中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

探究精神獎

030403

內分、外分、垂直分，怎麼「分」都好「正」！

學校名稱：新竹縣立自強國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳易詮 國二 蘇文頡	鄭芬如

關鍵詞：內角分角線、邊垂線、外角平分線

內分、外分、垂直分，怎麼「分」都好「正」！

摘　要

1. 在正 n 邊形中作內角 k 等分角線、外角平分線和原邊上作 k' 等分垂直線（ $k,k'>2$ ， $k,k'\in\mathbb{Q}$ ），這三種直線經各自相交或兩兩搭配後相交得到五種相似正 n 邊形，其邊長、面積會與原正 n 邊形間存在規律的關係一般式。

2. 承 1，內角 k 等分角線與其外角平分線之交點會連成**內外分角正 $\boldsymbol{n_k}$ 邊形**，滿足邊數 n 和 k 的特定關係式時，才能作出此種正 n 邊形。

3. 原正 n 邊形的邊或其延長線，恰可平分**內外分角正 $\boldsymbol{n_k}$ 邊形**和**外角邊垂正 $\boldsymbol{n_{k'}}$ 邊形**的邊。

4. **內分角正 $\boldsymbol{n_k}$ 邊形**、**邊垂正 $\boldsymbol{n_{k'}}$ 邊形**和**內角邊垂正 $\boldsymbol{n_{k,k'}}$ 邊形**皆會出現五點共圓的情形。

5. 承 1 的五種正 n 邊形會出現旋轉，其旋轉角度與 n、k、 k' 有關，並有一定的範圍。

壹、 研究動機

本研究經兩年的探討，從第一年對正 n 邊形內、外分角線相交的作圖實驗開始，得到正 n 邊形的所有內角 k（ $k>2$ ， $k\in\mathbb{N}$ ）等分角線相交形成**內分角正 $\boldsymbol{n_k}$ 邊形**，及與外角平分線相交形成**內外分角正 $\boldsymbol{n_k}$ 邊形**，並研究其相關規律性質；第二年將正 n 邊形各邊上垂直線（簡稱「邊垂線」）加入，除了能相交形成另一個有趣的正 n 邊形外，正 n 邊形的分角線、邊垂線和外角平分線這三種在國中階段重要的幾何直線是否也能透過兩兩搭配產生更多新奇的正 n 邊形呢？我們使用 *GSP* 作圖，得到的結果是肯定的，於是除了著手研究其與原正 n 邊形之間的邊長與面積關係式外，也期待能有更多漂亮的規律關係被發掘出來。

貳、 研究目的

一、探討原正 n 邊形中所有內角 k 等分角線之交點所連接成的正 n 邊形（稱**內分角正 $\boldsymbol{n_k}$ 邊形**），和外角平分線之交點所連接成的正 n 邊形（稱**內外分角正 $\boldsymbol{n_k}$ 邊形**）與原正 n 邊形之邊長、面積關係一般式。

二、探討原正 n 邊形中所有 k' 等分邊垂線之交點所連接成的正 n 邊形（稱**邊垂正 $n_{k'}$ 邊形**），和所有內角 k 等分角線之交點所連接成的正 n 邊形（稱**內角邊垂正 $n_{k,k'}$ 邊形**）與原正 n 邊形之邊長、面積關係一般式。

三、探討原正 n 邊形與其所有外角平分線和 k' 等分邊垂線之交點所連接成的正 n 邊形（稱**外角邊垂正 $n_{k'}$ 邊形**）之邊長、面積關係一般式。

四、探討原正 n 邊形的邊或其延長線，恰可平分**內外分角正 n_k 邊形**和**外角邊垂正 $n_{k'}$ 邊形**的邊之原由。

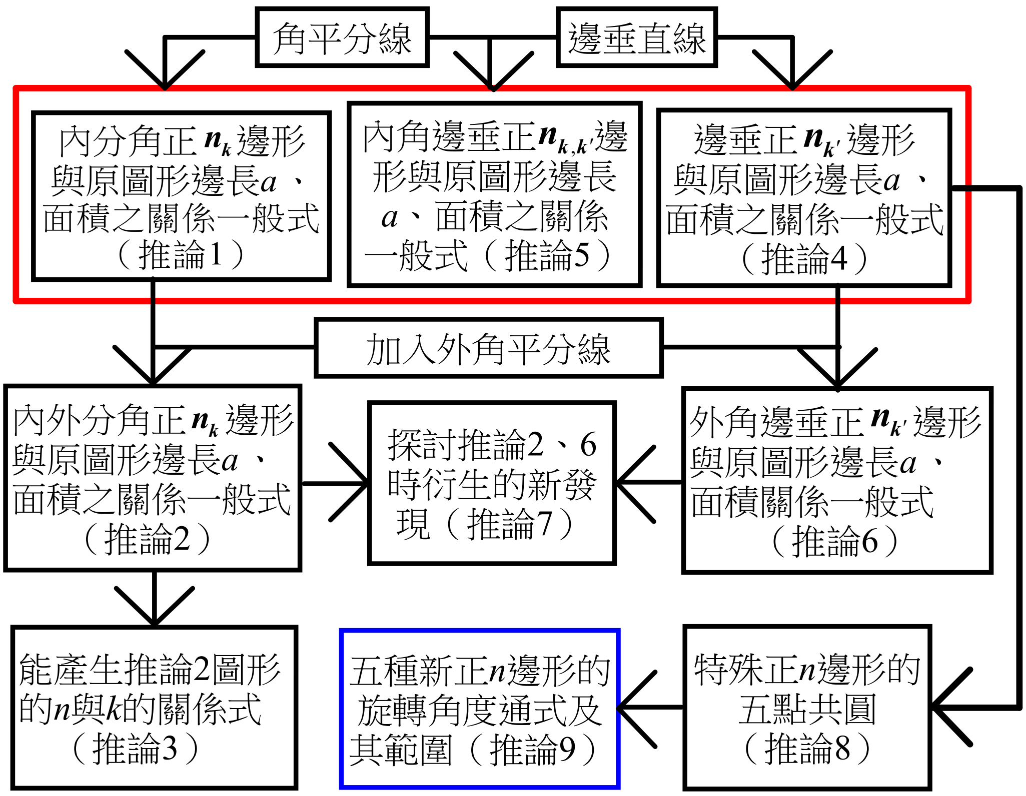
五、分析探討**內分角正 n_k 邊形**、**邊垂正 $n_{k'}$ 邊形**和**內角邊垂正 $n_{k,k'}$ 邊形**出現五點共圓的情形。

六、承一～三，探討此五種新正 n 邊形以原正 n 邊形為基準的旋轉角度與邊數 n、k 及 k' 的關係一般式，以及旋轉角度的範圍。

參、 研究設備

紙、筆、筆記型電腦、*GSP* 動態幾何繪圖軟體、*Word* 2016、*Smart Draw* 6。

肆、 研究架構流程圖



伍、 研究過程或方法

一、 名詞定義與已知的性質

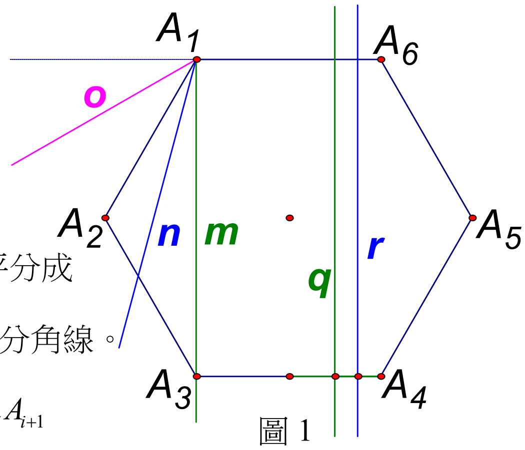


圖 1

名詞定義

1. 內角 k 等分角線：將正 n 邊形的每個內角平分成 k（$k>2$，$k\in\mathbb{N}$）等分的線，稱為內角 k 等分角線。為了討論方便，於此將正 n 邊形內角 $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$（i 之定義見名詞定義 5）中取最靠近 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 的 k 等分角線來討論。

   如圖 1，取 $\angle A_6A_1A_2$ 的內角 4 等分角線為射線 m；8 等分角線為射線 n。

2. 外角平分線：將正 n 邊形的任一外角平分成 2 等分的線，即稱為外角平分線。

   如圖 1，$\angle A_6A_1A_2$ 的外角平分線為射線 o。這裡只探討外角 2 等分角線。

3. k' 等分邊垂線：將正 n 邊形的邊平分成 k'（$k>2$，$k\in\mathbb{N}$）等分的垂直線，稱為 k' 等分邊垂線。於此將取正 n 邊形的邊 $\overline{A_iA_{i+1}}$（i 之定義見名詞定義 5）中最靠近點 A_{i+1} 的邊垂線來討論。如圖 1，取 $\overline{A_3A_4}$ 的 4 等分邊垂線為直線 q；8 等分邊垂線為直線 r。

4. 簡記：本研究為將推導出的關係式一般化，如有內角 θ 被 k 等分、或正 n 邊形的邊被 k' 等分，會統一簡記為 $\frac{\theta}{k}\to\theta_k$、$\frac{a}{k'}\to a_{k'}$，$\theta$ 是正 n 邊形的內角度數。

5. i：下標常數，其中 $i\in\mathbb{N}$，且 $i\le n$。若由 i 寫成的下標值中，經計算而出現 ≤ 0 的情形，則該下標值加上 n 為新下標值；若下標值中出現 $>n$ 的情形，則取 mod n 為新下標值。

已知性質

三角形兩腰中點連線逆性質：過三角形一腰的中點作平行於第三邊的直線，一定也會通過另一腰的中點。

圓內冪性質（交弦定理）：若一圓上有兩弦 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 交於 P 點，則 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

二、原正 *n* 邊形與各種新正 *n* 邊形的邊長關係一般式

先用 *GSP* 繪圖，把正 n 邊形所有內角的 k 等分角線和每個邊上的 k' 等分垂直線分別作出，$k,k'=2^t$，$t=2,3,4,\cdots$，各自形成「**內分角正 n_k 邊形**」、「**邊垂正 $n_{k'}$ 邊形**」與對應相交形成的「**內角邊垂正 $n_{k,k'}$ 邊形**」。再作出每個內角的外角平分線，分別與對應的內角 k 等分角線、k' 等分邊垂線相交形成「**內外分角正 n_k 邊形**」和「**外角邊垂正 $n_{k'}$ 邊形**」共五種相似的新正 n 邊形。但在繪製**內外分角正 n_k 邊形**時，發現一些無法繪製的情況，需要進一步分析可以繪製的原因或成立條件。接著嘗試推導出新的正 n_k 邊形與原正 n 邊形邊長、面積間和 n、k 的關係一般式。

（一）內角 *k* 等分角線相交而成的內分角正 n_k 邊形

1. 因為正 n 邊形的所有 2 等分角線皆交於一點，故將從 $k=2^t\,(t=2,3,4,\cdots)$ 等分每個內角的分角線相交所形成的新 n 邊形（稱內分角 n_k 邊形）來探討其邊長與原正 n 邊形的邊長關係一般式。首先先證明內分角 n_k 邊形為正 n_k 邊形，說明如下：

證明：如圖 2，$\because \Delta B_1B_2B_3$ 為正 $\Delta A_1A_2A_3$ 的 4 等分角線相交得到的 3_4 角形

$\therefore \angle A_2A_1B_2=\dfrac{60°}{4}=15°=\angle A_1A_3B_1 \quad \Rightarrow \angle A_3A_1B_1=60°-15°=45°=\angle A_1A_2B_2$

又 $\overline{A_1A_2}=\overline{A_1A_3} \quad \therefore \Delta A_1A_2B_2\cong\Delta A_3A_1B_1\,(ASA全等)$

同理 $\therefore \Delta A_1A_2B_2\cong\Delta A_2A_3B_3\,(ASA全等)$

$\Rightarrow \overline{A_1B_2}=\overline{A_2B_3}=\overline{A_3B_1}$ 且 $\overline{A_2B_2}=\overline{A_1B_1}=\overline{A_3B_3}$

故 $\overline{B_1B_2}=\overline{A_1B_2}-\overline{A_1B_1}=\overline{A_3B_1}-\overline{A_3B_3}=\overline{B_1B_3}$ 同理 $\overline{B_1B_3}=\overline{B_2B_3}$

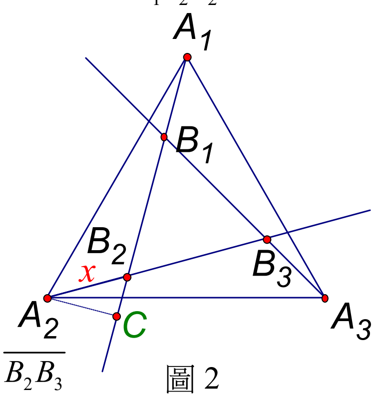


圖 2

又 $\angle B_3B_1B_2=\angle A_3A_1B_1+\angle A_1A_3B_1=60°$ 同理 $\angle B_1B_2B_3=60°=\angle B_2B_3B_1$

所以 $\Delta B_1B_2B_3$ 為內分角正 3_4 角形。

其他如正方形、正五、六、七、八、.....、n 邊形也同理可證得其所有內角 k 等

分角線的交點也會圍成「內分角正n_k邊形」，且與原正 n 邊形相似。接著探討內分角正n_k邊形與原正 n 邊形的邊長關係式。

2. 4 等分角線的正三角形$(n=3)$

(1)如圖 2，令$\overline{A_1A_2}=a$，$\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_2}=x$，$\theta=60°$，且 A_2到$\overrightarrow{A_1B_2}$作垂直線交於 C 點 $\because \angle A_1B_2A_2=180°-\theta=180°-60°=120° \Rightarrow \angle A_2B_2C=60°$

則$\dfrac{\overline{CB_2}}{x}=\cos\angle A_2B_2C=\cos 60° \quad \therefore \overline{CB_2}=x\times\cos(180°-120°)=-x\cos 120°$

又$\because \angle A_2A_1C=\theta\times\dfrac{1}{4}=15°$，則$\dfrac{\overline{CA_1}}{a}=\cos 15°$，$\Rightarrow \overline{CA_1}=a\times\cos 15°$

則$\overline{B_1B_2}=\overline{CA_1}-\overline{CB_2}-\overline{A_1B_1}$

$$=a\times\cos 15°-x\times\cos(180°-120°)-x$$

$$=a\times\cos 15°+x(\cos 120°-1)$$

$$=a\times\cos\frac{60°}{4}+x\left[\cos(180°-60°)-1\right] \quad \cdots\cdots①$$

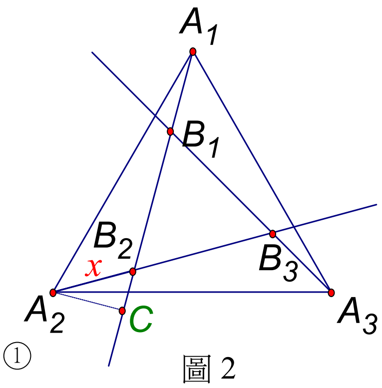


圖 2

(2)$\because \angle A_2B_2C=180°-120°=60° \Rightarrow \dfrac{\overline{A_2C}}{x}=\sin\angle A_2B_2C=\sin 60°$

$\therefore \overline{A_2C}=x\times\sin 60°$ 又$\angle A_2A_1C=60°\times\dfrac{1}{4}=15° \Rightarrow \dfrac{\overline{A_2C}}{a}=\sin\angle A_2A_1C=\sin 15°$

$\therefore \overline{A_2C}=a\times\sin 15° \Rightarrow \overline{A_2C}=x\times\sin 60°=a\times\sin 15°$，

$$\therefore x=\frac{a\times\sin 15°}{\sin 60°}=a\times\frac{\sin\frac{60°}{4}}{\sin(180°-60°)} \quad \cdots\cdots②$$

(3)最後將②式帶入①式 得

$$\overline{B_1B_2}=a\times\left\{\cos\frac{60°}{4}+\frac{\sin\frac{60°}{4}}{\sin(180°-60°)}\left[\cos(180°-60°)-1\right]\right\} \quad ■$$

此為原正三角形的邊長 a 與內分角正3_4角形邊長關係式，且經 *GSP* 繪圖軟體驗證無誤。同理，正方形、正五、六、....、n 邊形之所有內角經$k=4,8,16,\cdots$

等分後得到內分角正n_k邊形之邊長與原正n邊形邊長也有一樣規律的關係式，且在 *GSP* 繪圖軟體上驗證這些關係式都是成立的。於是得到推論 1 如下所述。

推論 1：如圖 3

在正n邊形$A_1A_2\cdots A_n$中，所有內角的k（$k>2,\ k\in\mathbb{Q}$）等分角線之交點也會形成一個正n邊形$B_1B_2\cdots B_n$，稱為「內分角正n_k邊形」，其邊長$\overline{B_1B_2}$與原正n邊形邊長a的關係一般式為

$$\overline{B_1B_2}=\frac{\sin(\theta-\theta_k)-\sin\theta_k}{\sin\theta}\times a,$$

其中θ為正n邊形的內角度數且 $\theta_k=\dfrac{\theta}{k}$。

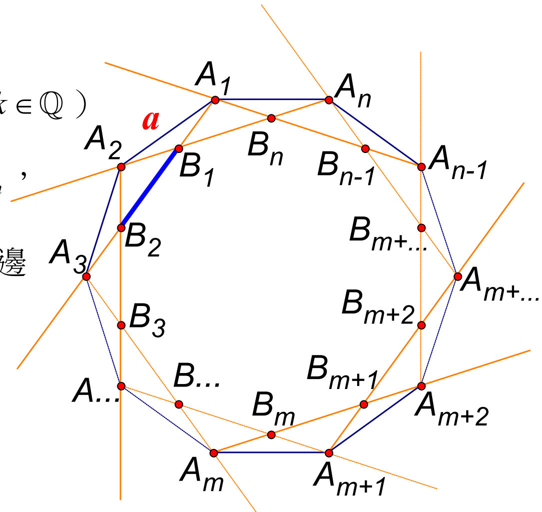


圖 3

證明：(1)由前面的分析推導得到

$$\overline{B_1B_2}=a\left\{\cos\left(\frac{\theta}{k}\right)+\frac{\sin\left(\frac{\theta}{k}\right)}{\sin(180^\circ-\theta)}\left[\cos(180^\circ-\theta)-1\right]\right\}，令\frac{\theta}{k}=\theta_k，則$$

$$\overset{\text{補角公式}}{=\!=}a\times\left[\cos\theta_k-\frac{\sin\theta_k}{\sin\theta}(\cos\theta+1)\right]\overset{\text{差角公式}}{=\!=}a\times\left[\frac{\sin(\theta-\theta_k)-\sin\theta_k}{\sin\theta}\right]$$

(2) $$\overline{B_1B_2}^2=a^2\times\left[\frac{\sin(\theta-\theta_k)-\sin\theta_k}{\sin\theta}\right]^2=a^2\times\left\{\frac{\sin\left[(1-1_k)\theta\right]-\sin\theta_k}{\sin\theta}\right\}^2$$ ■

如果正n邊形的外角平分線與內角k等分角線也會相交形成另一種正n_k邊形的話，其邊長是否也與原正n邊形的邊長有規律的關係式呢？為此我們繼續探討。

（二）外角平分線和內角 *k* 等分角線相交而成的內外分角正n_k邊形

性質：***(a)*** 如圖 **4** 的內外分角7_8邊形$A_{2,8,1}A_{2,8,2}\cdots A_{2,8,7}$為正$7_8$邊形。

(b) 內外分角n_k邊形為正n_k邊形。

證明：***(a)*** 1. 在$\Delta A_1A_7A_{2,8,1}$、$\Delta A_2A_1A_{2,8,2}$中，$\theta=\dfrac{900^\circ}{7}$，$\because\ \overline{A_1A_7}=\overline{A_2A_1}$、

$$\angle A_{2,8,1}A_1A_7=90^\circ+\frac{\theta}{2}=\angle A_{2,8,2}A_2A_1 \quad 且\ \angle A_1A_7A_{2,8,1}=\frac{\theta}{k}=\theta_k=\angle A_2A_1A_{2,8,2}$$

$\therefore \Delta A_1A_7A_{2,8,1} \cong \Delta A_2A_1A_{2,8,2}\,(ASA) \Rightarrow \overline{A_1A_{2,8,1}} = \overline{A_2A_{2,8,2}}$

同理 $\overline{A_2A_{2,8,2}} = \overline{A_3A_{2,8,3}} = \overline{A_4A_{2,8,4}} = \cdots = \overline{A_7A_{2,8,7}}$

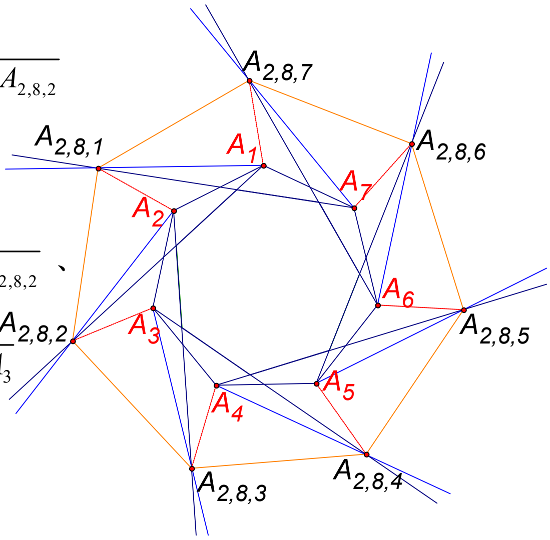


圖 4

2. 在 $\Delta A_1A_{2,8,1}A_2$ 、 $\Delta A_2A_{2,8,2}A_3$ 中，$\because \overline{A_1A_{2,8,1}} = \overline{A_2A_{2,8,2}}$ 、

$\angle A_{2,8,1}A_1A_2 = 90^\circ - \dfrac{\theta}{2} = \angle A_{2,8,2}A_2A_3$ 、 $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$

$\therefore \Delta A_1A_{2,8,1}A_2 \cong \Delta A_2A_{2,8,2}A_3\,(SAS)$

$\Rightarrow \overline{A_{2,8,1}A_2} = \overline{A_{2,8,2}A_3}$ 且 $\angle A_1A_2A_{2,8,1} = \angle A_2A_3A_{2,8,2}$

同理 $\therefore \Delta A_2A_{2,8,2}A_3 \cong \Delta A_3A_{2,8,3}A_4 \cong \cdots \cong \Delta A_7A_{2,8,7}A_1 \Rightarrow \overline{A_{2,8,2}A_3} = \overline{A_{2,8,3}A_4} = \cdots = \overline{A_{2,8,7}A_1}$

且 $\angle A_2A_3A_{2,8,2} = \angle A_3A_4A_{2,8,3} = \cdots = \angle A_7A_1A_{2,8,7}$ $\therefore \angle A_{2,8,1}A_2A_{2,8,2} = 360^\circ - \angle A_1A_2A_{2,8,1} - \angle A_1A_2A_{2,8,2}$

$= 360^\circ - \angle A_2A_3A_{2,8,2} - \angle A_2A_3A_{2,8,3} = \angle A_{2,8,2}A_3A_{2,8,3}$

同理 $\angle A_{2,8,2}A_3A_{2,8,3} = \angle A_{2,8,3}A_4A_{2,8,4} = \cdots = \angle A_{2,8,7}A_1A_{2,8,1}$

3. 在 $\Delta A_{2,8,1}A_2A_{2,8,2}$ 、 $\Delta A_{2,8,2}A_3A_{2,8,3}$ 中，$\because \overline{A_2A_{2,8,1}} = \overline{A_3A_{2,8,2}}$ 、 $\overline{A_2A_{2,8,2}} = \overline{A_3A_{2,8,3}}$

$\angle A_{2,8,1}A_2A_{2,8,2} = \angle A_{2,8,2}A_3A_{2,8,3}$ $\therefore \Delta A_{2,8,1}A_2A_{2,8,2} \cong \Delta A_{2,8,2}A_3A_{2,8,3}\,(SAS)$

$\Rightarrow \overline{A_{2,8,1}A_{2,8,2}} = \overline{A_{2,8,2}A_{2,8,3}}$ 同理 $\Delta A_{2,8,2}A_3A_{2,8,3} \cong \Delta A_{2,8,3}A_4A_{2,8,4} \cong \cdots \cong \Delta A_{2,8,7}A_1A_{2,8,1}$

$\Rightarrow \overline{A_{2,8,2}A_{2,8,3}} = \overline{A_{2,8,3}A_{2,8,4}} = \cdots = \overline{A_{2,8,7}A_{2,8,1}}$ （內外分角 7_8 邊形的七個邊等長）

4. $\because \Delta A_1A_2A_{2,8,1} \cong \Delta A_2A_3A_{2,8,2} \cong \Delta A_3A_4A_{2,8,3} \cong \cdots\cdots \cong \Delta A_7A_1A_{2,8,7}$

$\therefore \angle A_1A_{2,8,1}A_2 = \angle A_2A_{2,8,2}A_3 = \angle A_3A_{2,8,3}A_4 = \cdots\cdots = \angle A_7A_{2,8,7}A_1$

又 $\Delta A_{2,8,1}A_2A_{2,8,2} \cong \Delta A_{2,8,2}A_3A_{2,8,3} \cong \Delta A_{2,8,3}A_4A_{2,8,4} \cong \cdots \cong \Delta A_{2,8,7}A_1A_{2,8,1}$

$\Rightarrow \angle A_2A_{2,8,1}A_{2,8,2} = \angle A_3A_{2,8,2}A_{2,8,3} = \angle A_4A_{2,8,3}A_{2,8,4} = \cdots\cdots = \angle A_1A_{2,8,7}A_{2,8,1}$ 且

$\angle A_{2,8,1}A_{2,8,2}A_2 = \angle A_{2,8,2}A_{2,8,3}A_3 = \angle A_{2,8,3}A_{2,8,4}A_4 = \cdots\cdots = \angle A_{2,8,7}A_{2,8,1}A_1$

$\therefore \angle A_{2,8,1}A_{2,8,2}A_{2,8,3} = \angle A_{2,8,1}A_{2,8,2}A_2 + \angle A_2A_{2,8,2}A_3 + \angle A_3A_{2,8,2}A_{2,8,3}$

$$= \angle A_{2,8,2}A_{2,8,3}A_3 + \angle A_3A_{2,8,3}A_4 + \angle A_4A_{2,8,3}A_{2,8,4} = \angle A_{2,8,2}A_{2,8,3}A_{2,8,4}$$

同理 $\angle A_{2,8,2}A_{2,8,3}A_{2,8,4} = \angle A_{2,8,3}A_{2,8,4}A_{2,8,5} = \cdots\cdots = \angle A_{2,8,7}A_{2,8,1}A_{2,8,2}$

內外分角 7_8 邊形的七個內角也相等，故得證。

(*b*) 其他邊數的內外分角 n_k 邊形也同理可證得是正 n 邊形。 ■

接著探討一個引理來推導內外分角正 n_k 邊形的邊長與原正 n 邊形邊長 a 的關係式。

我們討論正五邊形的邊長 a 與內外分角正 5_4 邊形的邊長關係式。

1-1.【引理一】

如圖 5，過點 $A_{2,4,1}$ 作線段 $\overline{A_1A_2}$ 之平行線，和過點 A_2 作 $\overline{A_1A_{2,4,1}}$ 之平行線交於 $A'_{2,4,1}$ 點，延長 $\overline{A_1A_2}$ 和線段 $\overline{A_{2,4,1}A_{2,4,2}}$ 交於 T，和 $\overline{A_{2,4,2}A'_{2,4,1}}$ 交於 T'，則四邊形 $A_{2,4,1}A_1A_2A'_{2,4,1}$ 為平行四邊形。所以 $\overline{A'_{2,4,1}A_2} = \overline{A_{2,4,1}A_1} = \overline{A_{2,4,2}A_2}$，

又 $\angle A'_{2,4,1}A_2T' = \angle A_{2,4,1}A_1A_2 = 36^\circ = \angle A_{2,4,2}A_2T' \Rightarrow \overline{A'_{2,4,1}T'} = \overline{T'A_{2,4,2}}$ 且 $\overline{A_2T'} \perp \overline{A'_{2.4.1}A_{2,4,2}}$

$\because \overline{A_1A_2} // \overline{A_{2,4,1}A'_{2,4,1}}$，由三角形兩腰中點連線段逆性質

$\Rightarrow \overline{A_2T'}$ 平分 $\overline{A_{2,4,1}A_{2,4,2}}$ 且 $\overline{A_{2,4,1}A'_{2,4,1}} = 2\overline{T'T}$

又 $\overline{A_{2,4,1}A'_{2,4,1}} = \overline{A_1A_2} = a \quad \Rightarrow \overline{T'T} = \dfrac{1}{2}a$

其他如正方形、正五、六、七、八…、n 邊形

也同理可證得在外角等分不變下，$\overline{T'T}$ 恆等於 $\dfrac{1}{2}a$。

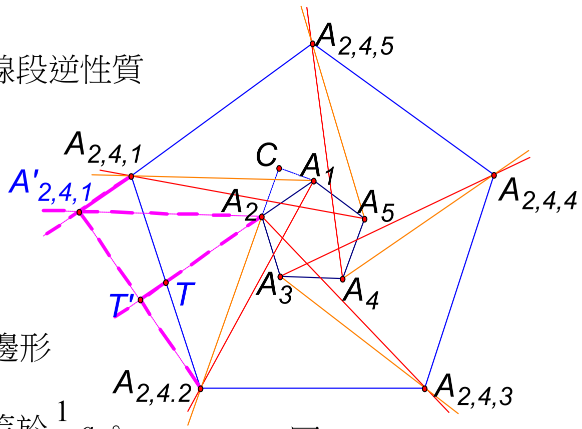


圖 5

接著根據引理一及圖 5 繼續探討內外分角正 n_k 邊形中的邊長關係式如下。

過 A_1 作 $\overline{A_{2,4,2}A_2}$ 延長線的垂直線交於 C 點，則 $\overline{A_1C} = \overline{A_1A_2} \times \cos\angle A_2A_1C = a \times \cos 54^\circ$

且 $\cos\angle A_{2,4,2}A_1C = \dfrac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1A_{2,4,2}}} \Rightarrow \overline{A_1A_{2,4,2}} = \dfrac{\overline{A_1C}}{\cos 81^\circ}$ 又 $\overline{A_{2,4,2}T'} = \overline{A_1A_{2,4,2}} \times \sin\angle A_{2,4,2}A_1T'$

$\overline{A_{2,4,2}T'} = a\sin 27^\circ \times \dfrac{\cos 54^\circ}{\cos 81^\circ}$。由畢氏定理可得 $\overline{A_{2,4,2}T}^2 = \overline{T'T}^2 + \overline{T'A_{2,4,2}}^2$

再由引理一及 $\overline{A_{2,4,1}A_{2,4,2}}=2\overline{A_{2,4,2}T} \Rightarrow \overline{A_{2,4,1}A_{2,4,2}}=2\sqrt{\overline{T'T}^2+\overline{T'A_{2,4,2}}^2}$

$$=2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(a\sin 27^\circ\times\frac{\cos 54^\circ}{\cos 81^\circ}\right)^2}=a\sqrt{1+\left(2\sin 27^\circ\times\frac{\cos 54^\circ}{\cos 81^\circ}\right)^2}$$

上式結果為正五邊形的邊長 a 與內外分角正 5_4 邊形的邊長關係式，且經 *GSP* 繪圖軟體驗證無誤。其他邊數的內外分角正 n_k 邊形邊長也同理可得一樣的關係式，並用 *GSP* 驗證皆無誤。將前面分析結果統整在推論 2 中。

> 推論 2：
>
> 在正 n 邊形中，所有邊長的 k $(k=3,4,5,......)$ 等分角線與對應的外角平分線之交點會形成一個正 n 邊形 $A_{2,k,1}A_{2,k,2}\cdots A_{2,k,n}$，稱為「內外分角正 n_k 邊形」，其邊長 $\overline{A_{2,k,1}A_{2,k,2}}$ 與原正 n 邊形的邊長 a 的關係一般式為
>
> $\overline{A_{2,k,1}A_{2,k,2}}=a\sqrt{1+\left(2\sin\theta_k\dfrac{\cos\theta_2}{\cos(\theta_2+\theta_k)}\right)^2}$，其中 θ 為正 n 邊形的內角度數。

1-2. 在分析外角平分線與內角分角線相交的情況時，遇到有些邊數的正多邊形其外角平分線與內角分角線無法相交，且跟邊數、內角度數及 k 等分似乎有一些規律關係，於是將可以相交和無法相交的正多邊形列出如下表格一，並做分析說明。

表格一：正 n 邊形中內角 k 等分角線與外角平分線是否相交的邊數整理

n 邊形 \ k 等分角線	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
4 等分角線	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
8 等分角線	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
16 等分角線	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗

表格一中，紅色勾勾代表可以相交的最大邊數，紅色叉叉則是無法相交的最小邊數。所以在本節推論 2 之前的各種 k 等分角線的分析中，**4 等分角線部分**只能分析正三角形、正方形與正五邊形三種；**8 等分角線部分**只能分析正三角形～正九邊形；**16 等分角線部分**則只能分析正三角形～正十七邊形。於是統整出外角 2 等分

角線與內角 k 等分角線相交可以形成的「內外分角正 n_k 邊形」的最大邊數與 k 有關，也就是 $n_k = k+1$ 最大，$k = 2^i$，$i = 2,3,4,5,\cdots$。舉例來說，如圖 6 的正五邊形中，$\angle A_1A_2A_3$ 的外角平分線 $\overrightarrow{A_2A_{2,8,2}}$ 與 $\angle A_5A_1A_2$ 的 8 等分角線 $\overrightarrow{A_1A_{2,8,2}}$ 的交點是 $A_{2,8,2}$，則 $\angle A_1A_2A_{2,8,2}$ 和 $\angle A_2A_1A_{2,8,2}$ 二個角可看成同側內角的關係，且 $\angle A_1A_2A_{2,8,2} + \angle A_2A_1A_{2,8,2}$ 的和是決定外角平分線與 8 等分角線是否相交的因素，稱之為「決定是否相交的同側內角」，其中 $\angle A_1A_2A_{2,8,2} = \angle A_1A_2A_3 + \angle A_3A_2A_{2,8,2} = 108° + \dfrac{180° - 108°}{2} = 144°$

又 $\angle A_2A_1A_{2,8,2} = \dfrac{108°}{8} = \dfrac{27°}{2}$

故 $\angle A_1A_2A_{2,8,2} + \angle A_2A_1A_{2,8,2} = 144° + \dfrac{27°}{2} = 157.5° < 180°$，

所以外角平分線會與內角 8 等分角線相交。

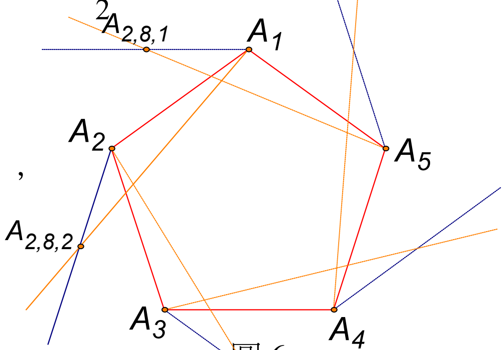


圖 6

再舉正十邊形的例子來看，如圖 7，

$$\angle A_1A_2C = \angle A_1A_2A_3 + \angle A_3A_2C = 144° + \frac{180° - 144°}{2} = 90° + \frac{144°}{2} = 162°，\angle A_2A_1D = \frac{144°}{8} = 18°$$

故 $\angle A_1A_2C + \angle A_2A_1D = 162° + 18° = 180°$。所以正十邊形之外角平分線會與內角 8 等分角線互相平行，不會相交，且邊數越多，$\angle A_1A_2C + \angle A_2A_1D$ 的度數和會比 $180°$ 大越多，如圖 8(a)、(b)的正十一、十三邊形。於是，要使外角平分線與內角 k 等分角線相交，必須滿足 $\angle A_1A_2A_{2,k,2} + \angle A_2A_1A_{2,k,2} = \theta + \dfrac{180° - \theta}{2} + \dfrac{\theta}{k} = 90° + \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\theta}{k} < 180°$

$\Rightarrow \theta\left(\dfrac{k+2}{2k}\right) < 90°$，將 $\theta = \dfrac{(n-2)\times 180°}{n}$ 代入左列不等式，化簡得到 $k > n-2$

$\Rightarrow n < k+2 \;\; \Rightarrow n = k+1$ 最大。

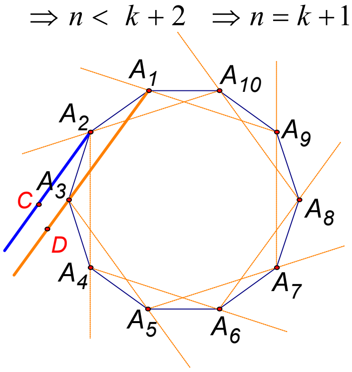


圖 7

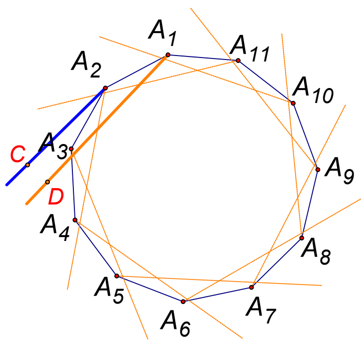


圖 8(a)

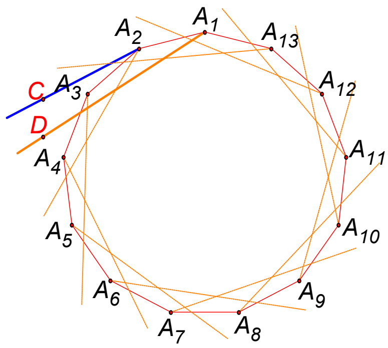


圖 8(b)

故如果 $k = 8$ 時，最多只能畫出內外分角正 9_8 邊形；$k = 16$ 時，最多只能畫出內外分

角正17_{16}邊形，其他以此類推，可得證以下的推論。

推論 3：如表格一

在正 n 邊形中，外角平分線與內角 k 等分角線會相交並形成「內外分角正n_k邊形」的 n_k 、k 關係式為$n_k < k+2$，且$n_k = k+1$最大。

（三）邊長k'等分垂直線相交而成的邊垂正$n_{k'}$邊形

因為正 n 邊形的所有邊之中垂線（2 等分垂直線）皆交於一點，故將從$k' > 2$等分每個邊長時各取其中一條對應的垂直線相交所形成的新 n 邊形（稱**邊垂正$n_{k'}$邊形**）來探討其邊長與原正 n 邊形邊長的關係一般式。

性質：邊垂正$n_{k'}$邊形為正n邊形。

證明：如圖 9，$\Delta E_1E_2E_3$為正$\Delta A_1A_2A_3$的 4 等分邊垂線相交得到的三角形，三個邊的 4 等分點分別為P_1、P_2和P_3，其他交點如圖所示。

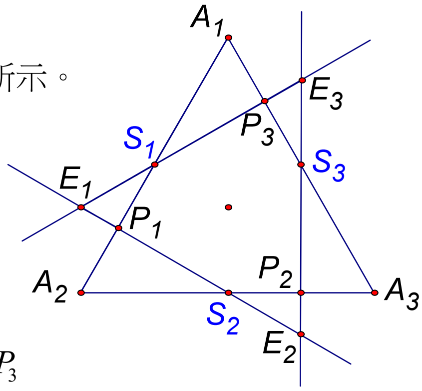


圖 9

(1)$\because \Delta A_1S_1P_3 \cong \Delta A_2S_2P_1 \cong \Delta A_3S_3P_2$ (ASA)

$\therefore \overline{A_1S_1} = \overline{A_2S_2} = \overline{A_3S_3}$，$\overline{S_1P_3} = \overline{S_2P_1} = \overline{S_3P_2}$

(2)$\because \angle A_1S_1P_3 = 90° - 60° = 30° = \angle E_1S_1P_1 = \angle E_3S_3P_3$

且$\angle P_1E_1S_1 = 60° = \angle P_3E_3S_3$　又$\overline{A_1P_1} = \overline{A_1A_2} - \overline{A_2P_1} = \overline{A_1A_3} - \overline{A_1P_3} = \overline{A_3P_3}$

$\Rightarrow \overline{S_1P_1} = \overline{A_1P_1} - \overline{A_1S_1} = \overline{A_3P_3} - \overline{A_3S_3} = \overline{S_3P_3}$　$\therefore \Delta S_1E_1P_1 \cong \Delta S_3E_3P_3\,(AAS全等)$

同理　$\therefore \Delta S_1E_1P_1 \cong \Delta S_2E_2P_2\,(AAS全等)$　$\Rightarrow \overline{E_1P_1} = \overline{E_2P_2} = \overline{E_3P_3}$，$\overline{S_1E_1} = \overline{S_2E_2} = \overline{S_3E_3}$

$\because \overline{S_1P_3} = \overline{S_2P_1} = \overline{S_3P_2}$　所以$\overline{E_3P_3} + \overline{P_3S_1} + \overline{S_1E_1} = \overline{E_1P_1} + \overline{P_1S_2} + \overline{S_2E_2} = \overline{E_2P_2} + \overline{P_2S_3} + \overline{S_3E_3}$

$\Rightarrow \overline{E_1E_3} = \overline{E_1E_2} = \overline{E_2E_3}$　　又$\angle S_1E_1P_1 = \angle S_2E_2P_2 = \angle S_3E_3P_3 = 60°$　故得證。

其他如正方形、正五、六、七、八.....、n 邊形同理可證得其每個邊上的一條相對應的k'等分垂直線交點也會圍成「邊垂正$n_{k'}$邊形」，且與原正 n 邊形相似。

接著探討邊垂正$n_{k'}$邊形的邊長與原邊長 a 的關係。取$k=8$等分邊垂線的正六邊

形來說明，如圖 10。令 $\overline{A_1A_2}=a$，$\theta=120^\circ$，邊垂 6_8 邊形也是正六邊形，則 $\overline{E_1P_6}=\overline{S_1E_1}-\overline{S_1P_6}$ 其中

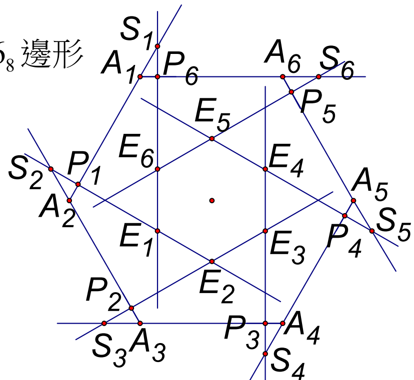


圖 10

$$\overline{S_1P_6}=\overline{A_1P_6}\times\tan\angle S_1A_1P_6=\frac{1}{8}a\times\tan\left(180^\circ-120^\circ\right)$$

且 $\overline{S_1P_1}=\overline{S_1A_1}+\overline{A_1P_1}=\frac{1}{8}a\times\frac{1}{\sin\left(120^\circ-90^\circ\right)}+\left(1-\frac{1}{8}\right)a$

$$\therefore\overline{S_1E_1}=\overline{S_1P_1}\times\frac{1}{\cos\angle P_1S_1E_1}=\left[\frac{1}{8}a\times\frac{1}{\sin\left(120^\circ-90^\circ\right)}+\left(1-\frac{1}{8}\right)a\right]\times\frac{1}{\cos\left(120^\circ-90^\circ\right)}$$

又 $\overline{P_6E_6}=\overline{P_1E_1}=\overline{S_1P_1}\times\tan\left(120^\circ-90^\circ\right)=\left[\frac{1}{8}a\times\frac{1}{\sin\left(120^\circ-90^\circ\right)}+\left(1-\frac{1}{8}\right)a\right]\times\tan\left(120^\circ-90^\circ\right)$

$$\therefore\overline{E_1E_6}=\overline{S_1E_1}-\overline{P_6E_6}-\overline{S_1P_6}$$

$$=\left[\frac{1}{8}a\times\frac{1}{\sin\left(120^\circ-90^\circ\right)}+\left(1-\frac{1}{8}\right)a\right]\times\left[\frac{1}{\cos\left(120^\circ-90^\circ\right)}-\tan\left(120^\circ-90^\circ\right)\right]-\frac{1}{8}a\times\tan\left(180^\circ-120^\circ\right)$$

$$=a\left\{\left[\left(1-\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}\times\frac{1}{\cos120^\circ}\right]\left[\frac{1}{\sin120^\circ}+\frac{\cos120^\circ}{\sin120^\circ}\right]+\frac{1}{8}\times\tan120^\circ\right\}\qquad\blacksquare$$

其他邊數的正多邊形之邊垂正 $n_{k'}$ 邊形也會得到相同邊長關係式，經過 *GSP* 軟體的驗證也無誤。將上述分析結果統整如推論 4。

> 推論 4：
>
> 在正 n 邊形中，所有邊長相對應的 k' $(k'=3,4,5,......)$ 等分垂直線之交點也會形成一個正 n 邊形 $E_1E_2\cdots E_n$，稱為「邊垂正 $n_{k'}$ 邊形」，其邊長 $\overline{E_1E_2}$ 與原正 n 邊形邊長 a 的關係一般式為 $\overline{E_1E_2}=\left\{\left[\left(1-\frac{1}{k'}\right)-\frac{1}{k'}\times\frac{1}{\cos\theta}\right]\left[\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right]+\frac{1}{k'}\times\tan\theta\right\}a=\left(1-2_{k'}\right)a\cot\theta_2$，$2_{k'}=\frac{2}{k'}$。

證明：邊長一般式 $\left\{\left[\left(1-\frac{1}{k'}\right)-\frac{1}{k'}\times\frac{1}{\cos\theta}\right]\left[\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right]+\frac{1}{k'}\times\tan\theta\right\}a$ 推導過程如前面分析所示。

其最後化簡的形式 $(1-2_{k'})a\cot\theta_2$，說明如下：（以邊垂正 5_4 邊形為例）

$$\overline{E_1E_5}=\left\{\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\times\frac{1}{\cos108^\circ}\right]\left[\frac{1+\cos108^\circ}{\sin108^\circ}\right]+\frac{1}{4}\times\tan108^\circ\right\}a$$

$$=a\left\{\left[1-\frac{1}{4}\times\frac{1+\cos108^\circ}{\cos108^\circ}\right]\left[\cot54^\circ\right]+\frac{1}{4}\times\tan108^\circ\right\}\qquad \text{(由半角公式}\cot\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\text{)}$$

$$=a\left\{\cot54^\circ+\frac{1}{4}\left[-\left(\frac{1+\cos108^\circ}{\cos108^\circ}\right)\left(\cot54^\circ\right)+\tan108^\circ\right]\right\}$$

$$=a\left\{\cot54^\circ+\frac{1}{4}\left[-\left(1+\cos108^\circ\right)\left(\frac{1}{\cos108^\circ}\right)\left(\cot54^\circ\right)+\tan108^\circ\right]\right\}$$

$$=a\left\{\cot54^\circ+\frac{1}{4}\left[-\left(\cot54^\circ\right)\left(\tan108^\circ\right)\left(\cot54^\circ\right)+\tan108^\circ\right]\right\}$$

$$=a\left[\cot54^\circ-\frac{1}{4}\tan108^\circ\left(\cot108^\circ\times2\cot54^\circ\right)\right]\longleftarrow \text{(由倍角公式}\cot2\theta=\frac{\cot^2\theta-1}{2\cot\theta}\text{)}$$

$$=a\left[\cot54^\circ-\frac{1}{4}\times2\cot54^\circ\right]=\left(1-\frac{2}{4}\right)a\cot54^\circ\ \blacksquare$$

（四）內角 k 等分角線與邊長 k' 等分垂直線相交而成的內角邊垂正 $n_{k,k'}$ 邊形

以內角邊垂正 $5_{4,4}$ 邊形為例，如圖 11，其頂點用 $F_{n,k,k'}$ 表示。

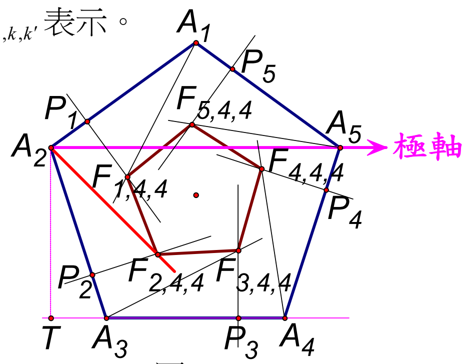


圖 11

(1)以點 A_2 為極，$\overrightarrow{A_2A_5}$ 為極軸建立極坐標系，

則點 $F_{2,4,4}$ 極座標為 $\left[\overline{A_2F_{2,4,4}},-\angle A_5A_2F_{2,4,4}\right]$

令點 A_2 在 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 上的垂足為點 T，$\theta=108^\circ$

$$\Rightarrow F_{2,4,4}\left[\frac{\overline{A_2P_2}}{\cos\angle F_{2,4,4}A_2P_2},-\left(90^\circ-\angle A_3A_2T-\angle A_3A_2F_{2,4,4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow F_{2,4,4}\left[\left(a-\frac{a}{k'}\right)\sec\theta_k,\theta+\theta_k-180^\circ\right]$$，再轉換成直角座標系，如圖 12，

搭配負角和補角公式可得

$$\Rightarrow F_{2,4,4}\left(\left(a-\frac{a}{k'}\right)\sec\theta_k\cos\left(\theta+\theta_k-180^\circ\right),\left(a-\frac{a}{k'}\right)\sec\theta_k\sin\left(\theta+\theta_k-180^\circ\right)\right)$$

$$\Rightarrow F_{2,4,4}\left(\left(\frac{a}{k'}-a\right)\sec\theta_k\cos\left(\theta+\theta_k\right),\left(\frac{a}{k'}-a\right)\sec\theta_k\sin\left(\theta+\theta_k\right)\right)$$

以 A_3 為新原點，$\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 為 x 軸，則 $F_{2,4,4}$ 新座標為

$$F_{2,4,4}\left(\left(\frac{a}{k'}-a\right)\sec\theta_k\cos\left(\theta+\theta_k\right)-a\cos\angle A_2A_3T,\left(\frac{a}{k'}-a\right)\sec\theta_k\sin\left(\theta+\theta_k\right)+a\sin\angle A_2A_3T\right)$$

$$\Rightarrow F_{2,4,4}\left(a\cos\theta-\left(a-\frac{a}{k'}\right)\sec\theta_k\cos\left(\theta+\theta_k\right),a\sin\theta-\left(a-\frac{a}{k'}\right)\sec\theta_k\sin\left(\theta+\theta_k\right)\right)\cdots\cdots ①$$

(2) 在以 A_3 為原點的直角坐標系上，$F_{3,4,4}$座標為$\left(\overline{A_3P_3},\overline{F_{3,4,4}P_3}\right)$

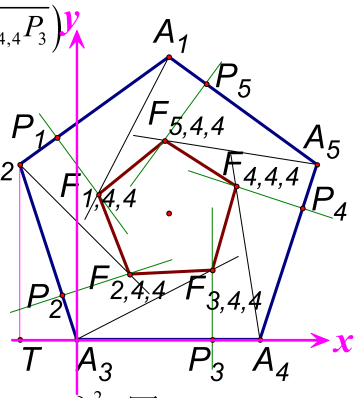


圖 12

$$\Rightarrow F_{3,4,4}\left(\overline{A_3P_3},\overline{A_3P_3}\tan\angle F_{3,4,4}A_3P_3\right)$$

$$\Rightarrow F_{3,4,4}\left(a-\frac{a}{k'},\left(a-\frac{a}{k'}\right)\tan\theta_k\right)\cdots\cdots ②$$

(3)由①、②知

$$\overline{F_{2,4,4}F_{3,4,4}}^2=\left\{\left[a\cos\theta-\left(a-\frac{a}{k'}\right)\sec\theta_k\cos\left(\theta+\theta_k\right)\right]-\left(a-\frac{a}{k'}\right)\right\}^2$$

$$+\left\{\left[a\sin\theta-\left(a-\frac{a}{k'}\right)\sec\theta_k\sin\left(\theta+\theta_k\right)\right]-\left(a-\frac{a}{k'}\right)\tan\theta_k\right\}^2$$

$$=a^2\left\langle\underbrace{\left\{\cos\theta-\left(1-\frac{1}{k'}\right)\left[\sec\theta_k\cos\left(\theta+\theta_k\right)+1\right]\right\}^2}_{\text{第 }I\text{ 部分}}+\underbrace{\left\{\sin\theta-\left(1-\frac{1}{k'}\right)\left[\sec\theta_k\sin\left(\theta+\theta_k\right)+\tan\theta_k\right]\right\}^2}_{\text{第 }II\text{ 部分}}\right\rangle\cdots ③$$

第 ***I*** 部分的推導：$\left\{\cos\theta-\left(1-\frac{1}{k'}\right)\left[\sec\theta_k\cos\left(\theta+\theta_k\right)+1\right]\right\}^2$

$$=\left[\cos\theta-\left(1-\frac{1}{k'}\right)\left(\sec\theta_k\cos\theta\cos\theta_k-\sec\theta_k\sin\theta\sin\theta_k+1\right)\right]^2$$

$$=\left[\cos\theta-\left(1-\frac{1}{k'}\right)\left(\cos\theta+1-\sin\theta\tan\theta_k\right)\right]^2\overset{\text{半角公式}}{=\!=\!=\!=}\left[\cos\theta-\left(1-\frac{1}{k'}\right)\left(\cot\theta_2-\tan\theta_k\right)\sin\theta\right]^2$$

$$\overset{\text{再一次半角公式}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\left[\sin\theta\cot\theta_2-1-\left(1-\frac{1}{k'}\right)\left(\cot\theta_2-\tan\theta_k\right)\sin\theta\right]^2$$

$$=\left\{\left[\cot\theta_2+\left(\frac{1}{k'}-1\right)\left(\cot\theta_2-\tan\theta_k\right)\right]\sin\theta-1\right\}^2=\left\{\left[\frac{1}{k'\tan\theta_2}+\left(1-\frac{1}{k'}\right)\tan\theta_k\right]\sin\theta-1\right\}^2\cdots\cdots ④$$

第 ***II*** 部分的推導：$\left\{\sin\theta-\left(1-\frac{1}{k'}\right)\left[\sec\theta_k\sin\left(\theta+\theta_k\right)+\tan\theta_k\right]\right\}^2$

$$=\left\{\sin\theta-\left(1-\frac{1}{k'}\right)\left[\sin\theta+\left(1+\cos\theta\right)\tan\theta_k\right]\right\}^2$$

$$=\left\{\sin\theta-\left(1-\frac{1}{k'}\right)\left[\sin\theta+\frac{\sin\theta\tan\theta_k}{\tan\theta_2}\right]\right\}^2=\left\{\left[1-\left(1-\frac{1}{k'}\right)\left(1+\frac{\tan\theta_k}{\tan\theta_2}\right)\right]\sin\theta\right\}^2$$

$$=\left\{\left[\frac{1}{k'}-\frac{\left(1-\frac{1}{k'}\right)\tan\theta_k}{\tan\theta_2}\right]\sin\theta\right\}^2$$ ……⑤，將④、⑤代入③可得

$$\overline{F_{2,4,4}F_{3,4,4}}^2=a^2\left\langle\left\{\left[\frac{1}{k'\tan\theta_2}+\left(1-\frac{1}{k'}\right)\tan\theta_k\right]\sin\theta-1\right\}^2+\left\{\left[\frac{1}{k'}-\frac{\left(1-\frac{1}{k'}\right)\tan\theta_k}{\tan\theta_2}\right]\sin\theta\right\}^2\right\rangle$$

$$\overline{F_{2,4,4}F_{3,4,4}}=a\sqrt{\left\{\left[\frac{1}{k'\tan\theta_2}+\left(1-\frac{1}{k'}\right)\tan\theta_k\right]\sin\theta-1\right\}^2+\left\{\left[\frac{1}{k'}-\frac{\left(1-\frac{1}{k'}\right)\tan\theta_k}{\tan\theta_2}\right]\sin\theta\right\}^2}$$

$$=a\sqrt{\begin{aligned}&\left[\frac{1}{k'\tan\theta_2}+\left(1-\frac{1}{k'}\right)\tan\theta_k\right]^2\sin^2\theta-2\left[\frac{1}{k'\tan\theta_2}+\left(1-\frac{1}{k'}\right)\tan\theta_k\right]\sin\theta+1\\&+\left[\frac{1}{(k')^2}-\frac{2\tan\theta_k}{k'\tan\theta_2}\left(1-\frac{1}{k'}\right)+\frac{\left(1-\frac{1}{k'}\right)^2\tan^2\theta_k}{\tan^2\theta_2}\right]\sin^2\theta\end{aligned}}$$

$$=a\sqrt{\begin{aligned}&\left[\frac{1}{(k')^2\tan^2\theta_2}+\left(1-\frac{1}{k'}\right)^2\tan^2\theta_k+\frac{1}{(k')^2}+\frac{\left(1-\frac{1}{k'}\right)^2\tan^2\theta_k}{\tan^2\theta_2}\right]\sin^2\theta\\&-2\left[\frac{1}{k'\tan\theta_2}+\left(1-\frac{1}{k'}\right)\tan\theta_k\right]\sin\theta+1\end{aligned}}$$

$$=a\sqrt{\begin{aligned}&\left[\frac{1}{(k')^2}\left(\frac{1}{\tan^2\theta_2}+1\right)+\left(1-\frac{1}{k'}\right)^2\tan^2\theta_k\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta_2}\right)\right]\sin^2\theta\\&-2\left[\frac{1}{k'\tan\theta_2}+\left(1-\frac{1}{k'}\right)\tan\theta_k\right]\sin\theta+1\end{aligned}}$$

$$=a\sqrt{\left[\frac{1}{(k')^2}+\left(1-\frac{1}{k'}\right)^2\tan^2\theta_k\right]\left(1+\cot^2\theta_2\right)\sin^2\theta-\frac{2\sin\theta}{k'\tan\theta_2}-2\left(1-\frac{1}{k'}\right)\sin\theta\tan\theta_k+1}$$

$$=a\sqrt{\left(\sin^2\theta+\sin^2\theta\cot^2\theta_2\right)\left[\frac{1}{(k')^2}+\left(1-\frac{1}{k'}\right)^2\tan^2\theta_k\right]-\frac{2(\cos\theta+1)}{k'}-2\left(1-\frac{1}{k'}\right)\sin\theta\tan\theta_k+1}$$

$$=a\sqrt{\begin{array}{l}\left[\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2\right]\left(1-\frac{1}{k'}\right)^2\tan^2\theta_k-2\left(1-\frac{1}{k'}\right)\sin\theta\tan\theta_k\\+\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{(k')^2}-\frac{2(\cos\theta+1)}{k'}+1\end{array}}$$

$$=a\sqrt{2(\cos\theta+1)\left(1-\frac{1}{k'}\right)^2\tan^2\theta_k-2\left(1-\frac{1}{k'}\right)\sin\theta\tan\theta_k+\frac{2(\cos\theta+1)}{(k')^2}-\frac{2(\cos\theta+1)}{k'}+1}$$

$$=a\sqrt{\left[\left(1-\frac{1}{k'}\right)\sin\theta\tan\theta_k\cot\theta_2-\sin\theta\right]2\left(1-\frac{1}{k'}\right)\tan\theta_k-\frac{\left(1-\frac{1}{k'}\right)2(\sin\theta\cot\theta_2)}{k'}+1}$$

$$=a\sqrt{\left\{\left[\frac{\left(1-\frac{1}{k'}\right)\tan\theta_k}{\tan\theta_2}-1\right]\tan\theta_k-\frac{\cot\theta_2}{k'}\right\}2\left(1-\frac{1}{k'}\right)\sin\theta+1}$$

$$=a\sqrt{1-\frac{2\left(1-\frac{1}{k'}\right)}{\csc\theta}\left[\frac{1}{k'\tan\theta_2}-\frac{\left(1-\frac{1}{k'}\right)\tan^2\theta_k}{\tan\theta_2}+\tan\theta_k\right]}$$

$$=a\times\sqrt{1+\frac{2_{k'}-2}{\csc\theta}\times\left(\tan\theta_k+\frac{1_{k'}-\sin^2\theta_k}{\tan\theta_2\cos^2\theta_k}\right)}\text{，}1_{k'}=\frac{1}{k'}\text{，}\theta_2=\frac{\theta}{2}\text{，}\theta_k=\frac{\theta}{k}\quad\blacksquare$$

推論 5：

在正 n 邊形中，所有邊長相對應的 k' $(k'=3,4,5,......)$ 等分垂直線與相對應的內角 k 等分角線會相交並形成一個正 n 邊形 $F_{1,k,k'}F_{2,k,k'}\cdots F_{n,k,k'}$，稱為「內角邊垂正 $n_{k,k'}$ 邊形」，其邊長 $\overline{F_{1,k,k'}F_{2,k,k'}}$ 與原正 n 邊形的邊長 a 的關係一般式為

$\overline{F_{1,k,k'}F_{2,k,k'}}=a\times\sqrt{1+\frac{2_{k'}-2}{\csc\theta}\times\left(\tan\theta_k+\frac{1_{k'}-\sin^2\theta_k}{\tan\theta_2\cos^2\theta_k}\right)}$，其中 $1_{k'}=\frac{1}{k'}$，$\theta_2=\frac{\theta}{2}$，

說明：藉由與內分角正n_k邊形的相似證明，可得證此推論。

（五）外角平分線與邊長k'等分垂直線相交而成的外角邊垂正$n_{k'}$邊形

性質：外角邊垂$n_{k'}$邊形為正$n_{k'}$邊形。

證明：如圖 13，$\Delta H_1H_2H_3$為邊長$k'=4$等分垂直線與外角平分線相交得到的三角形

$\because \angle H_1A_1P_1=\frac{1}{2}(180°-60°)=\angle H_2A_2P_2=\angle H_3A_3P_3$ 且 $\overline{A_1P_1}=\overline{A_2P_2}=\overline{A_3P_3}=\left(1-\frac{1}{k'}\right)a$，

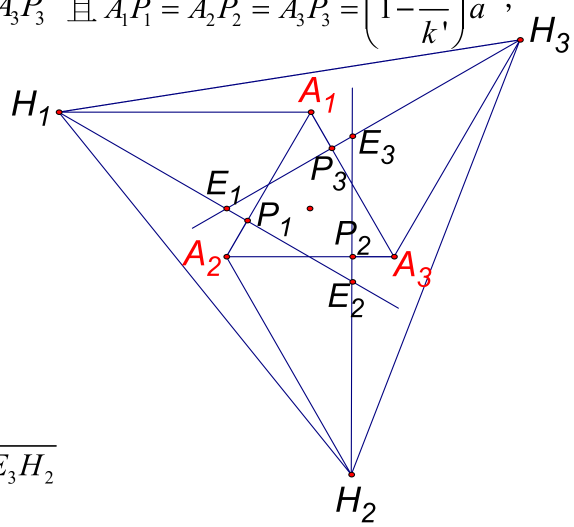
$\angle H_1P_1A_1=90°=\angle H_2P_2A_2=\angle H_3P_3A_3$

$\therefore \Delta A_1H_1P_1\cong\Delta A_2H_2P_2\cong\Delta A_3H_3P_3$（$ASA$）

根據推論 4 及其證明過程中所得

$\overline{E_1E_2}=\overline{E_2E_3}=\overline{E_3E_1}$ 且 $\overline{E_1P_1}=\overline{E_2P_2}=\overline{E_3P_3}$

$\therefore \overline{H_1E_1}=\overline{H_2E_2}=\overline{H_3E_3}$ 且 $\overline{E_1H_3}=\overline{E_2H_1}=\overline{E_3H_2}$



又$\angle H_1E_1H_3=180°-\angle E_3E_1E_2=180°-60°=\angle H_2E_2H_1=\angle H_3E_3H_2$ 圖 13

$\therefore \Delta H_1E_1H_3\cong\Delta H_2E_2H_1\cong\Delta H_3E_3H_2$（$SAS$）

$\because \angle E_1H_1H_3+\angle H_1H_3E_1=\angle H_3E_1E_2=60°$ 且$\angle H_1H_3E_1=\angle H_2H_1E_2$

$\Rightarrow \angle E_1H_1H_3+\angle H_2H_1E_2=\angle H_3H_1H_2=60°$ 同理可證

$\angle H_1H_2H_3=\angle H_2H_3H_1=\angle H_3H_1H_2=60°$

又$\overline{H_1H_2}=\overline{H_2H_3}=\overline{H_3H_1}$ 所以$\Delta H_1H_2H_3$為外角邊垂正3_4角形 故得證 ■

其他如正方形、正五、六、七、…..n邊形也同理可證得其邊長k'等分垂直線與外角平分線相交而成的外角邊垂$n_{k'}$邊形為正n邊形。接著探討外角邊垂正$n_{k'}$邊形中推廣得到的引理二，有助於推導該正$n_{k'}$邊形之邊長與原正n邊長a的關係式。

【引理二】如圖 14，過點 H_1 作出和 $\overline{A_1A_2}$ 平行的直線，與過點 A_2 和 $\overline{A_1H_1}$ 平行的直線，並相交於 H_1'，延長 $\overline{A_1A_2}$ 和 $\overline{H_1H_2}$ 相交於 T，並和 $\overline{H_2H_1'}$ 相交於 T'。同引理一可得 $\overline{A_2T'}$ 平分 $\overline{H_1H_2}$ 且 $\overline{T'T}=\frac{1}{2}\times\overline{H_1H_1'}=\frac{1}{2}\times\overline{A_1A_2}=\frac{1}{2}a$，又四邊形 $H_1H_1'T'P_1$ 是平行四邊形

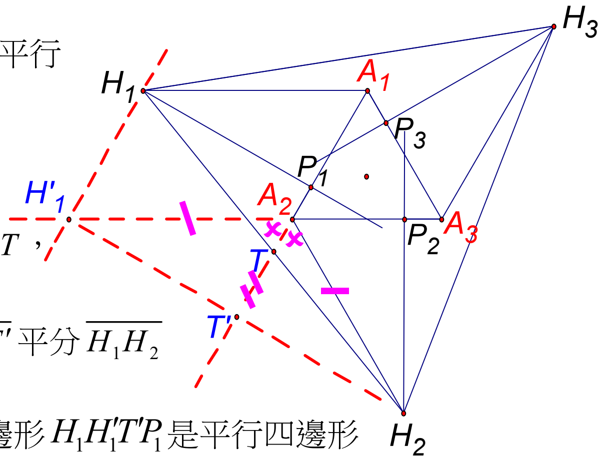


圖 14

$\Rightarrow\overline{H_1H_1'}=\overline{P_1T'}=\overline{A_1A_2}=a\Rightarrow\overline{P_1T}=\overline{P_1T'}-\overline{T'T}=a-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a$。其他如正方形、正五、六、七、八…..$n$ 邊形也同理可證得其邊垂線在 k' 等分且外角 2 等分條件下，$\overline{P_1T}$ 恆等於 $\frac{1}{2}a$。接下來就可以進行邊長關係式的推導，以外角邊垂正 7_8 邊形為例說明。

如圖 15，令 $\overline{A_1A_2}=a$，$\theta=\frac{900°}{7}$，$\overrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overline{H_1H_2}$ 相交於 T，由引理二知，T 為 $\overline{H_1H_2}$ 的中點。 $\because\overline{H_1P_1}=\overline{A_1P_1}\times\tan\angle H_1A_1P_1=\left(1-\frac{1}{8}\right)a\times\tan\frac{1}{2}\left(180°-\frac{900°}{7}\right)$ 且

$\overline{H_1H_2}=2\overline{H_1T}$ 由引理二 $\overline{P_1T}=\frac{1}{2}a$ 及畢氏定理可得 $\overline{H_1T}^2=\overline{H_1P_1}^2+\overline{P_1T}^2$

$$\overline{H_1T}=\sqrt{\left[\left(1-\frac{1}{8}\right)a\times\tan\frac{1}{2}\left(180°-\frac{900°}{7}\right)\right]^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2}$$

$$\Rightarrow\overline{H_1H_2}=2\overline{H_1T}=2\sqrt{\left[\left(1-\frac{1}{8}\right)a\times\tan\frac{1}{2}\left(180°-\frac{900°}{7}\right)\right]^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2}$$

$$=a\sqrt{4\left[\left(1-\frac{1}{8}\right)\times\tan\frac{1}{2}\left(180°-\frac{900°}{7}\right)\right]^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

再由餘角公式可得 $\overline{H_1H_2}=a\sqrt{4\left[\frac{7}{8}\cot\left(\frac{450}{7}\right)°\right]^2+1}$

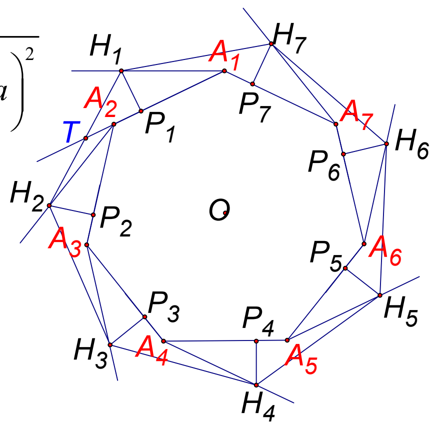


圖 15

經過上面的論述，我們可得推論 6。

推論 6：

在正 n 邊形中，所有邊長相對應的 k' $(k'=3,4,5,......)$ 等分垂直線與相對應的外角 2 等分角線會相交並形成一個正 n 邊形 $H_1H_2\cdots H_n$ ，稱為「外角邊垂正 $n_{k'}$ 邊形」，其邊長 $\overline{H_1H_2}$ 與原正 n 邊形的邊長 a 的關係一般式為

$$\overline{H_1H_2}=2a\sqrt{\left[\left(1-\frac{1}{k'}\right)\times\tan\frac{180^\circ-\theta^\circ}{2}\right]^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=a\sqrt{4\left[\left(1-1_{k'}\right)\cot\theta_2\right]^2+1}$$

三、內外分角正 $\boldsymbol{n_k}$ 邊形與外角邊垂正 $\boldsymbol{n_{k'}}$ 邊形中衍生的新發現

推論 7：參考圖 16、17

在內外分角正 n_k 邊形和外角邊垂正 $n_{k'}$ 邊形中，以原正 n 邊形的 $\overline{A_1A_2}$ 為例，

① $\overline{A_1A_2}$ 延長線會分別平分 $\overline{A_{2,k,1}A_{2,k,2}}$ 和 $\overline{H_1H_2}$ 於 T；②過點 $A_{2,k,1}$ 和 H_1 分別作 $\overline{A_1A_2}$ 的平行線，與過點 A_2 分別作 $\overline{A_1A_{2,k,1}}$ 和 $\overline{A_1H_1}$ 的平行線交於 $A'_{2,k,1}$ 和 H'_1，分別連接 $\overline{A'_{2,k,1}A_{2,k,2}}$ 及 $\overline{H'_1H_2}$ ，且與 $\overline{A_1A_2}$ 延長線分別交於 T' ，則 $\overline{TT'}=\frac{1}{2}a$ 。

詳細證明已分別在推論 2 與推論 6 的引理一及二中。

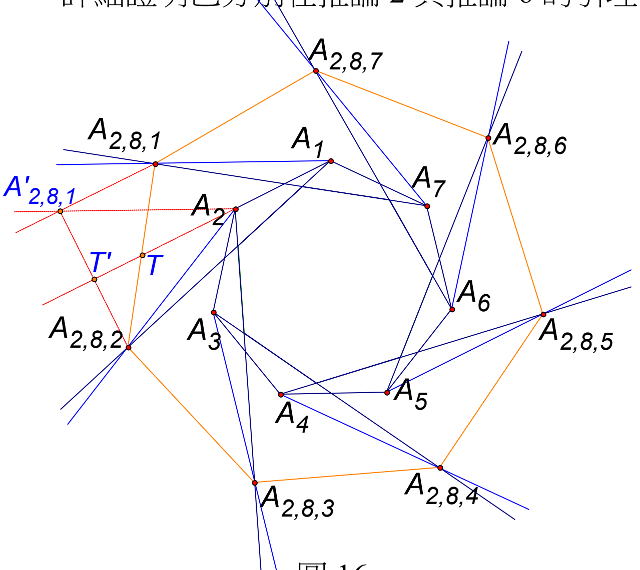


圖 16

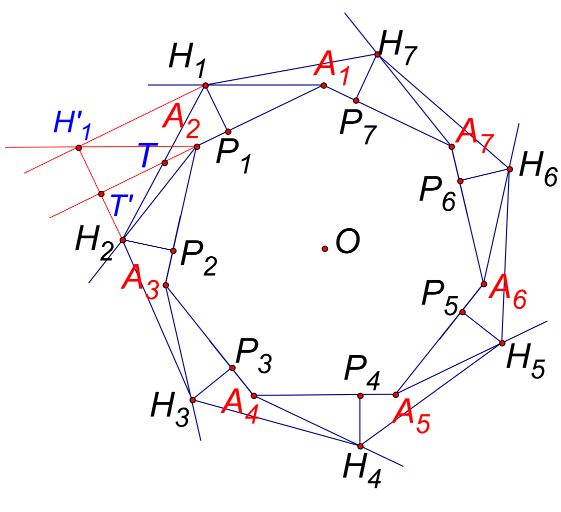


圖 17

四、新圖形中的五點共圓

（一）內分角正n_k邊形

推論 8-1：如圖 20

在內分角正n_k邊形中，定義每條k等分角線與原邊的交點名稱為：與$\overline{A_1A_2}$交於G_1、與$\overline{A_2A_3}$交於G_2、與$\overline{A_3A_4}$交於G_3、⋯、以此類推。則點B_i、G_i、A_{i+1}、G_{i+1}、O五點會共圓。其中$i \in Z^+$，且$i \le n$，若下標值$> n$，則取下標值 mod n 的結果為新下標值。

證明：(1)首先需證明五邊形$G_1G_2G_3G_4G_5$為正多邊形，如圖 18，

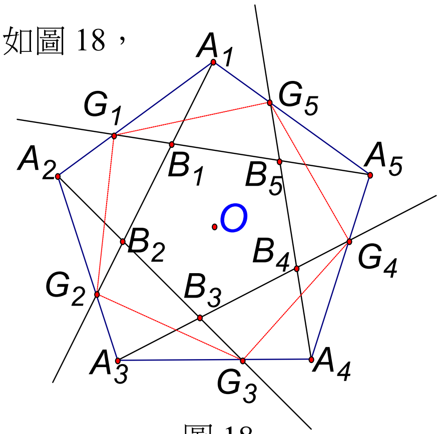


圖 18

$\because \angle A_1G_1B_1 = 180 - \theta - \frac{1}{4}\theta = \angle A_2G_2B_2$ 以此類推

$\therefore \angle A_1G_1B_1 = \angle A_2G_2B_2 = ... = \angle A_5G_5B_5$

又 $\angle G_1A_1B_1 = \frac{1}{4}\theta = \angle G_2A_2B_2 = ... = \angle G_5A_5B_5$

且 $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \overline{A_3B_3} = \overline{A_4B_4} = \overline{A_5B_5}$

$\therefore \Delta A_1G_1B_1 \cong \Delta A_2G_2B_2 \cong \Delta A_3G_3B_3 \cong \Delta A_4G_4B_4 \cong \Delta A_5G_5B_5\,(AAS) \Rightarrow \overline{A_1G_1} = \overline{A_2G_2} = ... = \overline{A_5G_5}$

又 $\overline{A_2G_1} = \overline{A_1A_2} - \overline{A_1G_1} = \overline{A_2A_3} - \overline{A_2G_2} = \overline{A_3G_2} = ... = \overline{A_1G_5}$

$\therefore \Delta A_2G_1G_2 \cong \Delta A_3G_2G_3 \cong \Delta A_4G_3G_4 \cong \Delta A_5G_4G_5 \cong \Delta A_1G_5G_1\,(SAS) \Rightarrow \overline{G_1G_2} = \overline{G_2G_3} = ... = \overline{G_5G_1}$

因為 $\angle G_1G_5G_4 = 180° - \angle G_1G_5A_1 - \angle G_4G_5A_5 = 180° - \angle G_1G_5A_1 - \angle A_1G_1G_5$

$= 180° - (\angle G_1G_5A_1 + \angle A_1G_1G_5) = 180° - (180° - \theta) = \theta$ 以此類推

故 $\angle G_1G_5G_4 = \angle G_2G_1G_5 = \angle G_3G_2G_1 = \angle G_4G_3G_2 = \angle G_5G_4G_3 = \theta$

$\Rightarrow$ 五邊形$G_1G_2G_3G_4G_5$為正五邊形 故得證

（2）如圖 19，在四邊形$G_1A_2G_2B_1$中，

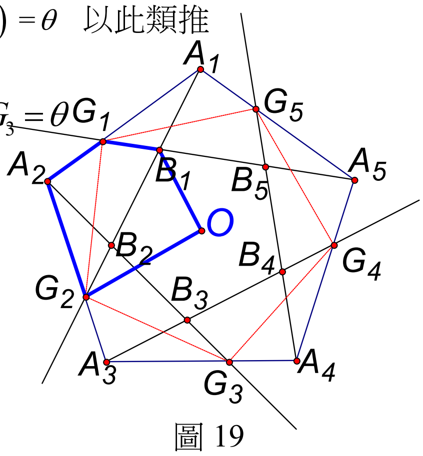


圖 19

$\because \angle G_1A_2G_2 + \angle G_1B_1G_2 = \theta + (180° - \theta) = 180°$ $\therefore B_1$、G_1、A_2、G_2 四點共圓

在四邊形 $G_1G_2OB_1$ 中，

$$\because \angle G_1G_2O + \angle G_1B_1O = \frac{1}{2}\theta + \left[(180° - \theta) + \frac{1}{2}\theta\right] = 180°$$

$\therefore G_1$、G_2、O、B_1 四點共圓

$\therefore B_1$、G_1、A_2、G_2、O 五點共圓，如圖 20 ■

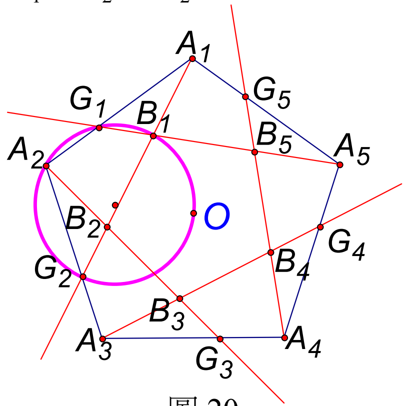


圖 20

（二）邊垂正 $n_{k'}$ 邊形

推論 8-2：如圖 22

在邊垂正 $n_{k'}$ 邊形中，點 A_i、P_i、E_i、O、P_{i+n-1} 會共圓，其中 $i \in Z^+$，且 $i \le n$，若下標值 $> n$，則取下標值 mod n 的結果為新下標值。

證明：如圖 21，在四邊形 $A_1P_5E_1P_1$ 中，P_1、P_5 皆為垂足

$$\therefore \angle A_1P_5E_1 + \angle A_1P_1E_1 = 90° + 90° = 180°$$

$\Rightarrow A_1$、P_5、E_1、P_1 四點共圓

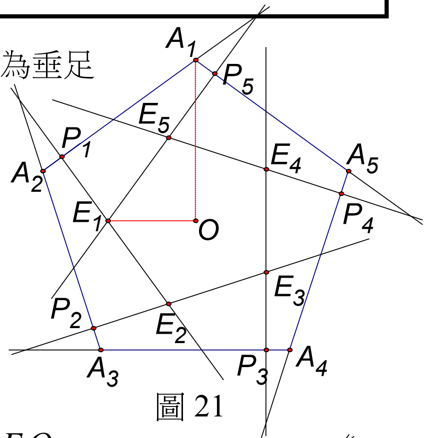


圖 21

同理，在四邊形 $A_1P_1E_1O$ 中，

$$\because \angle P_1A_1O + \angle P_1E_1O = \angle P_1A_1O + \angle P_1E_1P_5 + \angle P_5E_1O$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 108°\right) + \left[(180° - 108°) + \frac{1}{2} \times 108°\right] = 180°$$

$\Rightarrow A_1$、P_1、E_1、O 四點共圓

$\Rightarrow A_1$、P_1、E_1、O、P_5 五點共圓，如圖 22 ■

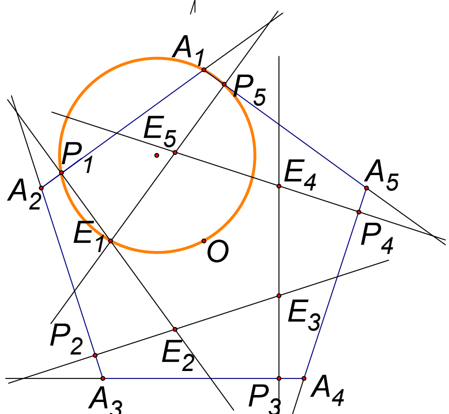


圖 22

（三）內角邊垂正 $n_{k,k'}$ 邊形

推論 8-3：如圖 24

在內角邊垂正 $n_{k,k'}$ 邊形中，點 $F_{i,k,k'}$、B_i、E_i、O、$F_{i+n-1,k,k'}$ 五點會共圓。

其中 $i \in Z^+$，且 $i \le n$，若下標值 $> n$，則取下標值 mod n 的結果為新下標值。

證明：如圖 23 在四邊形 $B_1F_1E_1F_{5,4,4}$ 中，由外角定理知

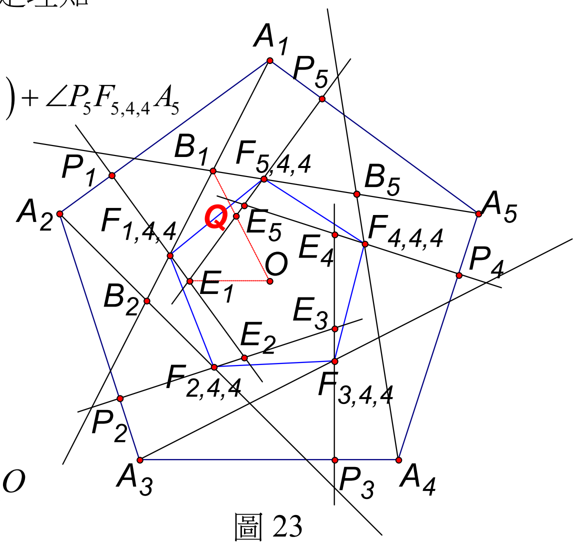


圖 23

$\because \angle B_1F_{1,4,4}E_1 + B_1F_{5,4,4}E_1 = \left(\angle A_1P_1F_{1,4,4} + \angle P_1A_1F_{1,4,4}\right) + \angle P_5F_{5,4,4}A_5$

$= \left(90^\circ + \dfrac{\theta}{4}\right) + \left(180^\circ - \dfrac{\theta}{4} - 90^\circ\right) = 180^\circ$

$\Rightarrow B_1$ 、$F_{1,4,4}$ 、E_1 、$F_{5,4,4}$ 四點共圓。

再作 $\overline{B_1O}$ 和 $\overline{F_{5,4,4}E_1}$ 交於 Q 點，連接 $\overline{E_1O}$

$\because \angle B_1QF_{5,4,4} = \angle OQE_1$ ，$\angle QB_1F_{5,4,4} = \dfrac{1}{2}\theta = \angle QE_1O$

$\therefore \Delta QB_1F_{5,4,4} \sim \Delta QE_1O\,(AA)$ $\Rightarrow \overline{E_1Q} : \overline{OQ} = \overline{B_1Q} : \overline{F_{5,4,4}Q}$

$\overline{OQ} \times \overline{B_1Q} = \overline{E_1Q} \times \overline{F_{5,4,4}Q}$ ，由圓內冪逆性質可得

$\overline{B_1O}$ 與 $\overline{F_{5,4,4}E_1}$ 為一個圓上的兩條弦

$\Rightarrow B_1$ 、E_1 、O 、$F_{5,4,4}$ 四點共圓

$\Rightarrow B_1$ 、$F_{1,4,4}$ 、E_1 、O 、$F_{5,4,4}$ 五點共圓，如圖 24 ■

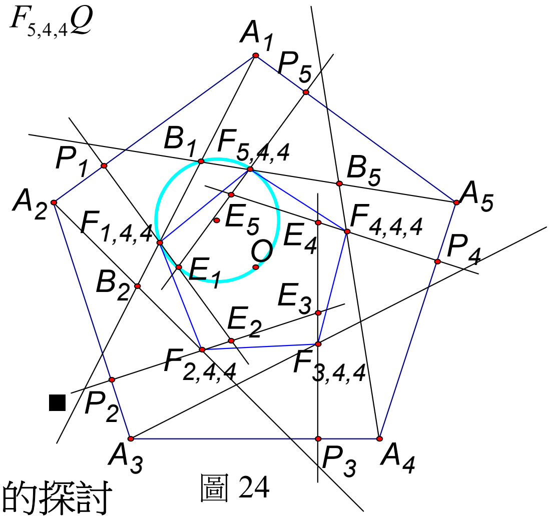


圖 24

五、新圖形與原正 *n* 邊形的旋轉角度及其範圍的探討

（一）內分角正 n_k 邊形

推論 9-1：

在正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和其內分角正 n_k 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 中，分別作兩圖形的對應對稱軸 $\overleftrightarrow{A_1O}$ 、$\overleftrightarrow{B_1O}$ ，則 $\angle A_1OB_1$ 為兩圖形的旋轉角度，且 $\angle A_1OB_1 = \theta_k$ ，$\dfrac{60^\circ}{k} \le \theta_k < \dfrac{180^\circ}{k}$ 。

證明：如圖 25，在內分角正 5_4 邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 中，

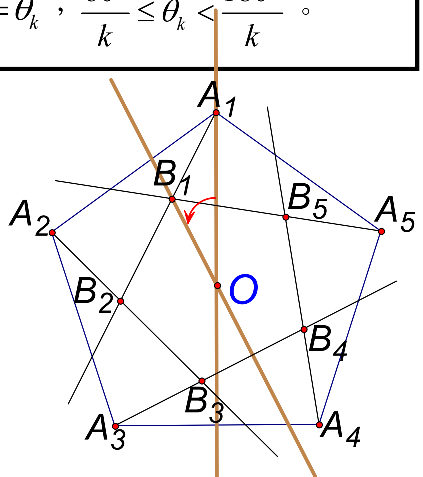


圖 25

旋轉角度 $\angle A_1OB_1 = 180^\circ - \angle A_1B_1O - \angle B_1A_1O$

$= 180^\circ - \left(\angle OB_1B_5 + \angle A_1B_1B_5\right) - \left(\angle A_2A_1O - \angle A_2A_1B_2\right)$

$= 180^\circ - \left(\dfrac{1}{2}\times 108^\circ + 180^\circ - 108^\circ\right) - \left(\dfrac{1}{2}\times 108^\circ - \dfrac{1}{4}\times 108^\circ\right)$

$=\dfrac{1}{4}\times 108°=27°=\dfrac{1}{k}\times\theta=\theta_k$ ， $k=4$ 、 $\theta=108°$ ，

且範圍由 $60°\le\theta<180°$ 可得到 $\dfrac{60°}{k}\le\theta_k<\dfrac{180°}{k}$ ■

（二）內外分角正 n_k 邊形

> 推論 9-2：
>
> 在正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和其內外分角正 n_k 邊形 $A_{2,k,1}A_{2,k,2}\cdots A_{2,k,n}$ 中，分別作兩圖形的對應對稱軸 $\overleftrightarrow{A_1O}$ 、 $\overleftrightarrow{A_{2,k,1}O}$ ，則 $\angle A_1OA_{2,k,1}$ 為兩圖形的旋轉角度，且
>
> $\angle A_1OA_{2,k,1}=\tan^{-1}\left[\dfrac{2\cos\theta_2\sin\theta_k}{\cos(\theta_2+\theta_k)}\right]$ ，且 $0°<\angle A_1OA_{2,k,1}<90°$ 。

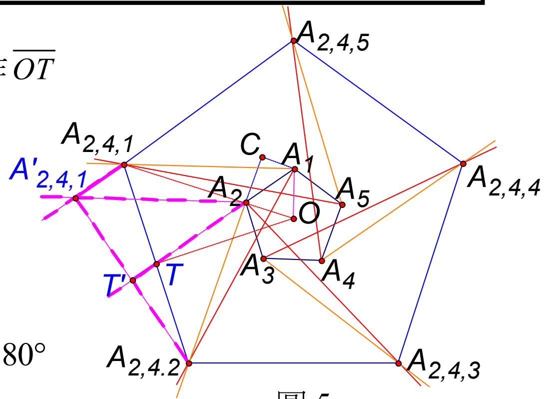


圖 5

證明：**(1)** claim： $\angle A_1OA_{2,k,1}=\angle A_1TA_{2,k,1}$ ，如圖 5，作 $\overline{OT}$

$\because T$ 為 $\overline{A_{2,4,1}A_{2,4,2}}$ 的中點， $\overline{OA_{2,4,1}}=\overline{OA_{2,4,2}}$

$\therefore \overline{OT}\perp\overline{A_{2.4.1}A_{2,4,2}}\Rightarrow\angle OTA_{2,4,1}=90°$

又 $\angle A_{2,4,1}A_1O=90°$ $\therefore\angle OTA_{2,4,1}+\angle A_{2,4,1}A_1O=180°$

$\Rightarrow A_1$ 、O、T、 $A_{2,4,1}$ 四點共圓

$\Rightarrow\angle A_1OA_{2,4,1}=\angle A_1TA_{2,4,1}=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{A_1A_{2,4,1}}$

(2) 在內外分角正 5_4 邊形中，如圖 5，

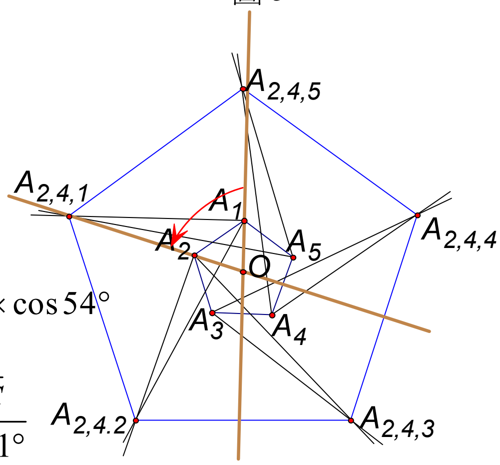


圖 26

$\theta_k=\dfrac{108°}{4}=27°$ ， $\overline{A_1C}=\overline{A_1A_2}\times\cos\angle A_2A_1C=a\times\cos 54°$

又 $\overline{A_1A_{2,4,2}}=\dfrac{\overline{A_1C}}{\cos\angle A_{2,4,2}A_1C}=\dfrac{\overline{A_1C}}{\cos(\theta_2+\theta_k)}=\dfrac{\overline{A_1C}}{\cos 81°}$

$\Rightarrow\overline{A_1A_{2,4,2}}=a\times\dfrac{\cos 54°}{\cos 81°}$ 由推論 7 的 $\overline{T'T}=\dfrac{1}{2}a$ 、 $\overline{A_{2,4,2}T'}=\overline{A_1A_{2,4,2}}\times\sin 27°$ 、

$\angle T'TA_{2,4,2}=\angle A_1TA_{2,4,1}=\angle A_1OA_{2,4,1}$ 和 $\tan\angle T'TA_{2,4,2}=\dfrac{\overline{T'A_{2,4,2}}}{\overline{T'T}}=\tan\angle A_1OA_{2,4,1}$

所以 $\tan\angle A_1OA_{2,4,1}=\dfrac{\overline{T'A_{2,4,2}}}{\overline{T'T}}\Rightarrow\angle A_1OA_{2,4,1}=\tan^{-1}\dfrac{\overline{T'A_{2,4,2}}}{\overline{T'T}}$

$=\tan^{-1}\dfrac{2\cos54°\sin27°}{\cos81°}$，如圖 26， 亦即 $\angle A_1OA_{2,k,1}=\tan^{-1}\left[\dfrac{2\cos\theta_2\sin\theta_k}{\cos(\theta_2+\theta_k)}\right]$，

又 $\because \angle A_{2,4,1}A_1O=90°$，則在直角 $\Delta A_1OA_{2,4,1}$ 中，其 $0<\angle A_1OA_{2,4,1}<90°$，故得證■

（三）邊垂正 $n_{k'}$ 邊形

推論 9-3：

在正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和其邊垂正 $n_{k'}$ 邊形 $E_1E_2\cdots E_n$ 中，分別作兩圖形的對應對稱軸 $\overleftrightarrow{A_1O}$、$\overleftrightarrow{E_1O}$，則 $\angle A_1OE_1$ 為兩圖形的旋轉角度，且 $\angle A_1OE_1=90°$，該角度不受 θ、k' 值影響。

證明：如圖 27，以邊垂正 5_8 邊形為例，旋轉角度為 $\angle A_1OE_1$，令 $\overline{A_1O}$ 和 $\overline{E_1P_5}$ 的交點為 W，則 $\angle A_1OE_1=180°-\angle WE_1O-\angle E_1WO$

$=180°-\dfrac{1}{2}\times108°-\angle A_1WP_5$（對頂角）

$=180°-\dfrac{1}{2}\times108°-\left(90°-\dfrac{1}{2}\times108°\right)=90°$ ■

在其他邊數、不同 k' 值的條件下，邊垂正多邊形也會與其原正多邊形產生一樣的旋轉角度。

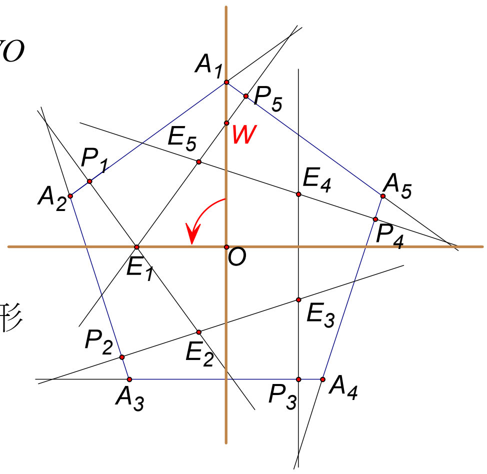


圖 27

（四）內角邊垂正 $n_{k,k'}$ 邊形

推論 9-4：

在正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和其內角邊垂正 $n_{k,k'}$ 邊形 $F_{1,k,k'}F_{2,k,k'}\cdots F_{n,k,k'}$ 中，分別作兩圖形的對應對稱軸 $\overleftrightarrow{A_1O}$、$\overleftrightarrow{F_{1,k,k'}O}$，則 $\angle A_1OF_{1,k,k'}$ 為兩圖形的旋轉角度，且

$$\angle A_1OF_{1,k,k'}=\begin{cases}\dfrac{180°}{n}+90°-\tan^{-1}\left[\dfrac{\left|(2-2_{k'})\tan\theta_k-\tan\theta_2\right|}{1-2_{k'}}\right], & if\ (2-2_{k'})\tan\theta_k-\tan\theta_2<0\\ \dfrac{180°}{n}+90°+\tan^{-1}\left[\dfrac{\left|(2-2_{k'})\tan\theta_k-\tan\theta_2\right|}{1-2_{k'}}\right], & if\ (2-2_{k'})\tan\theta_k-\tan\theta_2>0\end{cases},$$

且 $0°<\angle A_1OF_{1,k,k'}<180°$。

證明：(1) 如圖 28，以內角邊垂正$5_{4,4}$邊形為例，以A_3為原點，$\overleftrightarrow{A_3A_4}$為$x$軸，

$\overrightarrow{A_3A_4}$為x軸正向建立直角坐標系，

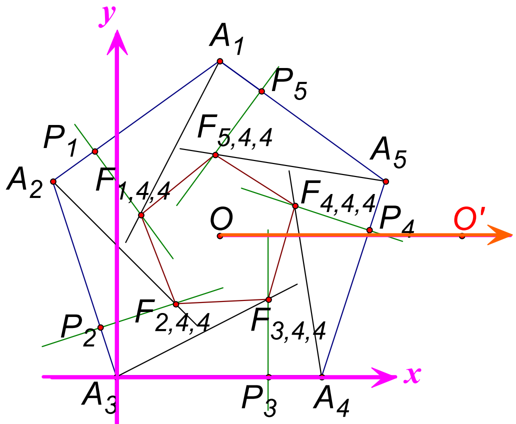


圖 28

則$F_{3,4,4}$座標為$\left(\overline{A_3P_3}, \overline{A_3P_3}\tan\angle F_{3,4,4}A_3P_3\right)$

$\Rightarrow F_{3,4,4}\left(a-\frac{a}{k'}, \left(a-\frac{a}{k'}\right)\tan\theta_k\right)$，

再以O為新原點，$\overleftrightarrow{OO'}$為x軸，

$\overrightarrow{OO'}$為x軸正向，則$F_{3,4,4}$新座標：

$$F_{3,4,4}\left(a-\frac{a}{k'}-\frac{\overline{A_3A_4}}{2}, \left(a-\frac{a}{k'}\right)\tan\theta_k-\frac{\overline{A_3A_4}}{2}\times\tan\angle OA_3A_4\right)$$

$$\Rightarrow F_{3,4,4}\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{k'}, \left(a-\frac{a}{k'}\right)\tan\theta_k-\frac{a\tan\theta_2}{2}\right)$$，其中$\left(a-\frac{a}{k'}\right)\tan\theta_k-\frac{a\tan\theta_2}{2}<0$

$$\Rightarrow \angle O'OF_{3,4,4}=\tan^{-1}\left[\frac{\left|\left(a-\frac{a}{k'}\right)\tan\theta_k-\frac{a\tan\theta_2}{2}\right|}{\frac{a}{2}-\frac{a}{k'}}\right]$$

$$=\tan^{-1}\left[\frac{\left|\left(1-1_{k'}\right)\tan\theta_k-\frac{\tan\theta_2}{2}\right|}{\frac{1}{2}-1_{k'}}\right]=\tan^{-1}\left[\frac{\left|\left(2-2_{k'}\right)\tan\theta_k-\tan\theta_2\right|}{1-2_{k'}}\right]\cdots\cdots ①$$

(2) 如圖 29，過O作$\overline{A_3A_4}$的垂直線並交於I，

則$\angle A_1OF_{1,4,4}=\angle A_3OF_{3,4,4}=\angle A_3OI+\angle IOO'-\angle F_3OO'$

$=\frac{360°}{n}\times\frac{1}{2}+90°-\angle F_{3,4,4}OO'$，由①可知

$=\frac{180°}{n}+90°-\tan^{-1}\left[\frac{\left|\left(2-2_{k'}\right)\tan\theta_k-\tan\theta_2\right|}{1-2_{k'}}\right]$，

其中$\left(2-2_{k'}\right)\tan\theta_k-\tan\theta_2<0$

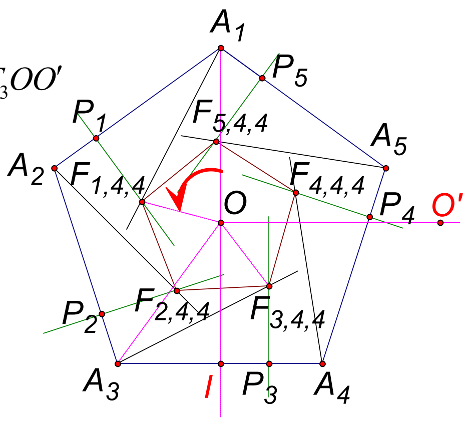


圖 29

(3) 當k與k'值的變化使得點$F_{3,k,k'}$從第四象限移到第一象限時，如圖 30，以內角邊垂正$5_{\frac{64}{31},4}$邊形為例，$k=\frac{64}{31}\doteq 2.0645$、$k'=4$，同前面推導原理可得，

$$F_{3,k,k'}\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{k'},\left(a-\frac{a}{k'}\right)\tan\theta_k-\frac{a\tan\theta_2}{2}\right)\quad 其中\left(a-\frac{a}{k'}\right)\tan\theta_k-\frac{a\tan\theta_2}{2}>0$$

$$\Rightarrow \angle O'OF_{3,k,k'}=\tan^{-1}\left[\frac{\left(a-\frac{a}{k'}\right)\tan\theta_k-\frac{a\tan\theta_2}{2}}{\frac{a}{2}-\frac{a}{k'}}\right]=\tan^{-1}\left[\frac{\left(2-2_{k'}\right)\tan\theta_k-\tan\theta_2}{1-2_{k'}}\right]\cdots②$$

(4) 如圖 31，過 O 作 $\overline{A_3A_4}$ 的垂直線並交於 I，

則 $\angle A_1OF_{1,k,k'}=\angle A_3OF_{3,k,k'}=\angle A_3OI+\angle IOO'+\angle O'OF_{3,k,k'}$

$=\frac{360°}{n}\times\frac{1}{2}+90°+\angle O'OF_{3,k,k'}$，由②可知

$=\frac{180°}{n}+90°+\tan^{-1}\left[\frac{\left(2-2_{k'}\right)\tan\theta_k-\tan\theta_2}{1-2_{k'}}\right]$，

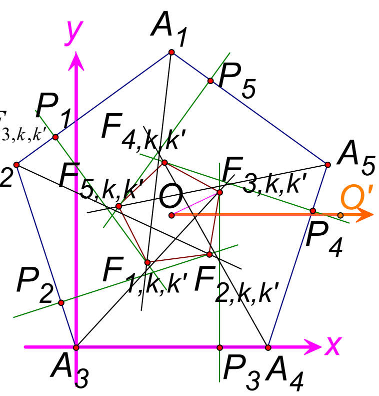


圖 30

其中 $\left(2-2_{k'}\right)\tan\theta_k-\tan\theta_2>0$

(5)當 $k>2$ 又很接近 2，且 k' 值很大時，$\angle A_1OF_{1,k,k'}$ 的角度會接近$180°$，故其範圍是$0°<\angle A_1OF_{1,k,k'}<180°$。

在其他邊數、不同 k 或 k' 值的條件下，內角邊垂正多邊形也會與其原正多邊形產生一樣規律的旋轉角度。

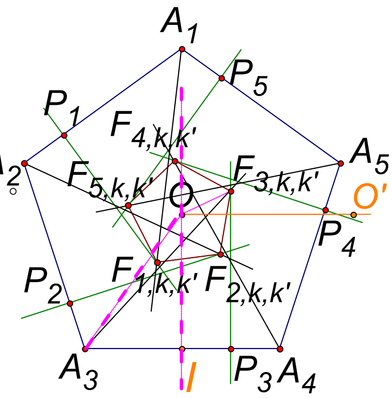


圖 31

（五）外角邊垂正 $n_{k'}$ 邊形

推論 9-5：

在正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和其外角邊垂正 $n_{k'}$ 邊形 $H_1H_2\cdots H_n$ 中，分別作兩圖形的對應對稱軸 $\overleftrightarrow{A_1O}$ 、$\overleftrightarrow{H_1O}$ ，則 $\angle A_1OH_1$ 為兩圖形的旋轉角度，且

$\angle A_1OH_1=\tan^{-1}2\left(1-1_{k'}\right)\cot\theta_2$，其中 $0°<\angle A_1OH_1<\tan^{-1}\left(2\sqrt{3}\right)\doteq 73.89789°$。

證明：如圖 32，同推論 9-2 的證明(1)的推導原理可得到 $\angle H_1TP_1=\angle H_1OA_1$

以外角邊垂正 5_4 邊形為例，作 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 和 $\overline{H_1H_2}$ 交於 T，則

$$\overline{H_1P_1}=\overline{A_1P_1}\times\cot\angle A_1H_1P_1=\left(1-\frac{1}{4}\right)a\times\cot 54^\circ$$ ，

由推論 6 引理二得到 $\overline{P_1T}=\frac{1}{2}a$

又 $\tan\angle H_1TP_1=\frac{\overline{H_1P_1}}{\overline{P_1T}}=\tan\angle H_1OA_1$

$$\therefore\angle H_1OA_1=\tan^{-1}\frac{\overline{H_1P_1}}{\overline{P_1T}}=\tan^{-1}\left(2\times\frac{3}{4}\times\cot 54^\circ\right)$$

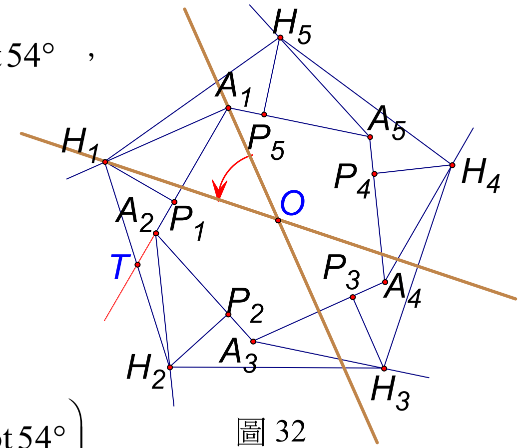


圖 32

在外角平分線固定下，k' 等分邊垂線的移動會改變旋轉角度的大小，以圖 33 為例，當 k' 越大，邊垂線 $\overleftrightarrow{H_1P_1}$ 越靠近頂點 A_2 ，旋轉角度就越大；當邊垂線一直移動到通過點 A_2 ，$\angle A_1OL_1$ 就是旋轉角度範圍的上限。此時 $\angle A_1OL_1=\tan^{-1}\left(\frac{2}{\tan\theta_2}\right)$ ，則旋轉角度的範圍是 $0^\circ<\angle A_1OH_1<\tan^{-1}\left(2\cot\theta_2\right)$ ，

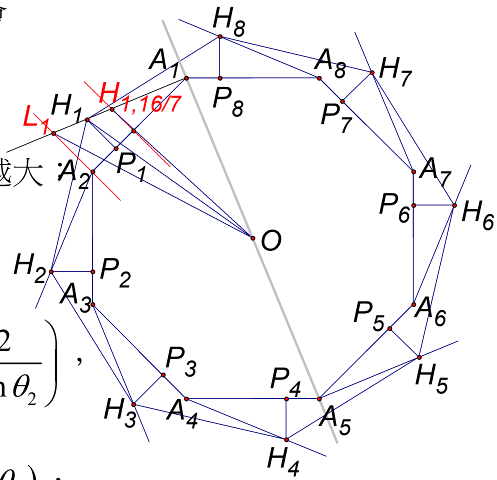


圖 33

上限視 n 而定；又在所有邊長相等的正 n 邊形中，以正三角形可以得到最大的上限值，故此範圍也可寫成 $0^\circ<\angle A_1OH_1<\tan^{-1}\left(2\cot 30^\circ\right)=\tan^{-1}\left(2\sqrt{3}\right)$ 。

陸、研究結果

本研究先將內角作 k 等分、邊長作 k' 等分，其中 $k,k'=2^i,i=2,3,\cdots$ ，是為了作圖上的方便性，然而所有研究結果皆適用於 $k,k'>2$ 的有理數，並統整如表格二、三、四：

一、各種新正 *n* 邊形與原正 *n* 邊形邊長 *a*、面積之關係一般式

表格二：正 *n* 邊形與五種新正 *n* 邊形的邊長、面積關係一般式整理

推論 1： 內分角正 n_k 邊形	內分角正 n_k 邊形之邊長 $\overline{B_nB_1}$ 與 a 的關係一般式： $\overline{B_nB_1}=a\times\frac{\sin\left(\theta-\theta_k\right)-\sin\theta_k}{\sin\theta}$ ，

	與原正 n 邊形的面積比值為：$\left\{\dfrac{\sin\left[\left(1-1_k\right)\theta\right]-\sin\theta_k}{\sin\theta}\right\}^2$ 。
推論 2： 內外分角正 $\boldsymbol{n_k}$ 邊形	內外分角正 n_k 邊形之邊長 $\overline{A_{2,k,n}A_{2,k,1}}$ 與 a 的關係一般式： $\overline{A_{2,k,n}A_{2,k,1}}=a\times\sqrt{1+\dfrac{4\cos^2\theta_2\sin^2\theta_k}{\cos^2\left(\theta_2+\theta_k\right)}}$ ， 其與原正 n 邊形的面積比值為：$1+\dfrac{4\cos^2\theta_2\sin^2\theta_k}{\cos^2\left(\theta_2+\theta_k\right)}$ 。
推論 3：推論 2 中 n 與 k 的關係	外角平分線與內角 k 等分角線會相交並形成「內外分角正 n_k 邊形」，其 n、k 關係式為 $n<k+2$ ，且 $n=k+1$ 最大。
推論 4： 邊垂正 $\boldsymbol{n_{k'}}$ 邊形	邊垂正 $n_{k'}$ 邊形之邊長 $\overline{E_nE_1}$ 與 a 的關係一般式： $\overline{E_nE_1}=a\times\left(1-2_{k'}\right)\cot\theta_2$ 其與原正 n 邊形的面積比值為：$\left(1-2_{k'}\right)^2\cot^2\theta_2$ 。
推論 5： 內角邊垂正 $\boldsymbol{n_{k,k'}}$ 邊形	內角邊垂正 $n_{k,k'}$ 邊形之邊長 $\overline{F_nF_{1,k,k'}}$ 與 a 的關係一般式： $\overline{F_nF_{1,k,k'}}=a\times\sqrt{1+\dfrac{2_{k'}-2}{\csc\theta}\times\left(\tan\theta_k+\dfrac{1_{k'}-\sin^2\theta_k}{\tan\theta_2\cos^2\theta_k}\right)}$ 其與原正 n 邊形的面積比值為： $1+\dfrac{2_{k'}-2}{\csc\theta}\times\left(\tan\theta_k+\dfrac{1_{k'}-\sin^2\theta_k}{\tan\theta_2\cos^2\theta_k}\right)$ 。
推論 6： 外角邊垂正 $\boldsymbol{n_{k'}}$ 邊形	外角邊垂正 $n_{k'}$ 邊形之邊長 $\overline{H_nH_1}$ 與 a 的關係一般式： $\overline{H_nH_1}=a\times\sqrt{1+4\left(1-1_{k'}\right)^2\cot^2\theta_2}$ 其與原正 n 邊形的面積比值為：$1+4\left(1-1_{k'}\right)^2\cot^2\theta_2$ 。

二、推導過程中衍生的新發現及五點共圓情形

表格三：新正 **n** 邊形的意外發現與五點共圓統整

推論 7： 推論 2、6 中衍生的新發現	①原正 n 邊形的任一邊 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 或其延長線恰可平分對應的內外分角正 n_k 邊形、外角邊垂正 $n_{k'}$ 邊形的對應邊 $\overline{A_{2,k,i}A_{2,k,i+1}}$ 、$\overline{H_iH_{i+1}}$ ，交點為 T； ②過點 $A_{2,k,i}$ 和 H_i 分別作 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 的平行線，與過點 A_{i+1} 分別作 $\overline{A_iA_{2,k,i}}$ 和 $\overline{A_iH_i}$ 的平行線交於 $A'_{2,k,i}$ 和 H'_i ，分別連接 $\overline{A'_{2,k,i}A_{2,k,i+1}}$ 及 $\overline{H'_iH_{i+1}}$ ，且與 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 延長線分別交於 T' ，則 $\overline{TT'}=\frac{1}{2}a$ 。
推論 8： 各種新圖形的五點共圓	在內分角正 n_k 邊形中，點 B_i 、G_i 、A_{i+1} 、G_{i+1} 、O 五點共圓。
	在邊垂正 $n_{k'}$ 邊形中，點 A_i 、P_i 、E_i 、O 、P_{i+n-1} 五點共圓。
	在內角邊垂正 $n_{k,k'}$ 邊形中，點 $F_{i,k,k'}$ 、B_i 、E_i 、O 、$F_{i+n-1,k,k'}$ 五點共圓。
備註	1.以上 $i=1,2,\cdots,n$ ，若下標值 $>n$ ，則取下標值 $\bmod n$ 為新下標值。 2.推論 8 的三種新圖形中，因共圓關係，各自會有 n 個小圓（分別稱內分角五點圓、邊垂五點圓及內角邊垂五點圓）存在其中。

三、各種新正 **n** 邊形的旋轉角度及其範圍

表格四：正 **n** 邊形與五種新正 **n** 邊形的旋轉角度關係一般式整理

推論 9： 五種新圖形與原正 n 邊形之旋轉角度與 n、k、k' 的關係 （皆以 $\overrightarrow{A_1O}$ 為	在內分角正 n_k 邊形中，$\angle A_1OB_1$ 為其圖形旋轉角度，則 $\angle A_1OB_1=\theta_k$ ，且 $\frac{60^\circ}{k}\le\angle A_1OB_1<\frac{180^\circ}{k}$
	在內外分角正 n_k 邊形中，$\angle A_1OA_{2,k,1}$ 為其圖形旋轉角度，則 $\angle A_1OA_{2,k,1}=\tan^{-1}\left(\frac{2\cos\theta_2\sin\theta_k}{\cos(\theta_2+\theta_k)}\right)$ ，$0^\circ<\angle A_1OA_{2,k,1}<90^\circ$ 。
	在邊垂正 $n_{k'}$ 邊形中，$\angle A_1OE_1$ 為其圖形旋轉角度，則 $\angle A_1OE_1=90^\circ$ ；此角度不受 n 、k' 值影響。

基準，與五種新正 n 邊形的第 1 頂點所作對稱軸間的旋轉角度）	在內角邊垂正 $n_{k,k'}$ 邊形中，$\angle A_1OF_{1,k,k'}$ 為其圖形旋轉角度， 令 $\omega=(2-2_{k'})\tan\theta_k-\tan\theta_2$，則 $0^\circ<\angle A_1OF_{1,k,k'}<180^\circ$ 且 $\angle A_1OF_{1,k,k'}=\begin{cases}\dfrac{180^\circ}{n}+90^\circ-\tan^{-1}\left[\dfrac{\left\|(2-2_{k'})\tan\theta_k-\tan\theta_2\right\|}{1-2_{k'}}\right], & if\ \ \omega<0\\ \dfrac{180^\circ}{n}+90^\circ+\tan^{-1}\left[\dfrac{\left\|(2-2_{k'})\tan\theta_k-\tan\theta_2\right\|}{1-2_{k'}}\right], & if\ \ \omega>0\end{cases}$。
	在外角邊垂正 $n_{k'}$ 邊形中，$\angle A_1OH_1$ 為其圖形旋轉角度，則 $\angle A_1OH_1=\tan^{-1}\left(\dfrac{2-2_{k'}}{\tan\theta_2}\right)$，其中 $2_{k'}=\dfrac{2}{k'}$，$0^\circ<\angle A_1OH_1<\tan^{-1}\left(2\sqrt{3}\right)$ 或 $0^\circ<\angle A_1OH_1<\tan^{-1}\left(2\cot\theta_2\right)$。

柒、參考文獻及資料

1.國中數學第四、五冊，台南市翰林出版事業股份有限公司

2.高中數學第三冊第一章，三角，南一書局

3.歐劭祺，正 n 邊形上等弧交點所圍圖形之探討，中華民國第 56 屆科展國中組數學科第一名，2015 年 7 月

4.笹部真市郎原著，幾何學辭典，九章出版社譯，2003 年

5.江澤民的五點共圓證明，百度百科，

https://baike.baidu.hk/item/%E4%BA%94%E9%BB%9E%E5%85%B1%E5%9C%93/8394547

【評語】030403

作品探討由正 n 邊形的內角 k 等分線所圍出的內角 n 邊形、內角 n 等分線與外角平分線的交點所圍出的 n 邊形，以及邊的 k 等分垂直線的交點所圍出的 n 邊形，這些 n 邊形的是否都會是正 n 邊形？如果這些 n 邊形都是正 n 邊形，它們是由原本的正 n 邊形旋轉多少角度，再縮放多少倍後得出的？內角 k 等分線的交點和邊的 k 等分垂直線的交點是不是有什麼特別的好性質呢？作者們針對上述的這些問題作了討論，得出了一些漂亮的結果。內容十分的豐富，可以感覺的出作者們確實是投入了不少的心力，這點非常值得嘉許。有部分的論述稍嫌繁瑣了些。就如同作者們在作品後半部所提到的，由給出的種種建構方式所構造出的正 n 邊形與原本的正 n 邊形有相同的中心，也因此，它們是可以看成是原本的正 n 邊形經過旋轉、縮放後得出的。如果能充分利用這樣的想法，論證這些 n 邊形的一些特性會容易的多。另一方面，在分析一些性質時，如果有注意到結果十分特別而且簡潔，應該要嘗試去思考是否有更直觀、更簡潔的論述方式（例如，第 12 頁的推論 4，第 24 頁的推論 9-3)。如果能針對這些部分適當的調整論述方式，作品會更具可讀性也會更好。

作品海報

壹、研究動機：推廣到正 n 邊形各邊垂線，能相交形成正 n 邊形？

貳、研究目的與架構：

一、探討在正 n 邊形中作三種幾何直線，經各自相交或兩兩搭配後相交得到的五種新相似正 n 邊形與原正 n 邊形的邊長、面積關係一般式。

二、討論衍生的新發現：原正 n 邊形的邊或其延長線，恰可平分內外分角正 n_k 邊形和外角邊垂正 $n_{k'}$ 邊形的邊之原由。

三、分析在內分角正 n_k 邊形、邊垂正 $n_{k'}$ 邊形和內角邊垂正 $n_{k,k'}$ 邊形中出現的五點共圓情形。

四、承一，推導五種新正 n 邊形以原圖形為基準的旋轉角度及其範圍。

參、研究過程、方法與推論結果：

一、已知性質與名詞定義

性質 1 三角形兩腰中點連線逆性質：過三角形一腰的中點作平行於第三邊的直線，一定也會通過另一腰的中點。

性質 2 圓內冪性質（交弦定理）：若一圓上有兩弦 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 交於 P 點，則 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$。

1. 內角 k 等分角線：於此討論正 n 邊形內角 $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ 中較靠近 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 的 k 等分角線。如圖 1 內角 $\angle A_6A_1A_2$ 的 4 等分角線為 $\overrightarrow{m}$；8 等分角線為 $\overrightarrow{n}$。

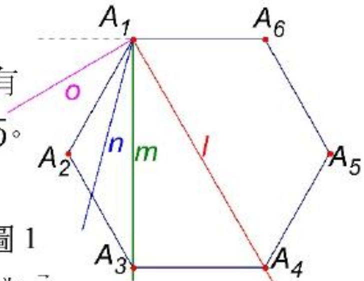


圖 1

2. 外角平分線：如圖 1 的外角平分線為 $\overrightarrow{o}$。這裡探討外角 2 等分角線。

3. k' 等分邊垂線：於此將討論正 n 邊形的邊 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 上較靠近點 A_{i+1} 的邊垂線。如圖 2 中 $\overline{A_3A_4}$ 的 4 等分邊垂線為 $\overleftrightarrow{q}$；8 等分邊垂線為 $\overleftrightarrow{r}$。

4. n 為正 n 邊形邊數；θ 為正 n 邊形內角角度。

5. 簡記：本研究為將推導出的關係式一般化，如有正 n 邊形內角 θ 被 k 等分、或正 n 邊形的邊被 k' 等分，會統一簡記為 $\frac{\theta}{k}\to\theta_k$、$\frac{a}{k'}\to a_{k'}$。

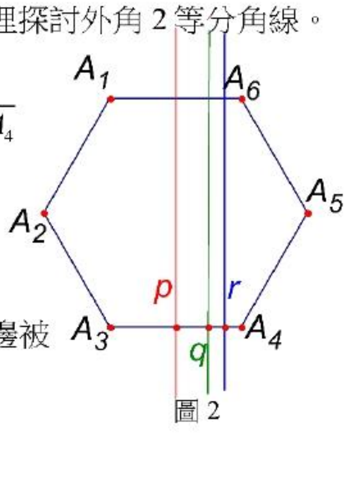


圖 2

內分、外分、垂直分，怎麼「分」都好「正」！

二、各種新正 n 邊形與原正 n 邊形邊長 a、面積之關係一般式

表格一：正 n 邊形與五種新正 n 邊形的邊長、面積關係一般式整理

推論 1：內分角正 n_k 邊形

內分角正 n_k 邊形邊長與 a 的關係一般式：

$$\overline{B_nB_1}=a\times\frac{\sin(\theta-\theta_k)-\sin\theta_k}{\sin\theta}$$

與原正 n 邊形的面積比值為：

$$\left[\frac{\sin(\theta-\theta_k)-\sin\theta_k}{\sin\theta}\right]^2$$ 。

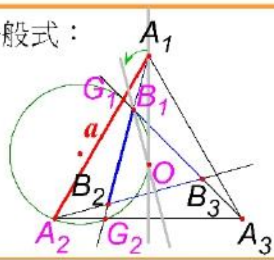


圖 3

推論 2：內外分角正 n_k 邊形

內外分角正 n_k 邊形邊長與 a 的關係一般式：

$$\overline{A_{2,k,n}A_{2,k,1}}=a\times\sqrt{1+\frac{4\cos^2\theta_2\sin^2\theta_k}{\cos^2(\theta_2+\theta_k)}}$$

其與原正 n 邊形的面積比值為：

$$1+\frac{4\cos^2\theta_2\sin^2\theta_k}{\cos^2(\theta_2+\theta_k)}$$ 。

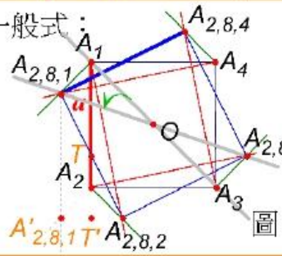


圖 4

推論 3：推論 2 中 n 與 k 的關係

外角平分線與內角 k 等分角線會相交並形成「內外分角正 n_k 邊形」，其 n、k 關係式為 $n<k+2$，且 $n=k+1$ 最大。

表格二：正 n 邊形中內角 k 等分角線與外角平分線是否相交的邊數整理

k 等分角線 \ n 邊形	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
4 等分角線	✔	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
8 等分角線	✔	✔	✔	✔	✔	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
16 等分角線	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✗	✗

推論 4：邊垂正 $n_{k'}$ 邊形

邊垂正 $n_{k'}$ 邊形邊長與 a 的關係一般式：

$$\overline{E_nE_1}=a\times(1-2_{k'})\cot\theta_2$$

其與原正 n 邊形的面積比值為：

$$(1-2_{k'})^2\cot^2\theta_2$$ 。

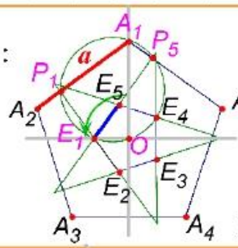


圖 5

推論 5：內角邊垂正 $n_{k,k'}$ 邊形

內角邊垂正 $n_{k,k'}$ 邊形邊長與 a 的關係一般式：

$$\overline{F_{n,k,k'}F_{1,k,k'}}=a\times\sqrt{1+\frac{2_{k'}-2}{\csc\theta}\times\left(\tan\theta_k+\frac{1_{k'}-\sin^2\theta_k}{\tan\theta_2\cos^2\theta_k}\right)}$$

其與原正 n 邊形的面積比值為：

$$1+\frac{2_{k'}-2}{\csc\theta}\times\left(\tan\theta_k+\frac{1_{k'}-\sin^2\theta_k}{\tan\theta_2\cos^2\theta_k}\right)$$ 。

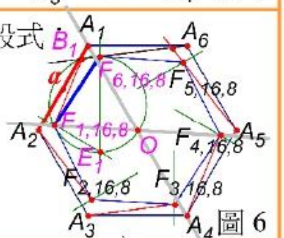


圖 6

推論 6：外角邊垂正 $n_{k'}$ 邊形

外角邊垂正 $n_{k'}$ 邊形邊長與 a 的關係一般式為：

$$\overline{H_nH_1}=a\sqrt{(2-2_{k'})^2\cot^2\theta_2+1}$$

其與原正 n 邊形的面積比值為：

$$1+(2-2_{k'})^2\cot^2\theta_2$$ 。

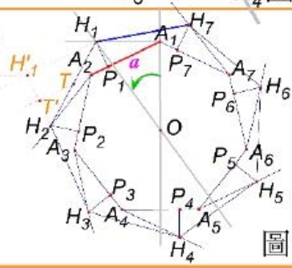


圖 7

三、推導過程中衍生的新發現

表格三：新正 n 邊形衍生的新發現與五點共圓統整

推論 7：推論 2、6 中衍生的新發現 (如圖 4、7)	①原正 n 邊形的任一邊 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 或其延長線恰可平分內外分角正 n_k 邊形、外角邊垂正 $n_{k'}$ 邊形的對應邊 $\overline{A_{2,k,i}A_{2,k,i+1}}$、$\overline{H_iH_{i+1}}$，交點為 T。 ②過點 $A_{2,k,i}$ 和 H_i 分別作 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 的平行線，與過點 A_{i+1} 分別作 $\overline{A_iA_{2,k,i}}$ 和 $\overline{A_iH_i}$ 的平行線交於 $A'_{2,k,i}$ 和 H'_i，分別連接 $\overline{A'_{2,k,i}A_{2,k,i+1}}$ 及 $\overline{H'_iH_{i+1}}$，且與 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 延長線分別交於 T'，則 $\overline{TT'}=\dfrac{a}{2}$。
推論 8：各種新圖形的五點共圓	內分角正 n_k 邊形中，點 B_i、G_i、A_{i+1}、G_{i+1}、O 共圓
	邊垂正 n_k 邊形中，點 A_i、P_i、E_i、O、P_{i+n-1} 共圓
	內角邊垂正 $n_{kk'}$ 邊形中，點 $F_{i,k,k'}$、B_i、E_i、O、$F_{i+n-1,k,k'}$ 共圓
備　註:1.推論 8 的三種圖形中，因共圓，各自會有 n 個小圓存在其中（分別稱為內分角五點圓、邊垂五點圓以及內角邊垂五點圓）。 2.以上 $i=1,2,\cdots,n$，若下標值 $>n$，則取下標值 mod n 為新下標值。	

四、各種新正 n 邊形的旋轉角度及其範圍

表格四：正 n 邊形與五種新正 n 邊形間的旋轉角度關係一般式整理

推論 9：五種新圖形與原正 n 邊形之旋轉角度與 n、k、k' 的關係（皆取以 $\overline{A_1O}$ 為基準，與五種新正 n 邊形的第 1 頂點所作對稱軸間的旋轉角度，如圖 3～7）	內分角正 n_k 邊形旋轉角度 $\angle A_1OB_1$ 為 θ_k 且 $\dfrac{60^\circ}{k}\le\theta_k<\dfrac{180^\circ}{k}$
	內外分角正 n_k 邊形旋轉角度 $\angle A_1OA_{2,k,1}$ 為 $\angle A_1OA_{2,k,1}=\tan^{-1}\left(\dfrac{2\cos\theta_2\sin\theta_k}{\cos(\theta_2+\theta_k)}\right)$，$0^\circ<\angle A_1OA_{2,k,1}<90^\circ$
	邊垂正 $n_{k'}$ 邊形旋轉角度為 90°，不受 n、k' 值影響。
	令 $\omega=(2-2_{k'})\tan\theta_k-\tan\theta_2$，內角邊垂正 $n_{kk'}$ 邊形旋轉角度為 $\angle A_1OF_{1,k,k'}$，則 $0^\circ<\angle A_1OF_{1,k,k'}<180^\circ$ 且 $\angle A_1OF_{1,k,k'}=\begin{cases}\dfrac{180^\circ}{n}+90^\circ-\tan^{-1}\left[\dfrac{\lvert\omega\rvert}{1-2_{k'}}\right], & if\ \omega<0\\ \dfrac{180^\circ}{n}+90^\circ+\tan^{-1}\left[\dfrac{\lvert\omega\rvert}{1-2_{k'}}\right], & if\ \omega>0\end{cases}$
	外角邊垂正 $n_{k'}$ 邊形旋轉角度 $\angle A_1OH_1$ 為 $\tan^{-1}\left(\dfrac{2-2_{k'}}{\tan\theta_2}\right)$，且 $0^\circ<\angle A_1OH_1<\tan^{-1}(2\sqrt{3})$（或 $\tan^{-1}(2\cot\theta_2)$）

肆、未來展望與參考文獻：

[1] 高中數學第三冊第一章，三角，南一書局。

[2] 國中數學第四、五冊，台南市翰林出版事業股份有限公司。