中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030404

方形建築師之聯想-探討路徑與面積之關係

學校名稱：南投縣立大成國民中學

作者：	指導老師：
國二 曾祤樂	江奇婉
國二 涂泇軒	林勝國

關鍵詞：規律、單位量、鏡射

摘要

本研究旨在探討不同邊長比的方形上，改變路徑出發角度、改變路徑出發的起始點時，路徑轉彎次數、路徑長度和經過格子點次數之關係。首先在方形長：寬=m：n，路徑從方形的左下角出(入)口為起始點，以角度$\tan\theta=1$、$\tan\theta=2$和$\tan\theta=3$之方向出發，討論路徑轉彎次數、路徑長度和經過格子點的次數，進而延伸推論當以角度$\tan\theta=\frac{y}{x}$之方向出發時路徑轉彎次數、路徑長度和路徑經過格子點次數的數學關係式，接著在方形長：寬=m：n，從方形左下角出(入)口向右移動 1 格、向右移動 2 格為起始點，以角度$\tan\theta=1$之方向出發，討論路徑轉彎次數、路徑長度和經過格子點的次數，延伸推論從方形左下角出(入)口向右移動 h 格為起始點時，路徑轉彎次數、路徑長度和路徑經過格子點次數的數學關係式。

壹、　研究動機

課堂中，我們進行數學奠基模組「和根號做朋友」的教學活動-方形建築師，老師請我們在方格棋盤上，將、士、馬、象依照自己行走的規則，各自圍一個正方形的家。這時我們想到，如果在方格棋盤上中，他們依照自己的行走規則開闢路徑，那麼在不同大小的方形棋盤上。路徑轉彎的次數、路徑的總長度、經過格子點次數和方形之間是否存在有趣的關係？於是我們開始進行以下的研究討論。

貳、　研究目的

我們的研究目的如下：

目的一、探討在不同邊長比的方形下，改變路徑出發的角度，探討路徑轉彎次數、路徑的總長度、經過格子點次數和方形之間的關係。	
問題一	路徑起始點為左下角之出(入)口，以角度$\tan\theta=1$之方向出發，討論不同邊長比的方形、路徑轉彎次數、路徑長度和經過格子點次數之間的關係。
問題二	路徑起始點為左下角之出(入)口，以角度$\tan\theta=2$之方向出發，討論不同邊長比的方形、路徑轉彎次數、路徑長度和經過格子點次數之間的關係。
問題三	路徑起始點為左下角之出(入)口，以角度$\tan\theta=3$之方向出發，討論不同邊長比的方形、路徑轉彎次數、路徑長度和經過格子點次數之間的關係。

目的二、探討在不同邊長比的方形下，改變路徑出發的起始點，探討路徑轉彎次數、路徑的總長度、經過格子點次數和方形之間的關係。	
問題四	路徑出發的起始點為左下角之出(入)口向右移動一單位長，角度$\tan\theta=1$之方向出發，討論不同邊長比的方形、路徑轉彎次數、路徑長度和經過格子點次數之間的關係。
問題五	路徑出發的起始點為左下角之出(入)口向右移動二單位長，角度$\tan\theta=1$之方向

	出發，討論不同邊長比的方形、路徑轉彎次數、路徑長度和經過格子點次數之間的關係。

參、 文獻探討

過去相關之科展與研究參考如下表：

文獻名稱	中華民國第五十三屆中小學科學展覽會作品 『一步一腳印－探討方格棋盤中各種路徑問題』
文獻研究內容摘要	探討： 1.方形棋盤中任何一格為起點時所畫出來的圖形。 2.同一個棋盤中所有圖形的種類數。 3.畫出圖形時所走的路線最少的步數。 4.在不同的棋盤大小，圖形之間的關係。 結論： 1.路徑的步數和最大公因數有關。 2.圖形最後會回到起始點，之後路徑就會重覆。 3.如果起始點不同，圖形看起來似乎不一樣，但是實際上是有關聯的。而在同一個棋盤中所有的圖形數也和最大公因數有關。也和線對稱有很大的關係
對本研究之啟發	公因數、公倍數、對稱

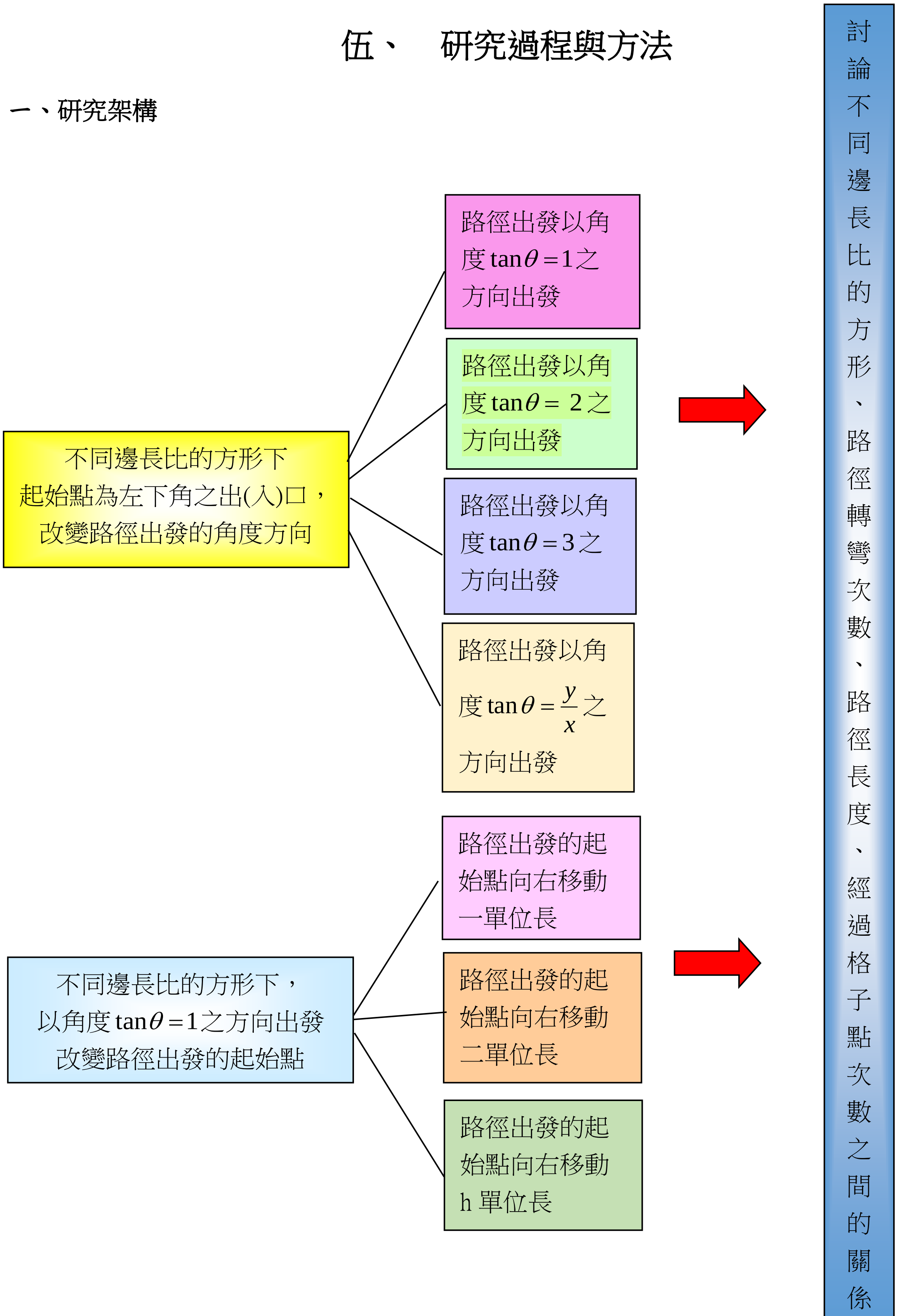
文獻名稱	中華民國第五十六屆中小學科學展覽會作品 『因緣際會』
文獻研究內容摘要	探討： 1.m×n方格圖，對角線所經過的方格數，並歸納出計算公式。 2.m×n方格圖，起點A往上、右各移1格，終點B往左、下各移1格，所形成的區塊會經過幾個方格數。 3.探討m×n方格圖，起點A往上、右各移2格，終點B往左、下各移2格，所形成的區塊會經過幾個方格數。 4.探討m×n方格圖，起點A往上、右各移r格，終點B往左、下各移r格，所形成的區塊會經過幾個方格數。 5.探討 m×n 方格圖，起點 A 往上移 S1 格、右移 S2 格，終點 B 往左移 E1 格、往下移 E2 格，所形成的區塊會經過幾個方格數。 結論： 對角線經過的格子數與長方形的長、寬和長、寬的最大公因數有關。
對本研究之啟發	公因數、長方形的長、寬的長度

肆、　研究設備及器材

紀錄單、計算機、紙、筆、電腦、Microsoft　Office　Word。

伍、　研究過程與方法

一、研究架構



二、名詞定義

(一) □(m、n)$_{(x、y)}$定義為方形長：寬=m：n，路徑以 $\tan\theta=\frac{y}{x}$ 方向出發。

(二) f(m、n)$_{(x、y)}$定義為方形長：寬=m：n，以 $\tan\theta=\frac{y}{x}$ 方向出發，路徑之轉彎次數。

三、路徑方式

不同邊長比的方形，以四個角落為出(入)口，設計路徑從左下角出(入)口出發，將不同邊長比的方形以 1：1 單位量化，例如長為 3 單位，寬為 2 單位，即是分成共 6 個 1 平方單位的正方形，當路徑走至方形的四邊時需要轉彎，直至走到出(入)口為止。

(一) 問題一：路徑起始點為左下角之出(入)口，以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發

例如長寬比為 2：3 的方形，路徑出發的角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發，路徑轉彎的次數為 3 次，如圖 5-2.1 所示。

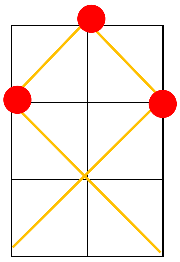


圖 5-2.1

(二) 問題二：路徑起始點為左下角之出(入)口，以角度 $\tan\theta=2$ 之方向出發

例如長寬比為 3：2 的方形，路徑出發的角度 $\tan\theta=2$ 之方向出發，路徑轉彎的次數為 2 次，如圖 5-2.2 所示。

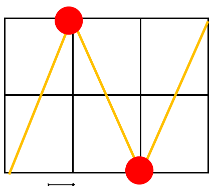


圖 5-2.2

(三) 問題三：路徑起始點為左下角之出(入)口，以角度 $\tan\theta=3$ 之方向出發

例如長寬比為 3：3 的方形，路徑出發的角度 $\tan\theta=3$ 之方向出發，路徑轉彎的次數為 2 次，如圖 5-2.3 所示。

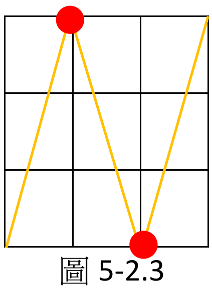


圖 5-2.3

(四) 問題四：路徑出發的起始點向右移動一單位長，角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發

例如長寬比為 3：2 的方形，路徑出發的起始點向右移動一單位長，角度 $\tan\theta=1$ 之方向

出發，路徑轉彎的次數為 0 次，如圖 5-2.4 所示。

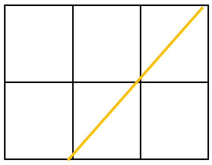


圖 5-2.4

(五) 問題五：路徑出發的起始點向右移動二單位長，角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發

例如長寬比為 3：2 的方形，路徑出發的起始點向右移動二單位長，角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發，路徑轉彎的次數為 2 次，如圖 5-2.5 所示。

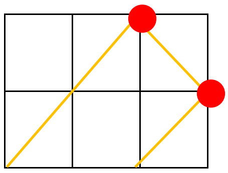


圖 5-2.5

四、問題一：路徑出發以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發

(一) 圖示不同長寬比的方形，分別計數路徑的轉彎次數，並表格化記錄下來，如下表 5-1.1~表 5-1.4。

表 5-1.1

長：寬	1：1	2：1	3：1	4：1	5：1	6：1	7：1	8：1	9：1	10：1	11：1	12：1
轉彎次數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

表 5-1.2

長：寬	1：2	2：2	3：2	4：2	5：2	6：2	7：2	8：2	9：2	10：2	11：2	12：2
轉彎次數	1	0	3	1	5	2	7	3	9	4	11	5

表 5-1.3

長：寬	1：3	2：3	3：3	4：3	5：3	6：3	7：3	8：3	9：3	10：3	11：3	12：2
轉彎次數	2	3	0	5	6	1	8	9	2	11	12	3

表 5-1.4

長：寬	1：4	2：4	3：4	4：4	5：4	6：4	7：4	8：4	9：4	10：4	11：4	12：4
轉彎次數	3	1	5	0	7	3	9	1	11	5	13	2

(二) 在正方形中，路徑出發以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發可視為是正方形的對角線，當方形是正方形時，路徑無須轉彎，轉彎次數為 0。

例如公園方形土地長：寬=2：2，路徑的轉彎次數為 0 次，無須轉彎可直接至出(入)口。

(三) 根據圖形平移及旋轉的概念，討論公園方形土地長：寬=m：n 和長：寬=n：m，其路徑的轉彎次數相同。

例如:(1)方形長：寬=2：3 和方形長：寬=3：2，路徑的轉彎次數相等。(2)方形長：寬=5：1 和方形長：寬=1：5，路徑的轉彎次數相等，轉彎次數等於 4 次。

(四) 根據圖形放大縮小相似形的概念，方形長：寬之最簡整數比=m：1 或 1：m 時，路徑的轉彎次數等於 m-1。

例如方形長：寬=10：2，其最簡整數比=5：1，路徑的轉彎次數等於 4 次，或是方形長：寬=9：3，其最簡整數比=3：1，路徑的轉彎次數等於 2 次。

表 5-1.1

長：寬	1：1	2：1	3：1	4：1	5：1	6：1	7：1	8：1	9：1	10：1	11：1	12：1
轉彎次數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

由上可知，其轉彎次數呈現一個等差數列，公差=1，也就是在方形寬=1，長=1+(n-1)x 寬，轉彎次數 $f(n,1)_{(1,1)}$=0+(n-1)x 寬。

例如當 n=5，即公園方形土地寬=1，長=1+(5-1)x1=5，轉彎次數 $f(5,1)_{(1,1)}$=0+(n-1)x 寬=4。

表 5-1.2

長：寬	1：2	2：2	3：2	4：2	5：2	6：2	7：2	8：2	9：2	10：2	11：2	12：2
轉彎次數	1	0	3	1	5	2	7	3	9	4	11	5

由上可知，其轉彎次數呈現二個等差數列，公差=1 和 2。

當(長,寬)≠1，(長,寬)=2 且最簡整數比=m：1，相似形之概念如同表 5-1.1。

當(長,寬)=1，數列如下:

長：寬	1：2	3：2	5：2	7：2	9：2	11：2
轉彎次數	1	3	5	7	9	11

其轉彎次數為一等差數列，公差=2=寬，也就是在方形寬=2，長=2k-1，

轉彎次數 $f(2k-1\,,2)_{(1,1)}$=1+(k-1)x 寬。

例如當 k=5，即公園方形土地寬=2，長=9，轉彎次數 $f(9\,,2)_{(1,1)}$=1+(5-1)x2=9。

表 5-1.3

長：寬	1：3	2：3	3：3	4：3	5：3	6：3	7：3	8：3	9：3	10：3	11：3	12：2
轉彎次數	2	3	0	5	6	1	8	9	2	11	12	3

由上可知，其轉彎次數呈現三個等差數列，公差=1、1、3。

當(長,寬)≠1，(長,寬)=3，長：寬之最簡整數比可以化成 m：1，相似形之概念如同表 5-1.1。

當(長,寬)=1，數列如下:

長：寬	1：3	4：3	7：3	10：3
轉彎次數	2	5	8	11

其轉彎次數為一等差數列，公差=3=寬，也就是在方形寬=3，長=3k-2，

轉彎次數 f(3k-2 , 3) $_{(1,1)}$=2+(k-1)x 寬。

例如當 k=3，即公園方形土地寬=3，長=7，轉彎次數 f(7,3) $_{(1,1)}$=2+6=8。

當(長,寬)=1，另一數列如下:

長：寬	2：3	5：3	8：3	11：3
轉彎次數	3	6	9	12

其轉彎次數亦為一等差數列，公差=3=寬，也就是在方形寬=3，長=3k-1，

轉彎次數 f(3k-1, 3) $_{(1,1)}$=3+(k-1)x 寬。

例如當 k=3，即公園方形土地寬=3，長=8，轉彎次數 f(8 ,3) $_{(1,1)}$=3+6=9。

表 5-1.4

長：寬	1：4	2：4	3：4	4：4	5：4	6：4	7：4	8：4	9：4	10：4	11：4	12：4
轉彎次數	3	1	5	0	7	3	9	1	11	5	13	2

由上可知，其轉彎次數呈現四個等差數列，公差=1、2、4、4。

當(長,寬)≠1，(長,寬)=4，長：寬之最簡整數比可以化成 m：1，相似形之概念如同表 5-1.1。

當(長,寬)≠1，(長,寬)=2，長：寬之最簡整數比可以化成 m：2，相似形之概念如同表 5-1.2。

當(長,寬)=1，數列如下:

長：寬	1：4	5：4	9：4
轉彎次數	3	7	11

由上可知，其轉彎次數呈現一個等差數列，公差=4=寬，也就是在方形寬=4，長=4k-3，

轉彎次數 f(4k-3,4) $_{(1,1)}$=3+(k-1)x 寬。

當(長,寬)=1，另一數列如下:

長：寬	3：4	7：4	11：4
轉彎次數	5	9	13

由上可知，其轉彎次數呈現一個等差數列，公差=4=寬，也就是在方形寬=4，長=4k-1，

轉彎次數 f(4k-1 ,4) $_{(1,1)}$=5+(k-1)x 寬。

(五) 方形(長,寬)=1 時，當方形長和寬之和相等時，其路徑的轉彎次數是相同的。

例如方形長：寬=11：2，（11,2）＝1，路徑的轉彎次數 f(11,2) $_{(1,1)}$=11，方形長：寬=10：3，（10,3）＝1，路徑的轉彎次數 f(10,3) $_{(1,1)}$=11，發現兩者方形的長+寬和相同時 11+2=10+3，路徑的轉彎次數相同。

例如方形長：寬=8：3，（8,3）＝1，方形長：寬=7：4，（7,4）＝1，因為 8+3=7+4，所以路徑的轉彎次數 f(8,3) $_{(1,1)}$=f(7,4) $_{(1,1)}$=9，。

(六) 方形(長,寬)=1 時，綜合(三)和(六)，方形長：寬=m：n 皆可以換成長：寬=m+n-1：1，而當方形長：寬=a：1 時，路徑的轉彎次數= **a-1**。

例如長方形 11：2 且（11,2）＝1，11+2=12+1，所以方形 11：12 和方形 12：11 的路徑的轉彎次數都是 12-1=11 次，因此可以直接計算得到 $f(11,2)_{(1,1)}=11$。

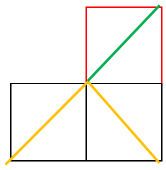
(七) 我們將長：寬為 1：n、2：n、3：n.....所對應的轉彎次數畫在直角坐標平面上，並將長定義 *x* 座標，轉彎次數定義為 *y* 座標，發現形成一條斜直線，寬的正因數有 k 個，就會有 k 條斜直線，並製作成下表。

長：寬	寬的因數	長定義 *x* 座標 轉彎次數定義為 *y* 座標 其對應之方程式
1：1、2：1、3：1…	1	$y=x-1$　(長,寬)＝1
1：2、2：2、3：2…	1、2	$y=x$　(長,寬)＝1 $y=\frac{1}{2}x-1$　(長,寬)＝2
1：3、2：3、3：3…	1、3	$y=x+1$　(長,寬)＝1 $y=\frac{1}{3}x-1$　(長,寬)＝3
1：4、2：4、3：4…	1、2、4	$y=x+2$　(長,寬)＝1 $y=\frac{1}{4}x-1$　(長,寬)＝4 $y=\frac{1}{2}x$　(長,寬)＝2
1：5、2：5、3：5…	1、5	$y=x+3$　(長,寬)＝1 $y=\frac{1}{5}x-1$　(長,寬)＝5
1：6、2：6、3：6…	1、2、3、6	$y=x+4$　(長,寬)＝1 $y=\frac{1}{6}x-1$　(長,寬)＝6 $y=\frac{1}{2}x+1$　(長,寬)＝2 $y=\frac{1}{3}x$　(長,寬)＝3
1：7、2：7、3：7…	1、7	$y=x+5$　(長,寬)＝1 $y=\frac{1}{7}x-1$　(長,寬)＝7
1：8、2：8、3：8…	1、2、4、8	$y=x+6$　(長,寬)＝1 $y=\frac{1}{8}x-1$　(長,寬)＝8 $y=\frac{1}{2}x+2$　(長,寬)＝2

		$y=\frac{1}{4}x$ (長,寬)＝4
1：9、2：9、3：9…	1、3、9	$y=x+7$ (長,寬)＝1 $y=\frac{1}{9}x-1$ (長,寬)＝9 $y=\frac{1}{3}x+1$ (長,寬)＝3
1：10、2：10、3：10…	1、2、5、10	$y=x+8$ (長,寬)＝1 $y=\frac{1}{10}x-1$ (長,寬)＝10 $y=\frac{1}{2}x+3$ (長,寬)＝2 $y=\frac{1}{5}x$ (長,寬)＝5
1：11、2：11、3：11…	1、11	$y=x+9$ (長,寬)＝1 $y=\frac{1}{11}x-1$ (長,寬)＝11
1：12、2：12、3：12…	1、2、3、4、6、12	$y=x+10$ (長,寬)＝1 $y=\frac{1}{12}x-1$ (長,寬)＝12 $y=\frac{1}{2}x+4$ (長,寬)＝2 $y=\frac{1}{3}x+2$ (長,寬)＝3 $y=\frac{1}{4}x+1$ (長,寬)＝4 $y=\frac{1}{6}x$ (長,寬)＝6
1：13、2：13、3：13…	1、13	$y=x+11$ (長,寬)＝1 $y=\frac{1}{13}x-1$ (長,寬)＝13

從上表發現：當寬有 k 個因數，則對應的直線方程式就會有 k 個。

(八) 從鏡射對稱圖形及正方形對角線不用轉彎的概念，當方形土地長：寬是 m：n，且 $(m,n)=1$ 時，利用對稱可將圖形放大變成新的正方形，如下圖所示。

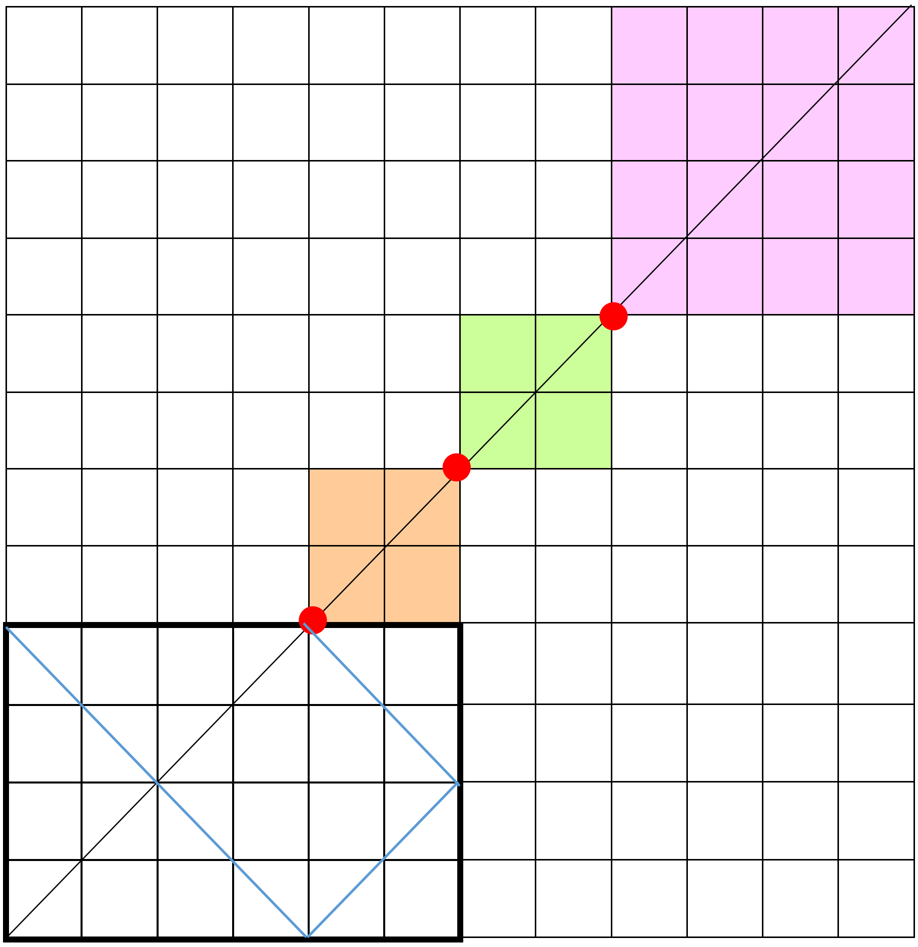


在公園方形土地長：寬=2：1 時，路徑轉彎 1 次，而轉彎的路徑可以視成鏡射的對稱線段，因此原來方形長：寬=2：1，可是視為變成長：寬=2：2 的正方形，正方形的對角線即是路徑的軌跡，路徑轉彎點即是正方形對角線的交點，因為長：寬=2：2 的正方形只會有一個單位格子點的交點，因此路徑轉彎為 1 次。

我們延伸公園方形土地長：寬=3：2 時，由鏡射對稱關係，將原來的方形變成是長：寬=6：6 的正方形，而正方形邊長 6 是原來方形長和寬的最小公倍數[3 , 2]=6，轉彎次數是正方形長：寬=6x6 中對角線經過單位 1x1 的格子點數 5 個，所以轉彎次數 5 次。

這對我們而言，是一個令人欣喜的重要發現。

(九) 同樣以鏡射對稱圖形及正方形對角線不用轉彎的概念，討論當方形土地長：寬是 m：n，且$(m,n)\neq 1$ 時，例如方形土地長：寬=6：4 時，利用鏡射對稱可將圖形變成邊長是 12 的正方形，正方形長：寬=12：12 中對角線經過單位 1x1 的格子點數為 11 個，但是轉彎次數並非是每一個格子點，如下圖所示:



我們可以得知正方形邊長 12 為長和寬的最小公倍數[6 , 4]，而對角線通過的格子點 11 個中，實際屬於轉彎次數的只有 3 點，所以可以看成原先公園方形土地長：寬=6：4 的最右上角 1x1 正方形的方格點，意即在長的方向有右上角 1x1 正方形的方格點 2 點(12/6=2)，在寬的方向有右上角 1x1 正方形的方格點 3 點(12/4=3)，但是最後 12x12 的右上角 1x1 正方形的方格點重複計算，所以路徑轉彎次數為 12/6+12/4-2，意即

[6 , 4]/6+[6 , 4]/4-2=3 次。

(十) 討論路徑總長度，由鏡射對稱概念，將原方形視成放大的正方形，所以路徑總長即為正方形之對角線。

例如：在公園方形土地長：寬=6：4，視為正方形邊長[6 , 4]=12，所以路徑總長度為 $12\sqrt{2}$。

(十一) 路徑中經過格子點的次數，由於在公園方形土地長：寬=6：4 時，利用鏡射對稱可將圖形變成邊長是 12 的正方形，正方形長：寬=12：12 中對角線經過單位 1x1 的格子點數為 11 個，但轉彎次數為 3 次，所以經過格子點的次數共 11-3=8 次。

五、問題二：路徑出發以角度 $\tan\theta = 2$ 之方向出發

(一) 圖示不同長寬比的方形，分別計數路徑的轉彎次數，並表格化記錄下來，如下表 5-2.1~表 5-2.4。

表 5-2.1

長：寬	1：1	2：1	3：1	4：1	5：1	6：1	7：1	8：1	9：1	10：1	11：1	12：1
轉彎次數	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23

表 5-2.2

長：寬	1：2	2：2	3：2	4：2	5：2	6：2	7：2	8：2	9：2	10：2	11：2	12：2
轉彎次數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

表 5-2.3

長：寬	1：3	2：3	3：3	4：3	5：3	6：3	7：3	8：3	9：3	10：3	11：3	12：2
轉彎次數	3	5	1	9	11	3	15	17	5	21	23	7

表 5-2.4

長：寬	1：4	2：4	3：4	4：4	5：4	6：4	7：4	8：4	9：4	10：4	11：4	12：4
轉彎次數	1	0	3	1	5	2	7	3	9	4	11	5

(二) 當方形長：寬=1：2 時，路徑的轉彎次數恰好是 0。

例如公園方形土地長：寬=2：4，路徑的轉彎次數為 0 次，無須轉彎可直接至出入口。

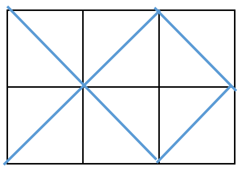
(三) 我們將長：寬為 1：n、2：n、3：n.....所對應的轉彎次數畫在直角坐標平面上，並將長定義 x 座標，轉彎次數定義為 y 座標，發現形成一條斜直線，寬的正因數有 k 個，就會有 k 條斜直線，並製作成下表。

長：寬	寬的因數	長定義 x 座標 轉彎次數定義為 y 座標 其對應之方程式
1：1、2：1、3：1…	1	$y = 2x - 1$　　(長,寬)＝1

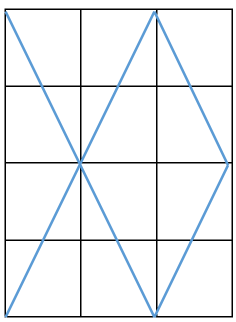
1：2、2：2、3：2…	1、2	$y=x-1$ (長,寬)＝1★ $y=x-1$ (長,寬)＝2★
1：3、2：3、3：3…	1、3	$y=2x+1$ (長,寬)＝1 $y=\frac{2}{3}x-1$ (長,寬)＝3
1：4、2：4、3：4…	1、2、4	$y=x$ (長,寬)＝1 $y=\frac{1}{2}x-1$ (長,寬)＝4★ $y=\frac{1}{2}x-1$ (長,寬)＝2★
1：5、2：5、3：5…	1、5	$y=2x+3$ (長,寬)＝1 $y=\frac{2}{5}x-1$ (長,寬)＝5
1：6、2：6、3：6…	1、2、3、6	$y=x+1$ (長,寬)＝1 $y=\frac{1}{3}x-1$ (長,寬)＝6★ $y=\frac{1}{2}x+1$ (長,寬)＝2 $y=\frac{1}{3}x-1$ (長,寬)＝3★

從上表發現：當寬有 k 個因數，則對應的直線方程式就會有 k 個，但是當(長,寬)＝寬和(長,寬)＝$\frac{寬}{2}$時，直線會同一條。

(四) 我們發現方形長：寬=3：2，路徑出發以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發，和方形土地長：寬=3：4，路徑出發以角度 $\tan\theta=2$ 之方向出發繪製的圖形相像，如下圖。



路徑以長：寬=1：1 之對角線方向出發



路徑以長：寬=1：2 之對角線方向出發

★長：寬=3：4 的圖形可看成是長：寬=3：2 圖形的變形。

(五) 由上述(三)的發現，我們利用單位量的概念，重新定義正方形，因為路徑是以角度 $\tan\theta = 2 = \frac{寬}{長}$ 之方向出發，所以我們定義長：寬=1：2 為新的正方形邊長，並以符號□(長、寬)$_{(長、寬)}$註記。

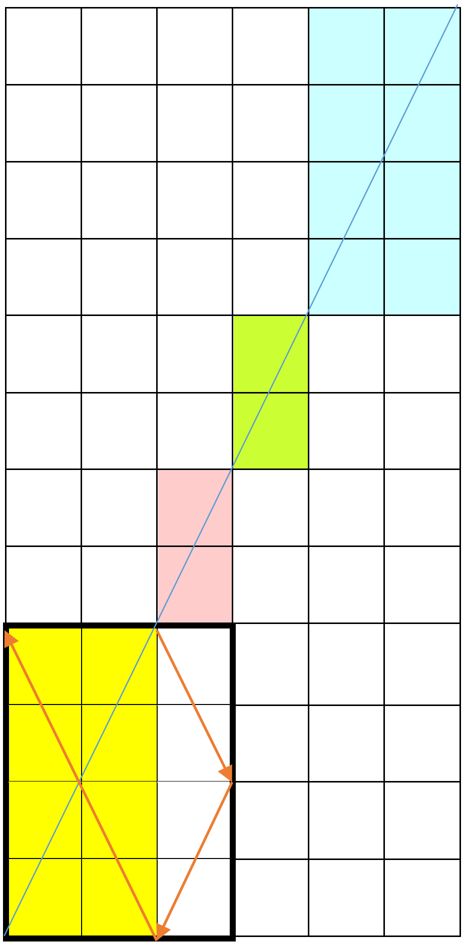
例如□(3、2)$_{(1、1)}$代表在方形長：寬=3：2 中，路徑以 $\tan\theta = 1$，長：寬=1：1 之對角線方向出發。

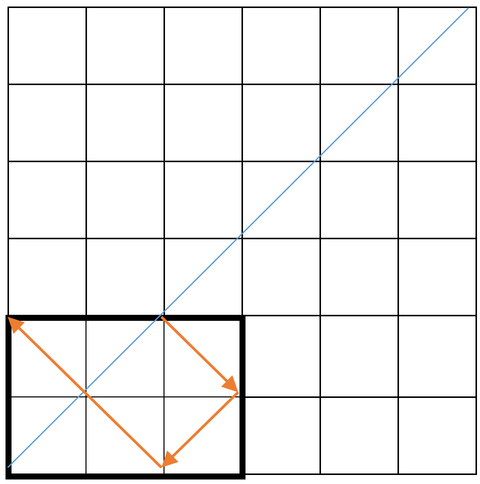
□(3、4)$_{(1、2)}$代表在方形長：寬=3：4 中，路徑以 $\tan\theta = 2$，長：寬=1：2 之對角線方向出發。

由於路徑以角度 $\tan\theta = 2 = \frac{寬}{長}$ 之方向出發，可視為是以長：寬=1：2 之對角線方向出發，並將長：寬=1：2 視為新的正方形，所以在原方形長：寬=3：4 利用單位量轉換成後相當於是在方形長：寬=3/1:4/2=3:2，路徑以角度 $\tan\theta = 1 = \frac{寬}{長}$ 之方向出發之情形。

所以路徑轉彎次數 f(3、4)$_{(1、2)}$=f(3、2)$_{(1、1)}$=3 次。

(六) 路徑總長度，由單位量轉換和鏡射對稱的概念，例如□(3、4)$_{(1、2)}$可視為□(3、2)$_{(1、1)}$，所以可放大成邊長 6 的正方形，





路徑總長度$6\sqrt{5}=\sqrt{5}$([3/1,4/2])

(七) 由單位量轉換和鏡射對稱的概念將原來的方形轉換成對應路徑 1：1 的方形，就可以找到路徑經過格子點的次數。例如□(3、4)$_{(1、2)}$可視為□(3、2)$_{(1、1)}$，所以□(3、4)$_{(1、2)}$ 路徑經過格子點的次數等於□(3、2)$_{(1、1)}$ 路徑經過格子點的次數=2 次。

六、問題三：路徑出發以角度$\tan\theta=3$之方向出發

(一) 圖示不同長寬比的方形，分別計數路徑的轉彎次數，並表格化記錄下來，如下表 5-3.1~表 5-3.4。

表 5-3.1

長：寬	1：1	2：1	3：1	4：1	5：1	6：1	7：1	8：1	9：1	10：1	11：1	12：1
轉彎次數	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35

表 5-3.2

長：寬	1：2	2：2	3：2	4：2	5：2	6：2	7：2	8：2	9：2	10：2	11：2	12：2
轉彎次數	3	2	9	5	15	8	21	11	27	14	33	17

表 5-3.3

長：寬	1：3	2：3	3：3	4：3	5：3	6：3	7：3	8：3	9：3	10：3	11：3	12：2
轉彎次數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

表 5-3.4

長：寬	1：4	2：4	3：4	4：4	5：4	6：4	7：4	8：4	9：4	10：4	11：4	12：4
轉彎次數	5	3	11	2	17	9	23	5	29	15	35	8

(二) 我們同樣將轉彎次數畫在直角坐標平面上，製作成下表。

長：寬	寬的因數	長定義x座標 轉彎次數定義為y座標 其對應之方程式
1：1、2：1、3：1…	1	$y=3x-1$ (長,寬)＝1
1：2、2：2、3：2…	1、2	$y=3x$ (長,寬)＝1 $y=\frac{3}{2}x-1$ (長,寬)＝2
1：3、2：3、3：3…	1、3	$y=x-1$ (長,寬)＝1 $y=x-1$ (長,寬)＝3
1：4、2：4、3：4…	1、2、4	$y=3x+2$ (長,寬)＝1

		$y=\frac{3}{4}x-1$ (長,寬)＝4 $y=\frac{3}{2}x$ (長,寬)＝2
1：5、2：5、3：5…	1、5	$y=3x+3$ (長,寬)＝1 $y=\frac{3}{5}x-1$ (長,寬)＝5
1：6、2：6、3：6…	1、2、3、6	$y=x$ (長,寬)＝1 $y=\frac{1}{2}x-1$ (長,寬)＝6★ $y=\frac{1}{2}x-1$ (長,寬)＝2★ $y=x$ (長,寬)＝3
1：7、2：7、3：7…	1、7	$y=3x+5$ (長,寬)＝1 $y=\frac{3}{7}x-1$ (長,寬)＝7
1：8、2：8、3：8…	1、2、4、8	$y=3x+6$ (長,寬)＝1 $y=\frac{3}{8}x-1$ (長,寬)＝8 $y=\frac{3}{2}x+2$ (長,寬)＝2 $y=\frac{3}{4}x$ (長,寬)＝4
1：9、2：9、3：9…	1、3、9	$y=x+7$ (長,寬)＝1 $y=\frac{1}{3}x-1$ (長,寬)＝9★ $y=\frac{1}{3}x-1$ (長,寬)＝3★

從上表發現當長有 k 個因數，則對應的直線方程式就會有 k 個，但是當(長,寬)＝寬和(長,寬)＝$\frac{寬}{3}$時，直線會同一條。

(三) 由問題一、問題二的結果，我們藉由單位量的轉換直接推論，在路徑以角度$\tan\theta=3$之方向出發，視為路徑方向長：寬＝1：3 之對角線方向出發，例如□(3、4)$_{(1、3)}$可視為□(9、4)$_{(1、1)}$，所以路徑轉彎次數=11 次，

路徑總長度為$\sqrt{10}$ [9 ,4]=36$\sqrt{10}$，路徑經過格子點的次數為 24 次。

七、問題四：從方形左下角出(入)口**向右移動一格，**路徑以角度$\tan\theta=1$之方向出發

(一) 圖示不同長寬比的方形，分別計數路徑的轉彎次數，並表格化記錄下來，如下表 5-4.1~表 5-4.6。

表 5-4.1

長：寬	2：1	3：1	4：1	5：1	6：1	7：1	8：1	9：1	10：1	11：1	12：1
轉彎次數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

表 5-4.2

長：寬	2：2	3：2	4：2	5：2	6：2	7：2	8：2	9：2	10：2	11：2	12：2
轉彎次數	無限繞圈	0	無限繞圈	1	無限繞圈	2	無限繞圈	3	無限繞圈	4	無限繞圈

表 5-4.3

長：寬	2：3	3：3	4：3	5：3	6：3	7：3	8：3	9：3	10：3	11：3	12：2
轉彎次數	1	無限繞圈	0	3	無限繞圈	1	5	無限繞圈	2	7	無限繞圈

表 5-4.4

長：寬	2：4	3：4	4：4	5：4	6：4	7：4	8：4	9：4	10：4	11：4	12：4
轉彎次數	無限繞圈	3	無限繞圈	0	無限繞圈	6	無限繞圈	1	無限繞圈	9	無限繞圈

表 5-4.5

長：寬	2：5	3：5	4：5	5：5	6：5	7：5	8：5	9：5	10：5	11：5	12：5
轉彎次數	2	1	5	無限繞圈	0	5	3	9	無限繞圈	1	8

表 5-4.6

長：寬	2：6	3：6	4：6	5：6	6：6	7：6	8：6	9：6	10：6	11：6	12：6
轉彎次數	無限繞圈	無限繞圈	無限繞圈	7	無限繞圈	0	無限繞圈	無限繞圈	無限繞圈	5	無限繞圈

(二) 當方形長：寬=m：n，(m , n)≠ 1時，路徑會一直繞著公園而無法走到出口。
例如方形土地長：寬=2：4、方形土地長：寬=4：6，路徑無限繞圈，轉彎次數無數次。

(三) 從表 5-4.3 至表 5-4.6 中發現
方形長：寬=m：n，當 n=3 時，m≤3 且(m, 3)= 1之整數有二個為 1、2，路徑轉彎次數形成二個等差數列。
方形長：寬=m：n，當 n=4 時，m≤4 且(m, 4)= 1之整數有二個為 1、3，路徑轉彎次數形成二個等差數列。
方形長：寬=m：n，當 n=5 時，m≤5 且(m, 5)= 1之整數有四個為 1、2、3、4，路徑轉彎次數形成四個等差數列。
由此可知，當方形的寬=n 時，長 m≤n，且(m, n)= 1之整數 k 個，路徑轉彎次數會各自形成 k 個等差數列。

(四) 我們同樣將轉彎次數畫在直角坐標平面上，製作成下表。

長 x 寬	小於等於寬的正整數 N 且(寬,N)=1	長定義 x 座標 轉彎次數定義為 y 座標 其對應之方程式
2：1、3：1、4：1…	1	$y=x-2$ (長,寬)＝1
3：2、5：2、7：2…	1	$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ (長,寬)＝1 長=2k+1
2：3、4：3、5：3…	1、2	$y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$ (長,寬)＝1 長=3k+2 $y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$ (長,寬)＝1 長=3k+1
3：4、5：4、7：4…	1、3	$y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$ (長,寬)＝1 長=4k+3 $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$ (長,寬)＝1 長=4k+1

從上表發現：當小於等於寬的正整數 N 且(寬,N)=1 有 k 個，則對應的直線方程式就會有 k 個。

(五) 我們延伸繼續討論當方形方形長：寬=m：n，(m , n)= 1時的狀況如下

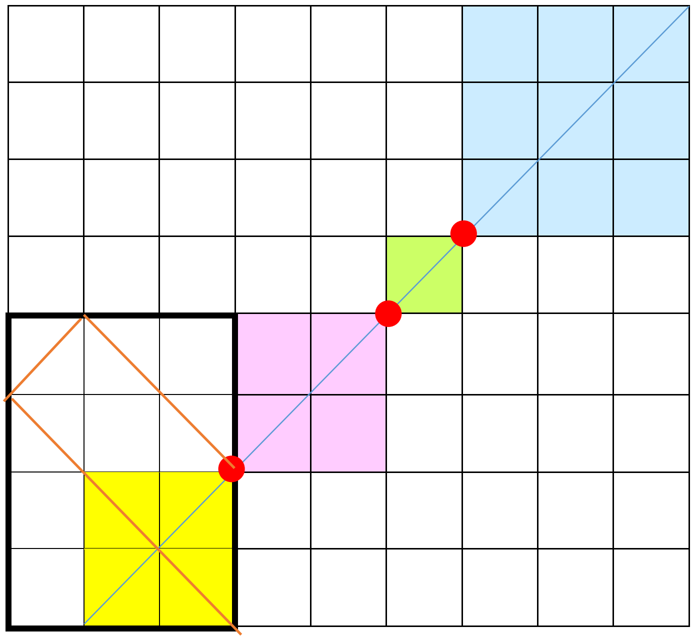
表 5-4,7

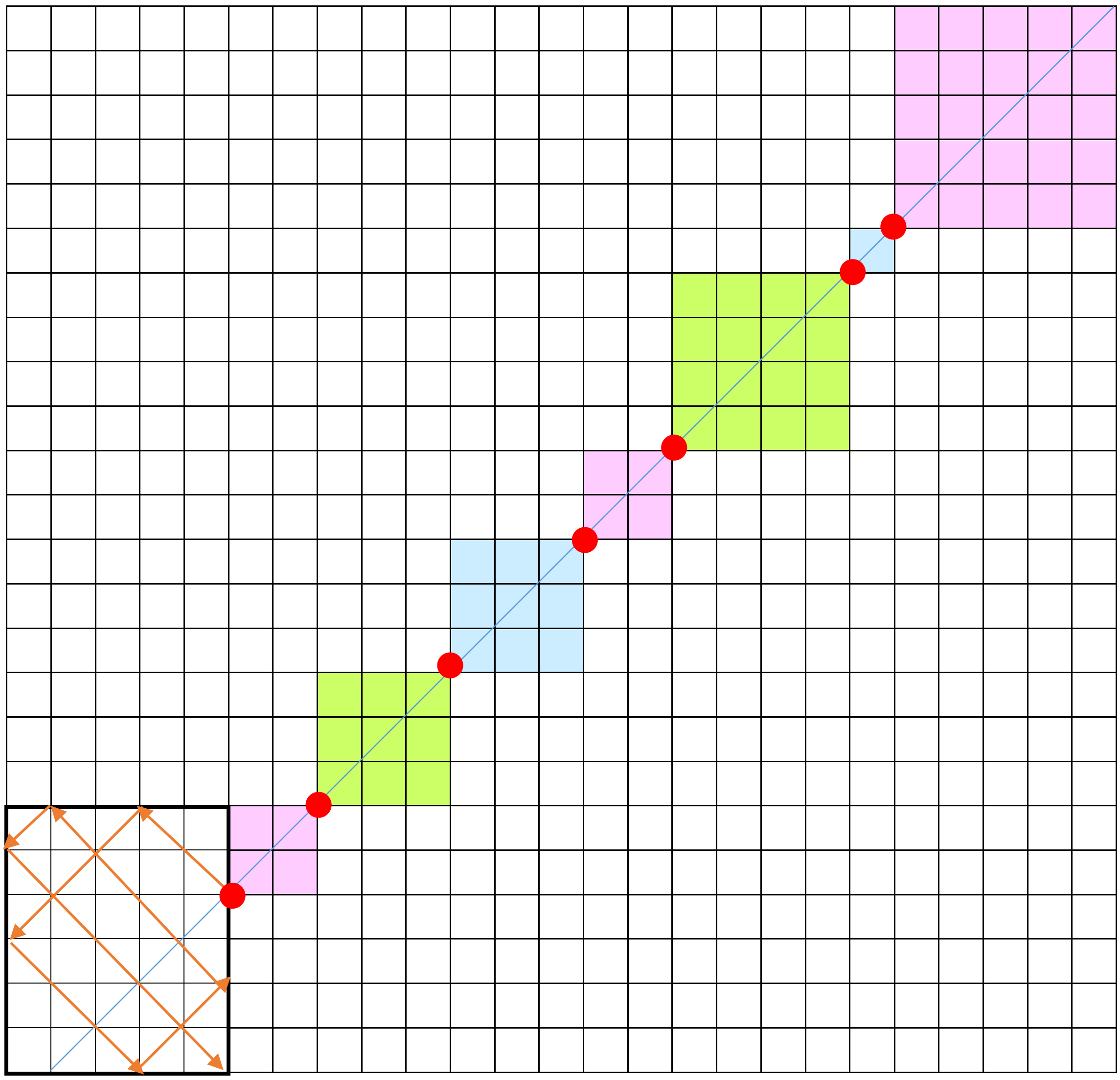
長：寬	2：7	3：7	4：7	5：7	6：7	8：7	9：7	10：7	11：7	12：7	13：7
轉彎次數	3	5	1	3	9	0	7	10	3	6	15

表 5-4,8

長：寬	3：8	5：8	7：8	11：8	13：8	15：8	19：8	21：8	23：8
轉彎次數	2	6	11	5	11	18	8	16	25

以鏡射對稱圖形及正方形對角線不用轉彎的概念，討論當方形長：寬=m：n，(m , n)= 1時的情形，在方形長：寬=3：4 時，利用鏡射對稱可將圖形變成長：寬=9：8 的方形，正方形長：寬=8：8 中對角線經過單位 1x1 的格子點數為 7 個，但是轉彎次數並非是每一個格子點，如下圖所示。





在方形長：寬=5：6 時，利用鏡射對稱可將圖形變成長 x 寬=25：24 的方形，正方形長 x 寬

=24x24 中對角線經過單位 1x1 的格子點數為 23 個，但是轉彎次數也同樣並非是每一個格子點，如上圖所示。

我們將原方形利用鏡射對稱概念放大後之方形，整理如下表:

方形長：寬=m：n	原始方形之長：寬	右移一格後之長：寬	放大後之方形長：寬	轉彎次數
n=3，m=3k+1	4 : 3	3 : 3	4 : 3	0
	7 : 3	6 : 3	7 : 6	1
	10 : 3	9 : 3	10 : 9	2
	13 : 3	12 : 3	13 : 12	3
n=3，m=3k+2	2 : 3	1 : 3	4 : 3	1
	5 : 3	4 : 3	10 : 9	3
	8 : 3	7 : 3	16 : 15	5
	11 : 3	10 : 3	22 : 21	7

方形長：寬=m：n	原始方形之長：寬	右移一格後之長：寬	放大後之方形長：寬	轉彎次數
n=4，m=4k+1	5 : 4	4 : 4	5 : 4	0
	9 : 4	8 : 4	9 : 8	1
	13 : 4	12 : 4	13 : 12	2
n=4，m=4k+3	3 : 4	2 : 4	9 : 8	3
	7 : 4	6 : 4	21 : 20	6
	11 : 4	10 : 4	33 : 32	9
	15 : 4	14 : 4	45 : 44	12

方形長：寬=m：n	原始方形之長：寬	右移一格後之長：寬	放大後之方形長：寬	轉彎次數
n=5，m=5k+1	6 : 5	5 : 5	6 : 5	0
	11 : 5	10 : 5	11 : 10	1
	16 : 5	15 : 5	16 : 15	2
n=5，m=5k+2	2 : 5	1 : 5	6 : 5	2
	7 : 5	6 : 5	21 : 20	5
	12 : 5	11 : 5	36 : 35	8
n=5，m=5k+3	3 : 5	2 : 5	6 : 5	1
	8 : 5	7 : 5	16 : 15	3
	13 : 5	12 : 5	26 : 25	5
n=5，m=5k+4	4 : 5	3 : 5	16 : 14	5
	9 : 5	8 : 5	36 : 35	9
	14 : 5	13 : 5	56 : 55	13

方形長：寬 =m：n	原始方形之 長：寬	右移一格後之 長：寬	放大後之方形 長：寬	轉彎次數
n=6，m=6k+1	7：6	6：6	7：6	0
	13：6	12：6	13：12	1
	19：6	18：6	19：18	2
n=6，m=6k+5	5：6	4：6	25：24	7
	11：6	10：6	55：54	12
	17：6	16：6	85：84	17
	23：6	22：6	115：114	22

我們發現，當原方形長：寬=m：n 中，m=kn+1 時，放大後寬的長度為原寬長度的 k 倍。
例方形長：寬=m：n =9：4，9=4x2+1，k=2，放大之方形長：寬==m'：n'= 9：8，n'=2n。
例方形長：寬=m：n =19：6，k=3，放大之方形長：寬==m'：n'= 19：18，n'=3n。
另外，當原方形長：寬=m：n 中，m=kn+b，b 相同時，放大後長的長度為原長長度的固定倍數 P。其中 p 為最小整數，且在此長寬的關係式中，路徑轉彎次數是一等差數列，公差即是這個固定倍數 P。
例如原方形長：寬=m：n =7：5，7=5x1+2，放大後之方形長：寬==m'：n'= 21：20，
原方形長：寬=m：n =12：5，12=5x2+2，放大後之方形長：寬==m'：n'= 36：35，
上述原方形長：寬=m：n，皆符合 m=5k+2，其放大後之方形長的長度皆是原長長度的 3 倍。而在符合 m=5k+2 時，轉彎次數即是公差為 3 的等差數列。
例如原方形長：寬=m：n =11：6，11=6x1+5，放大後之方形長：寬==m'：n'= 55：54，
原方形長：寬=m：n =23：6，23=6x3+5，放大後之方形長：寬==m'：n'= 115：114，
上述原方形長：寬=m：n，皆符合 m=6k+5，其放大後之方形長的長度皆是原長長度的 5 倍。而在符合 m=6k+5 時，轉彎次數即是公差為 5 的等差數列。

(六) 已發現每一個等差數列的公差，那麼探討每一個等差數列的首項後，即可找到所有的轉彎次數。

原始方形長：寬=3：4，滿足在原方形長：寬=m：n 中，m=4k+3。

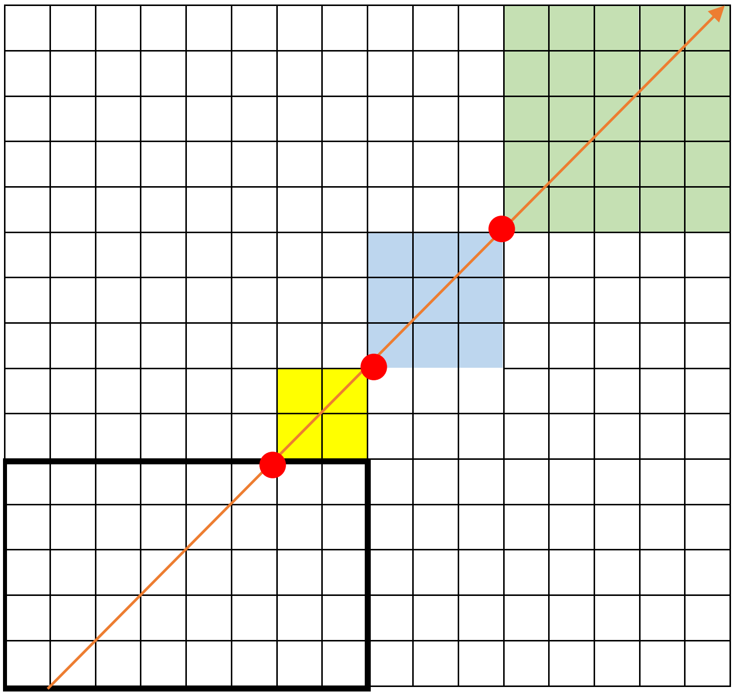
長=3	2	0	1	0	0
寬=4	4	2	0	3	0

轉彎次數 3 次

原始方形長：寬=8：5。滿足在原方形長：寬=m：n 中，m=5k+3。

長=8	7	2	0	5	0
寬=5	5	0	3	0	0

轉彎次數 3 次



我們將上述方法稱為**輾轉相減法**，利用此方法，當最後長=0、寬=0 時，代表路徑已至出(入)口，而中間的數字即為放大的正方形邊長，數量即是路徑轉彎的次數。

例如當原始方形長：寬=m：n =5：8，滿足在原方形長：寬=m：n 中，m=8k+5。放大後方形的長：寬=m'：n'，因為可以找到 p=5，使得 m'=5x5=25，n'=5x5-1=24，滿足 n'modn=24mod8=0，所以當原始寬=8，長=8k+5 時，其路徑轉彎次數成等差數列，公差 d=p=5。接著找到長 x 寬=m x n=5x8 時的路徑轉彎數，即可利用等差找到其餘的次數。

所以利用**輾轉相減法**

當原始方形長：寬=m：n =5：8 時。

長=5	4	0	1	0	0	3	5	0
寬=8	8	4	0	7	2	0	0	0

轉彎次數 6 次

當原始寬=8，長=8k+5， k=0、1、2...時，轉彎次數為 $a_1 = 6$ 、d=5 之等差數列。

長：寬	5：8	13：8	21：8	29：8	37：8	45：8	53：8	61：8
轉彎次數	6	11	16	21	26	31	36	41

d=5

(七) 我們利用問題一鏡射對稱後所得到結果，路徑轉彎次數 m'/m+ n'/n-2 驗證，例如原方形長：寬=17：6，放大後方形長：寬=85：84，路徑轉彎次數 85/17+84/6-2=5+14-2=17，正確無誤。

(八) 路徑總長度，當鏡射對稱概念，可將原方形長：寬=m：n 放大後的方形長：寬=m'：n'，所以路徑總長即為以 n'為邊長之正方形的對角線。

例如：在原方形長：寬=8：5，放大後的方形長：寬=16：15，路徑長度是以 15 為邊長

之正方形的對角線，所以路徑總長度為 $15\sqrt{2}$。

(九) 路徑中經過格子點的次數，

原始方形長：寬=m：n，鏡射對稱概念放大後的方形長：寬=m′：n′，m′=m p，n′=m p-1，且 n′mod n=0。利用輾轉相減法找到每一個等差數列的首項，再依序找到欲求的轉彎次數，則原始方形長：寬=m：n，路徑中經過格子點的次數=n′-1-f(m′,n′)。

八、問題五：從公園左下角**向右移動二格**，路徑以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發

(一) 圖示不同長寬比的方形，分別計數路徑的轉彎次數，並表格化記錄下來，如下表 5-5.1。

表-5-5.1

長:寬	3：3	4：3	5：3	6：3	7：3	8：3	9：3	10：3	11：3	12：3
轉彎次數	無限繞圈	2	0	無限繞圈	4	1	無限繞圈	6	2	無限繞圈

(二) 我們同樣將轉彎次數畫在直角坐標平面上，製作成下表。

長 x 寬 (寬為任意自然數)	小於等於寬的正整數 N 且 (寬,N)=1	長定義 x 座標 轉彎次數定義為 y 座標 其對應之方程式
4：3、5：3、7：3…	1、2	$y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$ (長,寬)＝1 長=3k+2 $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$ (長,寬)＝1 長=3k+1

(三) 我們發現當長：寬=m：n =m：m$\pm$2，且(m , n)≠ 1時，卻不會無限循環。

(四) 我們將原方形利用鏡射對稱概念放大後之方形，整理如下表:

方形長：寬 =m：n	原始方形之 長：寬	右移一格後之 長：寬	放大後之方形 長：寬	轉彎次數
n=3，m=3k+1	4：3	2：3	8：6	2
	7：3	5：3	14：12	4
	10：3	8：3	20：18	6
	13：3	12：3	13：12	8
n=3，m=3k+2	5：3	3：3	5：3	0
	8：3	6：3	8：6	1
	11：3	9：3	11：9	2

我們發現，當原方形長：寬=m：n 中，m=kn+2 時，放大後寬的長度為原寬長度的 k 倍。

例方形長：寬=m：n =8：3，8=3x2+2，k=2，放大後之方形長：寬==m′：n′= 8：6，n′=2n。

例方形長：寬=m：n =11：3，k=3，放大後之方形長：寬==m’：n’= 11：9，n’=3n。
另外，與問題(四)相同，當原方形長：寬=m：n 中，m=kn+b，b 相同時，放大後長的長度為原長長度的固定倍數 P。其中 p 為最小整數，且在此長寬的關係式中，路徑轉彎次數是一等差數列，公差即是這個固定倍數 P。
例如原方形長：寬=m：n =4：3，4=3x1+1，放大後之方形長：寬==m’：n’= 8：6，
原方形長：寬=m：n =10：3，10=3x3+1，放大後之方形長：寬==m’：n’= 20：18，
上述原方形長：寬=m：n，皆符合 m=3k+1，其放大後之方形長的長度皆是原長長度的 2 倍。而在符合 m=3k+1 時，轉彎次數即是公差為 2 的等差數列。

(三) 利用輾轉相減法探討每一個等差數列的首項，即可找到所有的轉彎次數。
當原始方形土地長：寬=5：8 時。

長=5	3	0	0
寬=8	8	5	0

⬆ 轉彎次數 1 次

原始方形長：寬=5：8， 鏡射對稱概念的放大長方形長：寬=10：8，p=2，
所以當原始長=5，寬=5k+3， k=0、1、2...時，轉彎次數為 $a_1=1$ 、d=2 之等差數列。

(四) 我們利用問題一鏡射對稱後所得到結果，路徑轉彎次數 m’/m+ n’/n-2 驗證，例如原方形長：寬=10：3，放大後方形長：寬=20：18，路徑轉彎次數 20/10+18/3-2=2+6-2=6，正確無誤。

(五) 路徑總長度，當鏡射對稱概念，可將原方形長：寬=m：n 放大後的方形長：寬=m’：n’，所以路徑總長即為以 n’為邊長之正方形的對角線，例如: 在原方形長：寬=8：5，放大後的方形長：寬=32：30，路徑長度是以 30 為邊長之正方形的對角線，所以路徑總長度為 $30\sqrt{2}$。

(五) 路徑中經過格子點的次數，
原始方形長：寬=m：n，鏡射對稱概念放大後的方形長：寬=m’：n’，m’=m p，n’=m p-2，且 n’mod n=0。利用輾轉相減法找到每一個等差數列的首項，再依序找到欲求的轉彎次數，則原始方形長：寬=m：n，路徑中經過格子點的次數=n’-1-f(m’,n’)。

陸、 研究結果與討論

[研究結果]

一、 問題一：路徑出發以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發

(一) 當方形土地長：寬=1：1(正方形)時，路徑的轉彎次數等於 0。
(二) 方形長：寬之比=m：n 和 n：m 時，路徑的轉彎次數相等。
(三) 方形長：寬之比=m：1 和 1：m 時，路徑的轉彎次數相等，路徑的轉彎次數等於 m-1。
(四) 方形長：寬之比=a：b=m：1 時，土地長：寬之比=a：b 和長：寬之比=m：1 之路徑的轉彎次數相等。長：寬之比=c：d=1：m 時，土地長：寬之比=c：d 和長：寬之比= 1：

m 之路徑的轉彎次數相等。

(五) 公園方形土地長：寬之比=m：n，會形成 n 個等差數列，且公差依序為 n 的因數。

(六) 方形長：寬=a：b 和方形長：寬=c：d，$(a,b)=1$，$(c,d)=1$，若 $a+b=c+d$，則二個長方形路徑的轉彎次數是相同的，意即 $f(a,b)_{(1,1)}=f(c,d)_{(1,1)}$。

(七) 長方形 a：b 和長方形 1：k，$(a,b)=1$，若 $a+b=1+k$，則二個長方形路徑的轉彎次數都是 $k-1$，亦即是 $a+b-2$（長＋寬-2）。

(八) 方形土地長：寬＝ $x:n$，x 是任意自然數，$(x,n)=k$，則路徑的轉彎次數 $y=\frac{1}{k}x+(\frac{n}{k}-2)$

(九) 當原先公園方形土地長：寬=m：n，即視為正方形邊長[m , n]，所以路徑轉彎次數為 $\frac{[m,n]}{m}+\frac{[m,n]}{n}-2$ 次。

(十) 方形長：寬=m：n，可視為是放大後的正方形邊長[m , n]，所以路徑總長度為 $\sqrt{2}$ [m , n]。

(十一) 公園方形土地長：寬=m：n，

路徑經過格子點的次數為 $[m,n]-1-(\frac{[m,n]}{m}+\frac{[m,n]}{n}-2)$。

二、 問題二：路徑出發以角度 $\tan\theta=2$ 之方向出發

(一) 方形長：寬=1：2 時，路徑的轉彎次數恰好是 0。

(二) 當長= x，寬有 k 個因數，則路徑的轉彎次數方程式就會有 k 個，但是當(長,寬)＝寬和(長,寬)＝ $\frac{寬}{2}$ 時，路徑的轉彎次數方程式相同。

(三) 長：寬=x：n，n≠ 2k，(x,n)=1，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{r}{a}x+b$，a = 1，$b=\frac{1}{a}n-2$。

長：寬=x：n，n=2k，(x,n)=p，p≠ 2k’，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{r}{a}x+b$，a =2p，$b=\frac{1}{a}n-2$。

長：寬=x：n，n=2^kt，(x,n)=2^sp，p≠ 2k’，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{r}{a}x+b$，a = 2^kp，$b=\frac{1}{a}n-2$。

(四) 方形長：寬=m：n，路徑以角度 $\tan\theta=2=\frac{寬}{長}$ 之方向出發，可視為是以長：寬=1：2 之對角線方向出發，原方形土地長：寬=m：n 視成方形長：寬= $\frac{m}{1}:\frac{n}{2}=s:t$，所以路徑轉

彎次數為$\frac{[s,t]}{s}+\frac{[s,t]}{t}-2$次。

(五) 方形長：寬=m：n，路徑以角度$\tan\theta=2=\frac{寬}{長}$之方向出發，可視為是以長：寬=1：2 之對角線方向出發，原方形土地長：寬=m：n 視成方形長：寬=$\frac{m}{1}:\frac{n}{2}=s:t$，所以路徑總長度為$\sqrt{5}$ [s , t]。

(六) 方形長：寬=m：n，路徑以長：寬=1：2 之對角線方向出發，先將方形長：寬=m：n 視成方形土地長：寬=$\frac{m}{1}:\frac{n}{2}=s:t$，

路徑經過格子點的次數為$[s,t]-1-(\frac{[s,t]}{s}+\frac{[s,t]}{t}-2)$。

三、 問題三：路徑出發以角度$\tan\theta=3$之方向出發

(一) 方形長：寬=1：3 時，路徑的轉彎次數恰好是 0。

(二) 當方形長：寬=m：n，路徑以角度$\tan\theta=3$之方向出發，視為以長：寬=1：3 之對角線方向出發，原方形長：寬=m：n 視成方形土地長：寬=$\frac{m}{1}:\frac{n}{3}=s:t$，所以

1. 路徑轉彎次數為$\frac{[s,t]}{s}+\frac{[s,t]}{t}-2$次。
2. 路徑總長度為$\sqrt{10}$ [s ,t]。
3. 路徑經過格子點的次數為$[s,t]-1-(\frac{[s,t]}{s}+\frac{[s,t]}{t}-2)$。

(三) 當寬有 k 個因數，則路徑的轉彎次數方程式就會有 k 個，但是當(長,寬)＝寬和(長,寬)＝$\frac{寬}{3}$時，路徑的轉彎次數方程式相同。

(四) 長：寬=x：n，n≠3k，(x,n)=1，路徑的轉彎次數方程式$y=\frac{r}{a}x+b$，$a=1$，$b=\frac{1}{a}n-2$。

長：寬=x：n，n=3k，(x,n)=p，p≠3k'，路徑的轉彎次數方程式$y=\frac{r}{a}x+b$，$a=3$p，$b=\frac{1}{a}n-2$。

長：寬=x：n，n=3^kt，(x,n)=3^sp，p≠3k'，路徑的轉彎次數方程式$y=\frac{r}{a}x+b$，$a=3^k$p，$b=\frac{1}{a}n-2$。

四、 問題四：從方形左下角出(入)口向右移動一格，路徑以角度$\tan\theta=1$之方向出發

(一) 當方形土地(m , n)≠ 1時，路徑的轉彎次數無數次。

(二) 我們發現當原始方形長：寬=m：n，m=kn+1 時，右移一格後長：寬= kn：n，利用鏡射對稱的概念，放大後之方形的寬=[kn, n]=kn，放大後之方形長：寬= kn+1：kn，所以路徑轉彎處即為 $\frac{kn}{n}-1$=k-1。

(三) 方形長：寬= $x:n$ ，當小於等於 n 的正整數 N 且(x ,N)=1 有 p 個，則對應的路徑轉彎次數方程式就會有 p 個。長：寬= $x:n$ ， $(x,n)=1$ ，對應的直線方程式 $y=\frac{a}{n}x+\frac{b}{n}$ ，其中 a 滿足 $(ax-1)\bmod n=0$ ， $b=(a-2)\cdot n-1$ 。

(四) 原方形長：寬=m：n，鏡射對稱概念放大後的方形長：寬=m’：n’，m’=m p，n’=m p-1，其中 p 為最小整數，且 n’mod n=0。

(五) 原方形長：寬=m：n， m≤n 且 (m, n)= 1的個數有 x 個，路徑的轉彎次數會形成 x 個等差數列，而每一個等差數列的公差 d=上列(三)結果中的 p。

(六) 原方形的長：寬=m：n，鏡射對稱概念放大後的方形長：寬=m’：n’，m’=m k，n’=m k-1，且 n’mod n=0，路徑轉彎次數= $\frac{m'}{m}+\frac{n'}{n}-2$ ，路徑長度是以寬 n’=m k-1 之正方形的對角線，所以路徑總長度= $\sqrt{2}(\mathrm{m\,k}-1)$。路徑中經過格子點的次數=n’-1-f(m’,n’)。

五、 問題五：從公園左下角向右移動二格，路徑以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發

(一) 當方形土地(m , n)≠ 1時，路徑的轉彎次數無數次。

(二) 我們發現當長：寬=m：m ± 2，且(m , n)= 2時，卻不會無限循環。

(三) 我們發現當原始方形長：寬=m：n，m=kn+2 時，右移二格後長：寬= kn：n，利用鏡射對稱的概念，放大後之方形的寬=[kn, n]=kn，放大後之方形長：寬= kn+2：kn，所以路徑轉彎處即為 $\frac{kn}{n}-1$=k-1。

(四) 方形長：寬= $x:n$ ，當小於等於 n 的正整數 N 且(x ,N)=1 有 p 個，則對應的路徑轉彎次數方程式就會有 p 個。長：寬= $x:n$ ， $(x,n)=1$ ，對應的直線方程式 $y=\frac{a}{n}x+\frac{b}{n}$ ，其中 a 滿足 $(ax-2)\bmod n=0$ ， $b=(a-2)\cdot n-2$ 。

(五) 原方形長：寬=m：n，鏡射對稱概念放大後的方形長：寬=m’：n’，m’=m p，n’=m p-2，其中 p 為最小整數，且 n’mod n=0。

(六) 原方形長：寬=m：n，m≤n 且 (m, n)= 1的個數有 x 個，路徑的轉彎次數會形成 x 個等差數列，而每一個等差數列的公差 d=上列(三)結果中的 p。

(七) 原方形的長：寬=m：n，鏡射對稱概念放大後的方形長：寬=m’：n’，m’=m k，n’=m k-2，且 n’mod n=0，路徑轉彎次數= $\frac{m'}{m}+\frac{n'}{n}-2$ ，路徑長度是以寬 n’=mk-2 之正方形的對角線，所以路徑總長度= $\sqrt{2}(\mathrm{m\,k}-2)$。路徑中經過格子點的次數=n’-1-f(m’,n’)。

[討論]

一、當從方形左下角出(入)口**向右移動一格**，路徑以角度 $\tan\theta = 1$ 之方向出發，方形土地長：寬=m：n　，(m , n)≠ 1時，路徑會無限循環，轉彎次數無數次。

(一) 利用**輾轉相減法**

例如原始方形長：寬=6：4，

長=6	5	1	0	3	0	5	1	0	……
寬=4	4	0	3	0	1	0	0	3	……

重複循環，無法停止，也就是會回到原始出發位置

所以路徑會無限循環，路徑的轉彎次數無數次。

(二) 證明：

> 根據定理：原方形的長：寬=m：n，(m , n)= 1，鏡射對稱概念放大後的方形長：寬=m’：n’，
> m’=m k，n’=m k-1，且 n’mod n=0。

當原方形的長：寬=m：n，(m , n)≠ 1，假設(m , n)=p

則 m=px，n=py，(x , y)=1

根據鏡射對稱概念放大，後來的方形的長：寬=m’：n’，

m’=m k=pxk，n’=m k-1=pxk-1，

n’mod n= (pxk-1)mod(py) ≠ 0，

所以 n’mod n=0 無法成立，所以路徑會無限循環，路徑的轉彎次數無數次。

二、當從方形左下角出(入)口**向右移動二格**，路徑以角度 $\tan\theta = 1$ 之方向出發，方形土地長：寬=m：n，(m , n)≠ 1，且 $n \neq m + 2$ 時，路徑會無限循環，轉彎次數無數次。

(一) 利用**輾轉相減法**

例如原始方形長：寬=6：3，

長=6	4	1	0	4	1	0	……
寬=3	3	0	2	0	0	2	……

重複循環，會回到原始出發位置，所以路徑會無限循環，轉彎次數無數次。

(二) 證明：

> 根據定理：原方形的長：寬=m：n，(m , n)= 1，鏡射對稱概念放大後的方形長：寬=m’：n’，m’=m k，n’=m k-2，且 n’mod n=0。

當原方形的長：寬=m：n，(m , n)≠ 1，假設(m , n)=p

則 m=px，n=py，(x , y)=1，py≠p(x ± 2)

根據鏡射對稱概念放大，後來的方形的長：寬=m’：n’，

m’=m k=pxk，n’=m k-2=pxk-2，

n’mod n= (pxk-2)mod(py) ≠ 0，

所以 n’mod n=0 無法成立，所以路徑會無限循環，路徑的轉彎次數無數次。

三、當從方形左下角出(入)口向右移動二格，路徑以角度$\tan\theta=1$之方向出發，方形土地長：寬=m：n，(m , n)≠ 1，且$n=m\pm 2$時，路徑不會無限循環。

(一) 利用輾轉相減法

例如原始方形長：寬=4：6

長=4	2	0	0
寬=6	6	4	0

轉彎一次　　　所以路徑不會無限循環。

(二) 證明：

> 根據定理：原方形的長：寬=m：n，(m , n)≠ 1，鏡射對稱概念放大後的方形長：寬=m'：n'，m'=m k，n'=m k-2，且 n'mod n=0。

當原方形的長：寬=m：n，$n=m\pm 2$時，(m , n)≠ 1，所以(m , n)=2

則 m=2x，n=2y=2x±2，(x , y)=1，

根據鏡射對稱概念放大，後來的方形的長：寬=m'：n'，

m'=m k=2xk，n'=m k-2=2xk-2=2(xk-1)，

n'mod n= (2xk-2)mod(py)=2(xk-1)mod$2(x\pm 1)=0$，

所以 n'mod n=0 成立，所以路徑不會無限循環。

四、延伸討論：從方形左下角出(入)口向上移動二格，路徑以角度$\tan\theta=1$之方向出發

在方形長：寬=m：n，當從方形左下角向上移動二格，利用旋轉再翻轉，鏡射之下，即可視為方形長：寬之比=n：m，從方形左下角出(入)口向右移動二格，即可算出路徑轉彎次數、路徑長以及路徑經過之格子點數。

五、延伸討論：從方形左下角出(入)口向右移動一格，路徑以角度$\tan\theta=2$之方向出發

(一) 例如在方形長：寬=5：6，從鏡射對稱概念可知，方形的變化如下

長：寬=5：6 ➡ 長：寬=4：6 ➡ 長：寬=4：3' ➡ 長：寬=10：9' ➡ 長：寬=10：18

路徑轉彎次數=10/5+18/6-2=3，路徑長=$9\sqrt{5}$，經過之格子點數=9-1-3=5。

(二) 原方形長：寬=m：n，路徑以角度$\tan\theta=2=\frac{寬}{長}$之方向出發，可視為方形土地長：寬=$\frac{m-1}{1}:\frac{n}{2}=s:t$，從方形左下角出(入)口向右移動一格，所以後方形土地長：寬=$kt+1:kt$，且$(kt+1)\bmod m=0$，最後方形土地長：寬=$kt+1:2kt$，$2kt\bmod n=0$。

柒、結論

一、 結論

藉由本研究五個問題的探討，我們得到以下之定理推論：

定理一：方形長：寬=m：n，路徑從方形左下角出(入)口為起始點，

以角度 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ 之方向出發，

利用單位量轉換成方形土地長：寬=$\dfrac{m}{x}:\dfrac{n}{y}$，則：

(1) 路徑轉彎次數為 $\dfrac{\left[\frac{m}{x},\frac{n}{y}\right]}{\frac{m}{x}}+\dfrac{\left[\frac{m}{x},\frac{n}{y}\right]}{\frac{n}{y}}-2$ 次。

(2) 路徑總長度為 $\sqrt{x^2+y^2}\left[\dfrac{m}{x},\dfrac{n}{y}\right]$。

(3) 路徑經過格子點的次數為 $\left[\dfrac{m}{x},\dfrac{n}{y}\right]-1-\left(\dfrac{\left[\frac{m}{x},\frac{n}{y}\right]}{\frac{m}{x}}+\dfrac{\left[\frac{m}{x},\frac{n}{y}\right]}{\frac{n}{y}}-2\right)$ 次。

定理二：方形長：寬=m：n，從方形左下角出(入)口**向右移動 h 格**為起始點，以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發，則：

(1) 當方形土地(m , n)≠ 1時，路徑的轉彎次數無數次。

(2) 當方形土地(m , n)= h ≠ 1，發現當長：寬=m：m±h，不會無限循環。

(3) 原方形長：寬=m：n，m=kn+h 時，右移 h 格後長：寬= kn：n，利用鏡射對稱的概念，放大後之方形的寬=[kn, n]=kn，放大後之方形長：寬= kn+h：kn，所以路徑轉彎處即為 $\dfrac{kn}{n}-1$=k-1。

(3) 原始方形長：寬=m：n，鏡射對稱概念放大後的方形長：寬=m'：n'，m'= np+h，n'=np，其中 p 為最小整數，且 m'mod m=0

路徑轉彎次數=$\dfrac{m'}{m}+\dfrac{n'}{n}-2$。

路徑長度是以寬 n'= np 之正方形的對角線，
所以路徑總長度=$\sqrt{2}$np

路徑中經過格子點的次數=n'-1-$\dfrac{m'}{m}+\dfrac{n'}{n}-2$。

定理三：方形長：寬=m：n，路徑從方形左下角出(入)口**向右移動 h 格**為起始點，

以角度 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ 之方向出發，

利用單位量轉換成方形土地長：寬=$\dfrac{m-h}{x}:\dfrac{n}{y}=s:t$，利用鏡射對稱放大後的方形土地長：寬=$kt+h:kt$，$(kt+h)\bmod m=0$，

最後再利用單位量轉換成方形土地長：寬= $kt+h:\frac{y}{x}kt$

(1) 路徑轉彎次數為 $\frac{kt+h}{m}+\frac{\frac{y}{x}kt}{n}-2$ 次。

(2) 路徑總長度為 $kt\sqrt{x^2+y^2}$ 。

(3) 路徑經過格子點的次數為 $kt-1-(\frac{kt+h}{m}+\frac{\frac{y}{x}kt}{n}-2)$ 次。

定理四：方形長：寬= x ：n，路徑從方形左下角出(入)口為起始點，
以角度 $\tan\theta=r$ 之方向出發，

(1)長：寬=x：n，n≠rk，(x,n)=1，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{r}{a}x+b$ ，

$a=1$，$b=\frac{1}{a}n-2$ 。

(2)長：寬=x：n，n=rk，(x,n)=p，p≠3k，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{r}{a}x+b$ ，

$a=\mathrm{rp}$，$b=\frac{1}{a}n-2$ 。

(3) 長：寬=x：n，n=r^kt，(x,n)=r^sp，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{r}{a}x+b$ ，

$a=r^k p$，$b=\frac{1}{a}n-2$ 。

定理五：方形長：寬= x ：n，路徑從方形左下角出(入)口**向右移動 h 格**為起始點，
以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發，路徑的轉彎次數方程式

$y=\frac{a}{n}x+\frac{b}{n}$ ，a 滿足 $(ax-h)\bmod n=0$ ，$b=(a-2)\cdot n-h$ 。

捌、 參考資料

一、 簡丞皓(2013)。一步一腳印－探討方格棋盤中各種路徑問題。中華民國第五十三屆中小學科學展覽會國小組數學科佳作。

二、 林文祺等(2016)。因緣際會。中華民國第五十六屆中小學科學展覽會國小組數學科佳作。

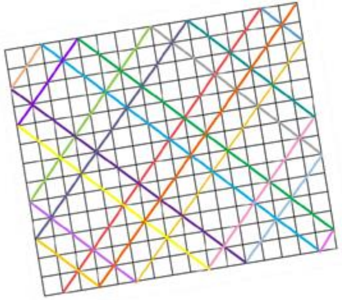
【評語】030404

1. 本作品考慮長寬比為 m：n 的方格矩形上，分別以 (x,y)=(1,1),(1,2)或(1,3) 為方向，改變路徑的出發起始點，探討路徑轉彎次數、路徑長度和經過格子點次數之關係。

2. 作者們針對 m=1,2,3 的情況做了分析。藉由觀察一些小例子，歸納出通則，並針對推論出的通則給出說明。從觀察規律到給出猜想，最後再藉助鏡射的方式給出論證，可以看得出來作者們已經充分掌握了研究問題的方法，這一點頗值得鼓勵。

作品海報

方形建築師之聯想



－探討路徑與面積之關係

摘要

本研究旨在各種不同邊長比的方形上，改變路徑出發角度，以及改變路徑出發的起始點，探討路徑轉彎次數以及路徑長度的關係。首先在方形長：寬=m：n，路徑從方形的左下角出(入)口為起始點，以角度 $\tan\theta=1$、$\tan\theta=2$ 和 $\tan\theta=3$ 之方向出發，討論路徑轉彎次數、路徑總長度和路徑經過格子點的次數，進而延伸推論當以角度 $\tan\theta=\frac{y}{x}$ 之方向出發時路徑轉彎次數、路徑總長度和路徑經過格子點的次數的數學關係式，接著在方形長：寬=m：n，從方形左下角出(入)口向右移動1格、向右移動2格為起始點，以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發，討論路徑轉彎次數、路徑總長度和路徑經過格子點的次數，延伸推論從方形左下角出(入)口向右移動h格為起始點時路徑轉彎次數、路徑總長度和路徑經過格子點的次數的數學關係式。

壹、前言

一、研究動機

課堂中，我們進行數學奠基模組「和根號做朋友」的教學活動-方形建築師，老師請我們在方格棋盤上 將、士、馬、象 依照自己行走的規則，各自圍一個正方形的家。這時我們想到，如果在方格棋盤上，他們依照自己的行走規則開闢路徑，那麼在不同大小的方形棋盤上。路徑轉彎的次數和路徑的總長度是否存在有趣的關係？

貳、研究目的

我們的研究目的如下：

目的一、探討在不同邊長比的方形下，改變路徑出發的角度，探討路徑轉彎次數、路徑的總長度、經過格子點次數和方形之間的關係。	
問題一	路徑起始點為左下角之出(入)口，以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發，討論不同邊長比的方形、路徑轉彎次數、路徑長度和經過格子點次數之間的關係。
問題二	路徑起始點為左下角之出(入)口，以角度 $\tan\theta=2$ 之方向出發，討論不同邊長比的方形、路徑轉彎次數、路徑長度和經過格子點次數之間的關係。
問題三	路徑起始點為左下角之出(入)口，以角度 $\tan\theta=3$ 之方向出發，討論不同邊長比的方形、路徑轉彎次數、路徑長度和經過格子點次數之間的關係。

目的二、探討在不同邊長比的方形下，改變路徑出發的起始點，探討路徑轉彎次數、路徑的總長度、經過格子點次數和方形之間的關係。	
問題四	路徑出發的起始點為左下角之出(入)口向右移動一單位長，角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發，討論不同邊長比的方形、路徑轉彎次數、路徑長度和經過格子點次數之間的關係。
問題五	路徑出發的起始點為左下角之出(入)口向右移動二單位長，角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發，討論不同邊長比的方形、路徑轉彎次數、路徑長度和經過格子點次數之間的關係。

參、文獻探討

過去相關之科展與研究參考如下表：

文獻名稱	中華民國第五十三屆中小學科學展覽會作品 『一步一腳印－探討方格棋盤中各種路徑問題』
文獻研究內容摘要	探討： 1.方形棋盤中任何一格為起點時所畫出來的圖形。 2.同一個棋盤中所有圖形的種類數。 3.畫出圖形時所走的路線最少的步數。 4.在不同的棋盤大小，圖形之間的關係。 結論： 1.路徑的步數和最大公因數有關。 2.圖形最後會回到起始點，之後路徑就會重覆。 3.如果起始點不同，圖形看起來似乎不一樣，但是實際上是有關聯的。而在同一個棋盤中所有的圖形數也和最大公因數有關。也和線對稱有很大的關係
對本研究之啟發	公因數、公倍數、對稱

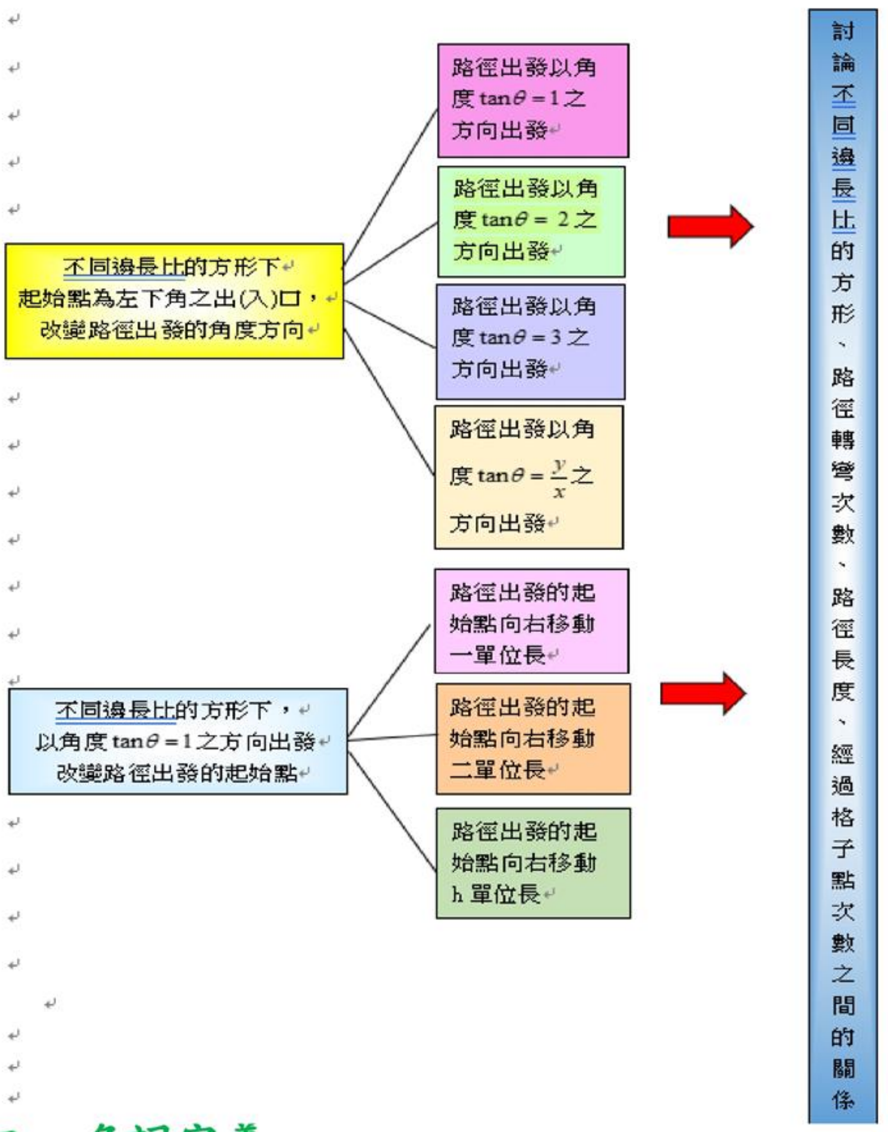
文獻名稱	中華民國第五十六屆中小學科學展覽會作品 『因緣際會』
文獻研究內容摘要	探討： 1.m×n方格圖，對角線所經過的方格數，並歸納出計算公式。 2.m×n方格圖，起點A往上、右各移1格，終點B往左、下各移1格，所形成的區塊會經過幾個方格數。 3.探討m×n方格圖，起點A往上、右各移2格，終點B往左、下各移2格，所形成的區塊會經過幾個方格數。 4.探討m×n方格圖，起點A往上、右各移r格，終點B往左、下各移r格，所形成的區塊會經過幾個方格數。 5.探討 m×n 方格圖，起點 A 往上移 S1 格、右移 S2 格，終點 B 往左移 E1 格、往下移 E2 格，所形成的區塊會經過幾個方格數。 結論： 對角線經過的格子數與長方形的長、寬和長、寬的最大公因數有關。
對本研究之啟發	公因數、長方形的長、寬的長度

肆、研究設備及器材

紀錄單、計算機、紙、筆、電腦、Microsoft Office Word、Jamboard App。

伍、研究過程與方法

一、研究架構



二、名詞定義

(一) □$(m、n)_{(x、y)}$定義為方形長：寬=m：n，路徑以 $\tan\theta=\frac{y}{x}$ 方向出發。

(二) $f(m、n)_{(x、y)}$定義為方形長：寬=m：n，以 $\tan\theta=\frac{y}{x}$ 方向出發，路徑之轉彎次數。

問題一：路徑出發以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發

（一）圖示不同長寬比的方形，分別計數路徑的轉彎次數，如下表。

表5-1.1

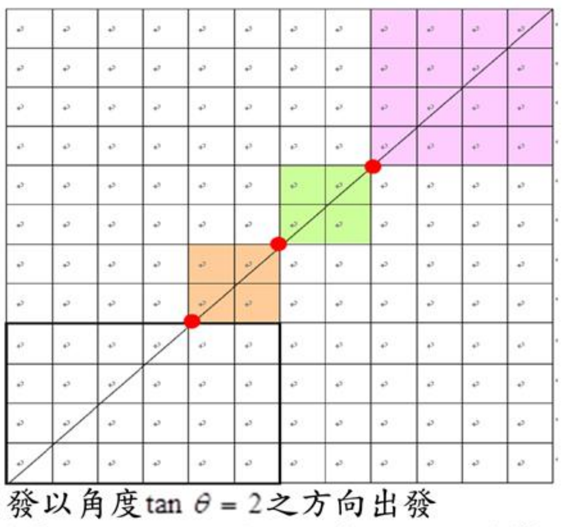
長：寬	1：3	2：3	3：3	4：3	5：3	6：3	7：3	8：3	9：3	10：3	11：3	12：2
轉彎次數	2	3	0	5	6	1	8	9	2	11	12	3

(二)我們將長：寬為1：n、2：n、3：n…所對應的轉彎次數畫在直角坐標平面上，發現形成一條斜直線，寬的正因數有k個，就會有k條斜直線，並製作成下表。

長：寬	寬的因數	長定義x座標 轉彎次數定義為y座標 其對應之方程式
1：1、2：1、3：1…	1	$y=x-1$　(長,寬)=1
1：2、2：2、3：2…	1、2	$y=x$　(長,寬)=1 $y=\frac{1}{2}x-1$　(長,寬)=2
1：3、2：3、3：3…	1、3	$y=x+1$　(長,寬)=1 $y=\frac{1}{3}x-1$　(長,寬)=3

從上表發現：當寬有k個因數，則對應的直線方程式就會有k個。

(三)以鏡射對稱圖形及正方形對角線不用轉彎的概念，討論當方形土地長：寬是m：n，且(m,n)≠1時，利用對稱變成新的正方形，如下圖所示。



問題二：路徑出發以角度 $\tan\theta=2$ 之方向出發

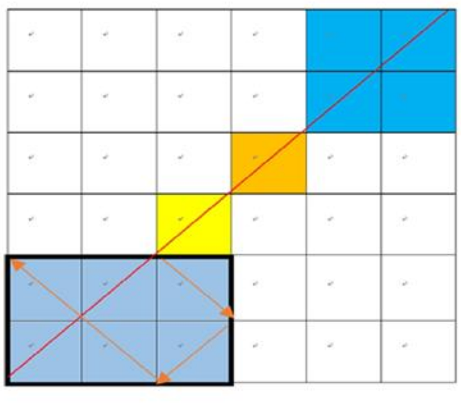
(一) 圖示不同長寬比的方形，分別計數路徑的轉彎次數，如下表。

長：寬	1：2	2：2	3：2	4：2	5：2	6：2	7：2	8：2	9：2	10：2	11：2	12：2
轉彎次數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

(二)我們將長：寬為1：n、2：n、3：n…..所對應的轉彎次數畫在直角坐標平面上。

長：寬	寬的因數	長定義x座標 轉彎次數定義為y座標 其對應之方程式
1：1、2：1、3：1…	1	$y=2x-1$　(長,寬)=1
1：2、2：2、3：2…	1、2	$y=x-1$　(長,寬)=1★ $y=x-1$　(長,寬)=2★

(三)以鏡射對稱圖形及正方形對角線不用轉彎的概念，畫製下圖。



問題三：路徑出發以角度 $\tan\theta=3$ 之方向出發

(一)圖示不同長寬比的方形，分別計數路徑的轉彎次數，如下表。

長：寬	1：2	2：2	3：2	4：2	5：2	6：2	7：2	8：2	9：2	10：2	11：2	12：2
轉彎次數	3	2	9	5	15	8	21	11	27	14	33	17

(二)我們同樣將轉彎次數畫在直角坐標平面上，製作成下表。

長：寬	寬的因數	長定義 x 座標 轉彎次數定義為 y 座標 其對應之方程式
1：1、2：1、3：1…	1	$y=3x-1$ (長,寬)=1
1：2、2：2、3：2…	1、2	$y=3x$ (長,寬)=1 $y=\frac{3}{2}x-1$ (長,寬)=2
1：3、2：3、3：3…	1、3	$y=x-1$ (長,寬)=1

(三)由問題一、問題二的結果，我們藉由單位量的轉換直接推論，例如□$(3、4)_{(1、3)}$可視為□$(9、4)_{(1、1)}$所以路徑轉彎次數=11次

問題四：從方形左下角出(入)口向右移動一格，路徑以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發

(一)圖示不同長寬比的方形，分別計數路徑的轉彎次數，如下表。

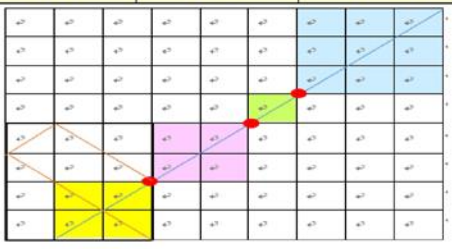
長：寬	2：4	3：4	4：4	5：4	6：4	7：4	8：4	9：4	10：4	11：4	12：4
轉彎次數	無限繞圈	3	無限繞圈	0	無限繞圈	6	無限繞圈	1	無限繞圈	9	無限繞圈

(二)我們同樣將轉彎次數畫在直角坐標平面上，製作成下表

長 x 寬	小於等於寬的正整數 N 且 (寬,N)=1	長定義 x 座標 轉彎次數定義為 y 座標 其對應之方程式
2：1、3：1、4：1…	1	$y=x-2$ (長,寬)=1
3：2、5：2、7：2…	1	$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ (長,寬)=1 長=2k+1
2：3、4：3、5：3…	1、2	$y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$ (長,寬)=1 長=3k+2 $y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$ (長,寬)=1 長=3k+1

(三)我們將原方形利用鏡射對稱概念放大後之方形，整理如下表：。

方形長：寬 =m：n	原始方形之長：寬	右移一格後之長：寬	放大後之方形長：寬	轉彎次數
n=4，m=4k+1	5：4	4：4	5：4	0
	9：4	8：4	9：8	1
	13：4	12：4	13：12	2
n=4，m=4k+3	3：4	2：4	9：8	3
	7：4	6：4	21：20	6
	11：4	10：4	33：32	9
	15：4	14：4	45：44	12



問題五：從公園左下角向右移動二格，路徑以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發

(一)圖示不同長寬比的方形，分別計數路徑的轉彎次數，如下表。

長:寬	3：3	4：3	5：3	6：3	7：3	8：3	9：3	10：3	11：3	12：3
轉彎次數	無限繞圈	2	0	無限繞圈	4	1	無限繞圈	6	2	無限繞圈

(二)我們同樣將轉彎次數畫在直角坐標平面上，製作成下表。

長 x 寬 (寬為任意自然數)	小於等於寬的正整數 N 且 (寬,N)=1	長定義 x 座標 轉彎次數定義為 y 座標 其對應之方程式
4：3、5：3、7：3…	1、2	$y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$ (長,寬)=1 長=3k+2 $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$ (長,寬)=1 長=3k+1

(三)我們將原方形利用鏡射對稱概念放大後之方形，整理如下表：

方形長：寬 =m：n	原始方形之長：寬	右移一格後之長：寬	放大後之方形長：寬	轉彎次數
n=3，m=3k+1	4：3	2：3	8：6	2
	7：3	5：3	14：12	4
	10：3	8：3	20：18	6
	13：3	12：3	13：12	8
n=3，m=3k+2	5：3	3：3	5：3	0
	8：3	6：3	8：6	1
	11：3	9：3	11：9	2

陸、研究結果與討論

[研究結果]

問題一：路徑出發以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發

(一)當方形土地長：寬=1：1(正方形)時，路徑的轉彎次數等於0。

(二)方形長：寬之比=m：n和n：m時，路徑的轉彎次數相等。

(三)方形長：寬之比=m：1和1：m時，路徑的轉彎次數相等，路徑的轉彎次數等於m-1。

(四)方形長：寬之比=a：b=m：1時，土地長：寬之比=a：b和長：寬之比=m：1之路徑的轉彎次數相等。長：寬之比=c：d=1：m時，土地長：寬之比=c：d和長：寬之比= 1：m之路徑的轉彎次數相等。

(五)公園方形土地長：寬之比=m：n，會形成n個等差數列，且公差依序為n的因數。

(六)方形長：寬=a：b和方形長：寬=c：d，$(a,b)=1$，$(c,d)=1$，若 $a+b=c+d$，則二個長方形路徑的轉彎次數是相同的，意即 $f(a,b)_{(1,1)}=f(c,d)_{(1,1)}$。

(七)長方形a：b和長方形 $(a,b)=1$，若 $a+b=1+k$，則二個長方形路徑的轉彎次數都是k-1，亦即是 $f(a,b)_{(1,1)}=f(c,d)_{(1,1)}$（長＋寬-2）。

(八)方形土地長：寬 $x:n$，x 是任意自然數，$(x,n)=k$，則路徑的轉彎次數 $y=\frac{1}{k}x+(\frac{n}{k}-2)$

(九)當原先公園方形土地長：寬=m：n，即視為正方形邊長[m ,n]，所以路徑轉彎次數為 $\frac{[m,n]}{m}+\frac{[m,n]}{n}-2$ 次。

(十)方形長：寬=m：n，可視為是放大後的正方形邊長[m ,n]，所以路徑總長度 $\sqrt{2}[m,n]$。

(十一)公園方形土地長：寬=m：n，

路徑經過格子點的次數為 $[m,n]-1-(\frac{[m,n]}{m}+\frac{[m,n]}{n}-2)$。

問題二：路徑出發以角度 $\tan\theta=2$ 之方向出發

(一)方形長：寬=1：2時，路徑的轉彎次數恰好是0。

(二)當長= x，寬有k個因數，則路徑的轉彎次數方程式就會有k個，但是當(長, 寬)＝寬和(長, 寬)＝ $\frac{寬}{2}$時，路徑的轉彎次數方程式相同。

(三)1. 長：寬=x：n，n≠2k，(x, n)=a，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{2}{a}x+\frac{n}{a}-2$。

2. 長：寬=x：n，n=2k，(x, n)=a

a≠2k'，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{2}{2a}x+\frac{n}{2a}-2$

a=2k，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{2}{a}x+\frac{n}{a}-2$

3. 長：寬=x：n，n=2^k，(x, n)=a

a≠2k'，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{2}{2a}x+\frac{n}{2a}-2$

a=$2^S<2^k$，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{2}{2a}x+\frac{n}{2a}-2$

a=2^k，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{2}{a}x+\frac{n}{a}-2$

(四)方形長：寬=m：n，路徑以角度 $\tan\theta=2=\frac{寬}{2}$之方向出發，原方形土地長：寬=m：n視成方形長：寬= $\frac{m}{1}:\frac{n}{2}=s:t$，所以

1 路徑轉彎次數為 $\frac{[s,t]}{s}+\frac{[s,t]}{t}-2$

2 路徑總長度為$\sqrt{5}$ [s , t]

3 路徑經過格子點的次數為 $[s,t]-1-(\frac{[s,t]}{s}+\frac{[s,t]}{t}-2)$

問題三：路徑出發以角度 $\tan\theta=3$ 之方向出發

(一)方形長：寬=1：3時，路徑的轉彎次數恰好是0。

(二)當方形長：寬=m：n，視為以長：寬=1：3之對角線方向出發，原方形長：寬=m：n視成方形土地長：寬= $\frac{m}{1}:\frac{n}{3}=s:t$，所以

1 路徑轉彎次數為 $\frac{[s,t]}{s}+\frac{[s,t]}{t}-2$ 次。

2 路徑總長度為 $\sqrt{10}$ [s ,t]。

3 路徑經過格子點的次數為 $[s,t]-1-(\frac{[s,t]}{s}+\frac{[s,t]}{t}-2)$。

(三)當寬有k個因數，則路徑的轉彎次數方程式就會有k個，但是當(長, 寬)＝寬和(長, 寬)＝ $\frac{寬}{3}$時，路徑的轉彎次數方程式相同。

(四)1. 長：寬=x：n，n≠3k，(x, n)=a，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{3}{a}x+\frac{n}{a}-2$

2. 長：寬=x：n，n=3k，(x, n)=a

a≠3k'，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{3}{3a}x+\frac{n}{3a}-2$

a=3k'，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{3}{a}x+\frac{n}{a}-2$

3. 長：寬=x：n，n=3^k，(x, n)=a

a≠3k'，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{3}{3a}x+\frac{n}{3a}-2$

a=$3^s<3^k$，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{3}{3a}x+\frac{n}{3a}-2$

a=3^k，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{3}{a}x+\frac{n}{a}-2$

問題四：從公園左下角向右移動一格，路徑以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發

(一)當方形土地(m ,n)≠1時，路徑的轉彎次數無數次。

(二)我們發現當原始方形長：寬=m：n，m=kn+1時，右移一格後長：寬=kn：n，利用鏡射對稱的概念，放大後之方形的寬=[kn, n]=kn，放大後之方形長：寬= kn+1：kn，所以路徑轉彎處即為 $\frac{kn}{n}-1$=k-1。

(三)方形長：寬= $x:n$，當小於等於n的正整數N且 $(x,N)=1$有p個，則對應的路徑轉彎次數方程式就會有p個。長：寬= $x:n$，$(x,n)=1$，對應的直線方程式 $y=\frac{a}{n}x+\frac{b}{n}$，其中a滿足 $(ax-1)\bmod n=0$，$b=(a-2)\cdot n-1$。

問題五：從公園左下角向右移動二格，路徑以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發

(一)當方形土地(m ， n)≠1時，路徑的轉彎次數無數次。

(二)我們發現當長：寬=m：m 2，且(m ,n)=2時，卻不會無限循環。

(三)我們發現當原始方形長：寬=m：n，m=kn+2時，右移二格後長：寬= kn：n，利用鏡射對稱的概念，放大後之方形的寬=[kn, n]=kn，放大後之方形長：寬= kn+2：kn，所以路徑轉彎處即為 $\frac{kn}{n}-1$=k-1。

(四)方形長：寬= $x:n$，當小於等於n的正整數N且$(x,N)=1$有p個，則對應的路徑轉彎次數方程式就會有p個。長：寬=$x:n$，$(x,n)=1$，對應的直線方程式 $y=\frac{a}{n}x+\frac{b}{n}$，其中a滿足 $(ax-2)\bmod n=0$，$b=(a-2)\cdot n-2$。

(五)原方形長：寬=m：n，鏡射對稱概念放大後的方形長：寬=m'：n'，m'=m p，n'=mp-2，其中p為最小整數，且 n' mod n=0。

(六)原方形長：寬=m：n，m≤n且 (m,n)=1的個數有x個，路徑的轉彎次數會形成x個等差數列，而每一個等差數列的公差d=上列(三)結果中的p。

(七)原方形的長：寬=m：n，鏡射對稱概念放大後的方形長：寬=m'：n'，m'=m k，n'=m k-2，且n' mod n=0，路徑轉彎次數=m'/m+n'/n-2，路徑長度是以寬n'=mk-2 之正方形的對角線，所以路徑總長度=$\sqrt{2}$(m k-2)。路徑中經過格子點的次數=n'-1-f(m',n')。

[討論]

一、當從方形左下角出(入)口向右移動一格，路徑以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發，方形土地長：寬=m：n ，(m ,n)≠1 時，路徑會無限循環，轉彎次數無數次。

(一)利用**輾轉相減法**

例如原始方形長：寬=6：4，

長=6	5	1	0	3	0	5	1	0	……
寬=4	4	0	3	0	1	0	0	3	……

重複循環，無法停止，也就是會回到原始出發位置

所以路徑會無限循環，路徑的轉彎次數無數次。

(二)證明：

根據定理：原方形的長：寬=m：n，(m , n)= 1，鏡射對稱概念放大後的方形長：寬=m'：n'，
m'=m k，n'=m k-1，且 n'mod n=0。

當原方形的長：寬=m：n，(m,n)≠1，假設(m,n)=p

則m=px，n=py，(x,y)=1

根據鏡射對稱概念放大，後來的方形的長：寬=m'：n'，

m'=m k=pxk，n'=m k-1=pxk-1，

n'mod n= (pxk-1)mod(py) ≠ 0，

所以$n'\equiv 0(\bmod n)$無法成立，所以路徑會無限循環，路徑的轉彎次數無數次。

二、當從方形左下角出(入)口向右移動二格，路徑以角度$\tan\theta=1$之方向出發，方形土地長：寬=m：n，(m , n)≠1，且n≠m+2時，路徑會無限循環，轉彎次數無數次。

(一)利用**輾轉相減法**

例如原始方形長：寬=6：3，

長=6	4	1	0	4	1	0	……
寬=3	3	0	2	0	0	2	……

重複循環，會回到原始出發位置，所以路徑會無限循環，轉彎次數無數次。

(二)證明：

根據定理：原方形的長：寬=m：n，(m , n)= 1，鏡射對稱概念放大後的方形長：寬=m'：n'，m'=m k，n'=m k-2，且 n'mod n=0。

當原方形的長：寬=m：n，(m , n)≠1，假設(m ,n)=p

則m=px，n=py，(x , y)=1，py≠p(x±2)

根據鏡射對稱概念放大，後來的方形的長：寬=m'：n'，

m'=m k=pxk，n'=m k-2=pxk-2，

pyx(pxk-2) ➡ n+n'

所以n'≡0(mod n)無法成立，所以路徑會無限循環，路徑的轉彎次數無數次。

三、當從方形左下角出(入)口向右移動二格，路徑以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發，方形土地長：寬=m：n，(m ,n)≠1，且n=m±2時，路徑不會無限循環。

(一)**利用輾轉相減法**

例如原始方形長：寬=4：6

長=4	2		0	0
寬=6	6		4	0

轉彎一次　　所以路徑不會無限循環。

(二)證明：

根據定理：原方形的長：寬=m：n，(m , n)≠ 1，鏡射對稱概念放大後的方形長：寬=m'：n'，m'=m k，n'=m k-2，且 n'mod n=0。

當原方形的長：寬=m：n，n=m±2時，(m ,n)≠1，所以(m ,n)=(m ,m±2)=2

則m=2x，n= m± 2=2x±2=2(x±1)

根據鏡射對稱概念放大，後來的方形的長：寬=m'：n'，

m'=mk=2xk n'=nk=2k(x±1)．k

2(x±1)mod 2k(x±1) ➡ n mod n'

所以n'≡0(mod n)成立，所以路徑不會無限循環。

四、**延伸討論**：從方形左下角出(入)口向上移動二格，路徑以角度 $\tan\theta=1$ 之方向出發

在方形長：寬=m：n，當從方形左下角向上移動二格，利用旋轉再翻轉，鏡射之下，即可視為方形長：寬之比=n：m，從方形左下角出(入)口向右移動二格，即可算出路徑轉彎次數、路徑長以及路徑經過之格子點次數。

五、**延伸討論**：從方形左下角出(入)口向右移動一格，路徑以角度 $\tan\theta=2$ 之方向出發

(一)例如在方形長：寬=5：6，從鏡射對稱概念可知，方形的變化如下

長：寬=5：6 ➡長：寬=4：6 ➡ 長：寬=4：3' ➡ 長：寬=10：9' ➡長：寬=10：18

路徑轉彎次數=10/5+18/6-2=3，路徑長=$9\sqrt{5}$ ，經過之格子點數=9-1-3=5。

(二)原方形長：寬=m：n，路徑以角度$\tan\theta=1=\frac{寬}{長}$ 之方向出發，可視為方形土地長：寬=$\frac{m-1}{1}:\frac{n}{2}=s:t$，從方形左下角出(入)口向右移動一格，所以後方形土地長：寬=$kt+1:kt$

且$(kt+1)\bmod m=0$，最後方形土地長：寬=$kt+1:2kt$　$2kt \bmod n=0$ 。

柒、結論

定理一：方形長：寬=m：n，路徑從方形左下角出(入)口為起始點，以角度 $\tan\theta=\frac{y}{x}$之方向出發，

利用單位量轉換成方形土地長：寬=$\frac{m}{x}:\frac{n}{y}$，則：

(1)路徑轉彎次數為$\frac{\left[\frac{m}{x},\frac{n}{y}\right]}{\frac{m}{x}}+\frac{\left[\frac{m}{x},\frac{n}{y}\right]}{\frac{n}{y}}-2$次。

(2)路徑總長度為$\sqrt{x^2+y^2}\left[\frac{m}{x},\frac{n}{y}\right]$。

(3)路徑經過格子點的次數為 $\left[\frac{m}{x},\frac{n}{y}\right]-1-\left(\frac{\left[\frac{m}{x},\frac{n}{y}\right]}{\frac{m}{x}}+\frac{\left[\frac{m}{x},\frac{n}{y}\right]}{\frac{n}{y}}-2\right)$ 次。

定理二：方形長：寬=m：n，從方形左下角出(入)口向右移動h格為起始點，以角度$\tan\theta=1$之方向出發，則：

(1)當方形土地(m , n)≠1時，路徑的轉彎次數無數次。

(2)當方形土地(m , n)=h≠1，發現當長：寬=m：m h，不會無限循環。

(3)原方形長：寬=m：n，m=kn+h時，右移h格後長：寬=kn：n，利用鏡射對稱的概念，放大後之方形的寬=[kn, n]=kn，放大後之方形長：寬= kn+h：kn，所以路徑轉彎處即為 $\frac{kn}{n}-1$=k-1。

(4)原始方形長：寬=m：n，鏡射對稱概念放大後的方形長：寬=m'：n'，m'= np+h，n'=np，其中p為最小整數，且m'≡0(mod m)

路徑轉彎次數=$\frac{m'}{m}+\frac{n'}{n}-2$。

路徑長度是以寬n'= np之正方形的對角線，

所以路徑總長度=$\sqrt{2}$np

路徑中經過格子點的次數=$n'-1-\frac{m'}{m}-\frac{n'}{n}-2$。

定理三：方形長：寬=m：n，路徑從方形左下角出(入)口向右移動h格為起始點，以角度$\tan\theta=\frac{y}{x}$之方向出發，

利用單位量轉換成方形土地長：寬= $\frac{m-h}{x}:\frac{n}{y}=s:t$，利用鏡射對稱放大後的方形土地長：寬=$kt+h:kt$，

(kt+h)modm≡0，

最後再利用單位量轉換成方形土地長：寬= $kt+h:\frac{y}{x}kt$

(1)路徑轉彎次數為$\frac{kt+h}{m}+\frac{\frac{y}{x}kt}{n}-2$次。

(2)路徑總長度為 $kt\sqrt{x^2+y^2}$ 。

(3)路徑經過格子點的次數為$kt-1-\left(\frac{kt+h}{m}+\frac{\frac{y}{x}kt}{n}-2\right)$ 次。

定理四：方形長：寬= x：n，路徑從方形左下角出(入)口為起始點，以角度$\tan\theta=r$之方向出發，

1. 長：寬=x：n，n≠rk，(x,n)=a，路徑的轉彎次數方程式 $y=\frac{r}{a}x+\frac{n}{a}-2$
2. 長：寬=x：n，n=rk，(x,n)=a
   a≠rk，路徑的轉彎次數方程式$y=\frac{r}{ra}x+\frac{n}{ra}-2$
   a=rk，路徑的轉彎次數方程式$y=\frac{r}{a}x+\frac{r}{a}-2$
3. 長：寬=x：n，n=r^k，(x,n)=a
   a≠rk，路徑的轉彎次數方程式$y=\frac{r}{ra}x+\frac{n}{ra}-2$
   a=$r^s<r^k$，路徑的轉彎次數方程式$y=\frac{r}{ra}x+\frac{n}{ra}-2$
   a=r^k，路徑的轉彎次數方程式$y=\frac{r}{a}x+\frac{r}{a}-2$

定理五：方形長：寬=x：n，路徑從方形左下角出(入)口向右移動h格為起始點，以角度$\tan\theta=1$之方向出發，路徑的轉彎次數方程式

$y=\frac{a}{n}x+\frac{b}{n}$，a滿足（ax-h）≡ 0（$mod\ m$），$b=(a-2)\cdot n-h$

捌、參考資料

一、簡丞皓(2013)。一步一腳印—探討方格棋盤中各種路徑問題。中華民國第五十三屆中小學科學展覽會國小組數學科佳作。

二、林文祺等(2016)。因緣際會。中華民國第五十六屆中小學科學展覽會國小組數學科佳作。