中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030402

突「破」「三」次元

學校名稱：基隆市立銘傳國民中學

作者：	指導老師：
國二 許毅志 國二 陳玟臻 國二 郭上齊	高宜楓 陳慧敏

關鍵詞：拿破崙定理、三角形、四邊形

突「破」「三」次元

摘要

本研究主要推廣拿破崙定理，原本想探討以其他多邊形的邊長為基底，向內、外作正三角形，再分別將其內、外所有正三角形中心連線後，所形成的 n 邊形與原 n 邊形之間，是否如拿破崙定理般有「任意三角形的外拿破崙三角形與內拿破崙三角形的面積之差等於原三角形的面積」之結論？透過作圖觀察發現，外仿拿破崙 n 邊形及內仿拿破崙 n 邊形與原 n 邊形之面積關係，會因錯位、角度的不同而有兩種不同的結果。因此我們將錯位分為五種情況探討，再分別將此不同情形實際運用於三、四、五、六邊形，只需得知原 n 邊形中的一夾角和內仿拿破崙 n 邊形中任一點對應此角是否有錯位，便可推論出整個圖形的外仿拿破崙 n 邊形、內仿拿破崙 n 邊形及原 n 邊形之間的面積關係。

壹、研究動機

一、研究動機

在一次機緣巧合之下，我們接觸了《幾何明珠》這本書，並且認識了拿破崙定理，此篇有提到「任意三角形的外拿破崙三角形與內拿破崙三角形的面積之差等於原三角形的面積」。在我們探究其原因後，進而對於能否以其他多邊形的邊長為基底，向內、外作正三角形，並分別將其內、外所有中心連線所形成的 n 邊形，研究是否如同拿破崙三角形般有「任意三角形的外拿破崙三角形與內拿破崙三角形的面積之差等於原三角形的面積」的特殊關聯。然而過程並非一帆風順，我們馬上遇到瓶頸。在一次不經意的繪圖中發現，以多邊形的邊長為基底向內、外作正方形，並分別將內、外正方形的所有中心連線後所形成的 n 邊形與原 n 邊形之間似乎有某種特殊關聯。於是我們便以此為方向，進行了後續的各種探究。

二、文獻回顧

表一、拿破崙定理相關之文獻回顧

作者	年代	研究內容	研究範圍
許翰翔	2013 年	以特定四邊形（平行四邊形、菱形、 矩形、等腰梯形、鳶形）的邊全部向外或全部向內作相似三角形或特殊四邊形，發現四邊形對偶規律、外接圓交點、對角線共點性質。	研究僅圍繞著四邊形，原四邊形和結果四邊形對角線共點問題和內外結果四邊形面積差與原四邊形面積的比值問題未提出一般性。
李允兆 許崇淵 王士豪	2015 年	以當原多邊形為任意三角形、凹、凸四邊形、8 字形及 n 邊形向外、向內（向內、向外）交錯作一組同向相似三角形，發現有向面積不變量及對偶性。	研究推展原多邊形向外、向內（向內、向外）交錯作一組同向相似三角形，面積定量關係。
陳致安 朱建威 陳揚叡	2006 年	以三角形的三邊為直徑畫半圓，取特定圓心角，得外切三角形，發現某些特定圓心角所構成的外切三角形與原三角形相似。	研究未探討圓心角的角度一般化所形成的外切三角形。
黃家冠	2015 年	將拿破崙定理推廣至 n 邊形，研究出「初始多邊形」的作圖法。	僅透過拿破崙定理所得之圖形回推初始 n 邊形。

貳、研究目的

一、探討內仿拿破崙 n 邊形之錯位問題。

二、探討原圖形為三、四、五、六邊形時，內、外仿拿破崙 n 邊形面積之間的關係。

三、探討原圖形推廣至 n 邊形時，內、外仿拿破崙 n 邊形面積之間的關係。

■

參、研究設備及器材

一、紙、筆、GeoGebra 繪圖軟件、電腦

肆、研究過程或方法

一、名詞定義

（一）外仿拿破崙 n 邊形

以任意 n 邊形的 n 邊長為基底，向外延伸作正方形，並取其 n 個正方形的中心，將這些中心點連線，所形成的 n 邊形，稱之為外仿拿破崙 n 邊形。在此報告中，其面積簡稱外。

（二）內仿拿破崙 n 邊形

以任意 n 邊形的 n 邊長為基底，向內延伸作正方形，並取其 n 個正方形的中心，將這些中心點連線，所形成的 n 邊形，稱之為內仿拿破崙 n 邊形。在此報告中，其面積簡稱內。

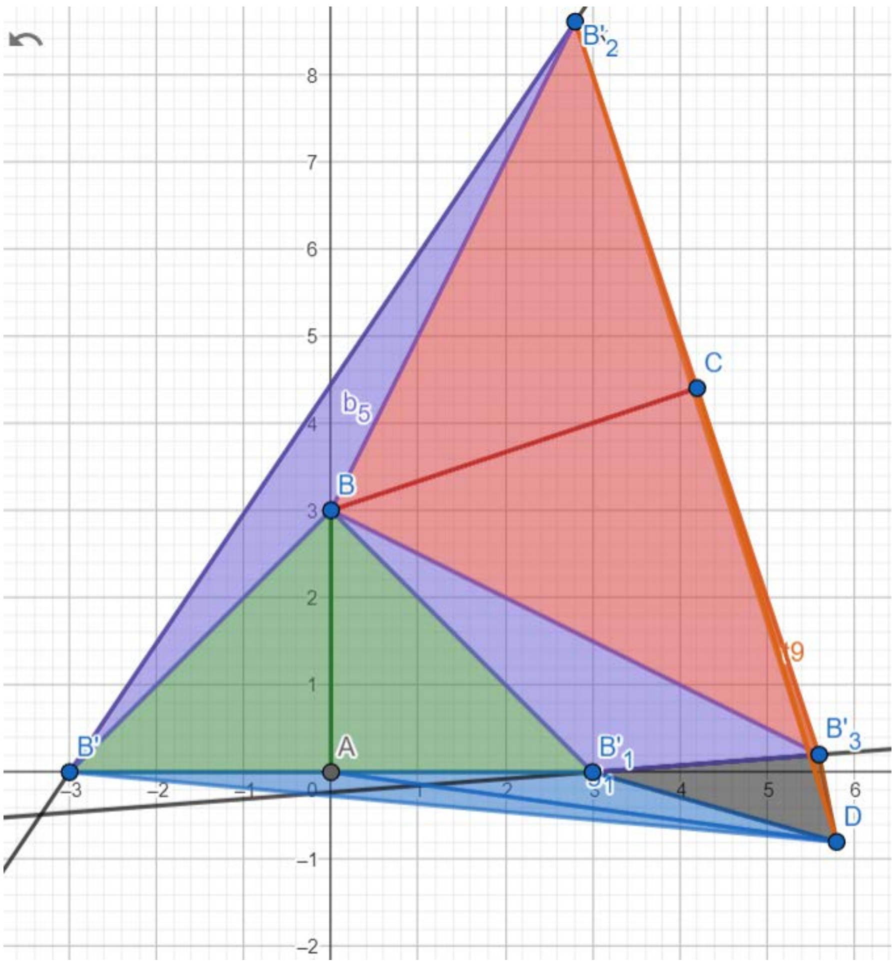
（三）錯位

1.定義

我們在作圖的過程中，發現當一角的向內延伸兩點和內仿拿破崙 n 邊形中任一點共線時，向此線兩側一時即會產生面積關係的變化，因此我們定義名為錯位的現象，即是使一角大於原角為一大於 90 度角，而此時，點向一方向移動時，其面積關係為外-內=2 原，向此方向移動後此任意點即錯位。

2.判別方式

任意凸多邊形一角頂點其兩邊向內外作正方形後，將向外兩點、向內兩點連線，若任意點 O 在兩線相交後形成的較小對頂角之間，即為錯位。如下圖一所示：



圖一、$\overline{BC}$、$\overline{AB}$兩邊為 n 邊形兩一角兩邊之中點至頂點的線段。B'_3、B'_2為頂點其中一邊向內外作正方形後之中心；B'、B'_1為頂點其中一邊向內外作正方形後之中心。此圖中 D 點在$\overleftrightarrow{B'_1B'_3}$與$\overleftrightarrow{B'B'_2}$相交後形成的較大對頂角中，則無錯位

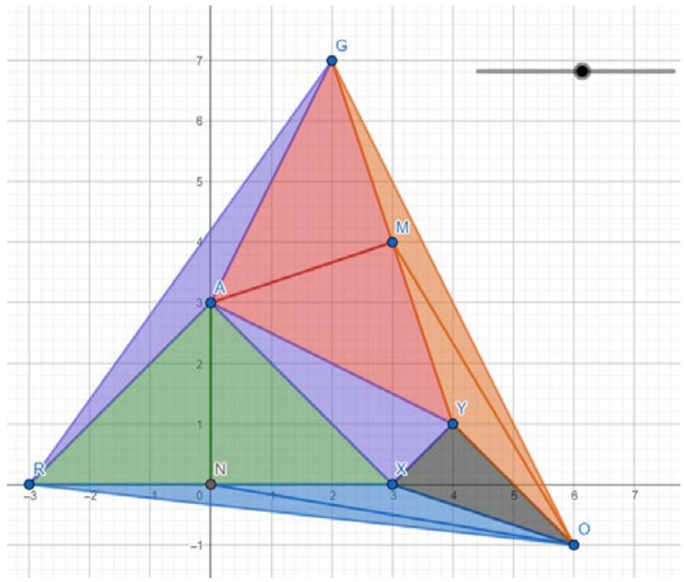
二、舉例三角形與四邊形之內仿拿破崙 n 邊形、外仿拿破崙 n 邊形與原 n 邊形之間面積之關聯

如前述名詞定義，已說明錯位的定義，我們在繪製圖形時發現在內仿拿破崙 n 邊形其中一點在持續改變座標時，有時會在一瞬間突然改變面積關係，在觀察後發現，一切與錯位有關。

我們將其分成以下幾種情況：

（一）此角大於90°且未發生錯位

原 n 邊形在此角對應之部分為三角形。如下圖二所示：



圖二、角度大於 90 度，沒有錯位

ΔRAG 與 ΔXAY：

$$\because \angle \mathrm{RAG} + \angle \mathrm{XAY} = 180°，\overline{\mathrm{AY}} = \overline{\mathrm{AG}}，\overline{\mathrm{AX}} = \overline{\mathrm{AR}}$$

∴當$\overline{\mathrm{AY}}$與$\overline{\mathrm{AG}}$重疊之時，$\overline{\mathrm{AX}} = \overline{\mathrm{AR}}$且位於同一條直線上，

故同底同高面積相等，設其面積為x

ΔANR 與 ΔANX： $\Delta\mathrm{ANR} \cong \Delta\mathrm{ANX}$，設其面積為 y

ΔAGM 與 ΔAYM： $\Delta\mathrm{AGM} \cong \Delta\mathrm{AYM}$ ，設其面積為 z

$\because \overline{\mathrm{RN}} = \overline{\mathrm{NX}}$的關係

∴ ΔRNO 與 ΔNXO同底同高面積相等，設其面積為w

$\because \overline{\mathrm{GM}} = \overline{\mathrm{MO}}$的關係

∴ ΔGMO與ΔMYO同底同高面積相等，設其面積為t

設 ΔMYO面積為s

那麼$\Delta RGO = 2t + w + x + y + z + s$

則四邊形$NAMO = s + t + w + x + y + z$

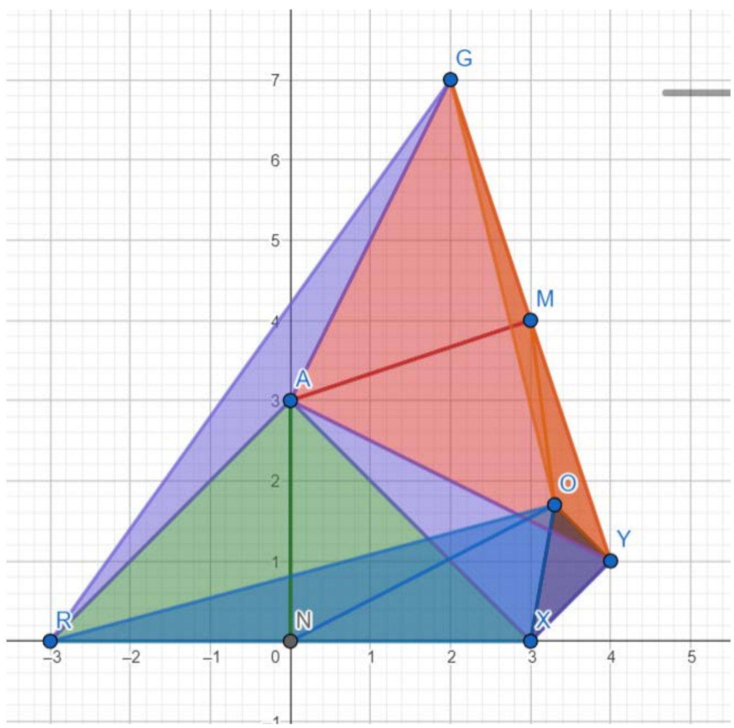
故$\Delta RGO + \Delta XYO = 2t + w + x + y + z + s + s$

$$= (s + t + w + x + y + z)$$

$$= 2(\text{四邊形 } NAMO)$$

（二）此角大於 90°且發生錯位

原 n 邊形在此角對應之部分為三角形。如下圖三所示：



圖三、角度大於 90 度，有錯位

ΔRAG 與 ΔXAY :

$$\because \angle RAG + \angle XAY = 180°，\overline{AY} = \overline{AG}，\overline{AX} = \overline{AR}$$

$\therefore$當$\overline{AY}$與$\overline{AG}$重疊之時，$\overline{AX} = \overline{AR}$且位於同一條直線上，

故同底同高面積相等，設其面積為x

ΔANR 與 ΔANX： $\Delta ANR \cong \Delta ANX$，設其面積為 y

ΔAGM 與 ΔAYM： $\Delta AGM \cong \Delta AYM$ ，設其面積為 z

$\because \overline{RN} = \overline{NX}$的關係

$\therefore$ ΔRNO 與 ΔNXO同底同高面積相等，設其面積為w

$\because \overline{GM} = \overline{MO}$的關係

$\therefore$ ΔGMO與ΔMYO同底同高面積相等，設其面積為t

設 ΔMYO面積為s

那麼$\Delta RGO = 2(-t - w + x + y + z) - s$

則四邊形$NAMO = -s - t - w + x + y + z$

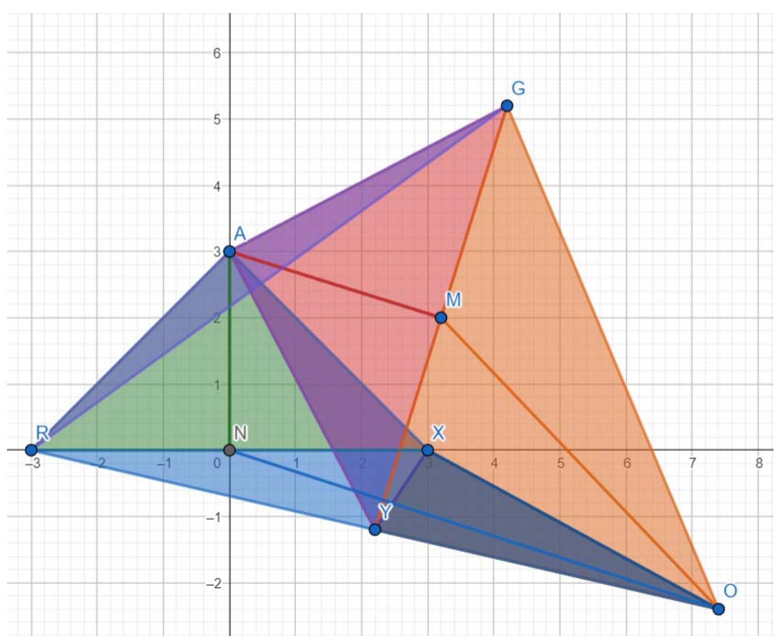
故$\Delta RGO - \Delta XYO = 2(-t - w + x + y + z) - s - s$

$$= 2(-s - t - w + x + y + z)$$

$$= 2(\text{四邊形 } NAMO)$$

（三）此角小於 90°且未發生錯位

原 n 邊形在此角對應之部分為三角形。如下圖四所示：



圖四、角度小於 90 度，沒有錯位

ΔRAG 與 ΔXAY :

$$\because \angle RAG + \angle XAY = 180°，\overline{AY} = \overline{AG}，\overline{AX} = \overline{AR}$$

$\therefore$當$\overline{AY}$與$\overline{AG}$重疊之時，$\overline{AX} = \overline{AR}$且位於同一條直線上，

故同底同高面積相等，設其面積為x

ΔANR 與 ΔANX： ΔANR ≅ ΔANX，設其面積為 y

ΔAGM 與 ΔAYM： ΔAGM ≅ ΔAYM ，設其面積為 z

$\because\ \overline{\mathrm{RN}} = \overline{\mathrm{NX}}$的關係

$\therefore$ ΔRNO 與 ΔNXO同底同高面積相等，設其面積為w

$\because\ \overline{\mathrm{GM}} = \overline{\mathrm{MO}}$的關係

$\therefore\ \Delta GMO$與ΔMYO同底同高面積相等，設其面積為t

設 ΔMYO面積為s

那麼$\Delta RGO = 2t + 2w - 2x + 2y + 2z - s$

則四邊形$NAMO = -s + t + w - x + y + z$

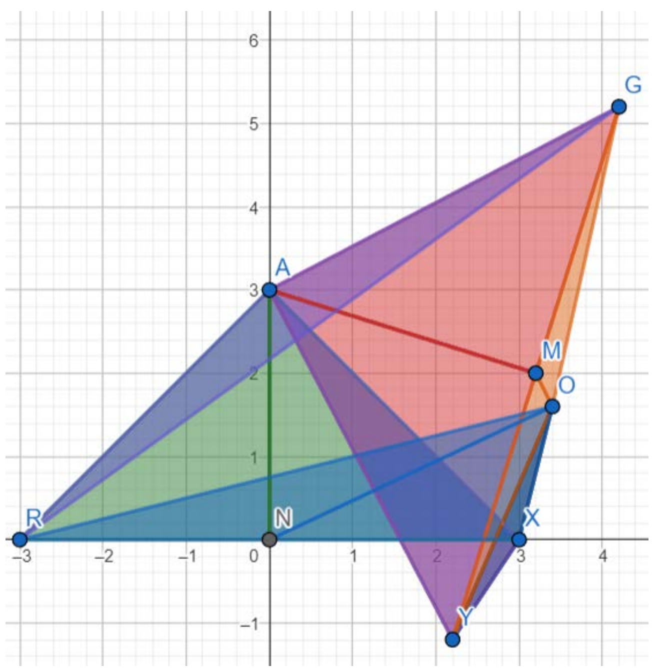
故$\Delta RGO - \Delta XYO = 2(t + w - x + y + z) - s - s$

$$= 2(-s + t + w - x + y + z)$$

$$= 2(\text{四邊形 } NAMO)$$

（四）此角小於 90°且發生錯位

原 n 邊形在此角對應之部分為三角形。如下圖五所示：



圖五、角度小於 90 度，有錯位

ΔRAG 與 ΔXAY :

$$\because \angle\mathrm{RAG} + \angle\mathrm{XAY} = 180°，\overline{\mathrm{AY}} = \overline{\mathrm{AG}}，\overline{\mathrm{AX}} = \overline{\mathrm{AR}}$$

∴當$\overline{\mathrm{AY}}$與$\overline{\mathrm{AG}}$重疊之時，$\overline{\mathrm{AX}} = \overline{\mathrm{AR}}$且位於同一條直線上，

故同底同高面積相等，設其面積為x

ΔANR 與 ΔANX： $\Delta\mathrm{ANR} \cong \Delta\mathrm{ANX}$，設其面積為 y

ΔAGM 與 ΔAYM： $\Delta\mathrm{AGM} \cong \Delta\mathrm{AYM}$ ，設其面積為 z

∵ $\overline{\mathrm{RN}} = \overline{\mathrm{NX}}$的關係

∴ ΔRNO 與 ΔNXO同底同高面積相等，設其面積為w

∵ $\overline{\mathrm{GM}} = \overline{\mathrm{MO}}$的關係

∴ ΔGMO與ΔMYO同底同高面積相等，設其面積為t

設 ΔMYO面積為s

那麼$\Delta RGO = 2t - 2w - 2x + 2y + 2z + s$

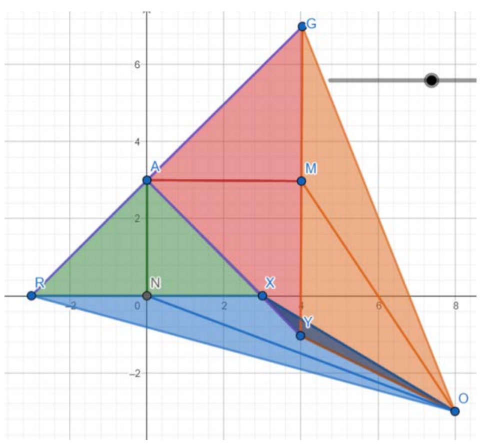
則四邊形$NAMO = s + t - w - x + y + z$

故$\Delta RGO - \Delta XYO = 2(t - w - x + y + z) + s + s = 2(s + t - w - x + y + z)$

$= 2$(四邊形 NAMO)

（五）此角等於 90°

原 n 邊形在此角對應之部分為五邊形。如下圖六、下圖七所示：



圖六、角為 90 度，為向內兩點與角頂點連線，若任意點在角兩邊中較長一側

當任意點位於以向內側兩點所作直線分成兩部分中包含此角較長邊長的部分。如前圖六所示：

ΔANR 與 ΔANX： ΔANR $\cong$ ΔANX，設其面積為 y

ΔAGM 與 ΔAYM： ΔAGM $\cong$ ΔAYM ，設其面積為 z

$\because$ $\overline{\mathrm{RN}} = \overline{\mathrm{NX}}$的關係

$\therefore$ ΔRNO 與 ΔNXO同底同高面積相等，設其面積為w

$\because$ $\overline{\mathrm{GM}} = \overline{\mathrm{MO}}$的關係

$\therefore$ ΔGMO與ΔMYO同底同高面積相等，設其面積為t

設 ΔMYO面積為s

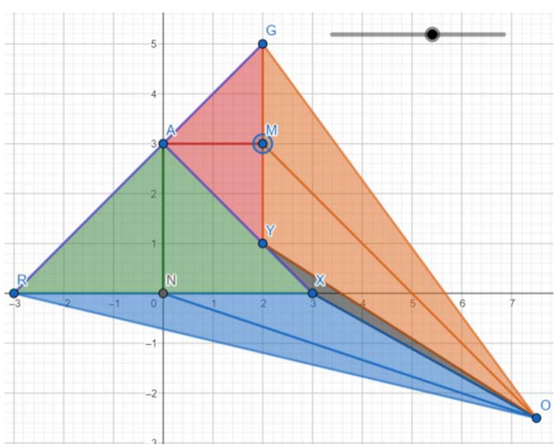
那麼$\Delta RGO = 2(t + w + y + z) - s$

則四邊形$NAMO = -s + t + w + y + z$

故$\Delta RGO - \Delta XYO = 2(t + w + y + z) - s - s$

$$= 2(-s + t + w + y + z)$$

$$= 2(四邊形NAMO)$$



圖七、角為 90 度，為向內兩點與角頂點連線，若任意點在角兩邊中較短一側

當任意點位於以向內側兩點所作直線分成兩部分中包含此角較短邊長的部分。如前圖七所示：

ΔANR 與 ΔANX： $\Delta ANR \cong \Delta ANX$，設其面積為 y

ΔAGM 與 ΔAYM： $\Delta AGM \cong \Delta AYM$ ，設其面積為 z

$\because \overline{RN} = \overline{NX}$的關係

$\therefore$ ΔRNO 與ΔNXO同底同高面積相等，設其面積為w

$\because \overline{GM} = \overline{MO}$的關係

$\therefore$ ΔGMO與ΔMYO同底同高面積相等，設其面積為t

設 ΔMYO面積為 s

那麼$\Delta RGO = 2(t+w+y+z)+s$

則四邊形$NAMO = s+t+w+y+z$

故$\Delta RGO + \Delta XYO = 2(t+w+y+z)+s+s$

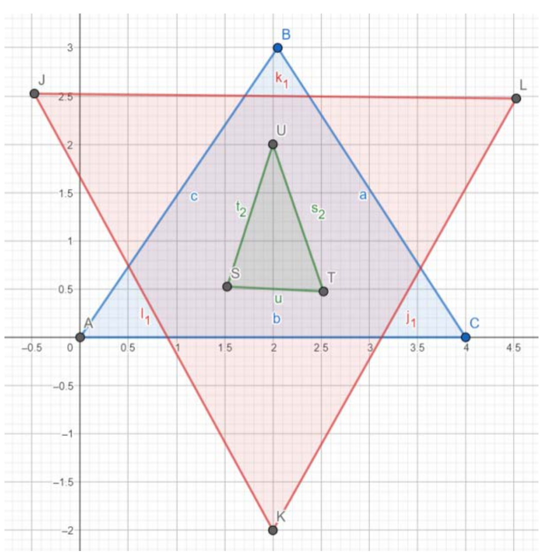
$= 2(s+t+w+y+z)$

$= 2$(四邊形$NAMO$)

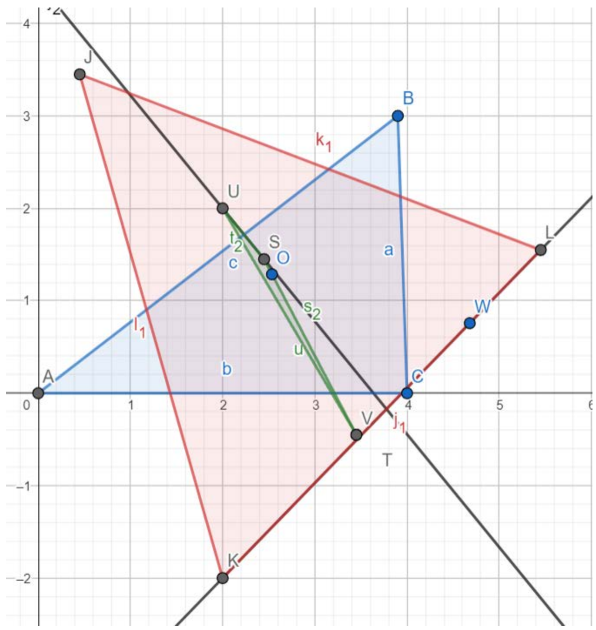
將向內兩點與角頂點連線，若任意點在角兩邊中較長的一側為外−內=2 原，反之，若任意點在角兩邊中較短的一側為外+內=2 原

三、探討當原多邊形為三、四、五、邊形時，外仿拿破崙 n 邊形與內仿拿破崙 n 邊形面積之關係

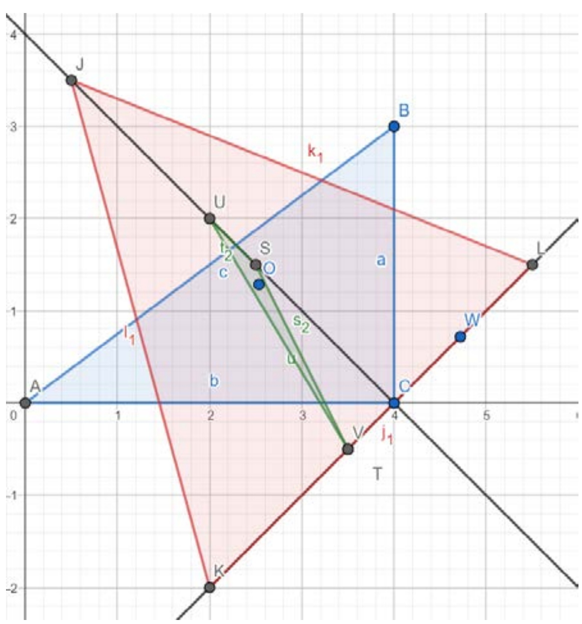
（一）原圖形為三角形



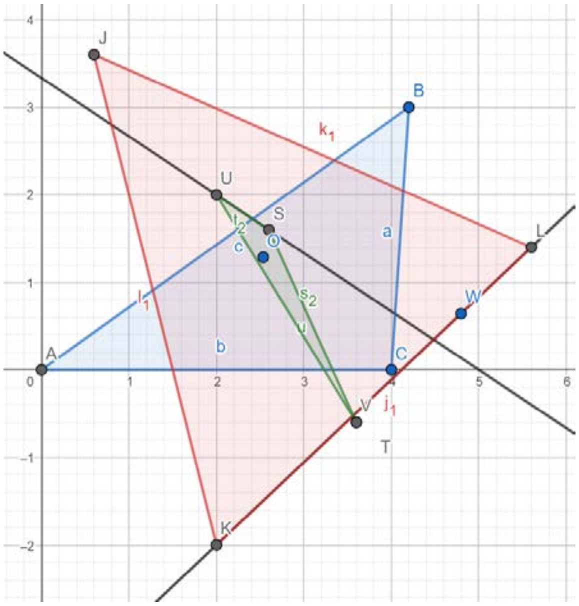
圖八、三角皆未錯位為銳角



圖九、為 S 在線段 UT 之右且角 C 小於 90 度



圖十、為 S 在線段 UT 之右且角 C 等於 90 度



圖十一、為 S 在線段 UT 之右且角 C 大於 90 度

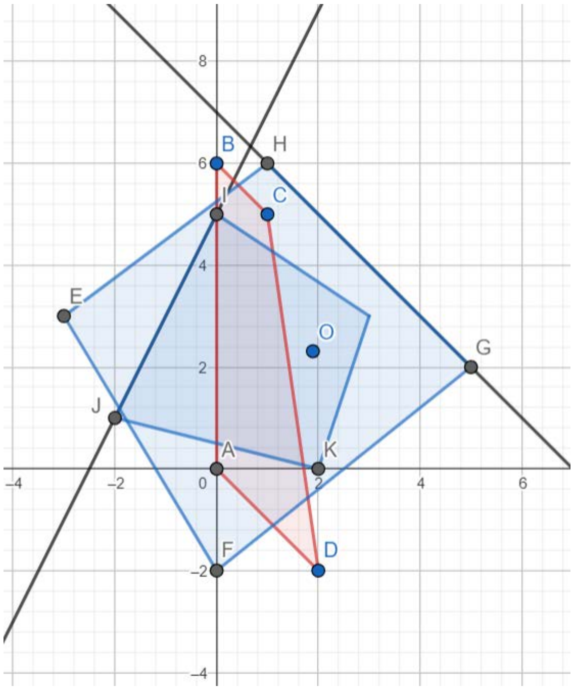
三個角皆錯位且小於 90 度，此情況下根據研究目的二中提到的錯位角度判斷面積的類型 4 可透過將面積相加得外仿拿破崙三角形加內仿拿破崙三角形為原三角形的兩倍。如前圖八所示：

在△UST內的點 O 介於向外兩點所作直線與向內兩點所作直線相交形成的較大對頂角中，故無錯位。其他兩角亦無錯位，故根據研究目的二中提到的錯位角度判斷面積的類型 3 相加得外仿拿破崙三角形減內仿拿破崙三角形為原三角形的兩倍。如前圖九所示：

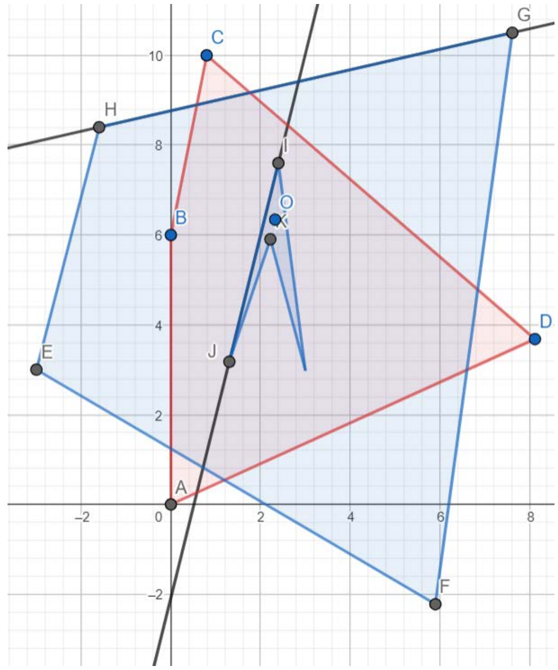
在△UST內的點 O 介於向外兩點所作直線與向內兩點所作直線相交形成的直角含較長邊的角中，其他兩角無錯位，故根據研究目的二中提到的錯位角度判斷面積的類型 3 和類型 5 相加得外仿拿破崙三角形減內仿拿破崙三角形為原三角形的兩倍。如前圖十所示：

在△UST內的點 O 介於向外兩點所作直線與向內兩點所作直線相交形成的較小對頂角中，故有錯位。其他兩角則無錯位，故根據研究目的二中提到的錯位角度判斷面積的類型 2 和類型 3 相加得外仿拿破崙三角形減內仿拿破崙三角形為原三角形的兩倍。如上圖十一所示：

（二）原圖形為四邊形



圖十二、兩個銳角、兩個鈍角

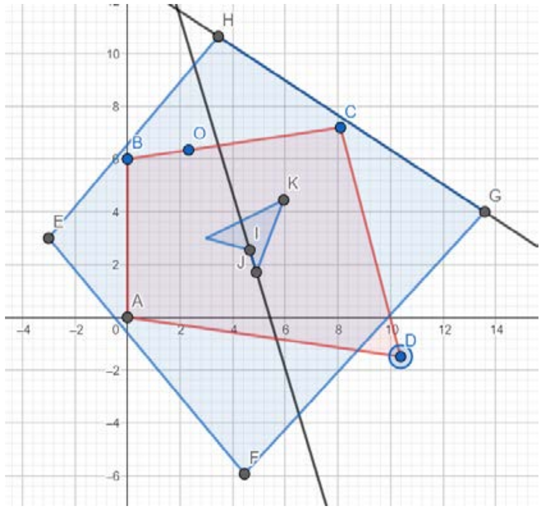


圖十三、一個鈍角，三個銳角

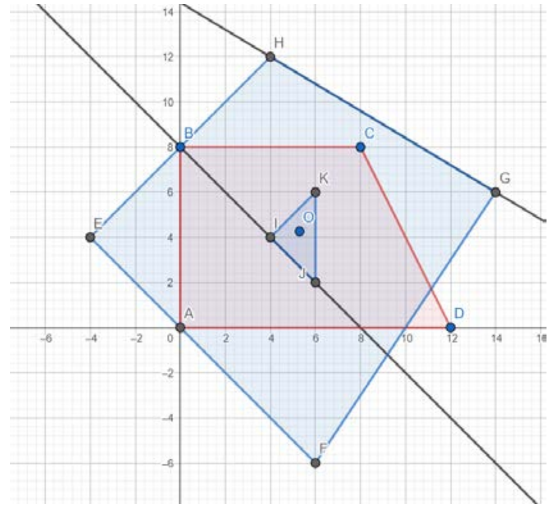
此圖形有兩個銳角、兩個鈍角。如上圖十二所示：

∠A 與∠C 皆大於 90°，且無錯位之情形發生，以∠C 為例，任意點 O 於直線 GH 和直線 IJ 之間，可見得沒有錯位。而∠B 與∠D 皆小於 90°，且有錯位的情形發生，綜合以上所述，從研究過程三可得知，此圖形的面積關係為 : 外仿拿破崙 n 邊形 −內仿拿破崙四邊形 =2(原四邊形)。

此圖形有一個鈍角，三個銳角，∠B 大於 90°，且無錯位之情形發生。如上圖十三所示：而∠A、∠C 與∠D 皆小於 90°，且有錯位的情形發生，以∠C 為例，任意點 O 於直線 GH 和直線 IJ 之外，可見得有發生錯位，綜合以上所述，從研究過程三可得知，此圖形的面積關係為 : 外仿拿破崙 n 邊形−內仿拿破崙四邊形=2(原四邊形)。



圖十四、三個鈍角，一個銳角



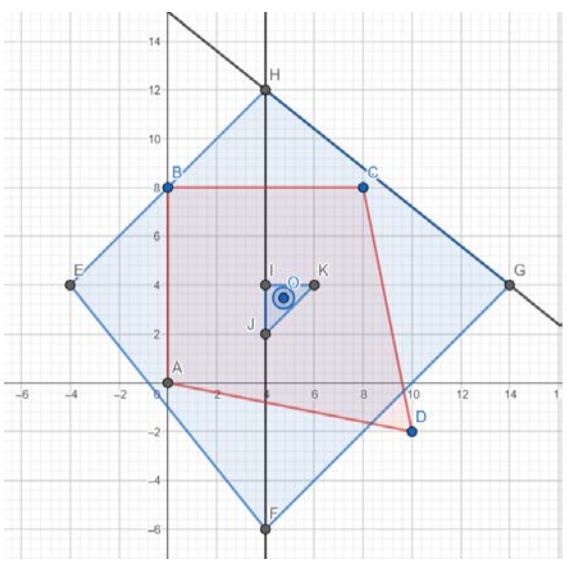
圖十五、兩個直角、一個鈍角，一個銳角

此圖形有三個鈍角，一個銳角。如上圖十四所示：

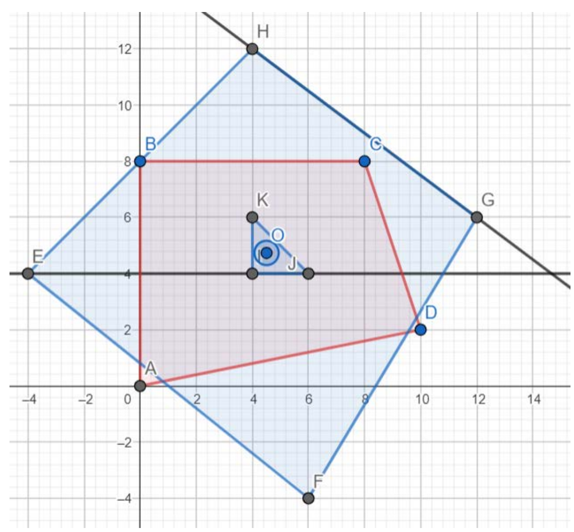
∠A、∠C 與∠D 大於 90°，且無錯位之情形發生。而∠B 小於 90°，且有錯位的情形發生，此圖形的面積關係為 : 外仿拿破崙 n 邊形 - 內仿拿破崙四邊形=2(原四邊形)。

此圖形有兩個直角、一個鈍角，一個銳角。如上圖十五所示：

∠A 與∠B 等於 90°，∠C 大於 90°，且無錯位之情形發生。而∠D 小於 90°，且有錯位的情形發生，此圖形的面積關係為 : 外仿拿破崙 n 邊形 - 內仿拿破崙四邊形=2(原四邊形)。



圖十六、一個直角、兩個鈍角，一個銳角



圖十七、一個直角、一個鈍角，兩個銳角

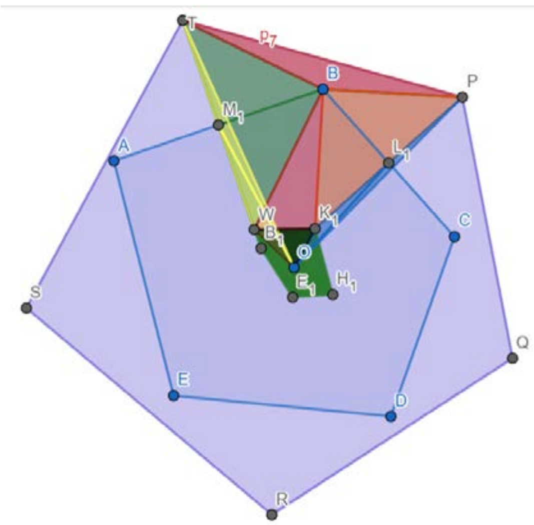
此圖形有一個直角、兩個鈍角，一個銳角。如前圖十六所示：

∠B 等於 90°，∠A 與∠C 大於 90°，且無錯位之情形發生。而∠D 小於 90°，且有錯位的情形發生，此圖形的面積關係為 : 外仿拿破崙 n 邊形 - 內仿拿破崙四邊形=2(原四邊形)

此圖形有一個直角、一個鈍角，兩個銳角。如前圖十七所示

∠B 等於 90°，∠C 大於 90°，且無錯位之情形發生。而∠A 與∠D 小於 90°，且有錯位的情形發生，此圖形的面積關係為 : 外仿拿破崙 n 邊形 - 內仿拿破崙四邊形=2(原四邊形)

（三）原圖形為五邊形



圖十八、內外仿拿破崙五邊形（五個角皆為鈍角且無錯位）

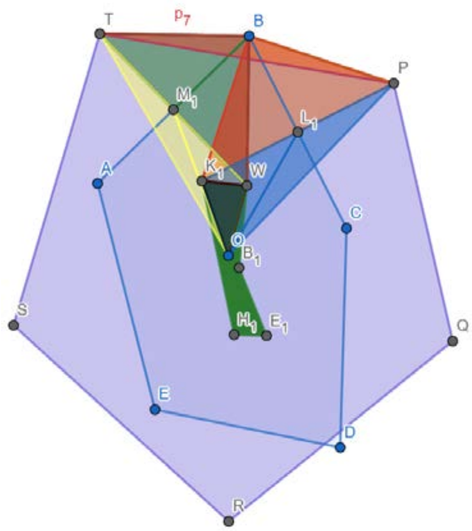
五邊形向內延伸正方形中心，證明詳見如下(錯位及角度部分不再贅述)，如上圖十八所示：

$$\triangle \mathrm{TSO} + \triangle \mathrm{B_1WO} + \triangle \mathrm{QRO} + \triangle \mathrm{E_1H_1O} + \triangle \mathrm{PQO} + \triangle \mathrm{K_1H_1O} + \triangle \mathrm{TPO} + \triangle \mathrm{WE_1O}$$

$$+ \triangle \mathrm{RSO} + \triangle \mathrm{E_1H_1O} = \text{五邊形 TPQRS} + \text{五邊形 } \mathrm{B_1WE_1H_1K_1}$$

$$= \text{外仿拿破崙五邊形} + \text{內仿拿破崙五邊形}$$

$$= 2(\text{原五邊形})$$



圖十九、內外仿拿破崙五邊形（兩個銳角、三個角為鈍角且錯位）

五邊形向內延伸正方形中心，證明詳見下(錯位及角度部分不再贅述)，如上圖十九所示：

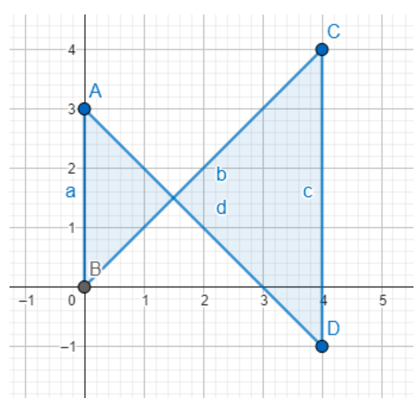
$$\triangle \mathrm{TSO} - \triangle \mathrm{B_1WO} + \triangle \mathrm{QRO} - \triangle \mathrm{E_1H_1O} + \triangle \mathrm{PQO} - \triangle \mathrm{K_1H_1O} + \triangle \mathrm{TPO} - \triangle \mathrm{WE_1O}$$

$$+ \triangle \mathrm{RSO} - \triangle \mathrm{E_1H_1O} = \text{五邊形 TPQRS} - \text{五邊形 } \mathrm{B_1WE_1H_1K_1}$$

$$= \text{外仿拿破崙五邊形} - \text{內仿拿破崙五邊形}$$

$$= 2(\text{原五邊形})$$

在我們透過分析內仿拿破崙 n 邊形面積利用鞋帶公式計算以及單純將其焦點分成兩部分求面積後，得「透過鞋帶公式所求之面積」為「將其焦點分成兩部分求面積的差之絕對值」。如圖二十所示：



圖二十、內仿拿破崙多邊形為八字形示意圖

$$四邊形\ \mathrm{ABCD} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(a_1b_2 + b_1c_2 + c_1d_2 + d_1a_2 - b_1a_2 - c_1b_2 - d_1c_2 - a_1d_2)$$

$$\triangle ADC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 & a_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(a_1c_2 + c_1d_2 + d_1a_2 - c_1a_2 - d_1c_2 - a_1d_2)$$

$$\triangle ACB = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(a_1b_2 + b_1c_2 + c_1a_2 - b_1a_2 - c_1b_2 - a_1c_2)$$

故得：$\frac{1}{2}(a_1c_2 + c_1d_2 + d_1a_2 - c_1a_2 - d_1c_2 - a_1d_2) + \frac{1}{2}(a_1b_2 + b_1c_2 + c_1a_2 - b_1a_2 - c_1b_2 - a_1c_2)$

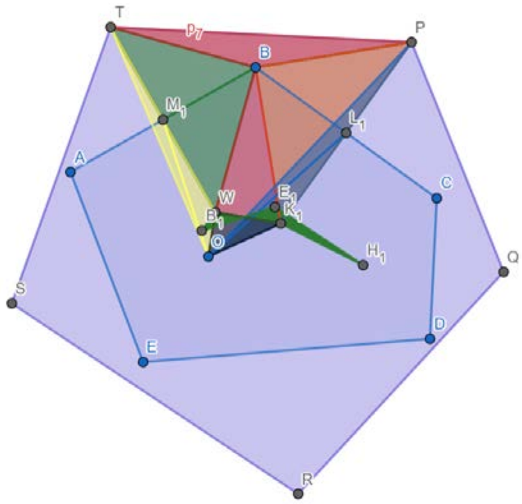
$$= \frac{1}{2}(a_1b_2 + b_1c_2 + c_1a_2 - b_1a_2 - c_1b_2 - a_1c_2 + a_1b_2 + b_1c_2 + c_1a_2 - b_1a_2 - c_1b_2 - a_1c_2)$$

$$= \frac{1}{2}(a_1b_2 + b_1c_2 + c_1d_2 + d_1a_2 - b_1a_2 - c_1b_2 - d_1c_2 - a_1d_2)$$

由於$\triangle ADC$為逆時針$\triangle ACB$為順時針故$\triangle ADC$為正$\triangle ACB$為負

$\because \triangle ACB$為負

$\therefore \triangle ADC + \triangle ACB =$四邊形 ABCD



圖二十一、內外仿拿破崙五邊形（五個角皆為鈍角，∠A無錯位、∠C和∠D無錯位）

$$\triangle TSO + \triangle B_1WO + \triangle QRO - \triangle E_1H_1O + \triangle PQO - \triangle K_1H_1O + \triangle TPO + \triangle RSO$$

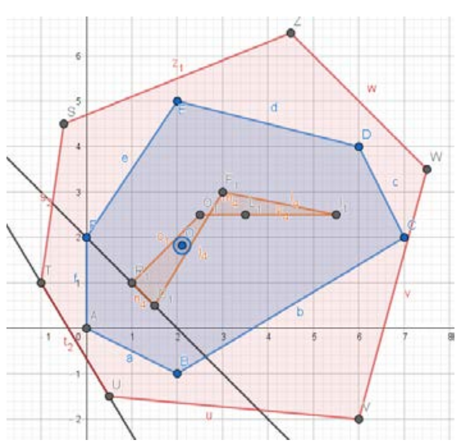
$= 五邊形\ TPQRS - (\triangle E_1H_1O + \triangle K_1H_1O - \triangle B_1WO)$

$= 五邊形\ TPQRS - B_1WE_1H_1K_1$

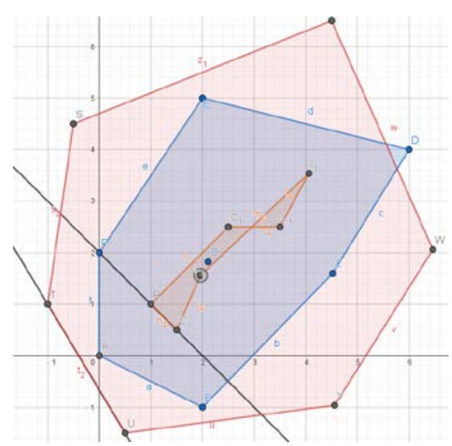
$=$ 外仿拿破崙五邊形 $-$ 內仿拿破崙五邊形

$= 2$(原五邊形)

（四）原圖形為六邊形



圖二十二、六個鈍角



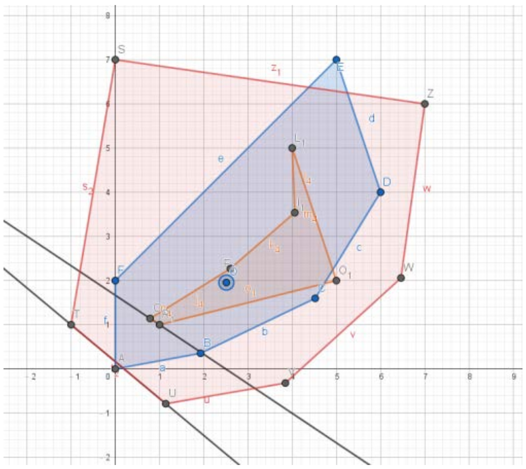
圖二十三、五個鈍角一個銳角

如上圖二十二為六個鈍角且都沒有錯位，故外+內=2 原。

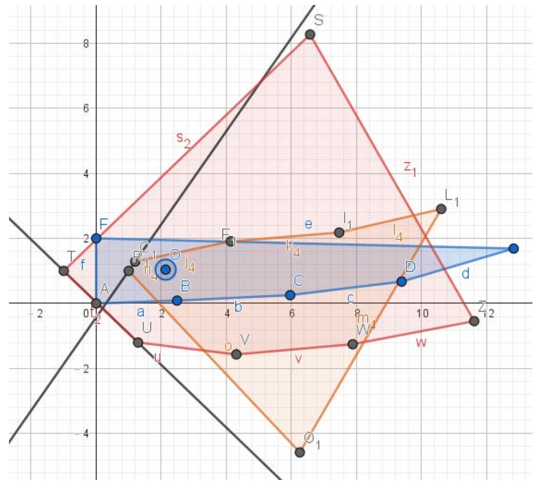
如上圖二十三為五個鈍角且都沒有錯位，一個銳角有錯位，故外+內=2 原。

如下圖二十四為四個鈍角且都有錯位，兩個銳角沒有錯位，故外–內=2 原。

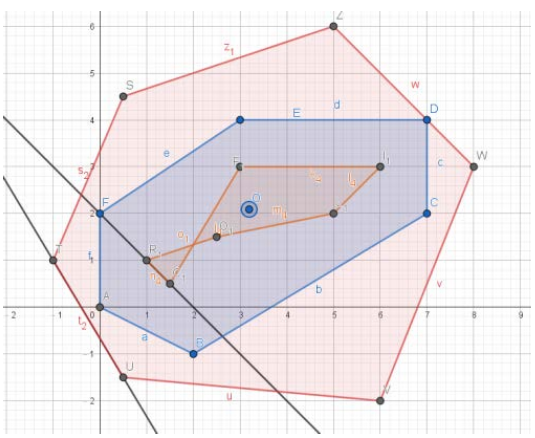
如下圖二十五為三個鈍角且都有錯位，三個銳角沒有錯位，故外–內=2 原。



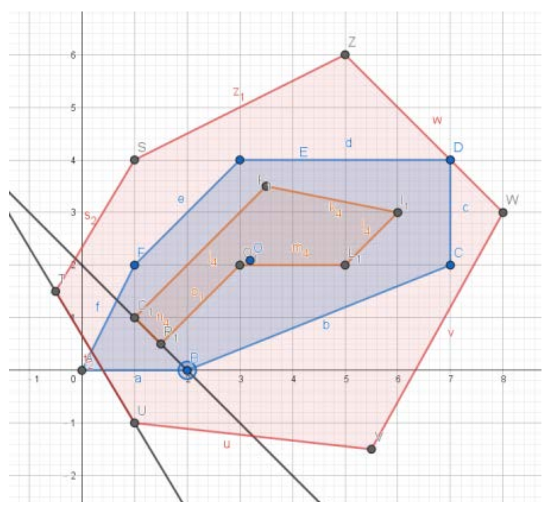
圖二十四、四個鈍角 二個銳角



圖二十五、三個鈍角三個銳角



圖二十六、一個直角、五個鈍角



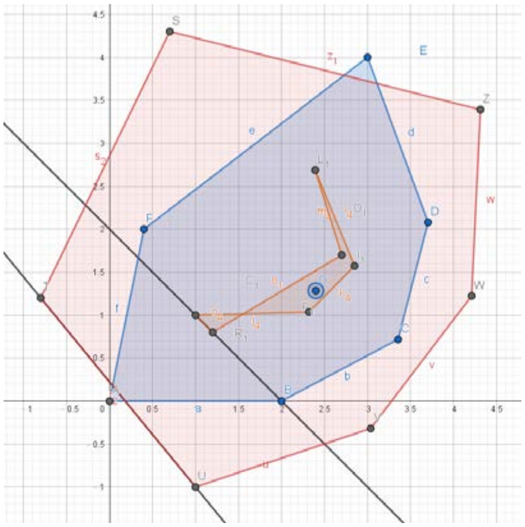
圖二十七、一個直角、四個鈍角、一個銳角

如上圖二十六為一個直角，五個鈍角且都有錯位，故外 – 內 = 2 原。

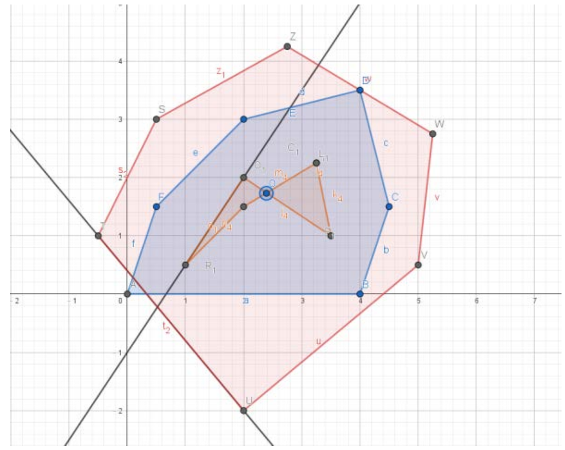
如上圖二十七為一個直角，四個鈍角且都有錯位，一個銳角沒有錯位，故外 – 內 = 2 原。

如下圖二十八為一個直角，三個鈍角且沒有錯位，兩個銳角都有錯位，故外 + 內 = 2 原。

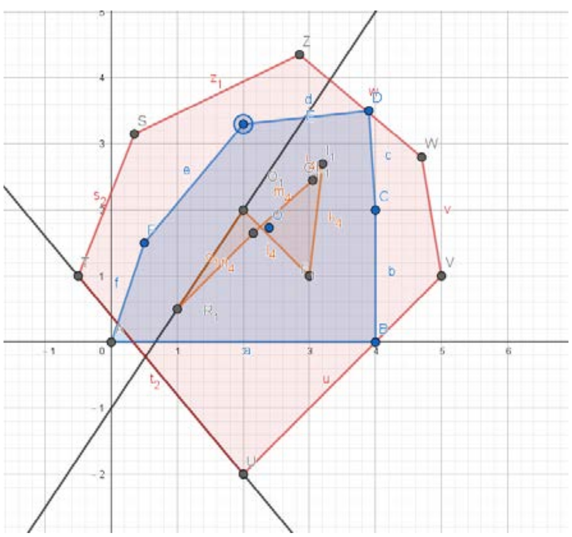
如下圖二十九為兩個直角，四個鈍角且沒有錯位，故外 + 內 = 2 原。



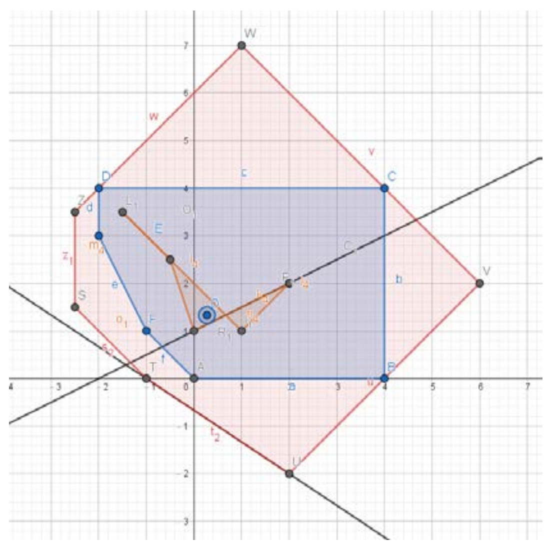
圖二十八、一個直角、三個鈍角、兩個銳角



圖二十九、一個直角、四個鈍角、一個銳角



圖三十、兩個直角、三個鈍角、一個銳角



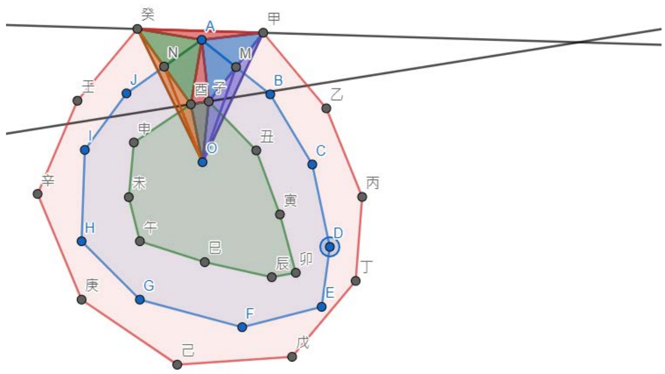
圖三十一、三個直角、三個鈍角

如上圖三十為兩個直角，三個鈍角且沒有錯位，一個銳角且有錯位，故外 + 內 = 2 原。

如上圖三十一為三個直角，三個鈍角且沒有錯位，故外 + 內 = 2 原。

四、將所發現之外仿拿破崙三、四、五邊形、外仿拿破崙三、四、五邊形與原三、四、五邊形面積之關係，推廣至 n 邊形

如同我們在研究目的 2 中所探究的，三角形、五邊形皆可能產生兩種不同的結果，而四邊形是例外，只會有外減內等於二原一種結果。



圖三十二、外、內仿拿破崙十邊形

如圖三十二所示，十邊形向內延伸正方形中心，證明詳見下(錯位及角度部分不再贅述)：

$\angle A$ 向外延伸兩點，分別是點甲跟點癸，將其連成一直線，再將$\angle A$ 向內延伸兩點，分別是點子跟點酉，也將其連線，可以發現，任意點 O 位於對頂角較大的中，故無錯位，且$\angle A > 90°$。

我們可以得知，外仿拿破崙十邊形+內仿拿破崙十邊形=2(原十邊形)。

伍、研究結果

一、由前述研究過程二可以得知：

（一）當角度>90°，且有錯位時，面積關係為外−內=2 原。

（二）當角度>90°，且無錯位時，面積關係為外+內=2 原。

（三）當角度<90°，且有錯位時，面積關係為外+內=2 原。

（四）當角度<90°，且有錯位時，面積關係為外−內=2 原。

（五）當角度=90°，且任意點於邊長較長的一側時，面積關係為外−內=2 原。

（六）當角度=90°，且任意點於邊長較短的一側時，面積關係為外+內=2 原。

二、由前述研究過程三可以得知：

（一）三角形有兩種可能的結果，及外+內=2 原或外−內=2 原。

（二）四邊形於任何情況下，皆是外+內=2 原。

（三）五邊形有兩種可能的結果，及外+內=2 原或外−內=2 原。

（四）六邊形有兩種可能的結果，及外+內=2 原或外−內=2 原。

三、由前述研究過程四可以得知：

（一）透過判斷 n 邊形各角屬於研究目的一的哪種類型，可推得面積關係為外+內=2 原或外−內=2 原。

陸、討論

一、討論四邊形各邊向內、外接正三角形後連接正三角形中心產生圖形的面積與原四邊形面積之間的關係

我們為了簡化計算，並方便一般化，利用與研究目的二中驗證外仿拿破崙 n 邊形、內仿拿破崙 n 邊形與原 n 邊形面積關聯的方式雷同，將一個角向內向外做正三角形，取其中心將圖形化為下圖三十三。原四邊形為四邊形 IJBM，以角可發現同色塊面積接相等，然而

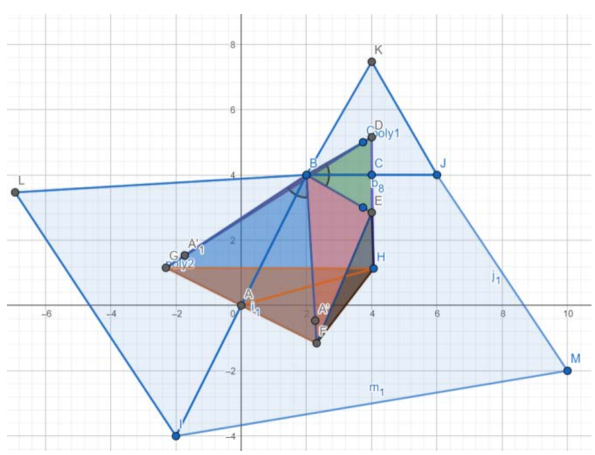
$\triangle \mathrm{GBD} \neq \triangle \mathrm{BEF}$

$$\text{四邊形 ABEH} = \triangle \mathrm{BAF} + \triangle \mathrm{BCE} - \triangle \mathrm{BAF} + \triangle \mathrm{FEH} + \triangle \mathrm{BEF}$$

$$\triangle \mathrm{GDH} = 2(\triangle \mathrm{BAF} + \triangle \mathrm{BCE} - \triangle \mathrm{BAF}) + \triangle \mathrm{FEH} + \triangle \mathrm{BEF} - \triangle \mathrm{GBD}$$

$$2 \times \text{四邊形 ABEH} = \triangle \mathrm{GDH}(\text{向外}) + \triangle \mathrm{FEH}(\text{向內}) + \triangle \mathrm{BEF} + \triangle \mathrm{GBD}$$

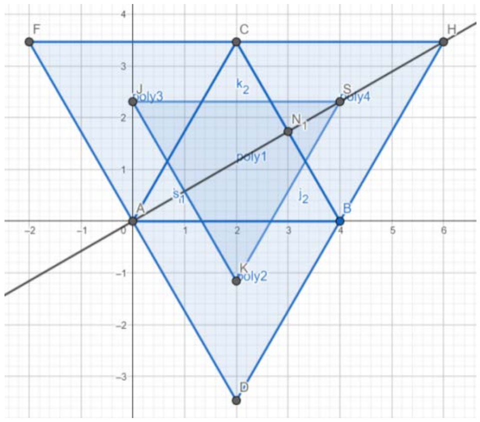
由於$\triangle \mathrm{GBD}$、$\triangle \mathrm{BEF}$兩者只有兩邊相等，角度部分較無規律(僅有相加為 240 度或相減為 120 度之一)，在計算上較為複雜，故不在研究過程中提到。



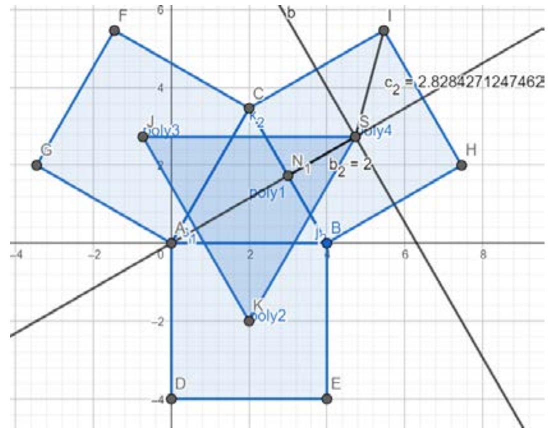
圖三十三、討論一所提到之四邊形的一角向內外作正三角形後將其中心連線得到的圖形，規律不明顯。

二、原圖形為正三角形、正方形時向外作不同正 n 邊形，將正 n 邊形之中心連線成一正三或四邊形，其同一原圖形作不同正 n 邊形後所得圖形面積間關聯。

如下圖三十四、如下圖三十五所示：



圖三十四、正三角形向外作一拿破崙三角形



圖三十五、向外作正方形，取其中心連線，得一三角形

為了簡化計算，我們直接比較原圖形作不同正 n 邊形後所得圖形面積和原圖形的比值。

如下表二、下表三、下圖三十六所示：

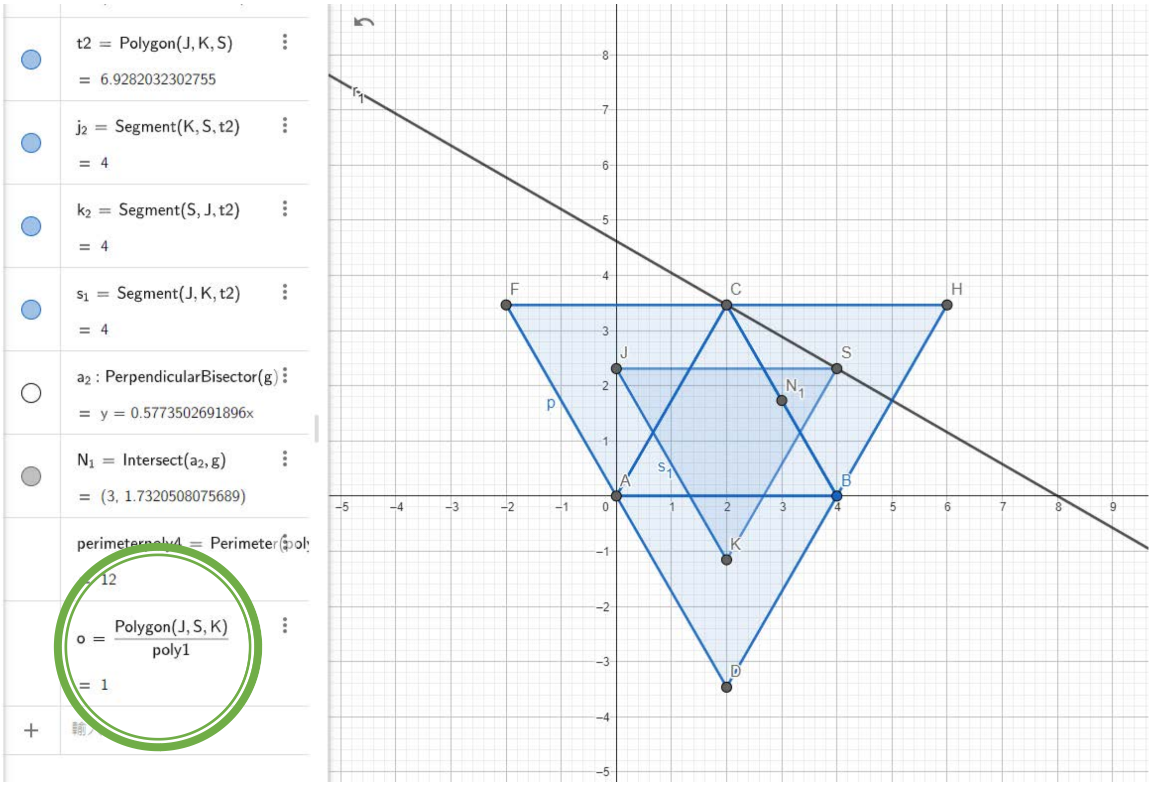
$$o = \frac{\text{Polygon}(J, S, K)}{\text{poly1}}$$

$$= 1$$

表二、當原圖形為正三角形時

延伸的圖形	大三角形÷原三角形	下面一項 −上面一項	下面一項 − 上面一項(前一行)
三角形	1		
四邊形	1.85	0.85	
五邊形	2.85	1	0.15
六邊形	4	1.15	0.15
七邊形	5.3	1.3	0.15

公差為 0.15(這些數字是經由 ggb 繪圖所算出的)



圖三十六、左下角 o 可知，大三角形÷原三角形的數值

表三、當原圖形為正方形時

延伸的圖形	大三角形/原三角形	下面一項 - 上面一項	下面一項 - 上面一項(前一行)
三角形	1.24		
四邊形	2	0.76	
五邊形	2.82	0.82	0.06
六邊形	3.73	0.91	0.09
七邊形	4.73	1	0.09
八邊形	5.82	1.09	0.09

公差為 0.09(四邊形以上)

不論是三角形還是四邊形接呈二接等差數列，即後項減前項後呈一等差數列，然而礙於時間問題，還未探究其中的成因，或許這會是我們未來可以深究的問題。

柒、結論

一、透過作圖中觀察發現其外仿拿破崙 n 邊形、內仿拿破崙 n 邊形及原 n 邊形之面積關係會因錯位而有不同的結果（外+內=2 原或者外−內=2 原），因此我們將錯位分為五種情況探討，如下表四所示：

表四、錯位與否、角度和面積的關係

<table>
<tr><td></td><td>有錯位時</td><td colspan="2">沒有錯位時</td></tr>
<tr><td>>90°</td><td>外 − 內 = 2 原</td><td colspan="2">外 + 內 = 2 原</td></tr>
<tr><td><90°</td><td>外 + 內 = 2 原</td><td colspan="2">外 − 內 = 2 原</td></tr>
<tr><td rowspan="2">=90°</td><td rowspan="2"></td><td>任意點在角兩邊中較長一側</td><td>任意點在角兩邊中較短一側</td></tr>
<tr><td>外 − 內 = 2 原</td><td>外 + 內 = 2 原</td></tr>
</table>

二、在原圖形為三、五、六邊形下，可得外仿拿破崙 n 邊形加或減內仿拿破崙 n 邊形為原 n 邊形的兩倍，且只要得知任意一角的面積關聯（外+內=2 原或者外−內=2 原），就可推出其他角的面積關係與此角相同。

三、根據以上研究可以發現當任意點對應一個角的關係為外加內等於二原時，任意點對應其他角亦會是外加內等於二原。過程中圖形若為八字形，向內兩點若位於八字形中較小的那塊，由於所求為有向面積，此兩點和任意點連線的面積與位於八字形中較大的那塊的其他兩點和任意點連線所得無向面積異號，但在有向面積上來看為同號。故只要探討一個角的面積關係，即可得知整體圖形的面積關係。

捌、參考資料及其他

一、黃家禮（2000）。幾何明珠。九章出版社

二、許翰翔（2013）。拿破崙的四角戀。科展群傑廳。

https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=10049&a=6821&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=3&sid=10124

三、黃家冠（2015）。拿破崙定理對多邊形之推廣。科展群傑廳。
https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?a=6821&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=12642

四、李允兆、許崇淵、王士豪（2015）。內外有致－類拿破崙多邊形性質及其有向面　積定值。科展群傑廳。

https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?a=6821&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=12547

五、 陳致安、朱建威、陳揚叡（2006）。拿破崙三角形與畢氏定理的聯想。科展群傑廳。
https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=&a=0&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=524&sid=1844&print=1

【評語】030402

由 n 邊形的各邊向外及向內作正方形，連接向外作正方形的中心，會得到一個 n 邊形，連接向內作正方形的中心，也會得到一個 n 邊形。本作品的作者們觀察到兩個 n 邊形的面積與原始 n 邊形的面積似乎存在著巧妙的關連性。藉由分析任一個頂角所對應的兩個三角形與一個四邊形的面積的和、差的關係，作者們得出了當 n=3, 4, 5, 6 時，由原 n 邊形所衍生出的兩個 n 邊形面積的和或差會是原始 n 邊形面積的兩倍這樣的結論。結果非常的有趣。能由既有的結果發想（外、內拿破崙三角形的面積差等於原三角形的面積），觀察現象、給出推論並予以證明，可以感覺出作者們已經充分掌握了從事研究工作的方法，頗值得鼓勵。稍嫌美中不足的是，作品呈現的方式有些凌亂，部分的說明也略嫌簡潔了些。或許對作者們而言，有些說明的過程或是符號的使用，即便沒有呈現在作品說明書中，也仍然可以清處理解。但以作為一個作品而言，缺少了符號的說明或是更詳盡的論述會減損了作品的可讀性。如果能注意到這些細節，應該會更好。作者們所得出的結果是否對於任意的 n 都成立？如果能針對這個一般化的問題給出一個好的說法，會很棒！

作品海報

壹、摘要

本研究主要推廣拿破崙定理，原本想探討以其他多邊形的邊長為基底，向內、外作正三角形，再分別將其內、外所有正三角形中心連線後，所形成的n邊形與原n邊形之間，是否存在如拿破崙定理般有「任意三角形的外拿破崙三角形與內拿破崙三角形的面積之差等於原三角形的面積」之結論？透過作圖觀察發現，外仿拿破崙n邊形及內仿拿破崙n邊形與原n邊形之面積關係，會因錯位、角度的不同而有兩種不同的結果。因此我們將錯位分為五種情況探討，再分別將此不同情形實際運用於三、四、五、六邊形，只需得知原n邊形中的一夾角和內仿拿破崙n邊形中任一點對應此角是否有錯位，便可推論出整個圖形的外仿拿破崙n邊形、內仿拿破崙n邊形及原n邊形之間的面積關係。

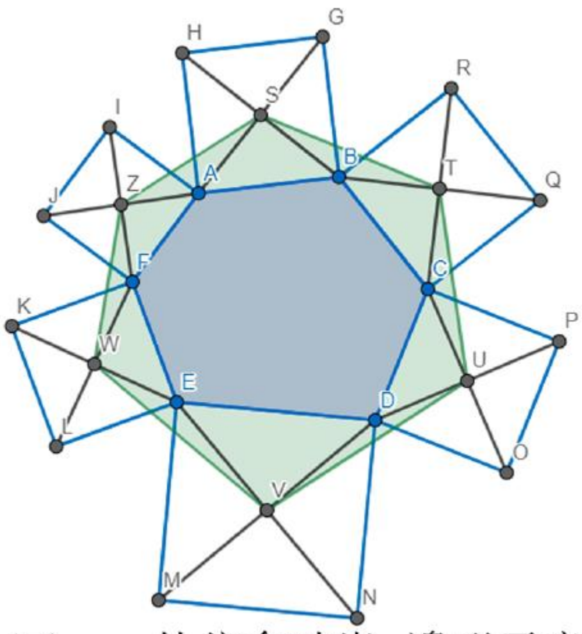
貳、研究目的

一、探討內仿拿破崙n邊形之錯位問題。
二、探討原圖形為三、四、五、六邊形時，內、外仿拿破崙n邊形面積之間的關係。
三、探討原圖形推廣至n邊形時，內、外仿拿破崙n邊形面積之間的關係。

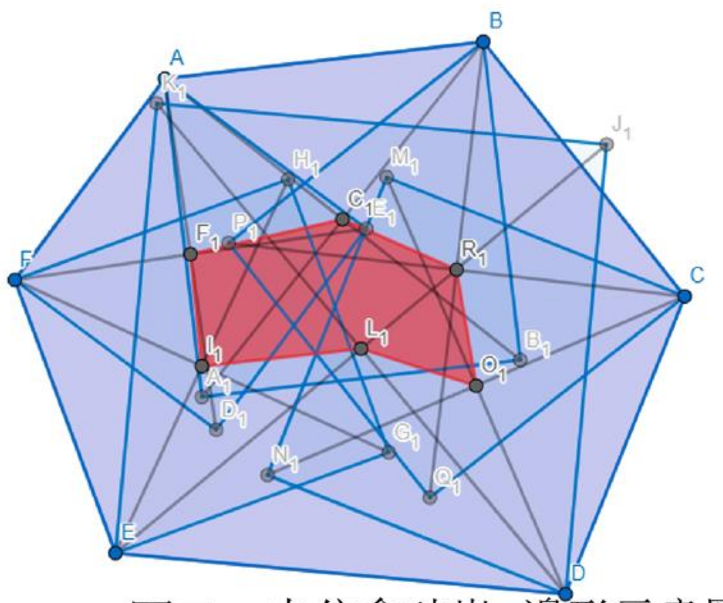
參、研究過程

一、名詞解釋

（一）外仿拿破崙n邊形&內仿拿破崙n邊形，如下圖一、圖二所示：



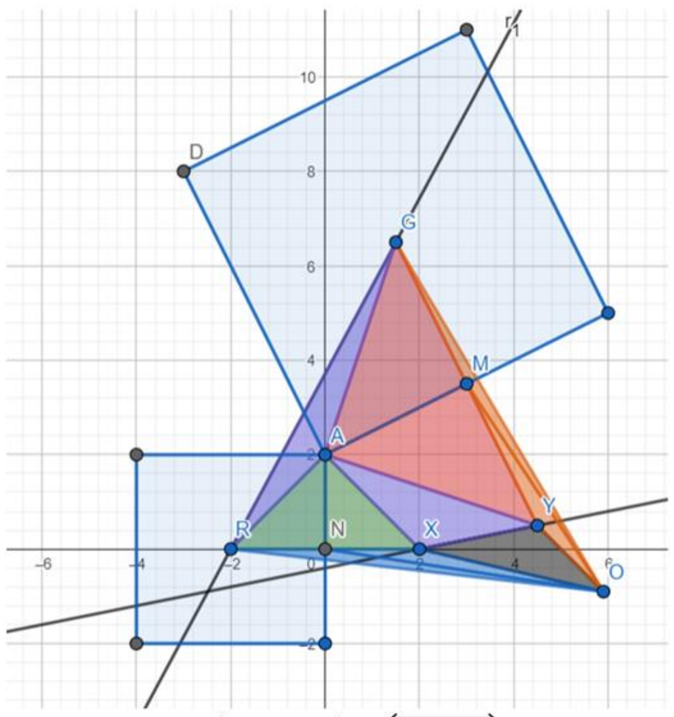
圖一、外仿拿破崙n邊形示意圖



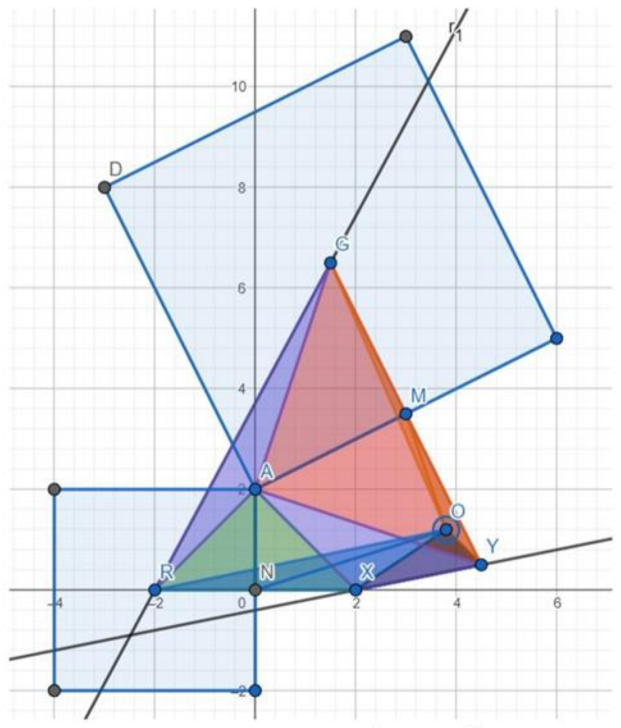
圖二、內仿拿破崙n邊形示意圖

（二）錯位

我們在作圖的過程中，發現當一角的向內延伸正方形兩中心點和內仿拿破崙n邊形中任一點共線時，內仿拿破崙n邊形中任一點向此線兩側移動時即會產生面積關係的變化，因此我們定義名為錯位的現象 ，如下圖三、圖四所示：



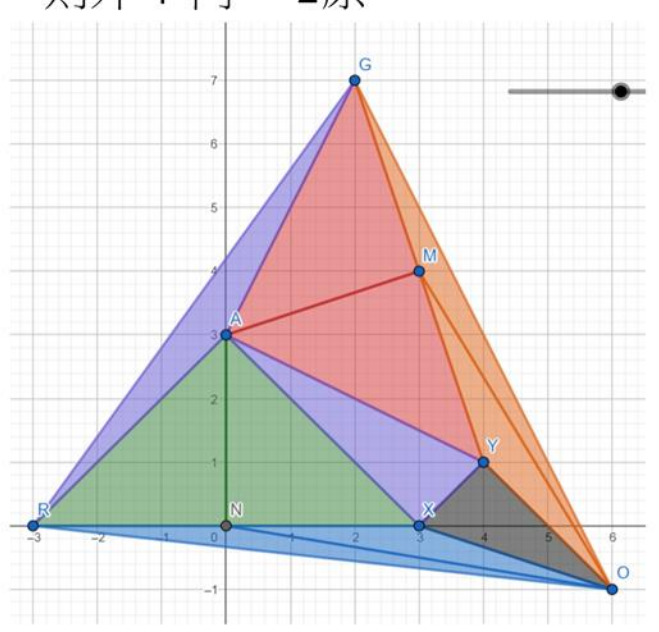
圖三、D點在$\overleftrightarrow{B'_1B'_3}$與$\overleftrightarrow{B'B'_2}$相交後形成的鈍夾角中，則無錯位



圖四、D點在$\overleftrightarrow{B'_1B'_3}$與$\overleftrightarrow{B'B'_2}$相交後形成的銳夾角中，則有錯位

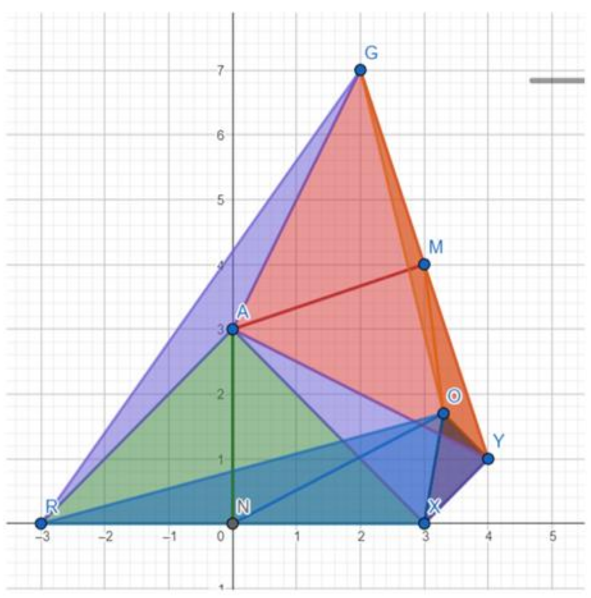
二、探討內仿拿破崙n邊形之錯位問題

（一）類型一：∠MAN大於90°且未發生錯位，如下圖五所示：
則外＋內＝2原



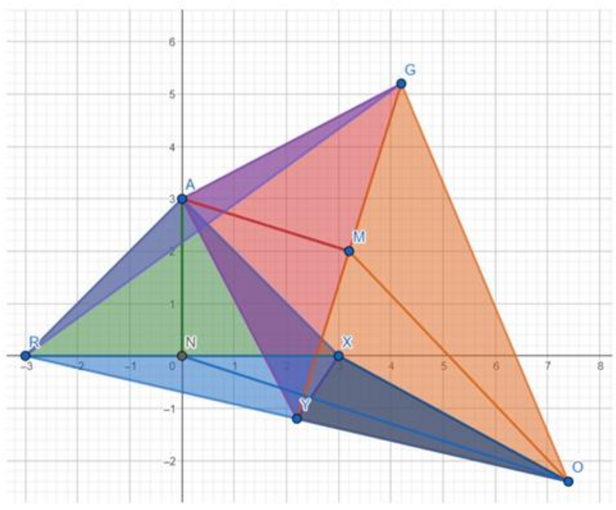
圖五、 ∠MAN大於90度，沒有錯位

（二）類型二：∠MAN大於90°且發生錯位，如下圖六所示：
則外－內＝2原



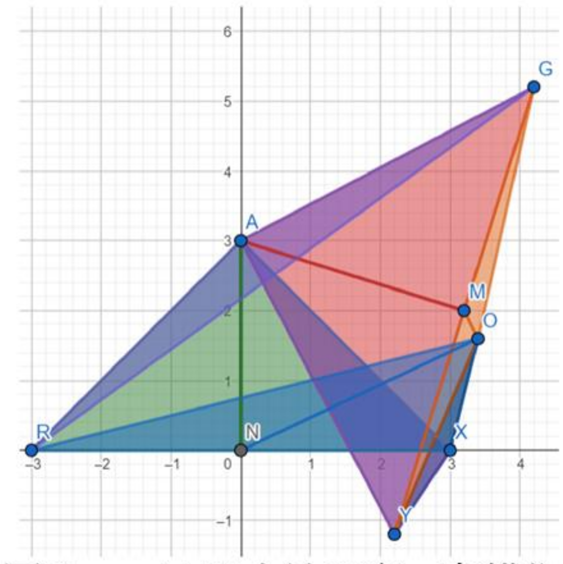
圖六、 ∠MAN大於90度，有錯位

(三)類型三： ∠MAN 小於 90°且未發生錯位，
如下圖七所示：
則外 − 內 ＝ 2原



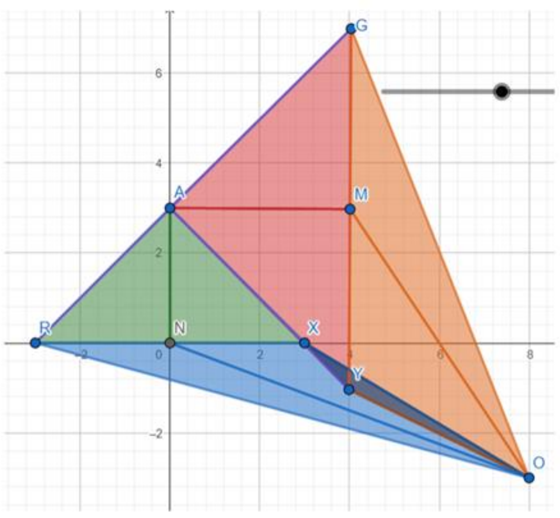
圖七、 ∠MAN小於90度，沒有錯位

(四)類型四： ∠MAN小於90°且發生錯位，
如下圖八所示：
則外 ＋ 內 ＝ 2原



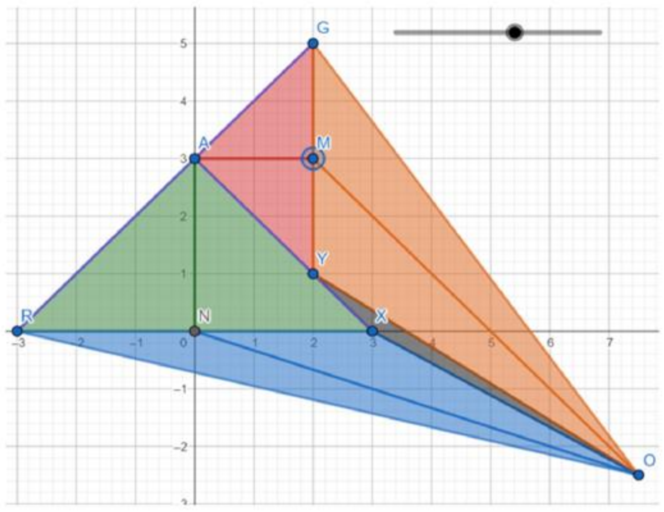
圖八、 ∠MAN小於90度，有錯位

(五) ∠MAN等於90°
原n邊形在此角對應之部分為五邊形。
當任意點位於以向內側兩點所作直線
分成兩部分中，包含此角較長邊長的
部分。如下圖九所示：
則外 ＋ 內 ＝ 2原



圖九、 ∠MAN為90度，為向內兩點與角頂 點
連線，若任意點在角兩邊中較長一側

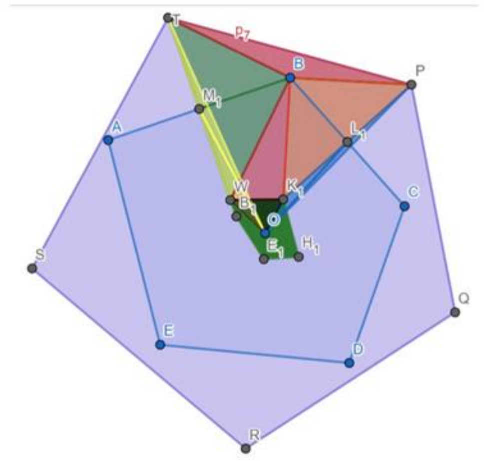
原n邊形在此角對應之部分為五邊形。
當任意點位於以向內側兩點所作直線
分成兩部分中，包含此角較短邊長的
部分。如下圖十所示：
則外 − 內 ＝ 2原



圖十、 ∠MAN為90度，為向內兩點與角頂點
連線，若任意點在角兩邊中較短一側

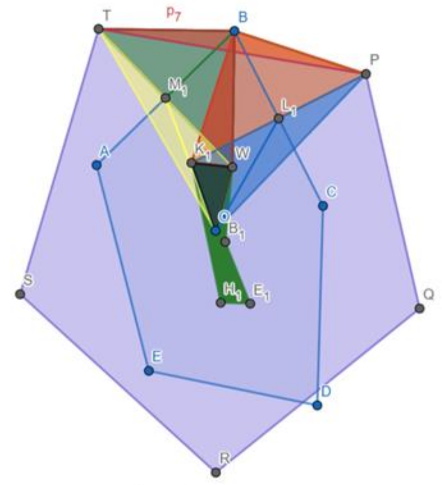
三、探討當原多邊形為三、四、五、六邊形時，外仿拿破崙n邊形與內仿拿破崙n邊形面積之關係
由於版面問題，我們在此先討論五邊形兩種特殊情況：
五邊形向內延伸正方形中心，證明詳見如下(錯位及角度部分不再贅述)

（一）情況一
外仿拿破崙五邊形+內仿拿破崙五邊形
=2(原五邊形)
如下圖十一所示：



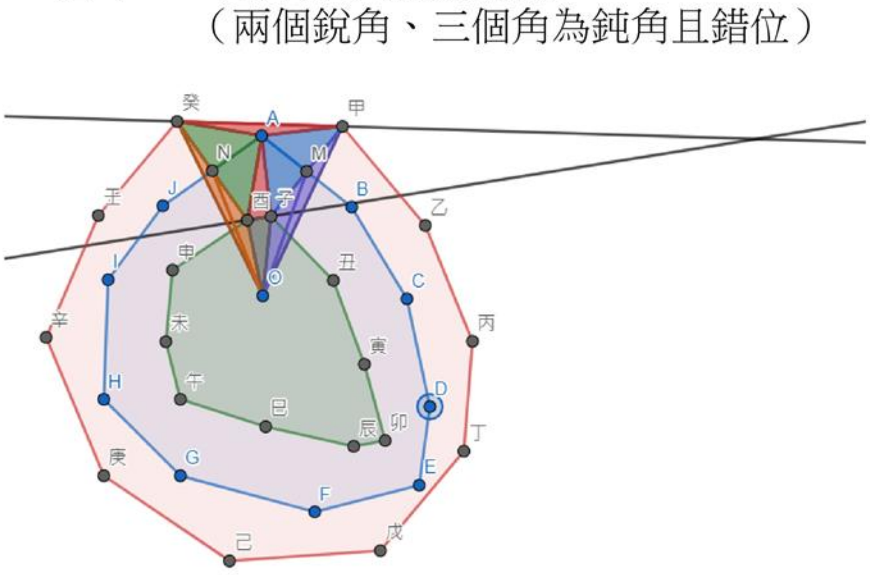
圖十一、內外仿拿破崙五邊形
（五個角皆為鈍角且無錯位）

（二）情況二
外仿拿破崙五邊形 − 內仿拿破崙五邊形
＝ 2(原五邊形)
如下圖十二所示：



圖十二、內外仿拿破崙五邊形
（兩個銳角、三個角為鈍角且錯位）

四、將所發現之外仿拿破崙三、四、五、六邊形、
內仿拿破崙三、四、五邊形與原三、四、五
邊形面積之關係，推廣至n邊形∠A無錯位，
且∠MAN > 90°。我們可以得知，外仿拿破崙
十邊形＋內仿拿破崙十邊形＝2(原十邊形)。
如圖十三所示：



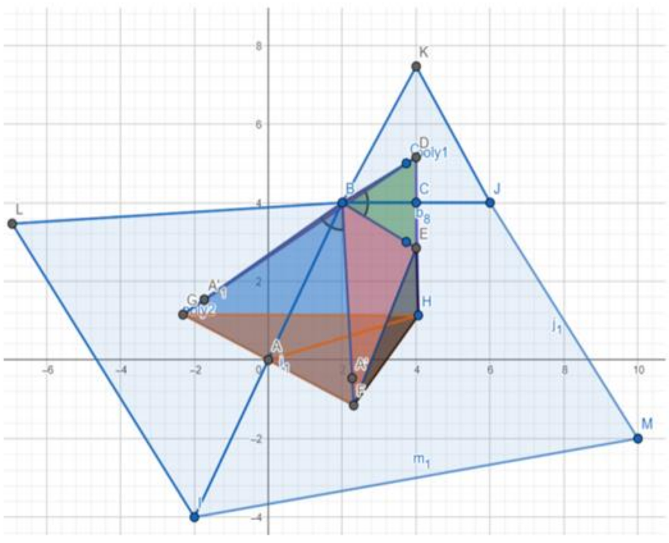
圖十三、外、內仿拿破崙十邊形

肆、研究結果

一、由前述研究過程二可以得知下表一結果：

表一、錯位與否、角度和面積的關係

<table>
<tr><th></th><th>有錯位時</th><th colspan="2">沒有錯位時</th></tr>
<tr><td>>90°</td><td>外 − 內 ＝ 2原</td><td colspan="2">外 ＋ 內 ＝ 2原</td></tr>
<tr><td><90°</td><td>外 ＋ 內 ＝ 2原</td><td colspan="2">外 − 內 ＝ 2原</td></tr>
<tr><td rowspan="2">=90°</td><td rowspan="2"></td><td>任意點在角兩邊中較長一側</td><td>任意點在角兩邊中較短一側</td></tr>
<tr><td>外 − 內 ＝ 2原</td><td>外 ＋ 內 ＝ 2原</td></tr>
</table>



圖十四、討論一所提到之四邊形的一角向內外作正三角形後將其中心連線得到的圖形，規律不明顯。

二、由前述研究過程三可以得知：

（一）三角形有兩種可能的結果，及外+內=2原或外−內=2原。

（二）四邊形於任何情況下，皆是外−內=2原。

（三）五邊形有兩種可能的結果，及外+內=2原或外−內=2原。

（四）六邊形有兩種可能的結果，及外+內=2原或外−內=2原。

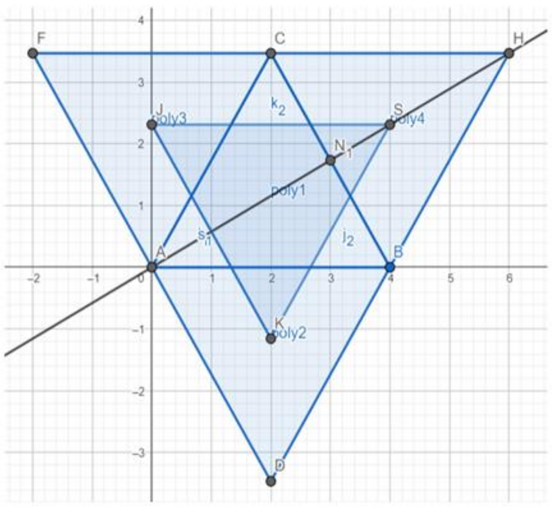
三、由前述研究過程四可以得知：

（一）透過判斷n邊形各角屬於研究目的一的哪種類型，可推得面積關係為外+內=2原或外−內=2原。

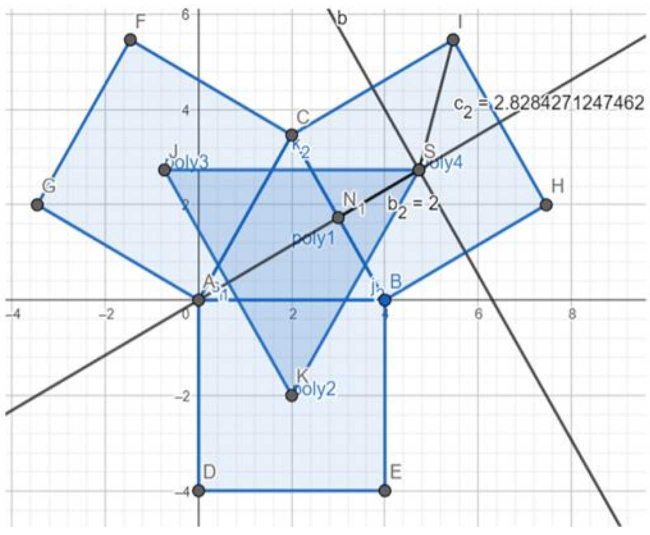
伍、討論

一、為何本研究是向內外延伸正方形而非向內外延伸正三角形探討如下，如上圖十四。

二、原圖形為正三角形、正方形時向外作不同正n邊形，將正n邊形之中心連線成一正三或四邊形，其同一原圖形作不同正n邊形後所得圖形面積間關聯。如下圖十五、十六所示：



圖十五、正三角形向外作一 拿破崙三角形



圖十六、向外作正方形，取其中心連線，得一三角形

比較原圖形作不同正n邊形後所得圖形面積和原圖形的比值。如下表二、下表三所示：

表二、當原圖形為正三角形時（公差為0.15）

延伸的圖形	大三角形÷原三角形	下面一項 − 上面一項	下面一項 − 上面一項
三角形	1		
四邊形	1.85	0.85	
五邊形	2.85	1	0.15
六邊形	4	1.15	0.15
七邊形	5.3	1.3	0.15

表三、當原圖形為正方形時（公差為0.09）

延伸的圖形	大三角形÷原三角形	下面一項 − 上面一項	下面一項−上面一項
三角形	1.24		
四邊形	2	0.76	
五邊形	2.82	0.82	0.06
六邊形	3.73	0.91	0.09
七邊形	4.73	1	0.09
八邊形	5.82	1.09	0.09

陸、結論

一、透過作圖中觀察發現其外仿拿破崙n邊形、內仿拿破崙n邊形及原n邊形之面積關係會因錯位而有不同的結果（外+內=2原或者外−內=2原），因此我們將錯位分為五種情況探討，如上表一所示：

二、在原圖形為三、五、六邊形下，可得外仿拿破崙n邊形加或減內仿拿破崙n邊形為原n邊形的兩倍，且只要知任意一角的面積關聯（外+內=2原或者外−內=2原），就可推出其他角的面積關係與此角相同。