中華民國第63屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030405

變幻莫測

學校名稱：臺中市立黎明國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳炤瑒	盧柄君
國二 詹庭盈	呂彥君

關鍵詞：莫比烏斯環、單面單邊體、n等分

變幻莫測

壹、摘要

「莫比烏斯環」是由德國數學家莫比烏斯和約翰·李斯丁在 1858 年發現的。將一般的紙環剪斷後，將其中一邊翻轉一次(翻轉 180 度)再黏合，會形成一種單面單邊體。本研究將從莫比烏斯環的結構及特性出發，並測試不同翻轉次數，以及不同的裁切方式所產生的影響。最後嘗試找出翻轉及裁切兩種變因不同時的規律，進一步推論出在其他翻轉次數或是裁切方式所產生的結果。

貳、前言

一、研究動機

在一次數學的幾何課中，當我們正熱烈討論不同的幾何物體間的特徵時，了解到大多數的幾何物體是內部與外部壁壘分明的，然而卻意外的認識了這個不分內外的形體—莫比烏斯環，做法簡單卻隱藏著豐富的趣味性，於是我們著手蒐集相關資料，想對它有進一步的了解和研究。它究盡是什麼樣的結構呢?不同的變因對它又會產生什麼樣的影響呢?

二、研究目的

1. 探討翻轉 m 次的紙環之結構特色。
2. 探討翻轉 m 次的紙環，在裁切成 n 等分後，紙環的裁切結果。
3. 歸納翻轉 m 次的紙環，在裁切成 n 等分之規律及探討其成因。
4. 探討翻轉 m 次的紙環，在裁切成$\frac{Q}{P}$等分後，紙環的裁切結果。
5. 歸納翻轉 m 次的紙環，在裁切成$\frac{Q}{P}$等分之規律及探討其成因。

三、文獻探討

作品名稱\作者	研究內容	心得結論
眾星「環」集-莫比烏斯帶的奇幻旅程---彰化縣 106 年中小學科學展覽會	一、把帶狀的莫比烏斯帶變成立體的柱體, 再轉成不同的角度;剪成不同等分, 來觀察最後的結果。 二、如果放了一隻昆蟲在莫比烏斯帶在上面爬, 它的軌跡會如何變化。	製作莫比烏斯環的作法和其旋轉角度都相當的特別，是我們從來沒想過的，可惜這方法在黏貼或測量方面就沒辦法做到非常精確。
莫比烏斯環和相關紙環\陳君儀、莊英鼎、吳彥霖	一、討論莫比烏斯環的分割方法, 並對它作 2、3、4、5、6、7、8 等分分割, 再對分割後的長度、旋轉角度、面的變化、纏繞的結構和交點個數作分析比較, 並找出交點個數的計算公式。 二、歸納整理莫比烏斯環的延伸和變形。製作了	對實驗結果做有條理的分析並找出規律，內容豐富，清楚明瞭。 以繪圖方式呈現複雜繁瑣的莫比烏斯環，讓人簡單了解其結構，這點值得我們學習。

作品名稱\作者	研究內容	心得結論
	180°、翻轉二次、翻轉三次、翻轉四次和 翻轉五次旋轉紙環,並對其作 2、3 等分分割,分析比較分割後紙環的長度、旋轉角度、面的變化、纏繞的結構和交點個數。	
莫名環環相扣-彰化縣 108 年中小學科學展覽會	一、比較不同的莫氏環的翻轉角度在相同的裁剪位置，裁剪後的翻轉情形。 二、比較相同的莫氏環翻轉角度在不同的裁剪位置，裁剪後的翻轉情形。	統整了與莫比烏斯環相關的研究，並且得出一些不錯的結論。我們希望藉由更深入更廣泛的研究探討，來獲取更進一步的研究結果。

參、研究設備及器材

一、桌上型電腦、手機
二、紀錄紙、原子筆、鉛筆
三、製作用色紙、剪刀、膠帶、尺

肆、研究方法

一、了解莫比烏斯環之原理、結構特色及作法

(一)莫比烏斯環的結構特色

1. 莫比烏斯環被視為只有一個面和一條邊的立體圖形(我們稱其為單面單邊體)。

單面：若我們在莫比烏斯環上找一點向前畫線，如(圖一)，最後會發現直線經過藍色及粉紅色區域並回到原來的點。因為直線在前進的過程中，並沒有跨越過莫比烏斯環的邊緣，所以表示藍色及粉紅色區域是接在同一個平面上。

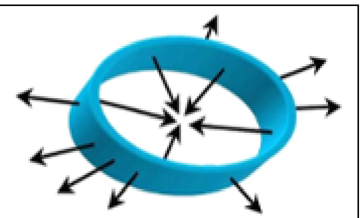
單邊：若我們在莫比烏斯環的邊上找一點 A 沿著邊向前進，如(圖二)，會經過另一側的 B 點並回到 A 點。因為在沿著邊前進的過程中，並沒有離開莫比烏斯環的邊緣，所以表示環的兩側是接在同一邊上。

2. 沒有上／下、內／外之分

我們無法確切地指出哪一面是莫比烏斯環的「上面」或「下面」，亦或者說哪一面是「外面」和「裡面」，如(圖三)，因為它只有一個面，如(圖一)。

(圖一)莫比烏斯環--單面體（備註：・為起始點，箭頭為終點。）

(圖二)莫比烏斯環--單邊體（備註：從 A 點出發，沿著邊前進，經過 B 點又回到 A 點。）



(圖二)未翻轉紙環--雙側曲面(資料來源: Presentation on theme: "莫比烏斯環"— Presentation transcript:6/26)

(二)莫比烏斯環的製作方式

將色紙接合成長紙條，一端翻轉一次(翻轉 180˚)後，再將兩端黏在一起，也可調整其翻轉次數，讓它翻轉更多次。當我們要裁切莫比烏斯環時，則先於色紙上畫出裁切線(間隔為 1cm)，再由接合處最右方那條線開始裁剪，直到把所有線裁剪完為止。

二、比較各種莫比烏斯環翻轉次數、裁切成 n 等分之裁切結果

(一)「翻轉一次」的紙環裁切成 n 等分之結果

裁切成 n 等分	裁切結果	樣本照片
一等分 (未裁切)	翻轉一次 (沒有變化)	
二等分	一個翻轉四次的紙環	
三等分	一個翻轉四次的紙環 + 一個翻轉一次的紙環	
四等分	二個翻轉四次的紙環	
五等分	二個翻轉四次的紙環 + 一個翻轉一次的紙環	
六等分	三個翻轉四次的紙環	

七等分	三個翻轉四次的紙環 + 一個翻轉一次的紙環	

（二）「翻轉二次」的紙環裁切成 n 等分之結果

裁切成 n 等分	裁切結果	樣本照片
一等分 （未裁切）	翻轉二次 （沒有變化）	
二等分	二個翻轉二次的紙環	
三等分	三個翻轉二次的紙環	
四等分	四個翻轉二次的紙環	
五等分	五個翻轉二次的紙環	

六等分	六個翻轉二次的紙環	
七等分	七個翻轉二次的紙環	

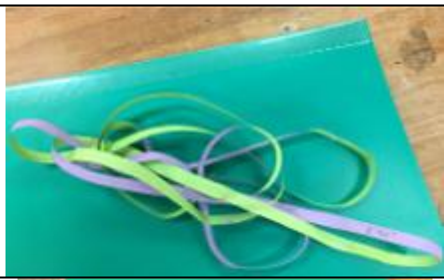
(三)「翻轉三次」的紙環裁切成 n 等分之結果

裁切成 n 等分	裁切結果	樣本照片
一等分 (未裁切)	翻轉三次 (沒有變化)	
二等分	一個翻轉八次的紙環	
三等分	一個翻轉八次的紙環 + 一個翻轉三次的紙環	
四等分	二個翻轉八次的紙環	

五等分	二個翻轉八次的紙環 + 一個翻轉三次的紙環	
六等分	三個翻轉八次的紙環	
七等分	三個翻轉八次的紙環 + 一個翻轉三次的紙環	

（四）「翻轉四次」的紙環裁切成 n 等分之結果

裁切成 n 等分	裁切結果	樣本照片
一等分 （未裁切）	翻轉四次 （沒有變化）	
二等分	二個翻轉四次的紙環	
三等分	三個翻轉四次的紙環	

四等分	四個翻轉四次的紙環	
五等分	五個翻轉四次的紙環	
六等分	六個翻轉四次的紙環	
七等分	七個翻轉四次的紙環	

(五)「翻轉五次」的紙環裁切成 n 等分之結果

裁切成 n 等分	裁切結果	樣本照片
一等分 (未裁切)	翻轉五次 (沒有變化)	
二等分	一個翻轉十二次的紙環	

三等分	一個翻轉十二次的紙環 + 一個翻轉五次的紙環	
四等分	二個翻轉十二次的紙環	
五等分	二個翻轉十二次的紙環 + 一個翻轉五次的紙環	
六等分	三個翻轉十二次的紙環	
七等分	三個翻轉十二次的紙環 + 一個翻轉五次的紙環	

（六）「翻轉六次」的紙環裁切成 n 等分之結果

裁切成 n 等分	裁切結果	樣本照片
一等分 （未裁切）	翻轉六次 （沒有變化）	

二等分	二個翻轉六次的紙環	
三等分	三個翻轉六次的紙環	
四等分	四個翻轉六次的紙環	
五等分	五個翻轉六次的紙環	
六等分	六個翻轉六次的紙環	
七等分	七個翻轉六次的紙環	

（七）「翻轉七次」的紙環裁切成 n 等分之結果

裁切成 n 等分	裁切結果	樣本照片
一等分 （未裁切）	翻轉七次 （沒有變化）	
二等分	一個翻轉十六次的紙環	
三等分	一個翻轉十六次的紙環 + 一個翻轉七次的紙環	
四等分	二個翻轉十六次的紙環	
五等分	二個翻轉十六次的紙環 + 一個翻轉七次的紙環	
六等分	三個翻轉十六次的紙環	

七等分	三個翻轉十六次的紙環 + 一個翻轉七次的紙環	

（八）「翻轉八次」的紙環裁切成 n 等分之結果

裁切成 n 等分	裁切結果	樣本照片
一等分 （未裁切）	翻轉八次 （沒有變化）	
二等分	二個翻轉八次的紙環	
三等分	三個翻轉八次的紙環	
四等分	四個翻轉八次的紙環	
五等分	五個翻轉八次的紙環	

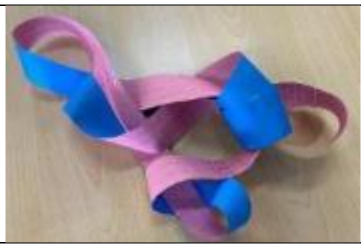
六等分	六個翻轉八次的紙環	
七等分	七個翻轉八次的紙環	

三、比較各種莫比烏斯環翻轉次數，裁切成$\frac{Q}{P}$（P、Q為正整數且$Q<P$)等分之裁切結果。

透過翻轉次數與裁切成 n 等分之研究，我們推測若將翻轉 m 次的紙環，裁切成$\frac{Q}{P}$等分時，將產生以下之結果：

1. 當翻轉偶數次時，若將紙環裁切成$\frac{Q}{P}$等分，則形成二個維持原相同翻轉次數的紙環，一個紙環寬變為原來的$\frac{Q}{P}$，另一個紙環寬變為原來的$\frac{P-Q}{P}$，紙環長度亦維持不變。我們在裁切時是沿著紙環右側$\frac{Q}{P}$處進行裁切，驗證結果如下：

翻轉次數	裁切成$\frac{Q}{P}$等分	裁切結果	樣本照片
二次	$\frac{1}{7}$裁切	一個翻轉二次，寬$\frac{1}{7}$的紙環，長度不變。 一個翻轉二次，寬$\frac{6}{7}$的紙環，長度不變。	
四次	$\frac{2}{7}$裁切	一個翻轉四次，寬$\frac{2}{7}$的紙環，長度不變。 一個翻轉四次，寬$\frac{5}{7}$的紙環，長度不變。	
六次	$\frac{3}{7}$裁切	一個翻轉六次，寬$\frac{3}{7}$的紙環，長度不變。 一個翻轉六次，寬$\frac{4}{7}$的紙環，長度不變。	

八次	$\frac{4}{7}$裁切	一個翻轉八次，寬$\frac{4}{7}$的紙環，長度不變。 一個翻轉八次，寬$\frac{3}{7}$的紙環，長度不變。	

2. 當翻轉奇數次時，若將紙環裁切成$\frac{Q}{P}$等分，則會形成二個紙環，一個紙環寬變為原來的$\frac{Q}{P}$（若$\frac{Q}{P} \leqq \frac{1}{2}$)或$\frac{P-Q}{P}$（若$\frac{Q}{P} > \frac{1}{2}$)，長度變為原來的 2 倍，翻轉次數變為 2 倍+2 次。另一個紙環寬變為原來的$\frac{|P-2Q|}{P}$，長度和翻轉次數維持不變。我們在裁切時是沿著紙環右側$\frac{Q}{P}$處進行裁切，驗證結果如下:

翻轉次數	裁切成$\frac{Q}{P}$等分	裁切結果	樣本照片
一次	$\frac{1}{7}$裁切	一個翻轉四次，寬$\frac{1}{7}$的紙環，長度變 2 倍。 一個翻轉一次，寬$\frac{5}{7}$的紙環，長度不變。	
三次	$\frac{2}{7}$裁切	一個翻轉八次，寬$\frac{2}{7}$的紙環，長度變 2 倍。 一個翻轉三次，寬$\frac{3}{7}$的紙環，長度不變。	
五次	$\frac{3}{7}$裁切	一個翻轉十二次，寬$\frac{3}{7}$的紙環，長度變 2 倍。 一個翻轉五次，寬$\frac{1}{7}$的紙環，長度不變。	
七次	$\frac{4}{7}$裁切	一個翻轉十六次，寬$\frac{3}{7}$的紙環，長度變 2 倍。 一個翻轉五次，寬$\frac{1}{7}$的紙環，長度不變。	

伍、研究結果

一、翻轉 m 次裁切成 n 等分

翻轉次數 裁切結果 裁切成 n 等分	一次	二次	三次	四次
未分割	一次*1	二次*1	三次*1	四次*1
二等分	四次*1	二次*2	八次*1	四次*2
三等分	四次*1 一次*1	二次*3	八次*1 三次*1	四次*3
四等分	四次*2	二次*4	八次*2	四次*4
五等分	四次*2 一次*1	二次*5	八次*2 三次*1	四次*5
六等分	四次*3	二次*6	八次*3	四次*6
七等分	四次*3 一次*1	二次*7	八次*3 三次*1	四次*7

翻轉次數 裁切結果 裁切成 n 等分	五次	六次	七次	八次
未分割	五次*1	六次*1	七次*1	八次*1
二等分	十二次*1	六次*2	十六次*1	八次*2
三等分	十二次*1 五次*1	六次*3	十六次*1 七次*1	八次*3

四等分	十二次*2	六次*4	十六次*2	八次*4
五等分	十二次*2 $\boxed{\text{五次*1}}$	六次*5	十六次*2 $\boxed{\text{七次*1}}$	八次*5
六等分	十二次*3	六次*6	十六次*3	八次*6
七等分	十二次*3 $\boxed{\text{五次*1}}$	六次*7	十六次*3 $\boxed{\text{七次*1}}$	八次*7

(一)從上表中發現，翻轉偶數次，如翻轉二、四、六、八次的紙環，裁切成 n 等分時會形成 n 個翻轉次數維持不變的紙環。

(二)翻轉奇數次，如翻轉一、三、五、七次的紙環，裁切成 n 等分時:

1. 當 n 為奇數時，可裁出(n+1)/2 個紙環，其中一個紙環翻轉次數不變，其餘(n-1)/2 個紙環則翻轉了 2 倍+2 次。
2. 當 n 為偶數時，可裁出 n/2 個紙環，每一個紙環皆翻轉了 2 倍+2 次。

二、翻轉 m 次裁切成$\frac{Q}{P}$等分

(一)翻轉偶數次，如翻轉二、四、六、八次的紙環，若將紙環裁切成$\frac{Q}{P}$等分，則會形成:

1. 一個翻轉次數不變，寬變為原來的$\frac{Q}{P}$，長度不變的紙環。
2. 一個翻轉次數不變，寬變為原來的$\frac{P-Q}{P}$，長度不變的紙環。

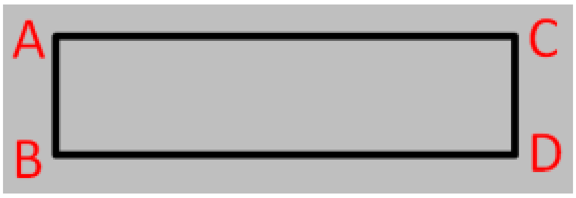
(二)翻轉奇數次，如翻轉一、三、五、七次的紙環，若將紙環裁切成$\frac{Q}{P}$等分，則會形成:

1. 一個翻轉次數變為 2 倍+2 次，寬變為原來的$\frac{Q}{P}$（若$\frac{Q}{P}\leqq\frac{1}{2}$)或$\frac{P-Q}{P}$（若$\frac{Q}{P}>\frac{1}{2}$)，長度變為原來 2 倍的紙環。
2. 一個翻轉次數不變，寬變為原來的$\frac{|P-2Q|}{P}$，長度不變的紙環。

陸、討論

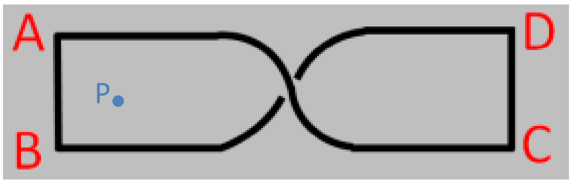
一、莫比烏斯環的翻轉方式

(一)原始紙環(未翻轉之紙環)



一個未經翻轉的紙環(如上圖將原始紙環中，A 和 C 點；B 和 D 點黏合)，由 2 條邊(AC 邊；BD 邊)及 2 個面(裡面和外面)組成，因此我們把它定義為雙面雙邊體(如上圖)。

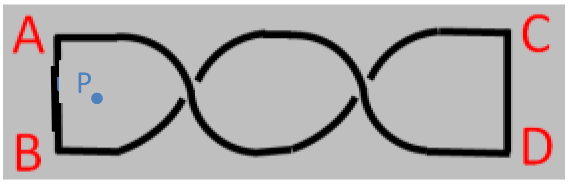
(二)翻轉奇數次之紙環



翻轉奇數次之紙環(將紙帶的左側 AB 邊固定，右側 CD 邊翻轉奇數次，則 D 點在上方，C 點在下方，再將 A 和 D 點；B 和 C 點黏合)，若：

1. 由 A 點出發，沿著邊繞完整個紙環，過程中會依序經過 C、B、D 點回到 A 點，所以紙環可視為相連的一條邊。
2. 在紙環的一面畫一 P 點，由 P 點順著這個面前進，並在過程中不碰到邊，旋轉數圈後又回到 P 點，此時檢視紙環，會發現紙環內外兩側都被畫上線，表示此紙環可視為相連的一個面。
3. 故翻轉奇數次之紙環為一種單面單邊體。

(三)翻轉偶數次之紙環



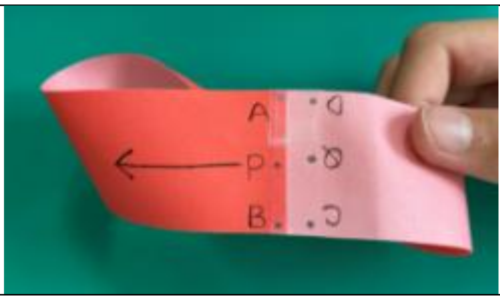
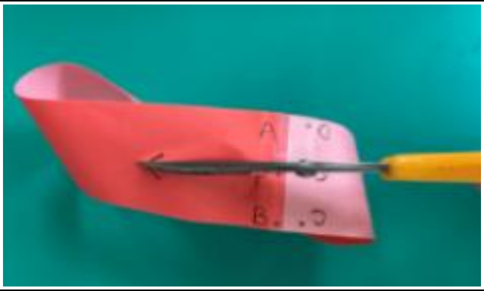
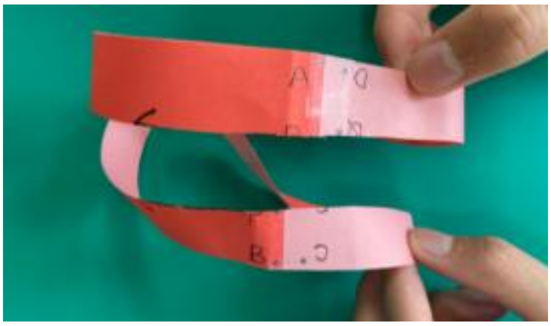
翻轉偶數次之紙環(將紙帶的左側 AB 邊固定，右側 CD 邊翻轉偶數次，則 C 點仍在上方，D 點在下方，再將 A 和 C 點；B 和 D 點黏合)，若：

1. 由 A 點出發，沿著邊繞完整個紙環，會回到 A 點，且過程中並沒有經過 B 或 D 點，所以 AC 邊和 BD 邊為不相連的兩條邊。
2. 在紙環的一面畫一 P 點，由 P 點順著這個面前進，並在過程中不跨過邊緣，旋轉數圈後又回到 P 點，此時檢視紙環，會發現紙環僅有一面被畫線，而另外一面沒有畫到線，表示此紙環有兩個獨立的面。
3. 故翻轉偶數次之紙環為一個雙面雙邊體。

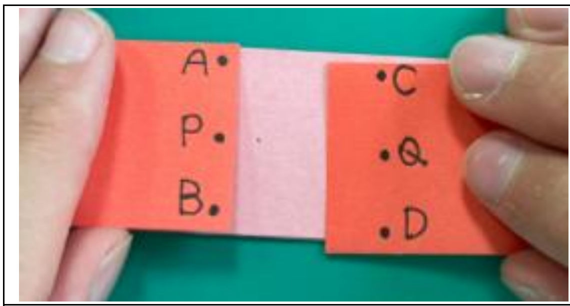
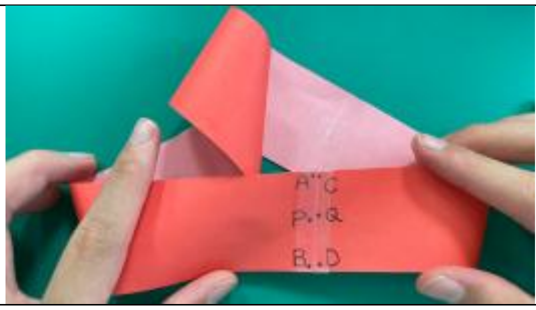
二、莫比烏斯環的裁切軌道

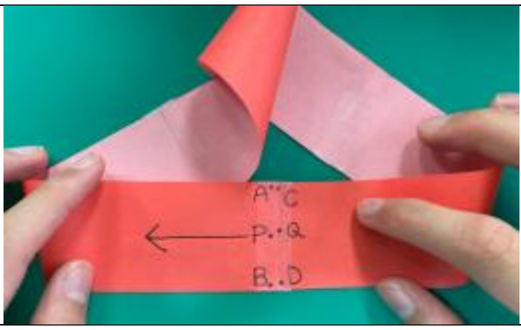
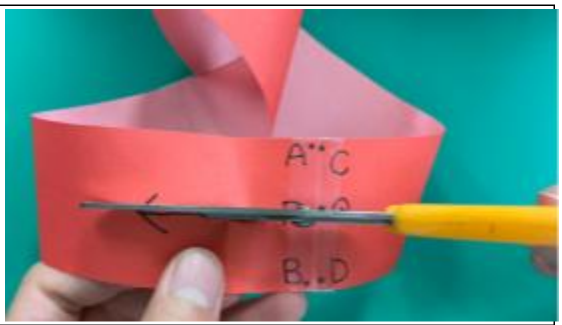
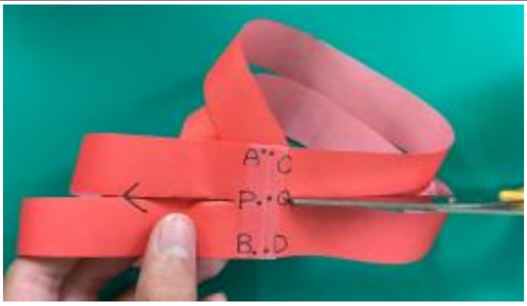
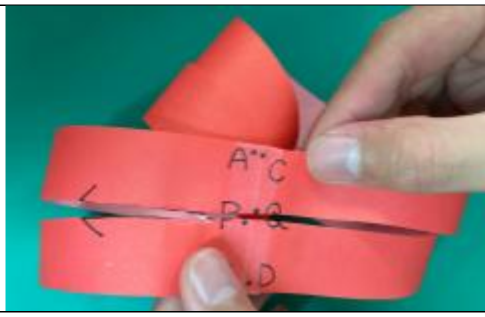
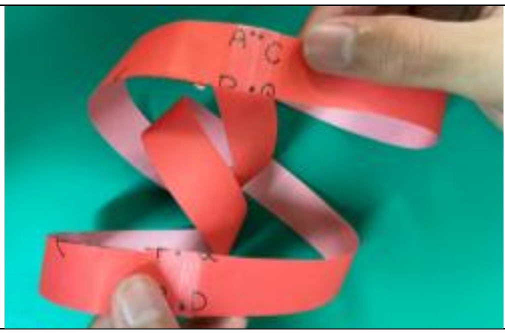
(一)翻轉奇數次之紙環

	
(圖一) 在紙環的一端標記 A、B 點，另一端的背面標記 C、D 點及中心的 P、Q 點。	(圖二) 把紙環翻轉奇數次並黏合，A 點接 D 點、B 點接 C 點。

	
(圖三) 從 P 點開始的裁切方向。	(圖四) 從 P 點開始向外裁切。
	
(圖五) 裁切經過 Q 點。	(圖六) 回到 P 點完成裁切。
	
(圖七) 裁切完二等分的紙環。	(圖八) 左、右手各向外翻轉一次，將二等分的紙環樣本攤開。

(二)翻轉偶數次之紙環

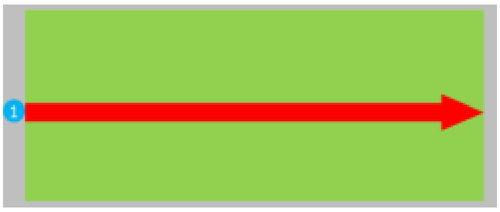
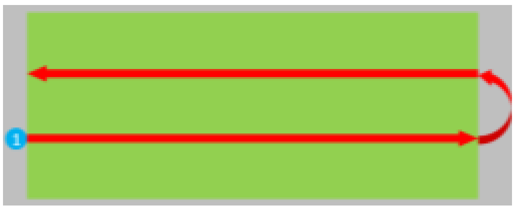
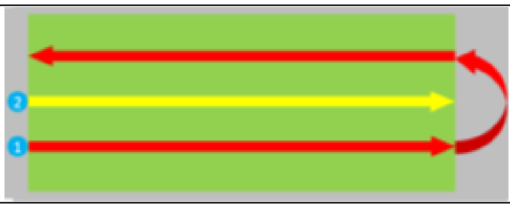
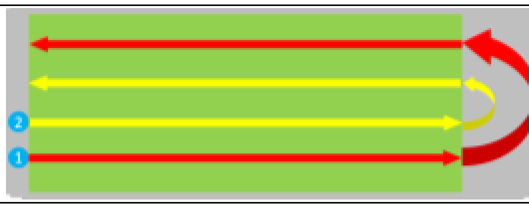
	
(圖九)在紙環的一端標記 A、B 點，另一端標記 C、D 點，以及中心的 P、Q 點。	(圖十)把紙環翻轉偶數次並黏合，A 點接 D 點、B 點接 C 點。

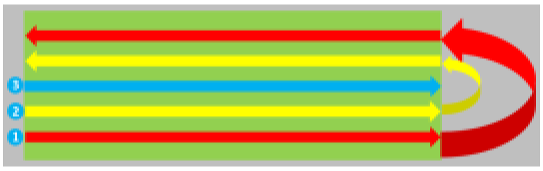
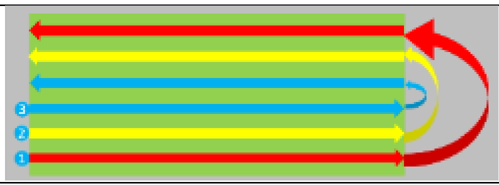
	
(圖十一）從 P 點開始的裁切方向。	(圖十二）從 P 點開始向外裁切。
	
(圖十三）裁切經過 Q 點。	(圖十四）回到 P 點完成裁切。
	
(圖十五）裁切完二等分的紙環。	(圖十六)將二等分的紙環攤開。

三、莫比烏斯環的裁切分析：

在進行裁切時，我們統一先在紙環正反面畫上間隔 1 公分的裁切線，黏合後每次都從最右側開始裁切，直到所有線裁切完畢為止。

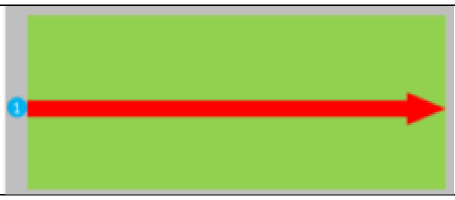
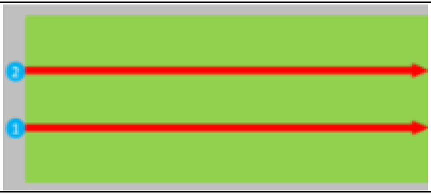
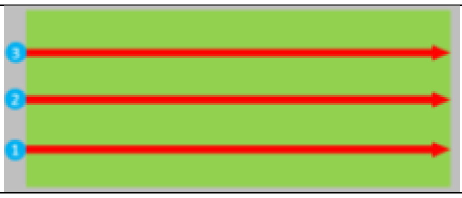
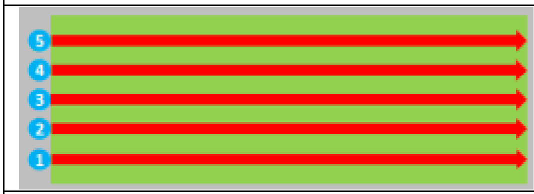
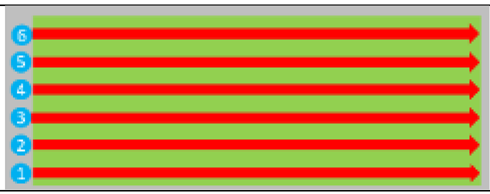
(一)翻轉奇數次紙環裁切成 n 等分之分析

	
(圖十七）二等分，裁切一刀。	(圖十八）三等分，裁切一刀。
	
(圖十九）四等分，裁切二刀。	(圖二十）五等分，裁切二刀。

	
(圖二十一)六等分，裁切三刀。	(圖二十二)七等分，裁切三刀。

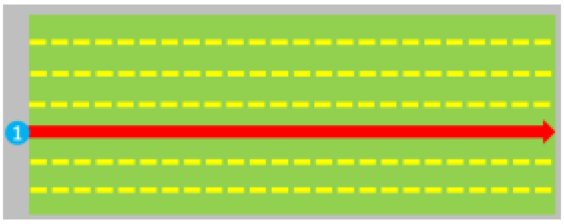
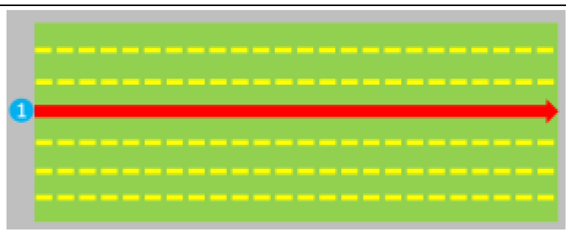
由上表發現，翻轉奇數次的紙環從三等分(含)開始，從最右邊的裁切線出發，過程中會連帶的裁切到以中線為對稱軸的另一條裁切線。

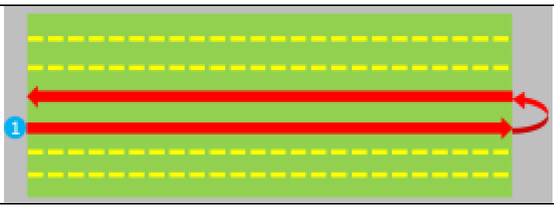
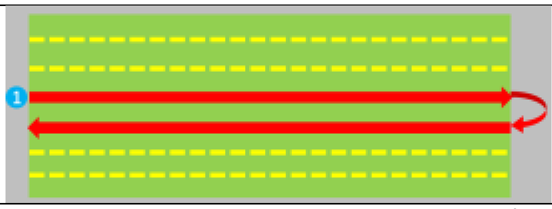
(二)翻轉偶數次紙環裁切成 n 等分之分析

	
(圖二十三) 二等分，裁切一刀。	(圖二十四) 三等分，裁切二刀。
	
(圖二十五) 四等分，裁切三刀。	(圖二十六) 五等分，裁切四刀。
	
(圖二十七) 六等分，裁切五刀。	(圖二十八)七等分，裁切六刀。

由上表發現，翻轉偶數次的紙環不論裁切成幾等分，裁切線之間不會產生任何影響，裁切完一條線就代表裁下一個紙環，且紙環彼此皆相扣。

四、莫比烏斯環裁切成$\frac{Q}{P}$等分之分析:

	
(圖二十九)翻轉偶數次，裁切成$\frac{3}{7}$等分。會產生一個寬度為$\frac{3}{7}$和另一個寬度為$\frac{4}{7}$的紙環。紙環的翻轉次數和長度維持不變。	(圖三十)翻轉偶數次，裁切成$\frac{4}{7}$等分。會產生一個寬度為$\frac{3}{7}$和另一個寬度為$\frac{4}{7}$的紙環。紙環的翻轉次數和長度維持不變。

	
(圖三十一)翻轉奇數次，裁切成$\frac{3}{7}$等分。會產生一個寬度為$\frac{3}{7}$，翻轉次數變為 2 倍+2 次，長度變為 2 倍的紙環。和另一個寬度為$\frac{1}{7}$，翻轉次數和長度維持不變的紙環。	(圖三十二)翻轉奇數次，裁切成$\frac{4}{7}$等分。會產生一個寬度為$\frac{3}{7}$，翻轉次數變為 2 倍+2 次，長度變為 2 倍的紙環。和另一個寬度為$\frac{1}{7}$，翻轉次數和長度維持不變的紙環。

翻轉 m 次裁切成$\frac{Q}{P}$等分的紙環，不論 m 為偶數或奇數，若$\frac{Q}{P}>\frac{1}{2}$其裁切結果相同於$\frac{P-Q}{P}$，如裁切成$\frac{4}{7}$等分時，其結果相同於裁切成$\frac{3}{7}$等分。

柒、結論與應用

一、在研究過程中，我們嘗試用白紙、單色色紙(雙面同色)、雙色色紙(雙面不同色)製作紙環，最後我們使用了雙色色紙進行研究，因為較容易判斷紙環的翻轉次數。若同色對接時，則代表翻轉了偶數次；若不同色對接時，則代表翻轉了奇數次。

二、翻轉奇數次之紙環在裁切成 n 等分(n為正整數):

1. 當 n 為奇數時，可裁出$\frac{n+1}{2}$個紙環。其中一個紙環翻轉次數不變，寬度變為原來的$\frac{1}{n}$，長度不變。其餘$\frac{n-1}{2}$個紙環翻轉次數變為 2 倍+2 次，寬度變為原來的$\frac{1}{n}$，長度變成 2 倍。
2. 當 n 為偶數時，可裁出$\frac{n}{2}$個紙環。每一個紙環翻轉次數變為 2 倍+2 次，寬度變為原來的$\frac{1}{n}$，長度變成 2 倍。

紙環翻轉次數中，以二等分的紙環為例，2 倍表示:紙環原本翻轉奇數次，裁切後二個紙環接成一個大紙環，翻轉次數變成 2 倍。多 2 次表示:裁切後將二個紙環分別向外各翻轉一次，攤開成一個大紙環，如上(圖八)。

三、翻轉偶數次之紙環在裁切成 n 等分(n為正整數)，會形成 n 個翻轉次數不變，寬度變為原來的$\frac{1}{n}$，長度不變的紙環，且環環相扣。即剪開一個紙環，其餘紙環仍彼此相扣在一起。

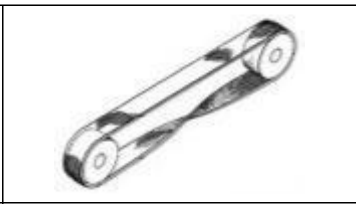
四、翻轉偶數次之紙環裁切成$\frac{Q}{P}$等分(P、Q為正整數且$Q<P$)，會形成:

1. 一個翻轉次數不變，寬變為原來的$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}$，長度不變的紙環。
2. 一個翻轉次數不變，寬變為原來的$\frac{\mathrm{P-Q}}{\mathrm{P}}$，長度不變的紙環。

五、翻轉奇數次之紙環裁切成$\frac{Q}{P}$等分(P、Q為正整數且$Q<P$)，會形成:

1. 一個翻轉次數變為 2 倍+2 次，寬變為原來的$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}$ (若$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}\leq\frac{1}{2}$)或$\frac{\mathrm{P-Q}}{\mathrm{P}}$ (若$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}>\frac{1}{2}$)，長度變為原來 2 倍的紙環。
2. 一個翻轉次數不變，寬變為原來的$\frac{|\mathrm{P-2Q}|}{\mathrm{P}}$，長度不變的紙環。

六、莫比烏斯環之應用如:裝飾品(戒指)、機械皮帶、雲霄飛車的軌道

		
象徵永恆的莫比烏斯環戒指。 (圖片來源:蝦皮購物網)	運用莫比烏斯環製成之皮帶，將可延長皮帶之使用壽命。 (圖片來源:程教練運動心理研究室)	若能運用莫比烏斯環建造成雲霄飛車的軌道，將可大幅縮短軌道長度，節省建造成本。 (圖片來源:中時新聞網)

捌、參考文獻資料

一、數學家和藝術家都讚嘆不已，神奇圈圈「莫比烏斯環」-科技新報
https://technews.tw/2018/11/18/mobius-strip-mathematicians-and-artists-are-amazed/
二、給我一條莫比烏斯帶，我能走上一萬年-每日頭條
https://kknews.cc/news/89y5azn.html
三、莫比烏斯環和相關紙環---第 52 屆科學展覽會。 陳君儀、莊英鼎、吳彥霖
file:///C:/Users/1007/Downloads/9549_nphssf2012-030418.pdf
四、莫名環環相扣---彰化縣 108 年中小學科學展覽會
https://science.hsjh.chc.edu.tw/upload_works/108/11806829b9d419a629c559f7b40171a8.pdf

【評語】030405

將一個長方形紙帶的一端旋轉 180°，與另一端相接，得出的是一個只有一個面的曲面（Möbius strip）。本作品考慮的是將這樣的構造方式進一步擴展（將紙帶旋轉 180°的倍數），再沿著 n 等分線裁切，會產生什麼樣的變化這樣的問題。針對所有可能的情況作了討論，給出了一般化的結果。問題很有趣，分析問題的方式也很恰當，值得稱許。在說明沿著 n 等分線裁切會得出甚麼樣的結果時所使用的方式比較像是針對定的例子說明，而不太像是一個化結論的論述，這一點稍嫌美中不足。從作品中可以看得出來作者們其實已經掌握了處理問題的關鍵，如果能由這些關鍵點出發，給出更清楚的論述，作品會更完整（可以考慮將等分後所得出的每一段給予適當的編號（含正、反面），說明連接的規則以及會得出多少種不同的軌道）。在說明一些小的例子時，如果可以適當的將紙帶的每一等分塗上不同顏色，應該可以讓讀者看的更為清楚。作品中對於翻轉的圈數以及所得出的紙帶是否為 Möbius strip 並沒有清楚的交代，這可能會讓第一次接觸這個問題的讀者產生疑惑，如果能針對這些細節的部分再稍做修正會更好。此外，由於這個問題比較沒有辦法統整出一

個系統的結果，因此較難有嚴謹的數學論證，主要都是由觀察歸納得出，這是研究這個主題比較吃虧的地方。

作品海報

變幻莫測

壹、摘要

「莫比烏斯環」是由德國數學家莫比烏斯和約翰·李斯丁在1858年發現的。將一般的紙環剪斷後，將其中一邊翻轉一次(翻轉180度)再黏合，會形成一種單面單邊體。本研究將從莫比烏斯環的結構及特性出發，並測試不同翻轉次數，以及不同的裁切方式所產生的影響。最後嘗試找出翻轉及裁切兩種變因不同時的規律，進一步推論出在其他翻轉次數或是裁切方式所產生的結果。

貳、前言

一、研究動機與目的

在一次數學的幾何課中，當我們正熱烈討論不同的幾何物體間的特徵時，了解到大多數的幾何物體是內部與外部壁壘分明的，然而卻意外的認識了這個不分內外的形體—莫比烏斯環，做法簡單卻隱藏著豐富的趣味性，於是我們著手蒐集相關資料，想對它有進一步的了解和研究。它究竟是什麼樣的結構呢?不同的變因對它又會產生什麼樣的影響呢?

二、研究目的

1. 探討翻轉m次的紙環之結構特色。
2. 探討翻轉m次的紙環，在裁切成n等分後，紙環的裁切結果。
3. 歸納翻轉m次的紙環，在裁切成n等分之規律及探討其成因。
4. 探討翻轉m次的紙環，在裁切成$\frac{Q}{P}$等分後，紙環的裁切結果。
5. 歸納翻轉m次的紙環，在裁切成$\frac{Q}{P}$等分之規律及探討其成因。

三、文獻探討

作品名稱\作者	研究內容	心得結論
眾星「環」集-莫比烏斯帶的奇幻旅程-彰化縣106年中小學科學展覽會	一、把帶狀的莫比烏斯帶變成立體的柱體，再轉成不同的角度；剪成不同等分，來觀察最後的結果。 二、如果放了一隻昆蟲在莫比烏斯帶在上面爬，它的軌跡會如何變化。	製作莫比烏斯環的作法和其旋轉角度都相當的特別，是我們從來沒想過的，可惜這方法在黏貼或測量方面就沒辦法做到非常精確。
莫名環環相扣-彰化縣108年中小學科學展覽會	一、比較不同的莫氏環的翻轉角度在相同的裁剪位置，裁剪後的翻轉情形。 二、比較相同的莫氏環翻轉角度在不同的裁剪位置，裁剪後的翻轉情形。	統整了與莫比烏斯環相關的研究，並且得出一些不錯的結論。我們希望藉由更深入更廣泛的研究探討，來獲取更進一步的研究結果。

參、研究設備及器材

一、桌上型電腦、手機
二、紀錄紙、原子筆、鉛筆
三、製作用色紙、剪刀、膠帶、尺

肆、研究方法

一、了解莫比烏斯環的結構特色及製作

(一)莫比烏斯環的結構特色

1. 莫比烏斯環被視為只有一個面和一條邊的立體圖形(我們稱其為單面單邊體)。

單面：若我們在莫比烏斯環上找一點向前畫線，如(圖一)，最後會發現直線經過藍色及粉紅色區域並回到原來的點。因為直線在前進的過程中，並沒有跨越過莫比烏斯環的邊緣，所以表示藍色及粉紅色區域是接在同一個平面上。

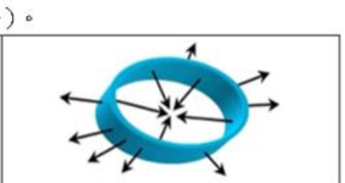
單邊：若我們在莫比烏斯環的邊上找一點A沿著邊向前進，如(圖二)，會經過另一側的B點並回到A點。因為在沿著邊前進的過程中，並沒有離開莫比烏斯環的邊緣，所以表示環的兩側是接在同一邊上。

2. 沒有上／下、內／外之分

我們無法確切地指出哪一面是莫比烏斯環的「上面」或「下面」，亦或者說哪一面是「外面」和「裡面」，如(圖三)，因為它只有一個面，如(圖一)。

(圖一)莫比烏斯環--單面體(備註：•為起始點，箭頭為終點。)

(圖二)莫比烏斯環--單邊體(備註：從A點出發，沿著邊前進，經過B點又回到A點。)



(圖三)未翻轉紙環--雙側曲面(資料來源：Presentation on theme: "莫比烏斯環"— Presentation transcript:6/26)

(二)莫比烏斯環的製作方式

將色紙接合成長紙條，一端翻轉一次(翻轉180°)後，再將兩端黏在一起，也可調整其翻轉次數，讓它翻轉更多次。當我們要裁切莫比烏斯環時，則先於色紙上畫出裁切線(間隔為1cm)，再由接合處最右方那條線開始裁剪，直到把所有線裁剪完為止。

二、比較各種莫比烏斯環翻轉次數、裁切成n等分之裁切結果

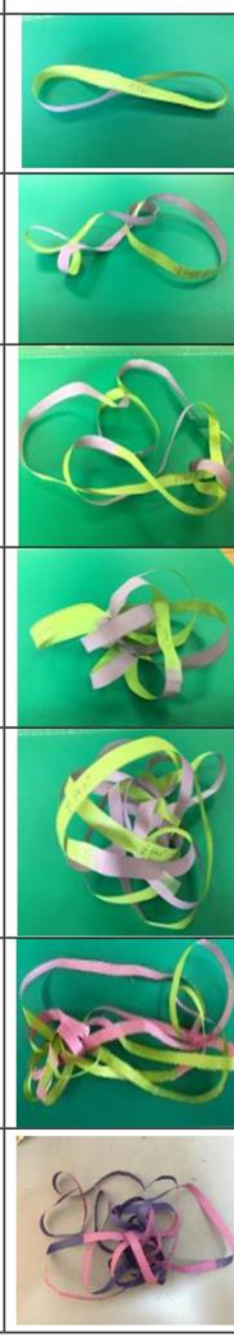
(一)「翻轉一次」的紙環裁切成n等分之結果

裁切成n等分	裁切結果	樣本照片
一等分(未裁切)	翻轉一次(沒有變化)	
二等分	一個翻轉四次的紙環	
三等分	一個翻轉四次的紙環+一個翻轉一次的紙環	
四等分	二個翻轉四次的紙環	
五等分	二個翻轉四次的紙環+一個翻轉一次的紙環	
六等分	三個翻轉四次的紙環	
七等分	三個翻轉四次的紙環+一個翻轉一次的紙環	

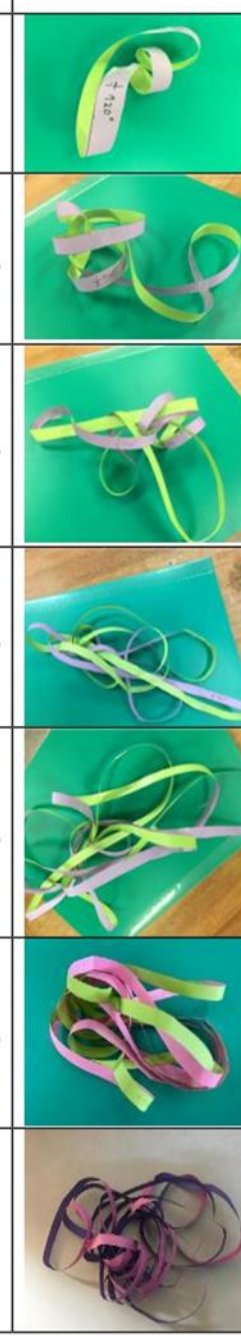
(二)「翻轉二次」的紙環裁切成n等分之結果

裁切成n等分	裁切結果	樣本照片
一等分(未裁切)	翻轉二次(沒有變化)	
二等分	二個翻轉二次的紙環	
三等分	三個翻轉二次的紙環	
四等分	四個翻轉二次的紙環	
五等分	五個翻轉二次的紙環	
六等分	六個翻轉二次的紙環	
七等分	七個翻轉二次的紙環	

(三)「翻轉三次」的紙環裁切成n等分之結果

裁切成n等分	裁切結果	樣本照片
一等分(未裁切)	翻轉三次(沒有變化)	
二等分	一個翻轉八次的紙環	
三等分	一個翻轉八次的紙環+一個翻轉三次的紙環	
四等分	二個翻轉八次的紙環	
五等分	二個翻轉八次的紙環+一個翻轉三次的紙環	
六等分	三個翻轉八次的紙環	
七等分	三個翻轉八次的紙環+一個翻轉三次的紙環	

(四)「翻轉四次」的紙環裁切成n等分之結果

裁切成n等分	裁切結果	樣本照片
一等分(未裁切)	翻轉四次(沒有變化)	
二等分	二個翻轉四次的紙環	
三等分	三個翻轉四次的紙環	
四等分	四個翻轉四次的紙環	
五等分	五個翻轉四次的紙環	
六等分	六個翻轉四次的紙環	
七等分	七個翻轉四次的紙環	

(五)「翻轉五次」的紙環裁切成n等分之結果

裁切成n等分	裁切結果	樣本照片
一等分(未裁切)	翻轉五次(沒有變化)	
二等分	一個翻轉十二次的紙環	
三等分	一個翻轉十二次的紙環+一個翻轉五次的紙環	
四等分	二個翻轉十二次的紙環	
五等分	二個翻轉十二次的紙環+一個翻轉五次的紙環	
六等分	三個翻轉十二次的紙環	
七等分	三個翻轉十二次的紙環+一個翻轉五次的紙環	

(六)「翻轉六次」的紙環裁切成n等分之結果

裁切成n等分	裁切結果	樣本照片
一等分(未裁切)	翻轉六次(沒有變化)	
二等分	二個翻轉六次的紙環	
三等分	三個翻轉六次的紙環	
四等分	四個翻轉六次的紙環	
五等分	五個翻轉六次的紙環	
六等分	六個翻轉六次的紙環	
七等分	七個翻轉六次的紙環	

（七）「翻轉七次」的紙環裁切成 n 等分之結果			（八）「翻轉八次」的紙環裁切成 n 等分之結果		
裁切成 n 等分	裁切結果	樣本照片	裁切成 n 等分	裁切結果	樣本照片
一等分（未裁切）	翻轉七次（沒有變化）		一等分（未裁切）	翻轉八次（沒有變化）	
二等分	一個翻轉十六次的紙環		二等分	二個翻轉八次的紙環	
三等分	一個翻轉十六次的紙環+一個翻轉七次的紙環		三等分	三個翻轉八次的紙環	
四等分	二個翻轉十六次的紙環		四等分	四個翻轉八次的紙環	
五等分	二個翻轉十六次的紙環+一個翻轉七次的紙環		五等分	五個翻轉八次的紙環	
六等分	三個翻轉十六次的紙環		六等分	六個翻轉八次的紙環	
七等分	三個翻轉十六次的紙環+一個翻轉七次的紙環		七等分	七個翻轉八次的紙環	

三、比較各種莫比烏斯環翻轉次數，裁切成$\frac{Q}{P}$（P、Q為正整數且 $Q<P$）等分之裁切結果

透過翻轉次數與裁切成 n 等分之研究，我們推測若將翻轉 m 次的紙環，裁切成$\frac{Q}{P}$等分時，將產生以下之結果：

1. 當翻轉偶數次時，若將紙環裁切成$\frac{Q}{P}$等分，則形成二個維持原相同翻轉次數的紙環，一個紙環寬變為原來的$\frac{Q}{P}$，另一個紙環寬變為原來的$\frac{P-Q}{P}$，紙環長度亦維持不變。我們在裁切時是沿著紙環右側$\frac{Q}{P}$處進行裁切，驗證結果如下：

翻轉次數	裁切成$\frac{Q}{P}$等分	裁切結果	樣本照片
二次	$\frac{1}{7}$裁切	一個翻轉二次，寬$\frac{1}{7}$的紙環，長度不變。 一個翻轉二次，寬$\frac{6}{7}$的紙環，長度不變。	
四次	$\frac{2}{7}$裁切	一個翻轉四次，寬$\frac{2}{7}$的紙環，長度不變。 一個翻轉四次，寬$\frac{5}{7}$的紙環，長度不變。	
六次	$\frac{3}{7}$裁切	一個翻轉六次，寬$\frac{3}{7}$的紙環，長度不變。 一個翻轉六次，寬$\frac{4}{7}$的紙環，長度不變。	
八次	$\frac{4}{7}$裁切	一個翻轉八次，寬$\frac{4}{7}$的紙環，長度不變。 一個翻轉八次，寬$\frac{3}{7}$的紙環，長度不變。	

2. 當翻轉奇數次時，若將紙環裁切成$\frac{Q}{P}$等分，則會形成二個紙環，一個紙環寬變為原來的$\frac{Q}{P}$（若$\frac{Q}{P} \leqq \frac{1}{2}$）或$\frac{P-Q}{P}$（若$\frac{Q}{P} > \frac{1}{2}$），長度變為原來的 2 倍，翻轉次數變為 2 倍+2 次。另一個紙環寬變為原來的$\frac{|P-2Q|}{P}$，長度和翻轉次數維持不變。我們在裁切時是沿著紙環右側$\frac{Q}{P}$處進行裁切，驗證結果如下：

翻轉次數	裁切成$\frac{Q}{P}$等分	裁切結果	樣本照片
一次	$\frac{1}{7}$裁切	一個翻轉四次，寬$\frac{1}{7}$的紙環，長度變 2 倍。 一個翻轉一次，寬$\frac{5}{7}$的紙環，長度不變。	
三次	$\frac{2}{7}$裁切	一個翻轉八次，寬$\frac{2}{7}$的紙環，長度變 2 倍。 一個翻轉三次，寬$\frac{3}{7}$的紙環，長度不變。	
五次	$\frac{3}{7}$裁切	一個翻轉十二次，寬$\frac{3}{7}$的紙環，長度變 2 倍。 一個翻轉五次，寬$\frac{1}{7}$的紙環，長度不變。	
七次	$\frac{4}{7}$裁切	一個翻轉十六次，寬$\frac{3}{7}$的紙環，長度變 2 倍。 一個翻轉七次，寬$\frac{1}{7}$的紙環，長度不變。	

伍、研究結果

一、翻轉 m 次裁切成 n 等分

翻轉次數／裁切結果／裁切成 n 等分	一次	二次	三次	四次	五次	六次	七次	八次
未分割	一次*1	二次*1	三次*1	四次*1	五次*1	六次*1	七次*1	八次*1
二等分	四次*1	二次*2	八次*1	四次*2	十二次*1	六次*2	十六次*1	八次*2
三等分	四次*1 一次*1	二次*3	八次*1 三次*1	四次*3	十二次*1 五次*1	六次*3	十六次*1 七次*1	八次*3
四等分	四次*2	二次*4	八次*2	四次*4	十二次*2	六次*4	十六次*2	八次*4
五等分	四次*2 一次*1	二次*5	八次*2 三次*1	四次*5	十二次*2 五次*1	六次*5	十六次*2 七次*1	八次*5
六等分	四次*3	二次*6	八次*3	四次*6	十二次*3	六次*6	十六次*3	八次*6
七等分	四次*3 一次*1	二次*7	八次*3 三次*1	四次*7	十二次*3 五次*1	六次*7	十六次*3 七次*1	八次*7

(一)從上表中發現，翻轉偶數次，如翻轉二、四、六、八次的紙環，裁切成 n 等分時會形成 n 個翻轉次數維持不變的紙環。

(二)翻轉奇數次，如翻轉一、三、五、七次的紙環，裁切成 n 等分時:

1. 當 n 為奇數時，可裁出(n+1)/2 個紙環，其中一個紙環翻轉次數不變，其餘(n-1)/2 個紙環則翻轉了 2 倍+2 次。
2. 當 n 為偶數時，可裁出 n/2 個紙環，每一個紙環皆翻轉了 2 倍+2 次。

二、翻轉 m 次裁切成$\frac{Q}{P}$等分

(一)翻轉偶數次，如翻轉二、四、六、八次的紙環，若將紙環裁切成$\frac{Q}{P}$等分，則會形成:

1. 一個翻轉次數不變，寬變為原來的$\frac{Q}{P}$，長度不變的紙環。
2. 一個翻轉次數不變，寬變為原來的$\frac{P-Q}{P}$，長度不變的紙環。

(二)翻轉奇數次，如翻轉一、三、五、七次的紙環，若將紙環裁切成$\frac{Q}{P}$等分，則會形成:

1. 一個翻轉次數變為 2 倍+2 次，寬變為原來的$\frac{Q}{P}$（若$\frac{Q}{P} \leqq \frac{1}{2}$）或$\frac{P-Q}{P}$（若$\frac{Q}{P} > \frac{1}{2}$），長度變為原來 2 倍的紙環。
2. 一個翻轉次數不變，寬變為原來的$\frac{|P-2Q|}{P}$，長度不變的紙環。

陸、討論

一、莫比烏斯環的翻轉方式

(一)原始紙環(未翻轉之紙環)

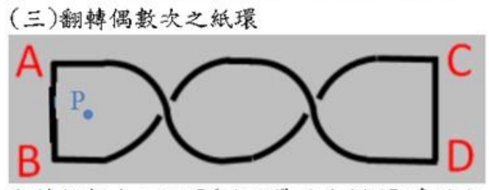
一個未經翻轉的紙環(如上圖將原始紙環中，A 和 C 點；B 和 D 點黏合)，由 2 條邊(AC 邊；BD 邊)及 2 個面(裡面和外面)組成，因此我們把它定義為雙面雙邊體(如上圖)。

(二)翻轉奇數次之紙環

翻轉奇數次之紙環(將紙帶的左側 AB 邊固定，右側 CD 邊翻轉奇數次，則 D 點在上方，C 點在下方，再將 A 和 D 點；B 和 C 點黏合)，若：

1. 由 A 點出發，沿著邊繞完整個紙環，過程中會依序經過 C、B、D 點回到 A 點，所以紙環的兩側是接在同一邊上。
2. 在紙環的一面畫一 P 點，由 P 點順著這個面前進，並在過程中不碰到邊，旋轉數圈後又回到 P 點，此時檢視紙環，會發現紙環的所有面都被畫上線，表示此紙環只有一個面。
3. 故翻轉奇數次之紙環為一種單面單邊體。

(三)翻轉偶數次之紙環

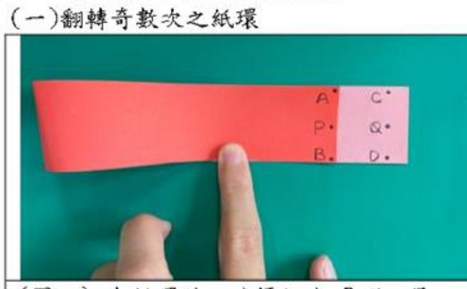
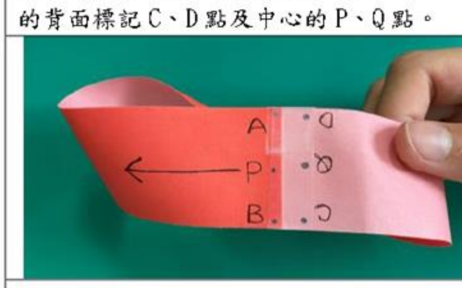


翻轉偶數次之紙環(將紙帶的左側 AB 邊固定，右側 CD 邊翻轉偶數次，則 C 點仍在上方，D 點在下方，再將 A 和 C 點；B 和 D 點黏合)，若：

1. 由 A 點出發，沿著邊繞完整個紙環，會回到 A 點，且過程中並沒有經過 B 或 D 點，所以 AC 邊和 BD 邊為不相連的兩條邊。
2. 在紙環的一面畫一 P 點，由 P 點順著這個面前進，並在過程中不跨過邊緣，旋轉數圈後又回到 P 點，此時檢視紙環，會發現紙環僅有一面被畫線，而另外一面沒有畫到線，表示此紙環有兩個獨立的面。
3. 故翻轉偶數次之紙環為一個雙面雙邊體。

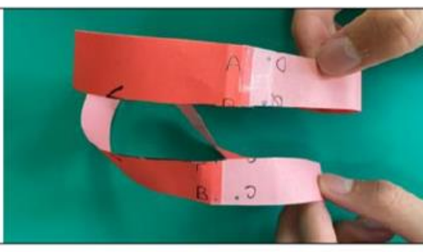
二、莫比烏斯環的裁切軌道

(一)翻轉奇數次之紙環

	
(圖一) 在紙環的一端標記 A、B 點，另一端的背面標記 C、D 點及中心的 P、Q 點。	(圖二) 把紙環翻轉奇數次並黏合，A 點接 D 點、B 點接 C 點。
	
(圖三) 從 P 點開始的裁切方向。	(圖四) 從 P 點開始向外裁切。


(圖五) 裁切經過Q點。

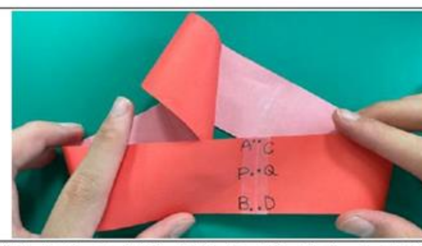

(圖六) 回到P點完成裁切。

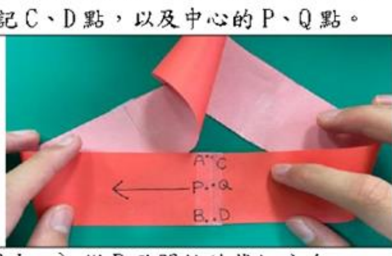

(圖七) 裁切完二等分的紙環。

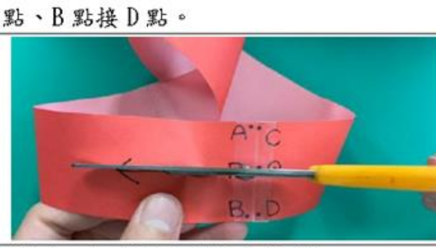

(圖八) 左、右手各向外翻轉一次，將二等分的紙環樣本攤開。

(二)翻轉偶數次之紙環

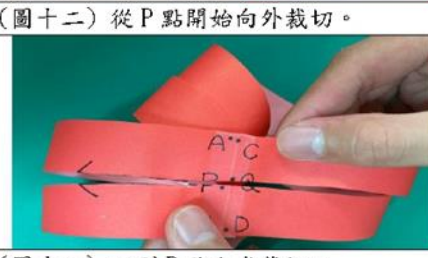
(圖九)在紙環的一端標記A、B點，另一端標記C、D點，以及中心的P、Q點。


(圖十)把紙環翻轉偶數次並黏合，A點接C點、B點接D點。


(圖十一) 從P點開始的裁切方向


(圖十二) 從P點開始向外裁切。


(圖十三) 裁切經過Q點。


(圖十四) 回到P點完成裁切。

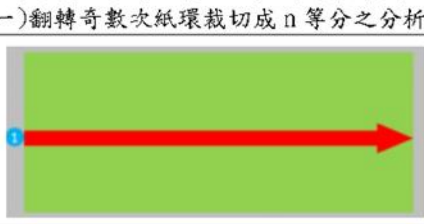

(圖十五) 裁切完二等分的紙環。

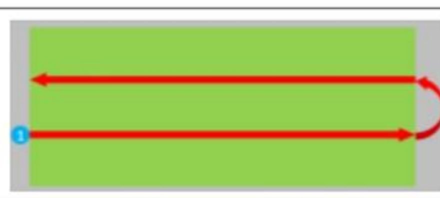

(圖十六)將二等分的紙環攤開。

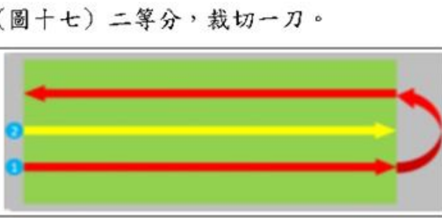
三、莫比烏斯環的裁切分析

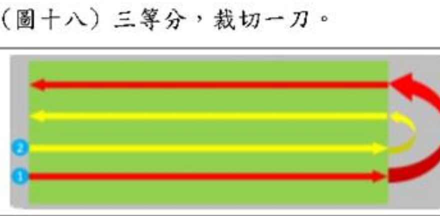
在進行裁切時，我們統一先在紙環正反面畫上間隔1公分的裁切線，黏合後每次都從最右側的裁切線開始裁切，直到所有線裁切完畢為止。

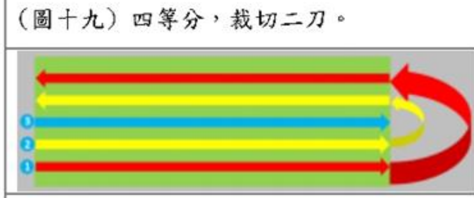
(一)翻轉奇數次紙環裁切成n等分之分析

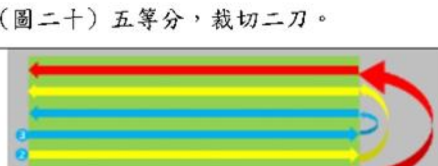

(圖十七) 二等分，裁切一刀。


(圖十八) 三等分，裁切一刀。


(圖十九) 四等分，裁切二刀。

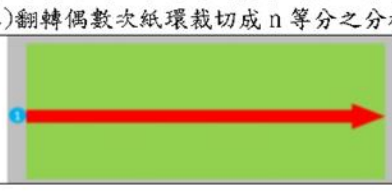

(圖二十) 五等分，裁切二刀。


(圖二十一)六等分，裁切三刀。

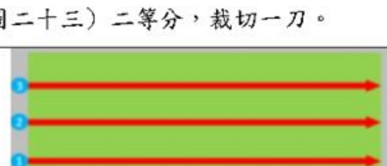

(圖二十二)七等分，裁切三刀。

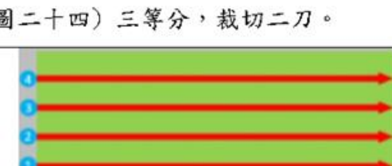
由上表發現，翻轉奇數次的紙環從三等分(含)開始，從最右邊的裁切線出發，過程中會連帶的裁切到以中線為對稱軸的另一條裁切線。

(二)翻轉偶數次紙環裁切成n等分之分析


(圖二十三) 二等分，裁切一刀。


(圖二十四) 三等分，裁切二刀。


(圖二十五) 四等分，裁切三刀。

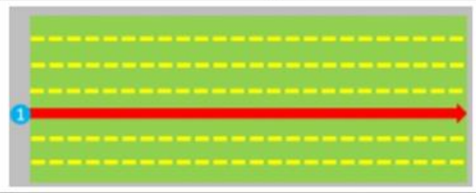

(圖二十六) 五等分，裁切四刀。

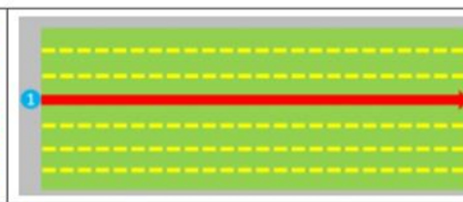

(圖二十七) 六等分，裁切五刀。

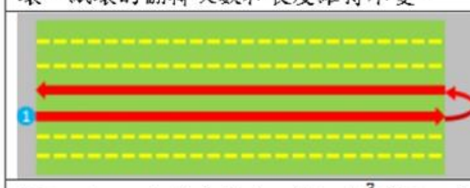

(圖二十八)七等分，裁切六刀。

由上表發現，翻轉偶數次的紙環不論裁切成幾等分，裁切線之間不會產生任何影響，裁切完一條線就代表裁下一個紙環，且紙環彼此皆相扣。

四、莫比烏斯環裁切成$\frac{Q}{p}$等分之分析:


(圖二十九)翻轉偶數次，裁切成$\frac{3}{7}$等分。會產生一個寬度為$\frac{3}{7}$和另一個寬度為$\frac{4}{7}$的紙環。紙環的翻轉次數和長度維持不變。


(圖三十)翻轉偶數次，裁切成$\frac{4}{7}$等分。會產生一個寬度為$\frac{3}{7}$和另一個寬度為$\frac{4}{7}$的紙環。紙環的翻轉次數和長度維持不變。


(圖三十一)翻轉奇數次，裁切成$\frac{3}{7}$等分。會產生一個寬度為$\frac{3}{7}$，翻轉次數變為2倍+2次，長度變為2倍的紙環。和另一個寬度為$\frac{1}{7}$，翻轉次數和長度維持不變的紙環。


(圖三十二)翻轉奇數次，裁切成$\frac{4}{7}$等分。會產生一個寬度為$\frac{3}{7}$，翻轉次數變為2倍+2次，長度變為2倍的紙環。和另一個寬度為$\frac{1}{7}$，翻轉次數和長度維持不變的紙環。

翻轉m次裁切成$\frac{Q}{p}$等分的紙環，不論m為偶數或奇數，若$\frac{Q}{p} > \frac{1}{2}$其裁切結果相同於$\frac{p-Q}{p}$，如裁切成$\frac{4}{7}$等分時，其結果相同於裁切成$\frac{3}{7}$等分。

柒、結論與應用

一、在研究過程中，我們嘗試用白紙、單色色紙(雙面同色)、雙色色紙(雙面不同色)製作紙環，最後我們使用了雙色色紙進行研究，因為較容易判斷紙環的翻轉次數。若同色對接時，則代表翻轉了偶數次；若不同色對接時，則代表翻轉了奇數次。

二、翻轉奇數次之紙環在裁切成n等分(n為正整數):

1. 當n為奇數時，可裁出$\frac{n+1}{2}$個紙環。其中一個紙環翻轉次數不變，寬度變為原來的$\frac{1}{n}$，長度不變。其餘$\frac{n-1}{2}$個紙環翻轉次數變為2倍+2次，寬度變為原來的$\frac{1}{n}$，長度變成2倍。
2. 當n為偶數時，可裁出$\frac{n}{2}$個紙環。每一個紙環翻轉次數變為2倍+2次，寬度變為原來的$\frac{1}{n}$，長度變成2倍。

紙環翻轉奇數次，以二等分的紙環為例，會產生一個長度2倍，翻轉次數為原來的2倍+2次的紙環。2倍表示:紙環原本翻轉奇數次，裁切後二個紙環接成一個大紙環，翻轉次數變成2倍。多2次表示:裁切後將二個紙環分別向外各翻轉一次，攤開成一個大紙環，如上(圖八)。

三、翻轉偶數次之紙環在裁切成n等分(n為正整數)，會形成n個翻轉次數不變，寬度變為原來的$\frac{1}{n}$，長度不變的紙環，且環環相扣。即剪開一個紙環，其餘紙環仍彼此相扣在一起。

四、翻轉偶數次之紙環裁切成$\frac{Q}{p}$等分(P、Q為正整數且$Q<P$)，會形成:

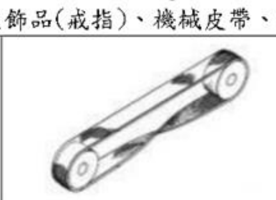
1. 一個翻轉次數不變，寬變為原來的$\frac{Q}{P}$，長度不變的紙環。
2. 一個翻轉次數不變，寬變為原來的$\frac{P-Q}{P}$，長度不變的紙環。

五、翻轉奇數次之紙環裁切成$\frac{Q}{p}$等分(P、Q為正整數且$Q<P$)，會形成:

1. 一個翻轉次數變為2倍+2次，寬變為原來的$\frac{Q}{P}$ (若$\frac{Q}{P} \leqq \frac{1}{2}$)或$\frac{P-Q}{P}$ (若$\frac{Q}{P} > \frac{1}{2}$)，長度變為原來2倍的紙環。
2. 一個翻轉次數不變，寬變為原來的$\frac{|P-2Q|}{P}$，長度不變的紙環。

六、莫比烏斯環之應用如:裝飾品(戒指)、機械皮帶、雲霄飛車的軌道


象徵永恆的莫比烏斯環戒指。
(圖片來源:蝦皮購物網)


運用莫比烏斯環製成之皮帶，可延長皮帶之使用壽命。
(圖片來源:程教練運動心理研究室)


若能運用莫比烏斯環建造成雲霄飛車的軌道，將可大幅縮短軌道長度，節省建造成本。
(圖片來源:中時新聞網)

捌、參考文獻資料

一、數學家和藝術家都讚嘆不已，神奇圈圈「莫比烏斯環」-科技新報
https://technews.tw/2018/11/18/mobius-strip-mathematicians-and-artists-are-amazed/ (2018.11.18)

二、給我一條莫比烏斯帶，我能走上一萬年-每日頭條
https://kknews.cc/news/89y5azn.html (2017.01.11)

三、莫比烏斯環和相關紙環---第52屆科學展覽會。 陳君儀;莊英鼎;吳彥霖
file:///C:/Users/1007/Downloads/9549_nphssf2012-030418.pdf

四、莫名環環相扣---彰化縣108年中小學科學展覽會
https://science.hsjh.chc.edu.tw/upload_works/108/11806829b9d419a629c559f7b40171a8.pdf