_n| = |a_{n+1} - a_1|}$

其疊代關係式為 $\boldsymbol{2k_n + k_{n+1} = k_{n+2}}$，其中 $\boldsymbol{k_n = |Sd_n| = \left|\frac{1-(-2)^n}{3}\right|}$

(2) 若〈d_n〉首項 $d_1 = -1$，則數列全部變號，Sd_n 亦變號，但取絕對值後則相同，故 $2k_n + k_{n+1} = k_{n+2}$ 亦成立，其中 $k_n = \left|\frac{(-1)[1-(-2)^n]}{3}\right| = |Sd_n|$

我們發現 $k_5 = 2k_4 + 1$，$k_6 = 2k_5 - 1$，因此進一步研究其規律性：

(3) 若 $k_{n+1} = 2k_n + 1$

則 $k_{n+1} = k_{n+2} - k_{n+1} + 1$

$k_{n+2} = 2k_{n+1} - 1$

若 $k_{n+1} = 2k_n - 1$

則 $k_{n+1} = k_{n+2} - k_{n+1} - 1$

$k_{n+2} = 2k_{n+1} + 1$

基本變換數碼的第二個疊代關係式為

$$\boldsymbol{\begin{cases} k_{n+1} = 2k_n - 1 \text{（}n\text{為奇數）} \\ k_{n+1} = 2k_n + 1 \text{（}n\text{為偶數）} \end{cases} \Rightarrow k_{n+1} = 2k_n + (-1)^n}$$

(4) 由基本變換式可求得 k_1, k_2, k_3

$2k_n + k_{n+1} = k_{n+2}$

$2k_3 + k_4 = k_5$

$2k_3 + 5 = 11$

$\Rightarrow k_3 = 3$

$2k_2 + k_3 = k_4$

$2k_2 + 3 = 5$

$\Rightarrow k_2 = 1$

$2k_1 + k_2 = k_3$

$2k_1 + 1 = 3$

$\Rightarrow k_1 = 1$

因此前述之基本變換數碼的兩個疊代關係式皆適用於（$1 \le n$）

(5) $k_1 + k_2 = 2$

$k_2 + k_3 = k_2 + 2k_1 + k_2$

$= 2(k_1 + k_2)$

$k_1 + k_2 = 2$ ……①

$k_2 + k_3 = 2(k_1 + k_2)$ ……②

$k_3 + k_4 = 2(k_2 + k_3)$ ……③

……　$k_n + k_{n+1} = 2(k_{n-1} + k_n)$ ……ⓝ

①到ⓝ左邊相乘=①到ⓝ右邊相乘，可得 k_n

基本變換數碼的第三個疊代關係式為 $\boldsymbol{k_n + k_{n+1} = 2^n}$

(6) $k_{n+2} = k_{n+1} + 2k_n$

$x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 2, -1$

設$k_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot (-1)^n$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 = 2\alpha - \beta \\ k_2 = 1 = 4\alpha + \beta \end{cases}$$

$6\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \beta = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow k_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n$

基本變換數碼的一般式為 $\boldsymbol{k_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}}$

3.我們瞭解了基本變換方陣中各基本變換的特性之後，便可以另一種方式填寫出基本變換方陣。以 $n=6$ 為例，我們將填寫基本變換方陣分為幾個步驟進行：

(1)各列中之基本變換式若碰到 $x_1=0$，則會剩下簡單的數字比（-2）：1，此時可優先填入比例，如表 4 (可參考前述之增廣矩陣)。

表 4、優先填入比例

模式 1				1	2
模式 2	2				1
模式 3	4			1	2
模式 4	4			1	2
模式 5	4			1	2

(2)各列中之藍色格起向右三格無基本變換式，因此藍色格為各列中之基本變換式斷點，基本變換數列分成左、右兩部分，由最右側數字向左填至黃色格，此部分皆有基本變換數列關係，在避免出現非整數的情況下，先酌量放大比例之後再向左填寫，如表 5、表 6。

表 5、放大比例

			8	16	$\times 2^3$
2				1	
4			1	2	
8			2	4	$\times 2$
16			4	8	$\times 2^2$

表 6、向左填至黃色格

11	10	12	8	16
2				1
4			1	2
8		3	2	4
16	5	6	4	8

(3)各列中由最左側數字向右填至黃色格，如下表 7、表 8，此部分皆有基本變換數列關係，但各列只有頭尾數字已知，填寫比較煩瑣，第 4 列有 2 個差，$k_2=1$，第 3 列有 3 個差，$k_3=3$，第 2 列有 4 個差，$k_4=5$，但實際的頭尾數字差值，第 4 列 $8-3=5$，第 3 列 $4-1=3$，第 2 列 $2-1=1$，在避免出現非整數的情況下，第 4 列須將公比 (-2) 變為 5 倍，第 3 列即為 M_1 模式 3，原本不需調整，但為維持對稱關係，仍將整列公比變為 3 倍，第 2 列整列變為 5 倍，此過程稱為**反向交疊**。最後再以基本變換數列關係完成方陣。

表 7、反向交疊

11	10	12	8	16	
10				5	× 5
12			3	6	× 3
8		3	2	4	× 1
16	5	6	4	8	

表 8、向右填至黃色格

11	10	12	8	16
10	11	9	13	5
12	9	15	3	6
8	13	3	2	4
16	5	6	4	8

4. 基本變換方陣中各模式之間具有關聯性，以 $n = 6$ 為例，M_1 模式 3 為 M_1 模式 2 與 M_5 模式 1 之和

表 9 、基本變換方陣中各模式之間的關聯性

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
變化量	$-k_6$	0	0	0	k_6	0

M_1 模式 2

+

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
變化量	0	0	0	k_6	$-k_6$	0

M_5模式 1

=

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
變化量	$-k_6$	0	0	k_6	0	0

M_1 模式 3

依據**加法變換性質**

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	10	11	9	13	5

M_1模式 2

+

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
10	12	8	16	0	11

M_5 模式 1

=

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
10	22	19	25	13	16

依據**最少變換性質**

=

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	12	9	15	3	6

M_1模式 3

⇒即為基本變換方陣第 3 列

由此可知，基本變換方陣之任一列，均可由其他列，依**加法變換性質**以及**最少變換性質**求得。我們可由上述觀點來說明基本變換方陣之對稱關係。

5.基本變換方陣對稱關係之證明：

n 種變色龍之基本變換方陣大小為 $(n-1) \times (n-1)$，令第 i 列第 j 行 x 為 $x_{i,j}$，$(i,j \in N)$

表 10、$j = 1$ 時，方陣的對稱性

$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\cdots$	$x_{1,r}$	$x_{1,r+1}$	$\cdots$	$x_{1,n-2}$	$x_{1,n-1}$
$x_{2,1}$							
$\vdots$							
$x_{r,1}$							
$x_{r+1,1}$							
$\vdots$							
$x_{n-2,1}$							
$x_{n-1,1}$							

利用**數學歸納法**證明

$j = 1$，如表 10

(1) $i = 1$ 時，$x_{1,1} = x_{1,1}$（$x_{1,1}$在對稱軸上）

(2) $i = 2$ 時，$x_{2,1} = x_{1,1} + x_{1,2} - x_{1,1} = x_{1,2}$ （M_1 模式 $2 = M_1$ 模式 $1 + M_n$ 模式 $1 -$ 單位變換 $x_{1,1}$）

(3) $i = 3$ 時， $x_{3,1} = x_{2,1} + x_{1,3} - x_{1,2} = x_{1,3}$（$M_1$ 模式 $3 = M_1$ 模式 $2 + M_{n-1}$ 模式$1 -$ 單位變換 $x_{1,2}$）

(4)若 $i = r$ 時，$x_{r,1} = x_{1,r}$ 成立

則 $i = r + 1$ 時，$x_{r+1,1} = x_{r,1} + x_{1,r+1} - x_{1,r} = x_{1,r+1}$ （M_1 模式 $r + 1 = M_1$ 模式 $r + M_{n-r+1}$ 模式 $1 -$ 單位變換 $x_{1,r}$）

故 $x_{i,1} = x_{1,i}$ 成立（$1 \le i \le n - 1$ ，$i \in N$）

第一行與第一列關於斜對角線對稱

$j = 2$，如表 11

(1) $i = 1$ 時，$x_{1,2} = x_{2,1}$（已證）

(2) $i = 2$ 時，$x_{2,2} = x_{2,2}$（$x_{2,2}$在對稱軸上）

(3) $i = 3$ 時，$x_{3,2} = x_{1,2} + x_{2,3} - x_{2,1} = x_{2,3}$ （M_1 模式 $3 = M_1$ 模式 $1 + M_n$ 模式 $2 -$ 單位變換 $x_{2,1}$）

(4)若 $i=r$ 時，$x_{r,2}=x_{2,r}$ 成立

則 $i=r+2$ 時，$x_{r+2,2}=x_{r,2}+x_{2,r+2}-x_{2,r}=x_{2,r+2}$（$M_1$ 模式 $r+2=M_1$ 模式 $r+M_{n-r+1}$ 模式 $2-$ 單位變換 $x_{2,r}$）

故 $x_{i,2}=x_{2,i}$ 成立（$1\leq i\leq n-1$，$i\in N$）

第二行與第二列關於斜對角線對稱

表 11、$j=2$ 時，方陣的對稱性

	$x_{1,2}$							
$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$\cdots$	$x_{2,r}$	$x_{2,r+1}$	$x_{2,r+2}$	$\cdots$	$x_{2,n-2}$	$x_{2,n-1}$
	$\vdots$							
	$x_{r,2}$							
	$x_{r+1,2}$							
	$x_{r+2,2}$							
	$\vdots$							
	$x_{n-2,2}$							
	$x_{n-1,2}$							

$j=s$，如表 12

(1) $i=1\cdots\cdots s$ 時，$x_{i,s}=x_{s,i}$（已證）

(2) $i=s+1$ 時，$x_{s+1,s}=x_{1,s}+x_{s,s+1}-x_{s,1}=x_{s,s+1}$（$M_1$ 模式 $s+1=M_1$ 模式 $1+M_n$ 模式 $s-$ 單位變換 $x_{s,1}$）

(3)若 $i=r$ 時，$x_{r,s}=x_{s,r}$ 成立

則 $i=r+s$ 時，$x_{r+s,s}=x_{r,s}+x_{s,r+s}-x_{s,r}=x_{s,r+s}$（$M_1$ 模式 $r+s=M_1$ 模式 $r+M_{n-r+1}$ 模式 $s-$ 單位變換 $x_{s,r}$）

故 $x_{i,s}=x_{s,i}$ 成立（$1\leq i\leq n-1$，$i\in N$）

第 s 行與第 s 列關於斜對角線對稱

表 12、$j = s$ 時，方陣的對稱性

				$x_{1,s}$				
				$\vdots$				
				$x_{r,s}$				
				$\vdots$				
$x_{s,1}$	$\cdots$	$x_{s,r}$	$\cdots$	$x_{s,s}$	$\cdots$	$x_{s,r+s}$	$\cdots$	$x_{s,n+1}$
				$\vdots$				
				$x_{r+s,s}$				
				$\vdots$				
				$x_{n-1,s}$				

$j = s + 1$，如表 12

(1) $i = 1,2, \dots s + 1$ 時，$x_{i,s+1} = x_{s+1,i}$（已證）

(2) $i = s + 2$ 時，$x_{s+2,s+1} = x_{1,s+1} + x_{s+1,s+2} - x_{s+1,1} = x_{s+1,s+2}$（$M_1$ 模式 $s + 2 = M_1$ 模式$1 + M_n$ 模式 $s + 1 -$ 單位變換 $x_{s+1,1}$）

(3)若 $i = r$ 時，$x_{r,s+1} = x_{s+1,r}$ 成立

則 $i = r + s + 1$ 時，$x_{r+s+1,s+1} = x_{r,s+1} + x_{s+1,r+s+1} - x_{s+1,r} = x_{s+1,r+s+1}$（$M_1$ 模式 $r + s + 1 = M_1$ 模式 $r + M_{n-r+1}$ 模式 $s + 1 -$ 單位變換 $x_{s+1,r}$）

故 $x_{i,s+1} = x_{s+1,i}$ 成立（$1 \le i \le n - 1$，$i \in N$）

第 $\boldsymbol{s + 1}$ 行與第 $\boldsymbol{s + 1}$ 列關於斜對角線對稱

由前所述，根據數學歸納法得

$x_{i,j} = x_{j,i}$（$1 \le i \le n - 1$，$1 \le j \le n - 1$，$i, j \in N$）

第 i 行與第 i 列關於斜對角線對稱

伍、討論

一、n種變色龍的各基本變換模式中，僅有其中兩種變色龍數量產生變化，即 M_1 的變化量為 $-k_n$，M_i 的變化量為$k_n(i \neq 1)$，其餘變色龍數量均不變，而每一種變色龍的變化量僅受到牠自己及下兩個編號的變色龍變化的影響，故 M_i 的變化量 $k_n = x_2 + x_3$ $(\because x_1 = 0)$

二、由 $2k_n + k_{n+1} = k_{n+2}$ 可倒推 k_3, k_2, k_1，抽象化的 k_1, k_2，使得 k_n 值在數學上趨於完整，因此 k_n 可適用於 $1 \leq n < \infty$

三、在基本變換方陣中，k_n 為各模式的最少變化量，但有例外，如 $n = 6$ 時之 M_1 模式 3 應為：

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	3	5	1	2

則 $k_n = 4 + 3 = 7$，但為了維持基本變換方陣的對稱性，仍取 $k_n = 12 + 9 = 21$，這樣的模式稱為**奇異模式**。

四、發生奇異模式的原因為，在反向交疊的過程中，基本變換數列斷點(淺藍色)左上區域，如表 13，各模式頭尾差由上而下為：第 2 列差 1，第 3 列差 3，第 4 列差 5，而各模式頭尾間隔為：第 4 列 2 個差，第 3 列 3 個差，第 2 列 4 個差，為避免產生非整數，各模式必須由下而上依序乘以 k_n，即第 4 列$\times$ 1，第 3 列$\times$ 3，第 2 列 $\times$ 5，因此最中間的模式 3 即出現奇異模式，這種情況也發生在所有 n 為偶數時之最中間模式。

表 13 、$n = 6$ 時的奇異模式

	11	10	12	8	16	
差 1	2				1	$\times$ 5
差 3	4			1	2	$\times$ 3
差 5	8		3	2	4	$\times$ 1
	16	5	6	4	8	

另外如 $n = 9$ 時也有出現，如表 14，模式 3 中 $(3,21) = 3$，乘以 7 即可，模式 6 中 $(21,3) = 3$，可不必乘，這兩種模式皆為**奇異模式**。也就是在反向交疊的過程中，若交疊的兩個基本變換數碼不互質，即發生**奇異模式**。

表 14、$n = 9$ 時的奇異模式

	85	86	84	88	80	96	64	128	
差 1	2							1	× 43
差 3	4						1	2	× 21
差 5	8					3	2	4	× 11
差 11	16				5	6	4	8	× 5
差 21	32			11	10	12	8	16	× 3
差 43	64		21	22	20	24	16	32	× 1
	128	43	42	44	40	48	32	64	

五、基本變換方陣中，若沒有任何模式為奇異模式，我們稱之為「完全基本變換方陣」，例如 $n = 3,4,5,7\cdots$；若至少有一個奇異模式出現，則稱之為「不完全基本變換方陣」。例如 $n = 6,8,9\cdots$，所有 $n = 2t$（$t \geq 3, t \in N$）時皆為「不完全基本變換方陣」。

陸、結論

一、在制定的規則之下，可得到六種性質。

二、n 種變色龍的基本變換數碼 k_n，為基本變換方陣中各模式的 M_1 最少變化量，其值必為各模式中 x_2 與 x_3 之和，且必出現在 $n + 1$ 種變色龍之基本變換方陣之左上角。

三、若數列〈a_n〉滿足基本變換式，即 $2a_{t-2} = a_{t-1} + a_t$ $(3 \leq t \leq n)$，則〈a_n〉稱為基本變換數列，此數列之任意相鄰兩項的差成等比數列〈d_n〉，若公比為 -2，首項為 1 或 -1，則

(1) $k_{n+1} = 2k_n + (-1)^n \quad (n \in N)$

(2) $2k_n + k_{n+1} = k_{n+2} \quad (n \in N)$

(3) $k_n + k_{n+1} = 2^n \quad (n \in N)$

(4) $\mathrm{k_n} = |\mathrm{Sd_n}| = |\mathrm{a_{n+1}} - \mathrm{a_1}| = \frac{2^n-(-1)^n}{3} \quad (n \in N)$

四、基本變換方陣右上至左下藍色對角線為各模式之基本變換數列斷點，右下區域以基本變換式得到，左上區域則先以反向交疊後再以基本變換式得到。

五、每一基本變換方陣，皆關於左上至右下之對角線對稱。利用加法變換性質及最少變換性質可得到模式間的關係，再以數學歸納法可證明此對稱性。

六、基本變換數碼 k_n，是本研究在制定的規則之下，因基本變換式的關係所產生的結果，它不僅是基本變換的最少變化量，同時也影響不同模式之間的關係。我們可以利用 k_n 更快速的填寫出基本變換方陣，而不需要再以解聯立方程式的方式得到結果。

七、未來展望：我們在研究過程中，不斷地發現基本變換數碼的出現，因此深信，基本變換數碼與本篇作品有著極密切的關係。我們嘗試以我們制定的變換規則來解在臺灣網路科教館找到的題目，發現也與基本變換數碼有關，因此希望以後有機會能繼續探討這個問題。

柒、參考文獻資料

[1] 臺灣網路科教館：森棚教官的數學題－變色龍

[2] 許志農：動手玩數學第 14 期－破解秘笈 p. 39~40

[3] 中華民國第 60 屆中小學科學展覽會作品說明書－國小組：變色龍問題探討

[4] 中華民國第 47 屆中小學科學展覽會作品說明書－國中組：數學科變色球遊戲的探討－沈英琪...等四人

[5] 數學傳播 33 卷 4 期、34 卷 1 期，線性遞迴關係之求解－張春福、莊淨惠

【評語】030406

考慮 n 種變色龍並作編號，在連續兩號變色龍相遇時，才會變成下一號變色龍，並可循環。內容的一些變換方式，想法不錯值得鼓勵，對於任意的排列，是否均可順利完成移動，及最佳的方式如何，說明可再詳盡些，尤其在移動最少的移動方式，可再多做著墨未來可將相鄰的情形，做更複雜變化的探究。

作品海報

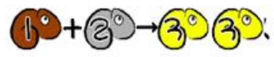
變色龍的神奇方陣

壹、前言

「一個島上有銅色、銀色、金色三種變色龍共 62、70、68 隻；生物學家發現當兩隻不同顏色的變色龍相遇時，這兩隻會同時變成第三種顏色。一名生物數學家研究這個現象後，斷定這 200 隻變色龍有機會全部變成同一種顏色。結果還真的發生了！請問是怎麼變的？這個顏色是什麼？」[1]我們發現，只要其中任意兩種變色龍的數量對 3 同餘即可[2]。所以我們想改變規則，看看能不能發現有趣的結果。

貳、研究過程與方法

一、規則

假設共有 n 種變色龍，分別為 1 號變色龍、2 號變色龍、3 號變色龍⋯⋯ n 號變色龍，簡稱 M_1、M_2、M_3⋯⋯ M_n；規定只有在連續兩號變色龍各一隻相遇時，才會同時變為下一號變色龍，並且可循環，稱之為變換。例如：  符號表示為： $1M_1+1M_2\to 2M_3$，$1M_2+1M_3\to 2M_4$，⋯⋯$1M_{n-1}+1M_n\to 2M_1$，$1M_n+1M_1\to 2M_2$。且**不連續號碼的變色龍相遇不會產生變化**。

二、名詞定義

(一)x_t：第 t 號變色龍 M_t 的變換次數，即 x_t 隻 $t-2$ 號變色龍 M_{t-2} 與 x_t 隻 $t-1$ 號變色龍M_{t-1} 相遇，同時變為 $2x_t$ 隻 t 號變色龍 M_t（$3\le t\le n$），即 $x_tM_{t-2}+x_tM_{t-1}\to 2x_tM_t$（$3\le t\le n$），另外：$x_1M_{n-1}+x_1M_n\to 2x_1M_1$；$x_2M_n+x_2M_1\to 2x_2M_2$。

(二)基本變換：若 n 種變色龍僅其中兩種產生變化且變化量最少，即 $(-k_n,k_n)$，同時變換次數亦最少。例如：當 $n=3$ 時，M_1、M_2、M_3的最少變化量為 -3、0、3，此時 $x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=2$ 為最少變換次數。

(三)基本變換數碼 k_n：n 種變色龍完成一種基本變換後的最少變化量。例如：當 $n=3$ 時，基本變換數碼 $k_3=3$為最少變化量。

(四)基本變換數列：數列 $\langle a_n\rangle$ 中任意連續三項之關係式為 $\boldsymbol{2a_{t-2}=a_{t-1}+a_t}$（$\boldsymbol{3\le t\le n}$），例如 $\langle a_n\rangle$：11 , 10 , 12 , 8 , 16。

(五)基本變換式：基本變換數列$\langle a_n\rangle$ 中任意連續三項的關係式 $\boldsymbol{2a_{t-2}=a_{t-1}+a_t}$ （$\boldsymbol{3\le t\le n}$）**稱為基本變換式**。

三、性質研究

(一)性質一：任何變換之後，總量不變

若 $x_t=p\quad(p\in\mathbb{N})$

M_{t-2}	M_{t-1}	M_t
$-p$	$-p$	$+2p$

$(-p)+(-p)+2p=0$

(二)性質二：加法變換

1. $x_3=4$，$x_4=7$
$x_1=3$，$x_3=5$

M_1	M_2	M_3	M_4
-4	-11	1	14
1	-5	7	-3
-3	-16	8	11

2. 將兩次變換合併為一次
$x_1=3$，$x_3=9$，$x_4=7$

M_1	M_2	M_3	M_4
6		-3	-3
-9	-9	18	
	-7	-7	14
-3	-16	8	11

(三)性質三：倍數變換

1. $x_3=2$，$x_4=3\,(p\in\mathbb{N})$

2. $x_3=2p$，$x_4=3p$

M_1	M_2	M_3	M_4
-2	-2	4	
	-3	-3	6
-2	-5	1	6

M_1	M_2	M_3	M_4
$-2p$	$-2p$	$4p$	
	$-3p$	$-3p$	$6p$
$-2p$	$-5p$	p	$6p$

(四)性質四：變換的交換律

第一次變換 $x_3=1$
第二次變換 $x_4=1$

M_1	M_2	M_3	M_4
-1	-1	2	
	-1	-1	2
-1	-2	1	2

將兩次變換順序互調

M_1	M_2	M_3	M_4
	-1	-1	2
-1	-1	2	
-1	-2	1	2

(五)性質五：單位變換

所有變色龍皆變換一次

M_1	M_2	M_3	⋯	M_{n-2}	M_{n-1}	M_n
2			⋯		-1	-1
-1	2					-1
-1	-1	2				
	-1	-1	2			
			⋯			
			-1	-1	2	
			⋯	-1	-1	2
0	0	0	⋯	0	0	0

結果所有變色龍數量皆不變，稱為**單位變換**。

(六)性質六：最少變換

由性質五單位變換得知，若所有變換皆增加或減少 $p\,(p\in\mathbb{N})$，僅會增加或減少變換次數，不會影響各變色龍最終變量。因此，我們可以將所有變換皆減少 p，使得原本各變色龍的變換中，次數最少的變為 0，此時總變換次數必最少。

x_1	x_2	x_3	x_4
2	3	4	5

≡

x_1	x_2	x_3	x_4
1	2	3	4

≡

x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	2	3

最少變換為 $x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=2$，$x_4=3$。

參、研究結果

一、基本變換之研究

1. $n=4$

假設其中兩種變色龍數量變化為 $-k_4,k_4$，其餘皆不變，且固定 M_1之變化量為 $-k_4$，則共有三種不同的模式

(1) M_1 模式 1

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4
變化量	$-k_4$	0	0	k_4

M_1	M_2	M_3	M_4
$2x_1$		$-x_1$	$-x_1$
$-x_2$	$2x_2$		$-x_2$
$-x_3$	$-x_3$	$2x_3$	
	$-x_4$	$-x_4$	$2x_4$
$-k_4$	0	0	k_4

令 $x_1=0$

依據，**最少變換性質**

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & -k_4 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & k_4 \end{array}\right] \end{array}$$

依據**總量不變性質**

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & k_4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

可得最少變換：$x_1=0$，$x_2=3$，$x_3=2$，$x_4=4$，

此時 $k_4=5$

我們將上列過程表格化：

	x_2	x_3	x_4
由第3列		1	2
代入第2列	**3**	**2**	**4**

由第1列得到基本變換數碼

$k_4 = \boldsymbol{x_2+x_3=5}$

(2) M_1 模式 2

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4
變化量	$-k_4$	0	k_4	0

x_2	x_3	x_4
2		1
2	**3**	**1**

$\boldsymbol{k_4}=2+3=5$

(3) M_1 模式 3

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4
變化量	$-k_4$	k_4	0	0

x_2	x_3	x_4
	1	2
4	**1**	**2**

$\boldsymbol{k_4}=4+1=5$

2. $n=5$

假設其中兩種變色龍數量變化為 $-k_5,k_5$，其餘皆不變，且固定 M_1之變化量為 $-k_5$，則共有四種不同的模式

(1) M_1 模式 1

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
變化量	$-k_5$	0	0	0	k_5

x_2	x_3	x_4	x_5
		1	2
	3	2	4
5	**6**	**4**	**8**

$\boldsymbol{k_5}=5+6=11$

(2) M_1 模式 2

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
變化量	$-k_5$	0	0	k_5	0

x_2	x_3	x_4	x_5
2			1
6	**5**	**7**	**3**

$\boldsymbol{k_5}=6+5=11$

(3) M_1 模式 3

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
變化量	$-k_5$	0	k_5	0	0

x_2	x_3	x_4	x_5
2			1
4		1	2
4	**7**	**1**	**2**

$\boldsymbol{k_5}=4+7=11$

(4) M_1 模式 4

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
變化量	$-k_5$	k_5	0	0	0

x_2	x_3	x_4	x_5
2			1
4		1	2
8	**3**	**2**	**4**

$\boldsymbol{k_5}=8+3=11$

3. $n=6$

假設其中兩種變色龍數量變化為 $-k_6,k_6$，其餘皆不變，且固定 M_1之變化量為 $-k_6$，則共有五種不同的模式

(1) M_1 模式 1

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
變化量	$-k_6$	0	0	0	0	k_6

(2) M_1 模式 2

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
變化量	$-k_6$	0	0	0	k_6	0

(3) M_1 模式 3

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
變化量	$-k_6$	0	0	k_6	0	0

(4) M_1 模式 4

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
變化量	$-k_6$	0	k_6	0	0	0

(5) M_1 模式 5

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
變化量	$-k_6$	k_6	0	0	0	0

M_1 模式 1

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			1	2
		3	2	4
	5	6	4	8
11	**10**	**12**	**8**	**16**

$\boldsymbol{k_6}=11+10=21$

M_1 模式 2

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2				1
10	**11**	**9**	**13**	**5**

$\boldsymbol{k_6}=10+11=21$

M_1 模式 3

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2				1
4			1	2
4	3	5	1	2
12	**9**	**15**	**3**	**6**

$\boldsymbol{k_6}=12+9=21$

M_1 模式 4

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2				1
4			1	2
8		3	2	4
8	**13**	**3**	**2**	**4**

$\boldsymbol{k_6}=8+13=21$

M_1 模式 5

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2				1
4			1	2
8		3	2	4
16	**5**	**6**	**4**	**8**

$\boldsymbol{k_6}=16+5=21$

表1、$n=4$, $k_4=5$

3	2	4
2	3	1
4	1	2

表2、$n=5$, $k_5=11$

5	6	4	8
6	5	7	3
4	7	1	2
8	3	2	4

表3、$n=6$, $k_6=21$

11	10	12	8	16
10	11	9	13	5
12	9	15	3	6
8	13	3	2	4
16	5	6	4	8

二、基本變換方陣之研究

(1) 每一列從左邊第一個數字向右至黃色數字，為一差成等比的數列 （公比 $r=-2$）

(2) 每一列從黃色數字向右至最後一個數字，為一差成等比的數列 （公比 $r=-2$）

(3) $n=t$ 時，基本變換方陣之基本變換數碼 k_t 值為各列前 2 格之和，且皆出現在 $n=t+1$ 時，基本變換方陣之左上角，$k_4=5$，$k_5=11$，$k_6=21$。

(4) 每一基本變換方陣，關於左上至右下之對角線對稱。

1. 我們發現基本變換方陣各列中，連續三項多存在有基本變換式的關係，進而將此關係數列化。

(1)數列〈a_n〉：$2a_{t-2}=a_{t-1}+a_t$（$3\le t\le n$），我們稱之為基本變換數列，其差成等比。

基本變換數碼 k_n 為基本變換的最少變量，也是基本變換數列第 1 項與第 $n+1$ 項的差：

$k_n=|Sd_n|=|a_{n+1}-a_1|=\left|\frac{1-(-2)^n}{3}\right|$，其疊代關係式為 $2k_n+k_{n+1}=k_{n+2}$

(2)我們發現 $k_5=2k_4+1$，$k_6=2k_5-1$，因此進一步研究其規律性

基本變換數碼的第二個疊代關係式為 $k_{n+1}=2k_n+(-1)^n$

(3)由以上可得 k_1,k_2,k_3， $k_1+k_2=2\Rightarrow k_2+k_3=k_2+2k_1+k_2=2(k_1+k_2)$，得$k_n+k_{n+1}=2^n$

基本變換數碼的第三個疊代關係式為 $k_n+k_{n+1}=2^n$

(4) $k_n+k_{n+1}=2^n$

基本變換數碼的一般式為 $k_n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$

2. 以 $n=6$ 為例，我們將填寫基本變換方陣分為幾個步驟進行：

表 4、填入比例

			1	2
2				1
4			1	2
4			1	2
4			1	2

表 5、放大比例

			8	16	$\times 2^3$
2				1	
4			1	2	
8			2	4	$\times 2$
16			4	8	$\times 2^2$

表 6、左至黃色格

11	10	12	8	16
2				1
4			1	2
8		3	2	4
16	5	6	4	8

表 7、反向交疊

11	10	12	8	16	
10				5	$\times 5$
12			3	6	$\times 3$
8		3	2	4	$\times 1$
16	5	6	4	8	

表 8、右至黃色格

11	10	12	8	16
10	11	9	13	5
12	9	15	3	6
8	13	3	2	4
16	5	6	4	8

3. 基本變換方陣中各模式之間具有關聯性，以 $n=6$ 為例，M_1 模式 3 為 M_1 模式 2 與 M_5 模式 1 之和

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
變化量	$-k_6$	0	0	0	k_6	0

M_1 模式 2

+

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
變化量	0	0	0	k_6	$-k_6$	0

M_5 模式 1

=

變色龍	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
變化量	$-k_6$	0	0	k_6	0	0

M_1 模式 3

4. 由此可知，基本變換方陣之任一列，均可由其他列，依加法變換性質以及最少變換性質求得。我們可由上述觀點來說明基本變換方陣之對稱關係。

利用數學歸納法證明第 i 行與第 i 列關於斜對角線對稱

肆、討論

一、n 種變色龍的各基本變換模式中，每一種變色龍的變化量僅受到牠自己及下兩個編號的變色龍變化的影響，因為$x_1=0$，故 M_i 的變化量 $k_n=x_2+x_3$ 。

二、基本變換方陣中，k_n 為各模式的最少變化量，但有例外，如 $n=6$ 之 M_1 模式 3 應為 $k_n=4+3=7$，但為了維持基本變換方陣的對稱性，仍取 $k_n=12+9=21$，這樣的模式稱為奇異模式。

三、基本變換方陣中，若沒有任何模式為奇異模式，我們稱之為「完全基本變換方陣」，例如：$n=3,4,5,7\cdots$；若至少有一個奇異模式出現，則稱之為「不完全基本變換方陣」。例如：$n=6,8,9\cdots$，所有 $n=2t$（$t\ge 3,t\in\mathbb{N}$）時皆為「不完全基本變換方陣」。

伍、結論

一、在制定的規則之下，可得到六種性質。

二、數列〈a_n〉滿足基本變換式，即 $2a_{t-2}=a_{t-1}+a_t$ $(3\le t\le n)$，可以得到三個k_n的關係式及一般式。

三、基本變換方陣右上至左下藍色對角線為各模式之基本變換數列斷點，右下區域以基本變換式得到，左上區域則先以反向交疊後再以基本變換式得到。

四、每一基本變換方陣，皆關於左上至右下之對角線對稱。利用加法變換性質及最少變換性質可得到模式間的關係，再以數學歸納法可證明此對稱性。

五、基本變換數碼 k_n，是本研究在制定的規則之下，因基本變換式的關係所產生的結果，它不僅是基本變換的最少變化量，同時也影響不同模式之間的關係。我們可以利用 k_n 更快速的填寫出基本變換方陣。

陸、參考文獻

[1]游森棚（2019）。森棚教官的數學題－變色龍。科學研習月刊，58-1。國立臺灣科學教育館。

[2]陳政諺等人（2020）。變色龍問題探討。中華民國第60屆中小學科學展覽會作品說明書。