中華民國第 63 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030401

圓圓不絕—從四邊形角平分線想起

學校名稱：臺北市立蘭雅國民中學

作者：	指導老師：
國三 林昕儀	陳怡君
國三 陳宇新	李柏儀
國三 徐郁荏	

關鍵詞：角平分線、蝴蝶形、共圓

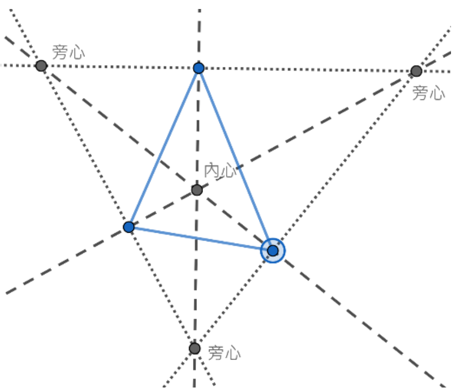
摘要

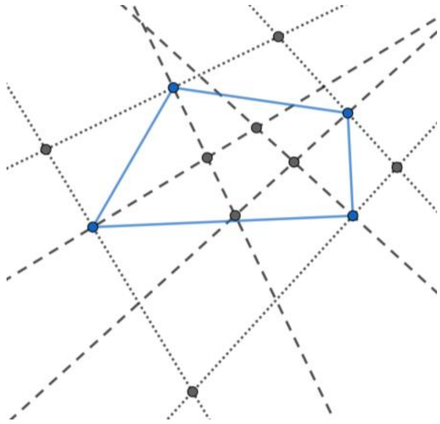
本文觀察在任意四邊形和蝴蝶形的內、外角平分線所圍成的各種四邊形，並找出相關的性質，其中發現了許多共圓的四邊形，試著證明這些共圓四邊形之間的幾何性質，並探討這些四邊形的面積關係。

壹、前言

一、研究動機

某次上課，老師講到了三角形的心，並利用內、外角平分線找出了內心、旁心，當時就聯想到，若是四邊形是否也會有類似的結果，因此就利用 *GeoGebra* 去畫出任意四邊形的內、外角平分線，發現一些有趣的結果，引發我們想要對四邊形與其內、外角平分線所圍出的四邊形關係作進一步的探討，因此便著手一起探索這其中的奧妙。





二、研究目的

(一) 四邊形的探討

1. 探討任意四邊形內、外角平分線所圍圖形的性質。
2. 探討圓內接四邊形內、外角平分線所圍圖形的關係。

(二) 蝴蝶形的探討

1. 探討任意蝴蝶形內、外角平分線所圍圖形的性質。
2. 探討圓內接蝴蝶形內、外角平分線所圍圖形的關係。

(三) 圓內接四邊形與圓內接蝴蝶形內、外角平分線圖形中的面積關係。

三、文獻探討

(一)「圓內接四邊形的一個有趣形質」(吳波。2013。數學傳播 37 卷 3 期)

文獻中發現內、外角平分線所圍出的四邊形會共圓。圓內接四邊形的外心 O_1 會是內、外角平分線四邊形的外心 O_2、O_3 中點，也提出圖形中，在左、右各有一組四邊形有外接圓。

除了以上的結果，我們發現了圖形中，在上、下還有一組四邊形有外接圓，且左右與上下的四邊形分別相似，而圓內接四邊形的內、外角平分線所圍出的四邊形也會彼此相似，我們將所發現的性質利用幾何證明的方式一一去證明，並找出這些相似四邊形的面積關係。

(二)「圓內接四邊形與其平分圓的關係」(吳波。2015。數學傳播 39 卷 3 期)

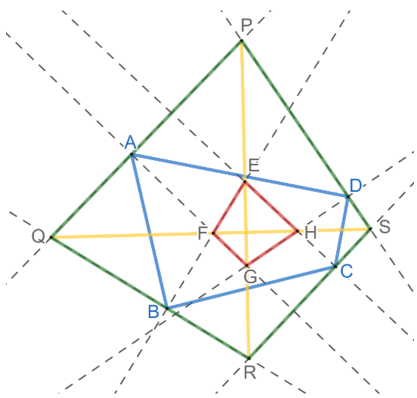
文獻中主要探討圓內接蝴蝶形一邊內角平分線與一邊外角平分線所圍四邊形的關係。我們的研究則是從任意蝴蝶形兩邊都是內角平分線或兩邊都是外角平分線著手觀察，且延伸到圖形的變化、轉動找出性質，且逐一給予證明，與文獻的研究方向不同。

貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦、*GeoGebra*。

參、研究過程或方法

一、任意四邊形內、外角平分線所圍成圖形的性質



如右圖，四邊形 $ABCD$ 中：

$\angle A$ 及 $\angle B$ 內角平分線的交點為 F，外角平分線的交點為 Q；

$\angle C$ 及 $\angle D$ 內角平分線的交點為 H，外角平分線的交點為 S；

$\angle B$ 及 $\angle C$ 內角平分線的交點為 E，外角平分線的交點為 R；

$\angle A$ 及 $\angle D$ 內角平分線的交點為 G，外角平分線的交點為 P，

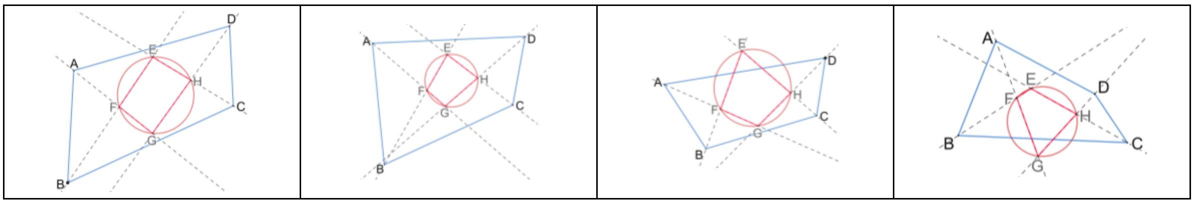
因此四邊形 $EFGH$ 為其內角平分線所圍成的圖形，而四邊形

$PQRS$ 為其外角平分線所圍成的圖形。

為方便說明，規定 $EFGH$ 為內角四邊形，$PQRS$ 為外角四邊形。

(一)內角平分線

我們發現正方形、菱形、箏形的內角平分線皆交於一點，因為他們至少都有一組內角平分線即為對角線，除此之外，其餘的任意四邊形內角平分線所圍出的四邊形皆會共圓，如下圖：



證明如下：

性質 1-1　任意四邊形若內角平分線無共點，則其內角四邊形會共圓。

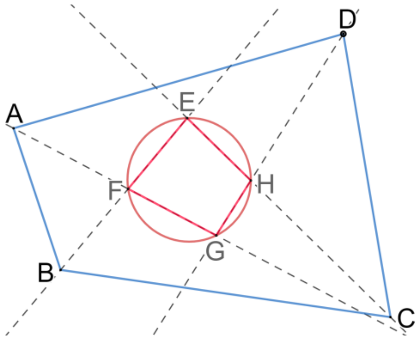
已知：四邊形 $ABCD$ 為任意四邊形，$EFGH$ 為內角四邊形。

求證：E、F、G、H 四點共圓。

證明：如右圖，$\because \angle BAF=\angle DAF$，$\angle ABF=\angle CBF$，$\angle BCH=\angle DCH$，$\angle CDH=\angle ADH$

且 $\angle BAF+\angle DAF+\angle ABF+\angle CBF+\angle BCH+\angle DCH+\angle CDH+\angle ADH=360°$

$\therefore \angle BAF+\angle ABF+\angle DCH+\angle CDH=180°$



ΔAFB 中，$\angle AFB=180°-(\angle BAF+\angle ABF)$

ΔCHD 中，$\angle CHD=180°-(\angle DCH+\angle CDH)$

四邊形 $EFGH$ 中，$\angle EFG+\angle EHG=\angle AFB+\angle CHD$

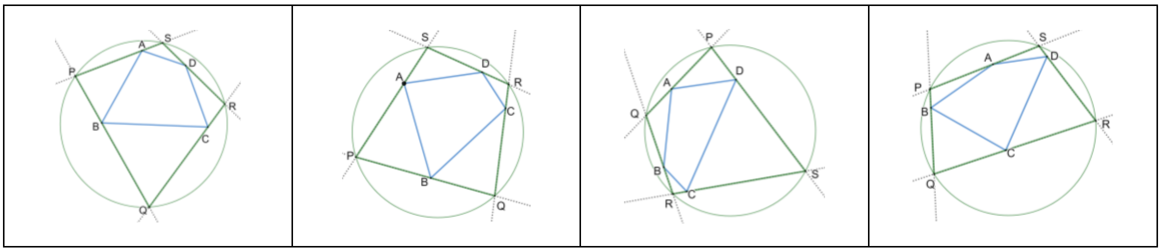
$=360°-(\angle BAF+\angle ABF+\angle DCH+\angle CDH)=180°$

因此 E、F、G、H 四點共圓(對角互補)

(二)外角平分線

接下來觀察外角平分線相交的情況：

任意四邊形外角平分線所圍成的任意四邊形會共圓(如下圖)。



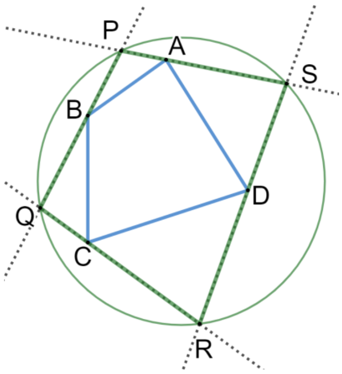
證明如下：

性質 1-2　任意四邊形的外角四邊形會共圓。

已知：$ABCD$ 為任意四邊形，$PQRS$ 為外角四邊形。

求證：P、Q、R、S 四點共圓。

證明：如右圖



$$\because \angle SAD=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle DAB)\text{，}\angle SDA=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ADC)\text{，}$$

$$\angle QBC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC)\text{，}\angle QCB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BCD)$$

$$\therefore \angle SAD+\angle SDA+\angle QBC+\angle QCB$$

$$=\frac{1}{2}(180^\circ\times 4-\angle DAB-\angle ADC-\angle ABC-\angle BCD)$$

$$=90^\circ\times 4-\frac{1}{2}(\angle DAB+\angle ADC+\angle ABC+\angle BCD)$$

$$=360^\circ-\frac{1}{2}\times 360^\circ=360^\circ-180^\circ=180^\circ$$

在 ΔQBC 和 ΔADS 中，由於兩三角形內角和為 360°

又 $\angle SAD+\angle SDA+\angle QBC+\angle QCB=180^\circ$

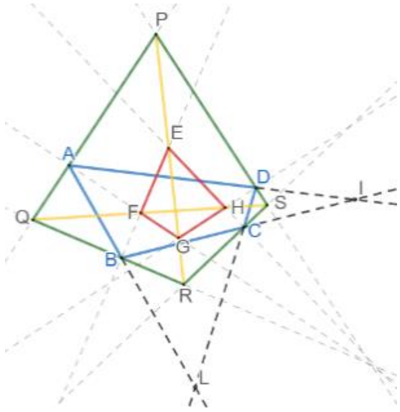
因此 $\angle BQC+\angle ASD=360^\circ-180^\circ=180^\circ$，則 P、Q、R、S 四點共圓(對角互補)

(三) 任意四邊形內、外角平分線所圍成圖形的關係

接著若將內、外角四邊形混合觀察，有以下結果：

性質 1-3　任意四邊形的內、外角四邊形兩組對角線的頂點會分別共線。

已知：四邊形 $ABCD$ 中，$EFGH$ 與 $PQRS$ 分別為內、外角四邊形。



求證：$\overline{FH}$ 在 $\overline{QS}$ 上，$\overline{EG}$ 在 $\overline{PR}$ 上。

證明：延長 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 交於 I 在 ΔBAI 中，點 Q 為 ΔBAI 的旁心，點 F 為 ΔBAI 的內心，因此 Q、F 皆在 $\angle AIB$ 的角平分線上

在 ΔCDI 中，點 H 為 ΔCDI 的旁心，點 S 為 ΔCDI 的內心，因此 H、S 皆在 $\angle CID$ 的角平分線上

則 Q、F、H、S 共線，同理可證 P、E、G、R 共線

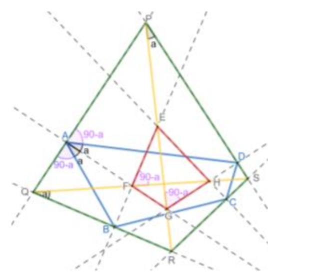
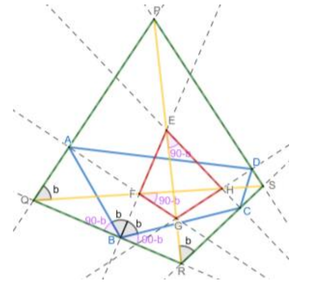
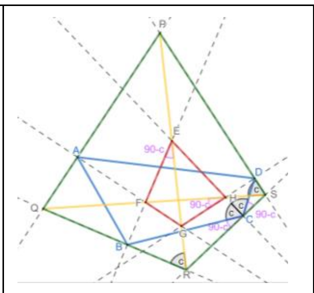
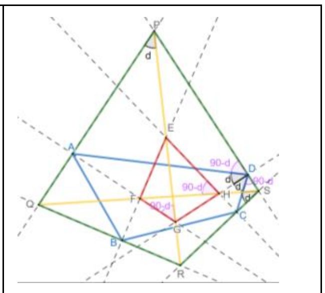
即任意四邊形內、外角四邊形兩組對角線的頂點會分別共線

為了簡化說明，我們假設：

$\angle BAF = \angle FAD = a°$ ；$\angle ABF = \angle FBC = b°$ ；$\angle DCH = \angle HCB = c°$ ；$\angle CDH = \angle ADH = d°$

則 $a° + b° + c° + d° = \dfrac{360°}{2} = 180°$

且根據**性質 1-3**，可計算出以下各角的角度：

			
$\angle SQR = \angle SPR = a°$ $\angle EFH = \angle HGE = 90 - a°$	$\angle PQS = \angle SRP = b°$ $\angle GFH = \angle HEG = 90 - b°$	$\angle PSQ = \angle QRP = c°$ $\angle GHF = \angle FEG = 90 - c°$	$\angle QPR = \angle RSQ = d°$ $\angle EHF = \angle FGE = 90 - d°$

進一步驗證，發現

> **性質 1-4　任意四邊形的內、外角四邊形的四個角會對應相等，兩圖形只在四邊形有外接圓的時候才會相似。**

已知：四邊形 $ABCD$ 中，$EFGH$ 與 $PSRQ$ 分別為內、外角四邊形。

求證：$EFGH$ 與 $PSRQ$ 的四個對應角相等，且在 $ABCD$ 有外接圓時兩圖形會相似。

證明：$\angle EFG = \angle EFH + \angle GFH = (90° - a°) + (90° - b°) = 180° - (a° + b°) = c° + d°$

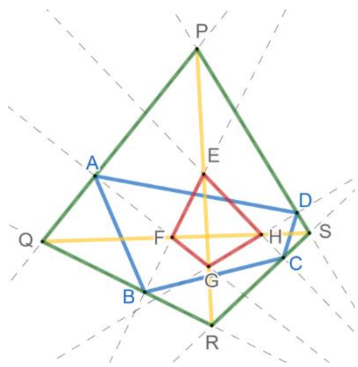
同理，$\angle FEH = a° + d°$ ，$\angle EHG = a° + b°$ ，$\angle HGF = b° + c°$

四邊形 $PSRQ$ 中，$\angle RQP = \angle SQR + \angle PQS = a° + b°$

同理，$\angle QPS = a° + d°$ ，$\angle PSR = c° + d°$ ，$\angle SRQ = b° + c°$

則 $EFGH$、$PSRQ$ 對應角相等。

我們將 $EFGH$、$PSRQ$ 分成兩個三角形



在 ΔEFH 、 ΔPSQ 中， $\angle FEH = a° + d° = \angle QPS$

$\angle EFH = 90 - a°$ ， $\angle PSQ = c°$

$\angle EHF = 90 - d°$ ， $\angle PQS = b°$

$\because 90° - a° \neq c°$ ， $90° - d° \neq b°$　　$\therefore \Delta EFH$ 、 ΔPSQ 不相似

對應邊長不會成比例，則可知 $EFGH$ 、$PSRQ$ 不一定相似。

只有在 $90° - a° = c°$ ， $90° - d° = b°$ 時，$EFGH$ 、$PSRQ$ 會相似，

而此時 $\angle DAB + \angle DCB = 2a° + 2c° = 180°$

即當 *ABCD* 有外接圓時，*EFGH* 、*PSRQ* 會相似。

我們就繼續針對圓內接四邊形進行觀察。

二、由圓內接四邊形內、外角平分線圍成圖形間的關係

(一)內、外角四邊形圖形內的幾何性質

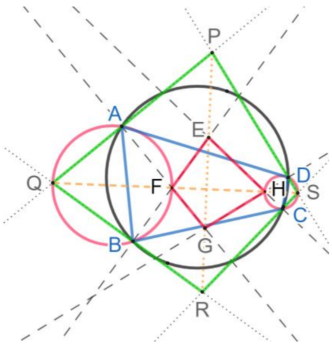
從剛剛**性質 1-4** 的討論推得以下性質：

性質 2-1　圓內接四邊形的內、外角四邊形會相似。

性質 2-2　圓內接四邊形除內、外角四邊形外，還有四個四邊形分別有外接圓，且有兩組四邊形相似。

已知：$ABCD$ 為圓內接四邊形，$EFGH$ 與 $PQRS$ 分別為內、外角四邊形。

求證：$AQBF$、$CHDS$、$PAGD$、$ECRB$ 皆有外接圓，且 $AQBF \sim CHDS$ 、 $PAGD \sim ECRB$ 。



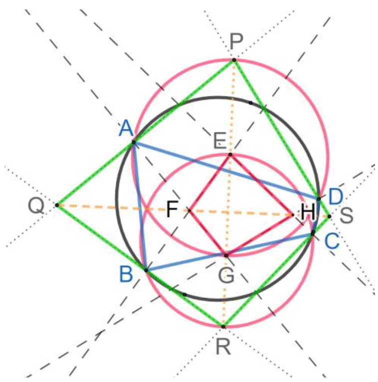
證明：如右圖

在圓內接四邊形頂點處，內、外角平分線會互相垂直

因此在四邊形 $AQBF$ 中， $\angle FAQ = \angle FBQ = 90°$

則 $AQBF$ 有外接圓(對角互補)，

同理可證 $CHDS$ 、$PAGD$ 、$ECRB$ 皆有外接圓



在 ΔABF 、 ΔCDS 中，

$\because \angle BAF = a° = 90° - c° = \angle DCS$ ，

$\angle ABF = b° = 90° - d° = \angle CDS$

$\therefore \Delta ABF \sim \Delta CDS$ (AA 相似)，則 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{AF}}{\overline{CS}} = \dfrac{\overline{BF}}{\overline{DS}}$

在 ΔABQ 、 ΔCDH 中，

$\because \angle DCH = c° = 90° - a° = \angle BAQ$ ， $\angle CDH = d° = 90° - b° = \angle ABQ$

$\therefore \Delta ABQ \sim \Delta CDH$ (AA 相似)，則 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{CH}} = \dfrac{\overline{BQ}}{\overline{DH}}$

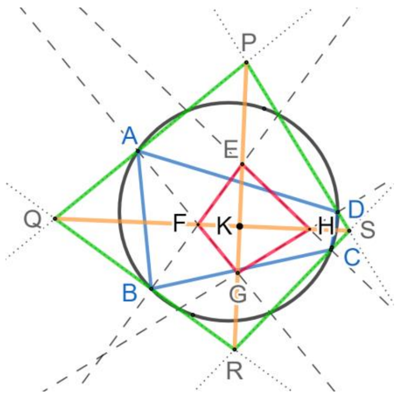
因此 $AQBF \sim CHDS$ (對應角相等，對應邊成比例)

同理可證， $PAGD \sim ECRB$

性質 2-3　圓內接四邊形內、外角四邊形的對角線共線且互相垂直。

已知：四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形，$EFGH$ 與 $PQRS$ 分別為內、外角四邊形。

求證：$\overline{FH}$ 在 $\overline{QS}$ 上，$\overline{EG}$ 在 $\overline{PR}$ 上且 $\overline{FH} \perp \overline{EG}$ ，$\overline{QS} \perp \overline{PR}$ 。



證明：根據性質 1-3，內、外角四邊形對角線會共線

在 ΔKSP 中，$\because \angle KPS + \angle KSP = a° + c° = 90°$

$\therefore \angle PKS = 90°$

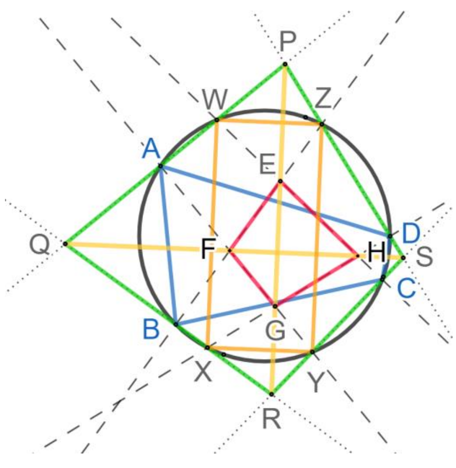
即 $\overline{FH} \perp \overline{EG}$ ，$\overline{QS} \perp \overline{PR}$

性質 2-4　圓內接四邊形內、外角平分線的交點構成矩形，且恰在其外接圓上。

已知：四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形，W、X、Y、Z 分別為內、外角平分線的交點。

求證： W、X、Y、Z 在 $ABCD$ 的外接圓上，且四邊形 $WXYZ$ 為矩形。

證明：如右圖



$ABCD$ 為圓內接四邊形，則 $a° + c° = 90°$ ，

$\angle WAD = 90° - a° = c° = \angle WCD$

$\therefore W$、A、C、D 共圓，即 W 在 $ABCD$ 的外接圓上，同理可證 X、Y、Z、W 也在 $ABCD$ 的外接圓上

$\angle XWZ = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{XZ} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{XC} + \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CZ}$

$=\angle CDX+\angle ZBC=d°+b°=90°$

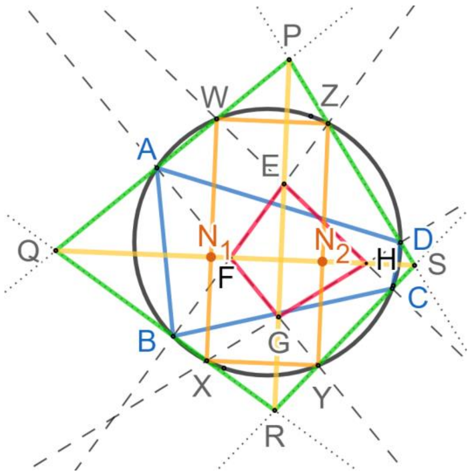
同理可證 $\angle WXY=\angle XYZ=\angle YZW=90°$

因此四邊形 $WXYZ$ 為矩形

性質 2-5　圓內接四邊形內、外角平分線交點連線與內、外角四邊形對角線平行。

已知：四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形，W、X、Y、Z 分別為內、外角平分線的交點。

求證：$\overline{XW}//\overline{ZY}//\overline{PR}$，$\overline{XY}//\overline{WZ}//\overline{QS}$。



證明：根據**性質 2-4**，A、W、X、D 共圓，因此

$\angle AWX=\frac{1}{2}AX=\angle ADX=d°$

$\angle CWX=\frac{1}{2}CX=\angle CDX=d°$

ΔWQN_1 和 ΔWHN_1 中，$\angle AQF=\angle WHQ=b°$，

$\angle AWX=\angle CWX=d°$，$\overline{WN_1}=\overline{WN_1}$

因此 $\Delta WQN_1\cong\Delta WHN_1$ (AAS 全等)

則 $\angle QN_1W=\angle HN_1W=90°$，即 $\overline{XW}\perp\overline{QS}$，又 $WXYZ$ 為矩形

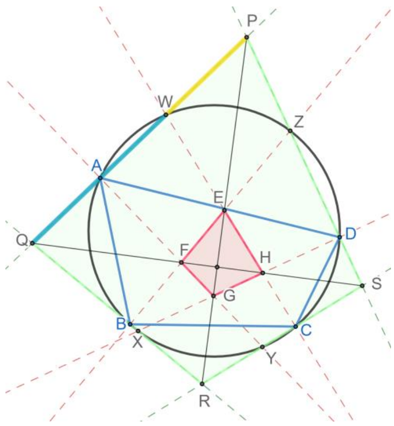
故 $\overline{XW}//\overline{PR}//\overline{ZY}$ 且 $\overline{XY}//\overline{WZ}//\overline{QS}$

(二) 圓內接四邊形內、外角四邊形內相似四邊形的面積關係

我們從以上觀察可發現，在圖形中有三組四邊形彼此相似，我們進一步找到這些圖形的面積關係。

1. 內、外角四邊形的面積關係為 $(\overline{QW}+\overline{WP})^2:(\overline{QW}-\overline{WP})^2$，且外角四邊形面積大於內角四邊形。

證明：如右圖



ΔWQH 中，$\angle WQH=\angle WHQ=b°$

ΔPWE 中，$\angle WPE=\angle WEP=d°$

因此 $\overline{QW}=\overline{WH}$ ，$\overline{WP}=\overline{WE}$

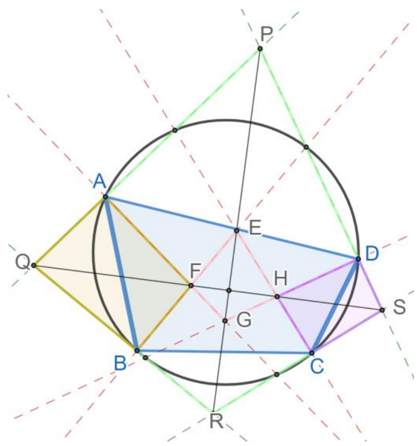
由**性質 2-1** 可知，四邊形 $PSRQ$ 與 $EFGH$ 相似，且 $\overline{QP}$ 、 $\overline{EH}$ 為一組對應邊

則四邊形 $PQRS$ 面積： $EFGH$ 面積

$=\overline{QP}^2:\overline{EH}^2=(\overline{QW}+\overline{WP})^2:(\overline{WH}-\overline{WE})^2=(\overline{QW}+\overline{WP})^2:(\overline{QW}-\overline{WP})^2$

從觀察圖形中，發現外角四邊形面積大於內角四邊形

2. 左、右兩個相似四邊形的面積與原四邊形的邊長關係為 $\overline{AB}^2:\overline{CD}^2$ 。



證明：如右圖，ΔABQ 與 ΔCDH 中

$\angle QAB=\angle HCD=c°$ ，$\angle QBA=\angle HDC=d°$

$\therefore \Delta ABQ \sim \Delta CDH$ (AA 相似)

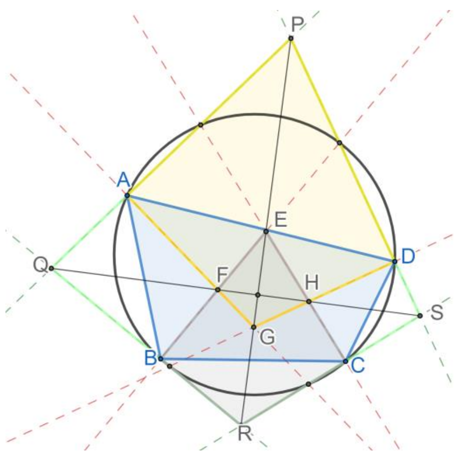
則 $\overline{AQ}:\overline{CH}=\overline{AB}:\overline{CD}$

由**性質 2-2** 可知，四邊形 $AQBF$ 與 $HCDS$ 相似，

且 $\overline{AQ}$ 、 $\overline{CH}$ 為一組對應邊

因此，四邊形 $AQBF$ 面積：$DHCS$ 面積＝ $\overline{AQ}^2:\overline{CH}^2=\overline{AB}^2:\overline{CD}^2$

3. 上、下兩個相似四邊形的面積與原四邊形的邊長關係為 $\overline{AD}^2:\overline{BC}^2$ 。



證明：如右圖，ΔPAD 與 ΔECB 中

$\angle PAD=\angle ECB=c°$ ，$\angle PDA=\angle EBC=d°$

$\therefore \Delta PAD \sim \Delta ECB$ (AA 相似)

則 $\overline{AP}:\overline{CE}=\overline{AD}:\overline{BC}$

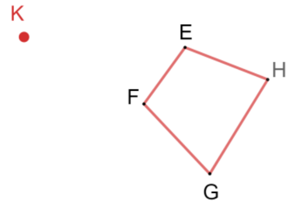
由**性質 2-2** 可知，四邊形 $PAGD$ 與 $ECRB$ 相似，

且 $\overline{AP}$ 、 $\overline{CE}$ 為一組對應邊

因此，四邊形 $PAGD$ 面積：$ECRB$ 面積＝

$\overline{AP}^2:\overline{CE}^2=\overline{AD}^2:\overline{BC}^2$

(三) 逆向作圖



找完了內、外角四邊形性質後，我們想，若給定一四邊形是否可利用研究結果，找出以已知四邊形為內角四邊形，且通過形外已知一點的一圓內接四邊形。

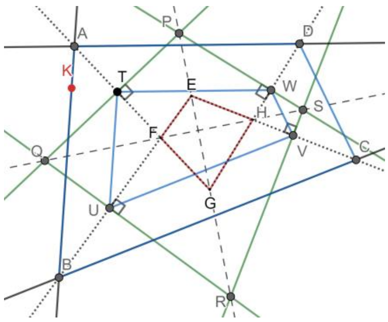
思考方式如下：

1. 根據**性質 1-3**，內、外角四邊形對角線會共線，將對角線延長。
2. 根據**性質 2-2**，在四邊形頂點處內、外角平分線互相垂直，做 $EFGH$ 四邊的垂線。
3. 利用平移，做出所求四邊形。

已知：圓內接四邊形 $EFGH$，$\overline{EG} \perp \overline{FH}$，以及形外一點 K。

求作：過 K 之四邊形 $ABCD$，使 $EFGH$ 為其內角四邊形。

作法：



1. 連接 $\overleftrightarrow{EG}$ 、$\overleftrightarrow{FH}$ 。
2. 延長 $\overline{GF}$ 、$\overline{EF}$ 、$\overline{GH}$ 、$\overline{EH}$ ，且在 $\overleftrightarrow{EG}$ 上任取一點 P。
3. 過點 P 作 $\overline{GF}$ 的垂線，分別交 $\overline{GF}$ 、$\overleftrightarrow{FH}$ 於 T、Q 點。
4. 過 Q 點作 $\overline{EF}$ 的垂線，分別交 $\overline{EF}$ 、$\overleftrightarrow{EG}$ 於 U、R 點。
5. 過 R 點作 $\overline{EH}$ 的垂線，分別交 $\overline{EH}$ 、$\overleftrightarrow{FH}$ 於 V、S 點。
6. 連 $\overleftrightarrow{PS}$ ，交 $\overline{GH}$ 於 W。
7. 過 K 點作一四邊形各邊與 $TUVW$ 平行，分別交 $\overleftrightarrow{FG}$、$\overleftrightarrow{EF}$、$\overleftrightarrow{EH}$、$\overleftrightarrow{GH}$ 於 A、B、C、D。
8. 則四邊形 $ABCD$ 即為所求。

證明：

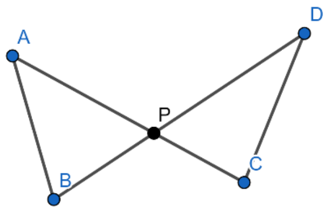
1. $TQUF$、$PTGW$ 共圓，可推得 $\angle FTU = \angle FEG = \angle WTG$ ，則 $\overline{TG}$ 為 $\angle UTW$ 的角平分線，同理可證 $\overline{WG}$ 、$\overline{VE}$ 、$\overline{UE}$ 分別為 $\angle TWV$ 、$\angle WVU$ 、$\angle VUT$ 的角平分線，則 $EFGH$ 為 $TUVW$ 的內角四邊形

2. 因為$\overline{TW}//\overline{AD}$、$\overline{TU}//\overline{AB}$、所以$\angle DAG=\angle WTG=\angle GTU=\angle GAB$，則$\overline{AG}$為$\angle BAD$的角平分線，同理可證$\overline{DG}$、$\overline{CE}$、$\overline{BE}$分別為$\angle ADC$、$\angle DCB$、$\angle CBA$的角平分線，則$EFGH$為$ABCD$的內角四邊形

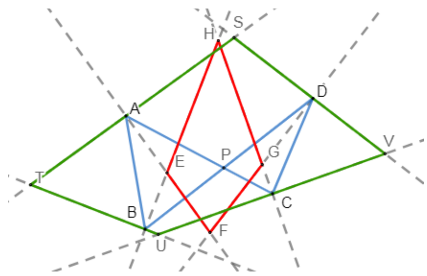
同理，對於外角四邊形$PQRS$亦可完成逆向作圖。

三、任意蝴蝶形內、外角平分線所圍成圖形的性質

以上觀察完了凸四邊形的內、外角平分線的各種結果，我們想延續到凹四邊形觀察，但發現普遍的凹四邊形會出現優角的情況，這將無法容易地去觀察角平分線所圍出的圖形，於是就將凹四邊形的範圍縮小到蝴蝶形，並畫出圖形觀察性質。



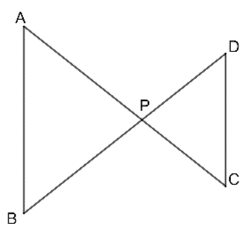
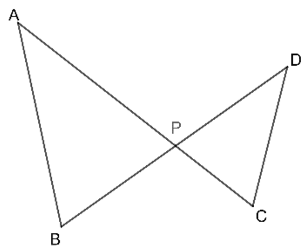
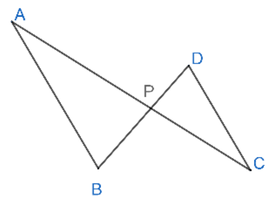
如右圖，我們規定兩不平行的線段$\overline{AC}$、$\overline{BD}$交於P點，連接$\overline{AB}$、$\overline{DC}$，則稱 ***ABCD* 為蝴蝶形**，P點為中心點，其中：$\angle A$及$\angle B$內角平分線的交點為E，外角平分線的交點為T；$\angle C$及$\angle D$內角平分線的交點為G，外角平分線的交點為V；$\angle A$及$\angle D$內角平分線的交點為F，外角平分線的交點為S；$\angle B$及$\angle C$內角平分線的交點為H，外角平分線的交點為U，因此$EFGH$為其內角平分線所圍成的圖形，而$STUV$為其外角平分線所圍成的圖形。



為方便說明，規定 *EFGH* 為內角四邊形，*STUV* 為外角四邊形。

(一)內角平分線

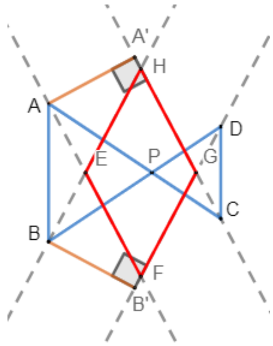
我們先觀察當蝴蝶形的左右兩個三角形相似時，內角平分線圍出圖形的性質，並就觀察的蝴蝶形分成三種類型：

$\overline{AP}=\overline{BP}$且$\overline{DP}=\overline{CP}$	$\overline{AP}:\overline{BP}=\overline{DP}:\overline{CP}$	$\overline{AP}:\overline{BP}=\overline{CP}:\overline{DP}$
		
稱作**等腰蝴蝶形**	稱作**翻轉蝴蝶形**	稱作**旋轉蝴蝶形**

性質 3-1　等腰蝴蝶形的內角四邊形為菱形。

已知：$ABCD$ 為蝴蝶形，$\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 P，$\Delta APB \sim \Delta CPD$ ，$\overline{AP}=\overline{BP}$ ，$EFGH$ 為內角四邊形

求證：　$EFGH$ 為菱形



證明：　如右圖$\because \overline{AP}=\overline{BP}$ ，$\overline{CP}=\overline{DP}$

$\therefore \angle PAB=\angle PBA=\angle PCD=\angle PDC$

$\because \angle CAF=\frac{1}{2}\angle PAB=\frac{1}{2}\angle PCD=\angle ACH$

$\therefore \overline{EF}//\overline{HG}$ ，同理可證 $\overline{HE}//\overline{GF}$

因此 $EFGH$ 為平行四邊形，$\overline{HE}=\overline{GF}$ ，$\overline{EF}=\overline{HG}$

作 A 在 $\overleftrightarrow{HG}$ 上的垂足 A'，B 在 $\overleftrightarrow{ED}$ 上的垂足 B'，連接 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$

$\Delta AA'C$ 和 $\Delta BB'D$ 中，

$\because \angle AA'C=\angle BB'D=90^\circ$ ，$\angle ACA'=\frac{1}{2}\angle PCD=\frac{1}{2}\angle PDC=\angle BDB'$

$\overline{AC}=\overline{AP}+\overline{PC}=\overline{BP}+\overline{PD}=\overline{BD}$，因此 $\Delta AA'C \cong \Delta BB'D$ $(AAS$ 全等)，則 $\overline{AA'}=\overline{BB'}$

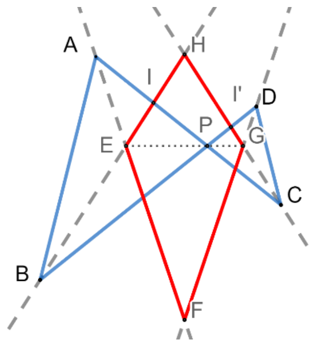
平行四邊形 $EFGH$ 面積$=\overline{EF}\cdot\overline{AA'}=\overline{GF}\cdot\overline{BB'}$，又 $\overline{AA'}=\overline{BB'}$

則 $\overline{HG}=\overline{EF}=\overline{GF}=\overline{HE}$ ，即 $EFGH$ 為菱形

性質 3-2　翻轉蝴蝶形的內角四邊形為箏形。

已知：　$ABCD$ 為蝴蝶形，$\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 P，$\Delta APB \sim \Delta DPC$ ，$EFGH$ 為內角四邊形

求證：　$EFGH$ 為箏形



證明：如右圖，　連接 $\overline{PE}$，E 為 ΔPAB 的內心

$\therefore \angle EPA=\frac{1}{2}\angle APB=\frac{1}{2}\angle DPC=\angle DPG$

ΔABI 中，$\angle PIB=\angle BAI+\angle ABI=\angle BAP+\frac{1}{2}\angle PBA$

$\Delta DCI'$中，$\angle PI'C=\angle CDI'+\angle DCI'=\angle CDP+\frac{1}{2}\angle PDC$

因為 $\Delta APB \sim \Delta DPC$ ，所以 $\angle BAP=\angle CDP$ ，$\angle PBA=\angle PDC$ ，則 $\angle PIB=\angle PI'C$

在 ΔIEP 和 $\Delta I'GP$ 中，$\angle EIP=\angle PI'G$ ，$\angle IPE=\angle I'PG$

$\therefore \Delta IEP \sim \Delta I'GP$ (AA 相似)，則 $\angle IEP = \angle I'GP$

因此 $\overline{EH} = \overline{HG}$ ，同理可證 $\overline{EF} = \overline{FG}$

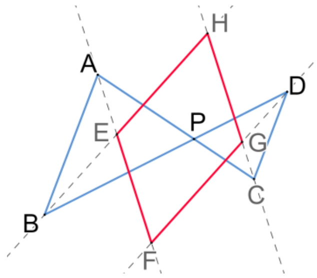
$\therefore EFGH$ 為箏形

性質 3-3　旋轉蝴蝶形的內角四邊形為平行四邊形。

已知： $ABCD$ 為蝴蝶形， $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 P， $\Delta APB \sim \Delta CPD$ ，$EFGH$ 為內角四邊形

求證： $EFGH$ 為平行四邊形

證明：如右圖，$\because \Delta APB \sim \Delta CPD$



$$\therefore \angle CAF = \frac{1}{2}\angle PAB = \frac{1}{2}\angle PCD = \angle ACH$$

因此 $\overline{EF} // \overline{HG}$ ，同理可證 $\overline{HE} // \overline{GF}$

則 $EFGH$ 為平行四邊形(兩組對邊平行)

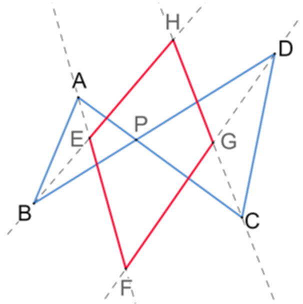
我們再推廣到任意蝴蝶形

性質 3-4　任意蝴蝶形的內角四邊形有一組對角相等。

已知： $ABCD$ 為蝴蝶形，$\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 P，$EFGH$ 為內角四邊形

求證：$\angle HEF = \angle HGF$

證明：設 $\angle PAB = a°$ ，$\angle PBA = b°$ ，$\angle PCD = c°$



$$\angle DPC = \angle APB = 180° - a° - b°$$

$$\angle PDC = 180° - \angle DPC - \angle PCD = a° + b° - c°$$

$$\angle HEF = \angle AEB = 180° - \frac{\angle PAB + \angle PBA}{2} = 180° - \frac{a° + b°}{2}$$

$$\angle HGF = \angle DGC = 180° - \frac{\angle PCD + \angle PDC}{2} = 180° - \frac{a° + b°}{2}$$

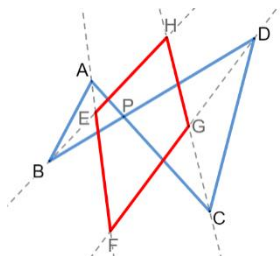
$$\therefore \angle HEF = \angle HGF$$

性質 3-5　任意蝴蝶形的內角四邊形皆不會共圓。

已知： $ABCD$ 為蝴蝶形，$\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 P，$EFGH$ 為內角四邊形

求證：E、F、G、H 一定不會共圓

證明：如右圖



假設 $\angle PAB = a°$ ，$\angle PBA = b°$ ，$\angle PCD = c°$ 時，E、F、G、H 會共圓

則 $\angle HEF + \angle HGF = 180°$

根據**性質 3-4**，$2(180° - \dfrac{a° + b°}{2}) = 180°$

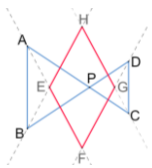
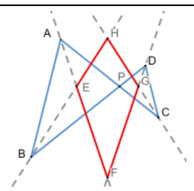
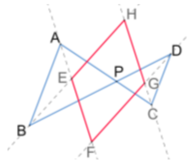
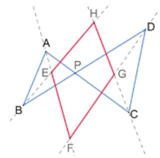
可得 $\dfrac{a° + b°}{2} = 90°$

因此 $\angle DPC = \angle APB = 180° - a° - b° = 0°$

則 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 平行或重合，即 $ABCD$ 不是蝴蝶形，與已知條件矛盾

因此，E、F、G、H 一定不會共圓

小結：

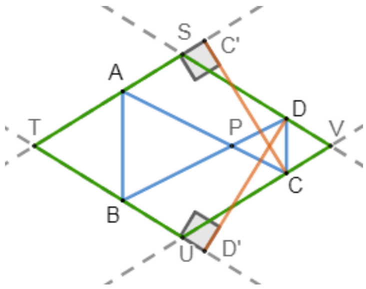
<table>
<tr><td>等腰蝴蝶形</td><td>翻轉蝴蝶形</td><td>旋轉蝴蝶形</td><td>任意蝴蝶形</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>圍出菱形</td><td>圍出箏形</td><td>圍出平行四邊形</td><td>圍出一組對角相等的圖形</td></tr>
<tr><td colspan="4">圍出的圖形皆不會共圓</td></tr>
</table>

(二)外角平分線

我們仿照內角平分線的觀察方法，先觀察當蝴蝶形的左右兩個三角形相似時，外角平分線圍出圖形的性質：

性質 3-6　等腰蝴蝶形外角四邊形為菱形。

已知：$ABCD$ 為蝴蝶形，$\overline{AC}$ 、$\overline{BD}$ 交於 P，$\Delta APB \sim \Delta CPD$ ，$\overline{AP} = \overline{BP}$ ， $STUV$ 為外角四邊形



求證： $STUV$ 為菱形

證明：如右圖

$\because \overline{AP} = \overline{BP}$ ，$\overline{CP} = \overline{DP}$

$\therefore \angle PAB = \angle PBA = \angle PCD = \angle PDC$

因此 $\angle SAC = \dfrac{180° - \angle PAB}{2} = \dfrac{180° - \angle PCD}{2} = \angle ACU$

則 $\overline{ST}//\overline{VU}$ ，同理可證 $\overline{TU}//\overline{SV}$

$\therefore STUV$ 為平行四邊形， $\overline{ST}=\overline{VU}$ ， $\overline{SV}=\overline{TU}$

作 C 在 $\overline{ST}$ 上的垂足 C'，作 D 在 $\overline{TU}$ 上的垂足 D'，連接 $\overline{CC'}$、 $\overline{DD'}$

$\Delta CC'A$ 和 $\Delta DD'B$ 中， $\angle CC'A=\angle DD'B=90^\circ$ ，

$\angle CAC'=\dfrac{180^\circ-\angle PAB}{2}=\dfrac{180^\circ-\angle PCD}{2}=\angle DBD'$ ， $\overline{AC}=\overline{AP}+\overline{PC}=\overline{BP}+\overline{PD}=\overline{BD}$

因此 $\Delta CC'A\cong\Delta DD'B$ (AAS 全等)，則 $\overline{CC'}=\overline{DD'}$

$\because$ 平行四邊形 $STUV$ 面積 $=\overline{ST}\cdot\overline{CC'}=\overline{TU}\cdot\overline{DD'}$ $\therefore\overline{VU}=\overline{ST}=\overline{TU}=\overline{SV}$ 、

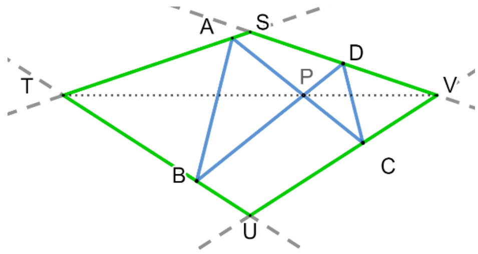
即 $STUV$ 為菱形

性質 3-7　翻轉蝴蝶形外角四邊形為箏形。

已知： $ABCD$ 為蝴蝶形， $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 P， $\Delta APB\sim\Delta DPC$ ， $STUV$ 為外角四邊形

求證： $STUV$ 為箏形

證明：如右圖， 連接 $\overline{PT}$ ， T 為 ΔPAB 的旁心



$\therefore\angle TPA=\dfrac{1}{2}\angle APB=\dfrac{1}{2}\angle DPC=\angle DPV$

$\because\Delta APB\sim\Delta DPC$ $\therefore\angle TAP=\angle VDP$

在 ΔTAP 和 ΔVDP 中，

$\angle APT=\angle DPV$ ， $\angle TAP=\angle VDP$ ，因此 $\Delta TAP\sim\Delta VDP$ (AA 相似)

則 $\angle ATP=\angle DVP$ ，可得 $\overline{ST}=\overline{SV}$

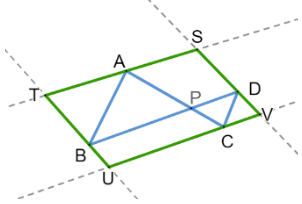
同理可證 $\overline{TU}=\overline{VU}$ ，因此 $STUV$ 為箏形

性質 3-8　旋轉蝴蝶形外角四邊形為平行四邊形。

已知： $ABCD$ 為蝴蝶形， $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 P， $\Delta APB\sim\Delta CPD$ ， $STUV$ 為外角四邊形

求證： $STUV$ 為平行四邊形

證明：如右圖



$\because\angle SAC=\dfrac{180^\circ-\angle PAB}{2}=\dfrac{180^\circ-\angle PCD}{2}=\angle ACU$

$\therefore\overline{ST}//\overline{VU}$ ，同理可證 $\overline{TU}//\overline{SV}$

因此 $STUV$ 為平行四邊形(兩組對邊平行)

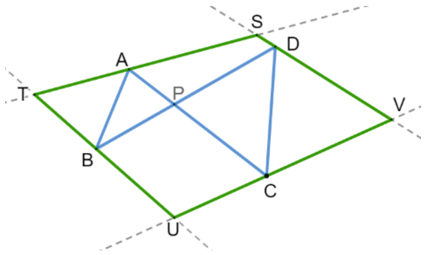
我們再推廣到任意蝴蝶形

性質 3-9　任意蝴蝶形的外角四邊形有一組對角相等。

已知：$ABCD$ 為蝴蝶形，$\overline{AC}$ 、$\overline{BD}$ 交於 P，$STUV$ 為外角四邊形

求證：$\angle STU = \angle SVU$

證明：設 $\angle PAB = a^\circ$ ，$\angle PBA = b^\circ$ ，$\angle PCD = c^\circ$



$\angle DPC = \angle APB = 180^\circ - a^\circ - b^\circ$

$\angle PDC = 180^\circ - \angle DPC - \angle PCD = a^\circ + b^\circ - c^\circ$

$\angle BAT = \dfrac{180^\circ - a^\circ}{2}$ ，$\angle ABT = \dfrac{180^\circ - b^\circ}{2}$ ，

$\angle DCV = \dfrac{180^\circ - c^\circ}{2}$ ，$\angle CDV = \dfrac{180^\circ - (a^\circ + b^\circ - c^\circ)}{2}$

$\angle ATB = 180^\circ - (\dfrac{180^\circ - a^\circ}{2} + \dfrac{180^\circ - b^\circ}{2}) = \dfrac{a^\circ + b^\circ}{2}$

$\angle CVD = 180^\circ - (\dfrac{180^\circ - c^\circ}{2} + \dfrac{180^\circ - a^\circ - b^\circ + c^\circ}{2}) = \dfrac{a^\circ + b^\circ}{2}$

則 $\angle ATB = \angle CVD$ ，即 $\angle STU = \angle SVU$

性質 3-10　任意蝴蝶形的外角四邊形皆不會共圓。

已知：$ABCD$ 為蝴蝶形，$\overline{AC}$ 、$\overline{BD}$ 交於 P，$STUV$ 為外角四邊形

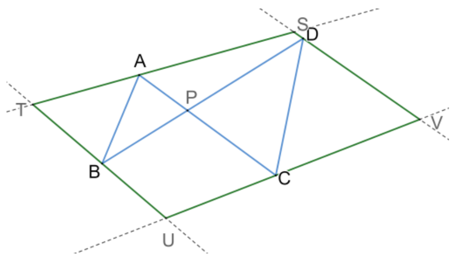
求證：S、T、U、V 一定不會共圓

證明：如右圖

假設當 $\angle PAB = a^\circ$ ，$\angle PBA = b^\circ$ ，$\angle PCD = c^\circ$ 時，S、T、U、V 會共圓

根據性質 3-9 的證明，$\angle STU + \angle SVU = 2(\dfrac{a^\circ + b^\circ}{2}) = 180^\circ$

$\therefore a^\circ + b^\circ = 180^\circ$ ，則 $\angle DPC = \angle APB = 180^\circ - a^\circ - b^\circ$

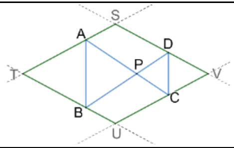
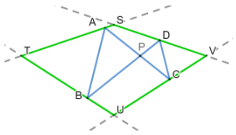
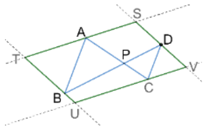
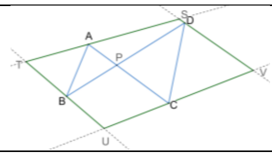


即 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 平行或重合，因此 $ABCD$ 不是蝴蝶形，

與已知條件矛盾

因此 S、T、U、V 一定不會共圓

小結：

等腰蝴蝶形	翻轉蝴蝶形	旋轉蝴蝶形	任意蝴蝶形
			
圍出菱形	圍出箏形	圍出平行四邊形	圍出一組對角相等的圖形
圍出的圖形皆不會共圓			

(三)任意蝴蝶形內、外角平分線所圍成圖形的關係

性質 3-11　內、外角四邊形有一組對角線的頂點共線，且會通過蝴蝶形的中心點。

若要證明蝴蝶形內角四邊形的一條對角線、外角四邊形的一條對角線、中心點共線，則需證明 T、E、P、G、V 皆共線

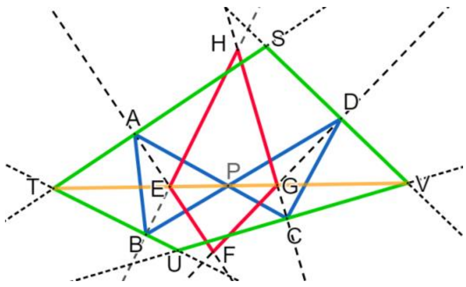
已知：$ABCD$ 為蝴蝶形，$\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 P，$EFGH$ 為內角四邊形，$STUV$ 為外角四邊形

求證： T、E、P、G、V 皆共線

證明： 在 ΔPDC 中，V 為 ΔPDC 的旁心，G 為 ΔPDC 的內心，

因此 V、G 皆在 $\angle DPC$ 的角平分線上，即 P、G、V 共線

在 ΔPAB 中，T 為 ΔPAB 的旁心，E 為 ΔPAB 的內心，因此 T、E 皆在 $\angle APB$ 的角平分線上，即 T、E、P 共線



$\because G$ 為 ΔPDC 的內心，E 為 ΔPAB 的內心，又

$\angle APB = \angle DPC$

$\therefore \angle APT = \angle TPB = \angle DPV = \angle VPC$

$\angle APD = 180° - \angle APT - \angle TPB$

$\angle TPV = \angle APD + \angle APT + \angle DPV = 180° - \angle APT - \angle TPB + \angle APT + \angle DPV = 180°$

$\therefore$ T、P、V 共線，則 T、E、P、G、V 皆共線

我們發現利用此性質，可幫助證明後面其他性質。

在觀察完任意蝴蝶形內、外角平分線所圍圖形的相關性質後，我們發現兩個相似三角形組成的蝴蝶形為圓內接蝴蝶形，因此我們就繼續針對圓內接蝴蝶形進行觀察。

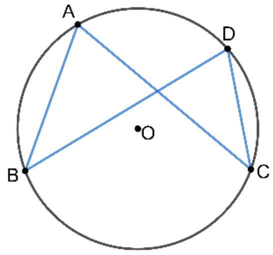
四、圓內接蝴蝶形內、外角平分線圍成圖形間的關係

(一) 圓內接蝴蝶形內、外平分角線所衍生圖形的關係

性質 4-1　若蝴蝶形左右兩三角形相似，則必為圓內接蝴蝶形，反之亦然。

已知：$ABCD$ 為圓內接蝴蝶形，$\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 P

求證： $\Delta PAB \sim \Delta PDC$



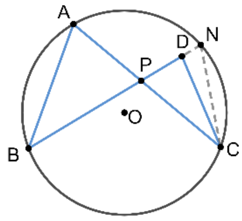
證明：如右圖，在 ΔPAB 、 ΔPDC 中，

$\because \angle APB = \angle DPC$ ， $\angle PAB = \frac{1}{2}BC = \angle PDC$

$\therefore \Delta PAB \sim \Delta PDC\,(AA$ 相似)

已知：$ABCD$ 為蝴蝶形，但沒有外接圓，$\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 P

求證： ΔPAB 和 ΔPDC 不相似

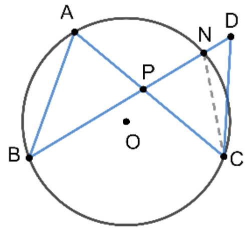


證明：如右圖，若 D 在 A、B、C 的外接圓內，延伸 $\overline{BD}$，交 A、B、C 的外接圓於 N，連接 $\overline{NC}$ ， $\angle PAB = \frac{1}{2}BC = \angle PNC$

$\because \angle PNC + \angle NCD = \angle PDC \quad \therefore \angle PAB \neq \angle PDC$

因此 ΔPAB 和 ΔPDC 不相似

如右圖，若 D 在 A、B、C 的外接圓外，延伸 $\overline{BD}$，交 A、B、C 的外接圓於 N，連接 $\overline{NC}$

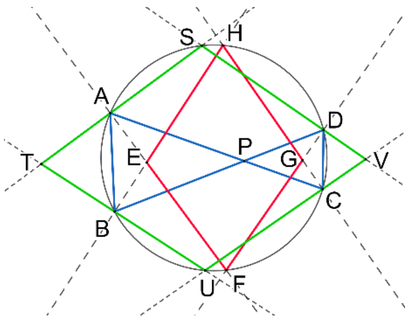


$\angle PAB = \frac{1}{2}BC = \angle PNC$

$\because \angle PNC - \angle NCD = \angle PDC \quad \therefore \angle PAB \neq \angle PDC$

$\because \angle PNC - \angle NCD = \angle PDC \therefore \angle PAB \neq \angle PDC$

因此 ΔPAB 和 ΔPDC 不相似



為了簡化說明，我們假設

$\angle BAF = \angle FAC = \angle CDF = \angle FDB = a°$ ；

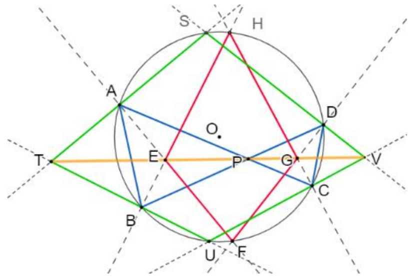
$\angle ABH = \angle HBD = \angle ACH = \angle HCD = b°$

性質 4-2　圓內接蝴蝶形的內、外角四邊形皆為箏形，且只有在蝴蝶形為等腰蝴蝶形時會相似。

已知：$ABCD$ 為圓內接蝴蝶形，$\overline{AC}$ 、$\overline{BD}$ 交於 P，$EFGH$ 為內角四邊形，$STUV$ 為外角四邊形

求證：$EFGH$、$STUV$ 皆為箏形，唯有 $ABCD$ 為等腰蝴蝶形時，$EFGH \sim STUV$

證明：根據性質 4-1，$\Delta PAB \sim \Delta PDC$



又根據性質 3-2、性質 3-7，$EFGH$、$STUV$ 皆為箏形

可求得 $EFGH$ 的四個內角分別為：

$180°-a°-b°$ 、$2b°$ 、$180°-a°-b°$ 、$2a°$ ；

$STUV$ 的四個內角分別為：

$180°-2b°$ 、$a°+b°$ 、$180°-2a°$ 、$a°+b°$

若 $EFGH \sim STUV$ ，對應角需相等，因此須符合 $a°=b°$ 或 $a°+b°=90°$

當 $a°+b°=90°$ ，則 $\angle APB = 180°-2a°-2b°=0° \Rightarrow$ 不符合蝴蝶形的定義

因此只有當 $a°=b°$ 時，$EFGH \sim STUV$

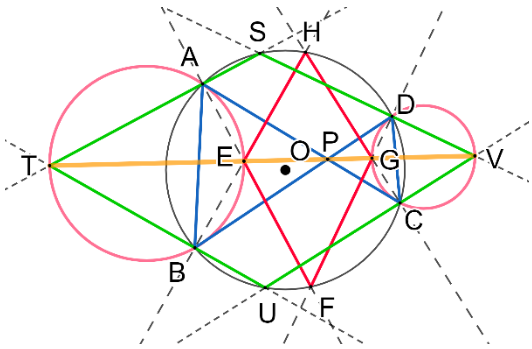
此時 $\overline{PA}=\overline{PB}$ ，$\overline{PC}=\overline{PD}$ ，即 $ABCD$ 為等腰蝴蝶形

性質 4-3　圓內接蝴蝶形除內、外角四邊形外，還有兩個四邊形分別有外接圓且會相似。

已知：$ABCD$ 為圓內接蝴蝶形，$\overline{AC}$ 、$\overline{BD}$ 交於 P，$EFGH$ 為內角四邊形，$STUV$ 為外角四邊形

求證：$EATB$、$GDVC$ 皆有外接圓，且 $EATB \sim GDVC$

證明：四邊形 $EATB$ 中，$\angle EAT = \angle EBT = 90°$



則 $EATB$ 有外接圓(對角互補)，同理可證，

$GDVC$ 有外接圓

在 ΔEAB、ΔGDC 中，$\angle EAB = \angle GDC = a°$、

$\angle ABE = \angle DCG = b°$

因此 $\Delta EAB \sim \Delta GDC$ (AA 相似)

在 ΔBAT 與 ΔCDV 中，$\angle BAT = \angle CDV = 90°-a°$ ，$\angle ABT = \angle DCV = 90°-b°$

因此 $\Delta BAT \sim \Delta CDV$ (AA 相似)

$\because \Delta EAB$ 和 ΔGDC 的對應邊邊長比值 $= \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \Delta BAT$ 和 ΔCDV 的對應邊邊長比值

$\therefore EATB \sim GDVC$

性質 4-4　圓內接蝴蝶形的內、外角四邊形的頂點中，有四個頂點在其外接圓上，但另外四個一定不會在其外接圓上。

已知：$ABCD$ 為圓內接蝴蝶形，$\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 交於 P，$EFGH$ 為內角四邊形，$STUV$ 為外角四邊形

求證：S、U、H、F 在蝴蝶形 $ABCD$ 的外接圓上，但 E、G、T、V 一定不會在蝴蝶形 $ABCD$ 的外接圓上

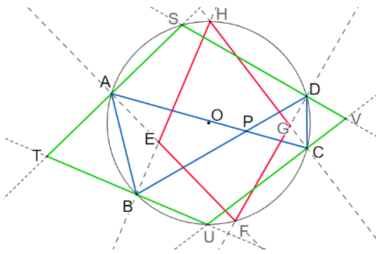
證明：在四邊形 $SABD$ 中，$\because \angle SAB + \angle SDB = (90° + a°) + (90° - a°) = 180°$

$\therefore S$、A、B、D 共圓，即 S 在蝴蝶形 $ABCD$ 的外接圓上

同理可證，U 也在蝴蝶形 $ABCD$ 的外接圓上

在四邊形 $FASD$ 中，$\because \angle FAS + \angle FDS = 90° + 90° = 180°$

$\therefore F$、A、S、D 共圓，即 F 在蝴蝶形 $ABCD$ 的外接圓上



同理可證，H 也在蝴蝶形 $ABCD$ 的外接圓上

因此 S、U、H、F 皆在蝴蝶形 $ABCD$ 的外接圓上

ΔPAB 中，E 為 ΔPAB 的內心，位在 ΔPAB 的內部，而蝴蝶形 $ABCD$ 的外接圓在 ΔPAB 頂點及外部，因此 E 不在蝴蝶形 $ABCD$ 的外接圓上

同理可證，G 也不在蝴蝶形 $ABCD$ 的外接圓上

在四邊形 $TSDB$ 中

$\because \angle SDB + \angle STB = (90° - a°) + (a° + b°) = 90° + b° \neq 180°$

因此 T 不在 ΔSDB 的外接圓上，即 T 不在蝴蝶形 $ABCD$ 的外接圓上

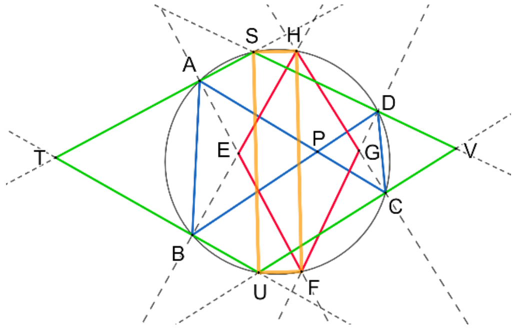
同理可證，V 也不在蝴蝶形 $ABCD$ 的外接圓上

性質 4-5　圓內接蝴蝶形內、外角四邊形在其外接圓上的四個頂點會圍出矩形。

已知：$ABCD$ 為圓內接蝴蝶形，$\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 交於 P，$EFGH$ 為內角四邊形，$STUV$ 為外角四邊形

求證：$SUHF$ 為矩形

證明：根據性質 4-4，S、U、H、F 會在蝴蝶形 $ABCD$ 的外接圓上

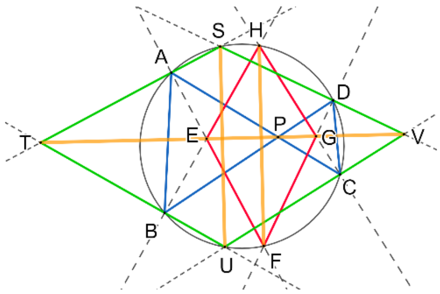


$\angle HSU=\frac{1}{2}\overset{\frown}{HU}=\angle HBU=90^\circ$，同理可證

$\angle SHF=\angle SUF=\angle HFU=90^\circ$

因此 $SUHF$ 為矩形

性質 4-6　圓內接蝴蝶形內、外角四邊形的兩對角線互相垂直。



已知：$ABCD$ 為圓內接蝴蝶形，$\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 交於 P，$EFGH$ 為內角四邊形，$STUV$ 為外角四邊形，$\overline{EG}$、$\overline{FH}$ 交於 J，$\overline{TV}$、$\overline{SU}$ 交於 K

求證：$\overline{EG}\perp\overline{HF}$，$\overline{TV}\perp\overline{SU}$

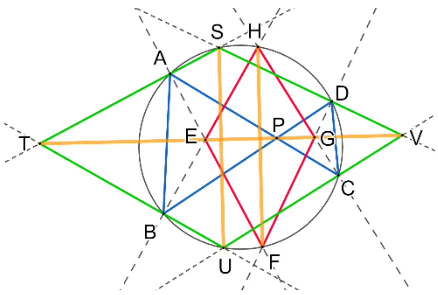
證明：根據性質 4-2，$EFGH$、$STUV$ 皆為箏形，則 $\overline{EG}\perp\overline{HF}$，$\overline{TV}\perp\overline{SU}$

性質 4-7　圓內接蝴蝶形內、外角四邊形有一組對角線的頂點會共線，另一組只有在兩三角形全等時會共線。

已知：$ABCD$ 為圓內接蝴蝶形，$\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 交於 P，$EFGH$ 為內角四邊形，$STUV$ 為外角四邊形

求證：$\overline{EG}$ 和 $\overline{TV}$ 共線，$\overline{HF}$ 和 $\overline{SU}$ 在兩三角形全等時會共線

證明：根據性質 3-11 T、E、P、G、V 共線，則 $\overline{EG}$ 和 $\overline{TV}$ 共線



根據性質 4-3 $EATB\sim GDVC$，則 $\Delta EAT\sim\Delta GDV$

在 ΔPAE、ΔPDG 中

$\angle PAE=\frac{1}{2}\angle PAB=\frac{1}{4}\overset{\frown}{BC}=\frac{1}{2}\angle PDC=\angle PDG$

$\angle AEP=180^\circ-\angle AET=180^\circ-\angle DGV=\angle DGP$

$\therefore\Delta PAE\sim\Delta PDG\,(AA$ 相似$)$

則 $\overline{EP}:\overline{PG}=\overline{AE}:\overline{DG}=\overline{TE}:\overline{GV}$

假設 $\overline{EP}=a$，$\overline{TE}=b$，$\overline{PG}=ar$，$\overline{GV}=br$

將圖形放在數線 $\overrightarrow{TV}$ 上觀察，並以 P 為原點(0)，則 E 點坐標為$(-a)$，T 點坐標為

$(-a-b)$，G 點坐標為(ar)，V 點坐標為 $ar+br$

根據**性質 4-2** $EFGH$、$STUV$ 為箏形

$\Delta EJH \cong \Delta GJH$ ，$\Delta TKS \cong \Delta VKS$

J、K 分別為 $\overline{EG}$ 、$\overline{TV}$ 的中點，則其坐標分別為 $J(\dfrac{ar-a}{2})$、$K(\dfrac{ar+br-a-b}{2})$

$$\overline{JK}=\left|\frac{ar+br-a-b}{2}-\frac{ar-a}{2}\right|=\left|\frac{br-b}{2}\right|=\frac{b}{2}\times|r-1|=\frac{\overline{TE}}{2}\times\left|\frac{\overline{PG}}{\overline{EP}}-1\right|$$

根據**性質 4-5**，$\overline{HF}//\overline{SU}$ ，因此只有當 $\overline{JK}=0$時，$\overline{HF}$ 和 $\overline{SU}$ 會共線

ΔPAB 中，E、T 分別為 ΔPAB 的內心與旁心，因此 $\overline{TE}\neq 0$

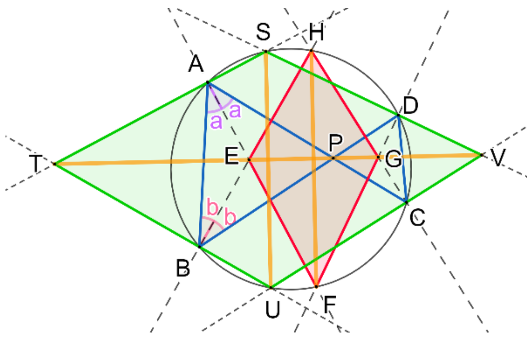
則 $\overline{JK}=0$時，$\overline{PG}=\overline{EP}$ ，又 $\Delta PAB \sim \Delta PDC$ ，則此時 $\Delta PAB \cong \Delta PDC$

也就是只有當 $\Delta PAB \cong \Delta PDC$ 時，$\overline{HF}$ 和 $\overline{SU}$ 會共線

(二) 圓內接蝴蝶形內、外角四邊形內的面積關係

我們進一步找到內、外角四邊形以及圖形中一組相似四邊形的面積關係。

(1) 內、外角四邊形的面積比為 $(\sin a^\circ \sin b^\circ)$ ：$(\cos a^\circ \cos b^\circ)$，且外角四邊形面積大於內角四邊形



證明：根據**性質 4-2** $EFGH$、$STUV$ 皆為箏形、

性質 4-5 中的 $\overline{HF}=\overline{SU}$

$$EFGH:STUV=\overline{EG}:\overline{TV}$$

根據**性質 4-7** 的證明過程， $\overline{EP}:\overline{PG}=\overline{TE}:\overline{GV}$

設 $\overline{EP}=x$ ，$\overline{TE}=y$ ，$\overline{PG}=rx$ ，$\overline{GV}=ry$

$$EFGH:STUV=\overline{EG}:\overline{TV}=(x+rx):(x+rx+y+ry)=x:(x+y)$$

根據**性質 3-11**，T、E、G、V 共線

在 ΔAEP 中，利用正弦定理可知 $\dfrac{\overline{AP}}{\sin(90^\circ+b^\circ)}=\dfrac{\overline{EP}}{\sin a^\circ}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin(90^\circ-a^\circ-b^\circ)}$

則 $\overline{EP}=\overline{AP}\times\dfrac{\sin a^\circ}{\sin(90^\circ+b^\circ)}$ ，$\overline{AE}=\overline{AP}\times\dfrac{\sin(90^\circ-a^\circ-b^\circ)}{\sin(90^\circ+b^\circ)}$

又 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{TE}}=\sin b^\circ$ ，則 $\overline{TE}=\overline{AP}\times\dfrac{\sin(90^\circ-a^\circ-b^\circ)}{\sin(90^\circ+b^\circ)\sin b^\circ}$

因此 $EFGH$面積 ： $STUV$面積 $=\overline{EP}:(\overline{EP}+\overline{TE})$

$$=(\overline{AP}\times\frac{\sin a^\circ}{\sin(90^\circ+b^\circ)}):(\overline{AP}\times\frac{\sin a^\circ}{\sin(90^\circ+b^\circ)}+\overline{AP}\times\frac{\sin(90^\circ-a^\circ-b^\circ)}{\sin(90^\circ+b^\circ)\sin b^\circ})$$

$$=\frac{\sin a^\circ}{\sin(90^\circ+b^\circ)}:(\frac{\sin a^\circ}{\sin(90^\circ+b^\circ)}+\frac{\sin(90^\circ-a^\circ-b^\circ)}{\sin(90^\circ+b^\circ)\sin b^\circ})$$

$$=\sin a^\circ\sin b^\circ:(\sin a^\circ\sin b^\circ+\cos(a^\circ+b^\circ))$$

$\because$ 在 ΔPAB 中， $\angle PAB+\angle PBA=2a^\circ+2b^\circ=180^\circ-\angle APB$

$\therefore 0<a^\circ+b^\circ<90^\circ$ ，則 $0<\cos(a^\circ+b^\circ)<1$

又 $EFGH$面積 ： $STUV$面積 $=\sin a^\circ\sin b^\circ:(\sin a^\circ\sin b^\circ+\cos(a^\circ+b^\circ))$

則 $STUV$面積 ＞ $EFGH$面積

$EFGH$面積 ： $STUV$面積 $=\sin a^\circ\sin b^\circ$ ： $(\sin a^\circ\sin b^\circ+\cos(a^\circ+b^\circ))$

$=\sin a^\circ\sin b^\circ$ ： $(\sin a^\circ\sin b^\circ+\cos a^\circ\cos b^\circ-\sin a^\circ\sin b^\circ)$

$=\sin a^\circ\sin b^\circ$ ： $\cos a^\circ\cos b^\circ$

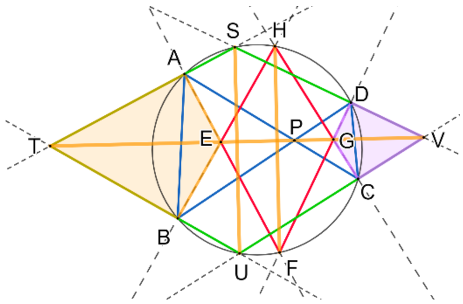
(2) 左、右兩個相似四邊形的面積與原蝴蝶形邊長的關係為 $\overline{AB}^2:\overline{CD}^2$

證明：如右圖，ΔEAB 與 ΔGDC 中

$\angle BAE=\angle GDC=a^\circ$ ， $\angle ABE=\angle DCG=b^\circ$

$\therefore \Delta EAB\sim\Delta GDC$ (AA 相似)

則 $\overline{AE}:\overline{DG}=\overline{AB}:\overline{CD}$



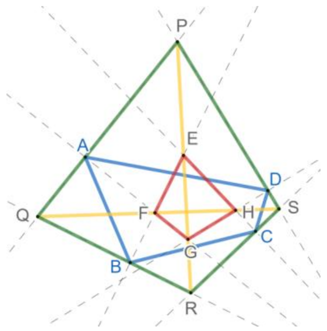
由**性質 4-3** 可知，四邊形 $EATB$ 與 $GDVC$ 相似，且 $\overline{AE}$ 、 $\overline{DG}$ 為一組對應邊

因此，四邊形 $EATB$ 面積：$GDVC$ 面積$=\overline{AE}^2:\overline{DG}^2=\overline{AB}^2:\overline{CD}^2$

肆、研究結果

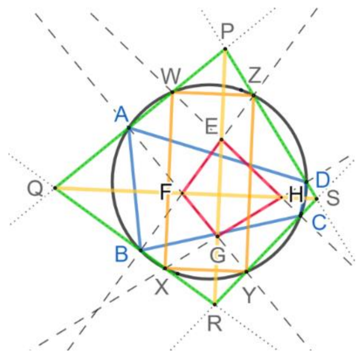
一、任意四邊形內、外角平分線所圍成圖形的性質

1. 若內角平分線無共點，則其內角四邊形會共圓。
2. 外角四邊形會共圓。
3. 內、外角四邊形兩組對角線的頂點會分別共線。
4. 內、外角四邊形的四個角會對應相等，兩圖形只在四邊形有外接圓的時候才會相似。



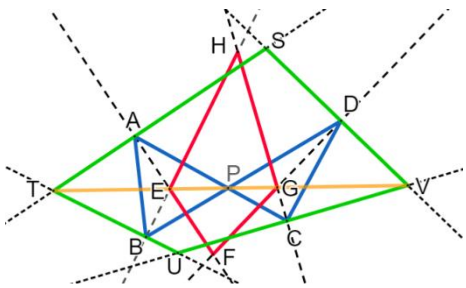
二、圓內接四邊形內、外角平分線所圍圖形的關係

1. 內、外角四邊形相似。
2. 除內、外角四邊形外，還有四個四邊形分別有外接圓且有兩組四邊形相似。
3. 內、外角四邊形對角線共線且互相垂直。
4. 內、外角平分線的交點構成矩形，且恰在其外接圓上。
5. 內、外角平分線交點連線與內、外角四邊形對角線平行。



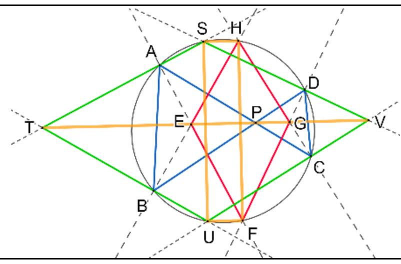
三、任意蝴蝶形內、外角平分線所圍圖形的性質

1. 等腰蝴蝶形的內、外角四邊形皆為菱形。
2. 翻轉蝴蝶形的內、外角四邊形皆為箏形。
3. 旋轉蝴蝶形的內、外角四邊形皆為平行四邊形。
4. 內、外角四邊形皆有一組對角相等。
5. 內、外角四邊形皆不會共圓。
6. 內、外角四邊形有一組對角線的頂點會共線，且會通過蝴蝶形的中心點。



四、圓內接蝴蝶形內、外角四邊形內的面積關係

1. 若蝴蝶形左右兩三角形相似，則必為圓內接蝴蝶形，反之亦然。
2. 內、外角四邊形皆為箏形，且只有在蝴蝶形為等腰蝴蝶

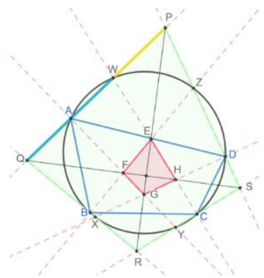
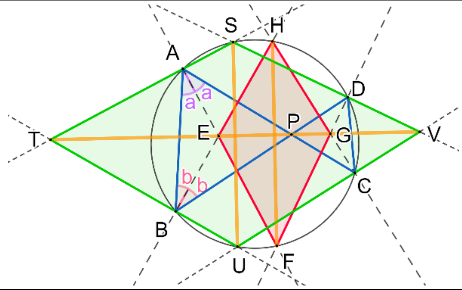


形時會相似。

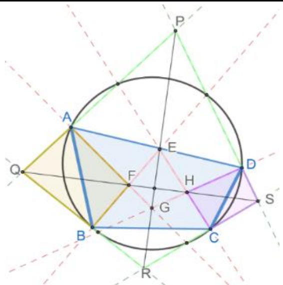
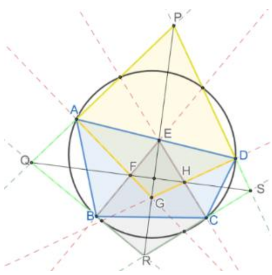
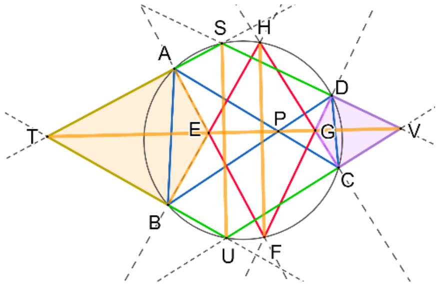
3. 除內、外角四邊形外，還有兩個四邊形分別有外接圓且會相似。
4. 內、外角四邊形的頂點中，有四個頂點在其外接圓上，但另外四個一定不會在其外接圓上。
5. 內、外角四邊形在其外接圓上的四個頂點會圍出矩形。
6. 內、外角四邊形的兩對角線互相垂直。
7. 內、外角四邊形有一組對角線的頂點會共線，另一組只有在兩三角形全等時會共線。

五、圓內接四邊形與內、外角四邊形的面積關係

1 內、外角四邊形面積比

圓內接四邊形內、外角四邊形	圓內接蝴蝶形內、外角四邊形
	
EFGH：*PSRQ*= $(\overline{QW}+\overline{WP})^2:(\overline{QW}-\overline{WP})^2$	*EFGH*：*STUV*= $(\sin a^\circ \sin b^\circ)$ ： $(\cos a^\circ \cos b^\circ)$

2.內、外角四邊形中的相似四邊形面積比和原圖形邊長的關係

四邊形		蝴蝶形
左、右相似	上、下相似	左、右相似
		
AQBF：*CHDS*= $\overline{AB}^2:\overline{CD}^2$	*PAGD*：*ECRB*= $\overline{AD}^2:\overline{BC}^2$	*EATB*：*GDVC*= $\overline{AB}^2:\overline{CD}^2$

伍、討論

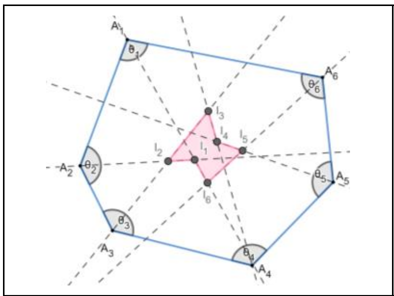
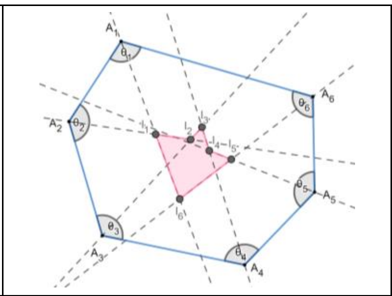
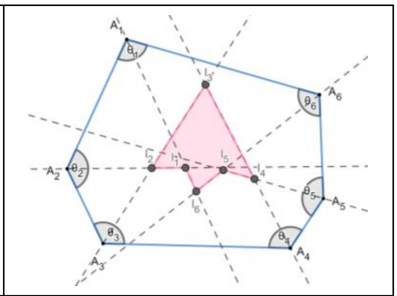
一、在圓內接四邊形中，我們找到外角四邊形與內角四邊形的面積比為

$(\overline{QW}+\overline{WP})^2:(\overline{QW}-\overline{WP})^2$，且觀察到外角四邊形的面積大於內角四邊形，接下來我們想進一步的找出$\overline{QW}$、$\overline{WP}$長度與原四邊形邊長及角度之間的關係，並驗證這兩個四邊形面積的大小關係。

二、2n 邊形角度關係

研究發現任意四邊形的內、外角四邊形皆會共圓，因此想增加邊數範圍看看是否也會有相似的性質，透過觀察找不到共通性質，但因為四邊形對角互補就必共圓，因此，我們轉換觀點：改由尋找偶數邊形的對角是否互補，但亦無發現。最後我們靈機一動，將內角分成兩組，看看可否能利用角度和的關係去觀察，研究如下：

(一) 六邊形與八邊形

		
圖(一)	圖(二)	圖(三)

假設六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，內角分別為 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4、θ_5、θ_6

I_1、I_2、I_3、I_4、I_5、I_6 分別為 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 內角平分線的交點

將 $I_1I_2I_3I_4I_5I_6$ 圍成六邊形，如圖(一)，分別計算此內角六邊形各個角度

$\angle I_1=180°-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)+180°$，$\angle I_2=180°-\frac{1}{2}(\theta_2+\theta_3)$，$\angle I_3=180°-\frac{1}{2}(\theta_3+\theta_4)$，

$\angle I_4=180°-\frac{1}{2}(\theta_4+\theta_5)+180°$，$\angle I_5=180°-\frac{1}{2}(\theta_5+\theta_6)$，$\angle I_6=180°-\frac{1}{2}(\theta_6+\theta_1)$

發現將這六個角分成兩組，兩組各有一個優角

$$\sum_{j=1}^{3}\angle I_{2j-1}=\angle I_1+\angle I_3+\angle I_5$$

$$=180°-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)+180°+180°-\frac{1}{2}(\theta_3+\theta_4)+180°-\frac{1}{2}(\theta_5+\theta_6)=360°$$

$$\sum_{j=1}^{3}\angle I_{2j} = \angle I_2 + \angle I_4 + \angle I_6$$

$$= 180° - \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_3) + 180° - \frac{1}{2}(\theta_4 + \theta_5) + \color{red}{180°} + 180° - \frac{1}{2}(\theta_6 + \theta_1) = 360°$$

但我們也發現 2 個優角的分佈，有可能如圖(二)、圖(三)，將所有情形整理如下表：

	$\sum_{j=1}^{3}\angle I_{2j-1}$		$\sum_{j=1}^{3}\angle I_{2j}$	
	角度	優角個數	角度	優角個數
優角分佈	540°	2 個	180°	0 個
	360°	1 個	360°	1 個
	180°	0 個	540°	2 個

因此，$\sum_{j=1}^{3}\angle I_{2j-1} = \angle I_1 + \angle I_3 + \angle I_5 = ... = 180° + (2-k)\times 180°$，其中 $0 \le k \le 2$，$k \in N$

$$\sum_{j=1}^{3}\angle I_{2j} = 720° - \sum_{j=1}^{3}\angle I_{2j-1}$$

同理，在八邊形中，我們發現

$\sum_{j=1}^{4}\angle I_{2j-1} = \angle I_1 + \angle I_3 + \angle I_5 + \angle I_4 = ... = 180° + (4-k)\times 180°$，其中 $0 \le k \le 2$，$k \in N$

$$\sum_{j=1}^{4}\angle I_{2j} = 1080° - \sum_{j=1}^{4}\angle I_{2j-1}$$

我們的結果在八邊形也得到印證，接著發展到 $2n$ 邊形。

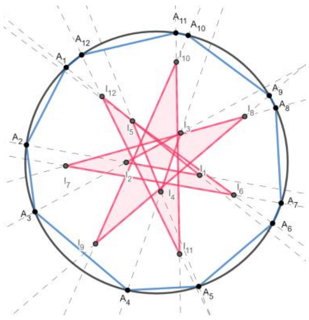
(二) 2n 邊形

透過觀察發現：六邊形有 2 個優角；八邊形有 4 個優角，因此我們試著證明 2n 邊形有 $2n-4$ 個優角，如下：

性質 5-1　$2n$ 邊形的內角多邊形，會圍出 $2n-4$ 個優角。

已知：$2n$ 邊形 $A_1A_2A_3...A_{2n}$，內角分別為 θ_1、θ_2、θ_3、...、θ_{2n}，I_1、I_2、...、I_{2n-1}、I_{2n} 分別為 A_1、A_2、...、A_{2n-1}、A_{2n} 內角平分線的交點，將 $I_1I_2...I_{2n-1}I_{2n}$ 圍成 $2n$ 邊形。

求證：$I_1I_2...I_{2n-1}I_{2n}$ 圍成的 $2n$ 邊形會有 $2n-4$ 個優角。



證明：

假設 I_1、I_2、...、I_{2n-1}、I_{2n} 的角度均為劣角

則 $\sum_{j=1}^{2n}\angle I_j = 180° \times 2n - \sum_{j}^{2n}\theta_j = 180° \times 2n - 180° \times (2n-2) = 360°$

又因 $2n$ 邊形的內角和為 $180° \times (2n-2)$，與原假設不符。

所以會多出 $180°\times(2n-2)-360°=180°\times(2n-4)$，也就是 $2n-4$ 個優角。

我們將 $2n$ 邊形所圍的內角多邊形中 $2n$ 個角分成兩組：

$$\sum_{j=1}^{2n}\angle I_{2j-1}=\angle I_1+\angle I_3+\angle I_5+\ldots+\angle I_{2n-1}$$

$$=180°-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)+\ldots+180°-\frac{1}{2}(\theta_{2n-1}+\theta_{2n})+(2n-4-k)\times 180°$$

$$=180°\times n-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{2n-1}+\theta_{2n})+(2n-4-k)\times 180°$$

$$=180°\times n-\frac{1}{2}[180°\times(2n-2)]+(2n-4-k)\times 180°$$

$$=180°\times(n-n+1)+(2n-4-k)\times 180°$$

$$=180°+(2n-4-k)\times 180°\text{，其中 }0\le k\le 2n-4\text{，}k\in N$$

而 $\sum_{j=1}^{2n}\angle I_{2j}=\angle I_2+\angle I_4+\angle I_6+\ldots+\angle I_{2n}$

$$=180°\times(2n-2)-[180°+(2n-4-k)\times 180°]$$

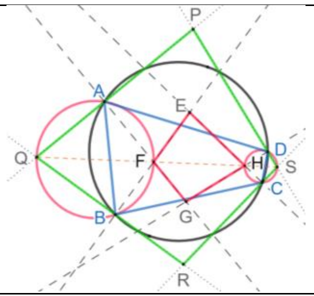
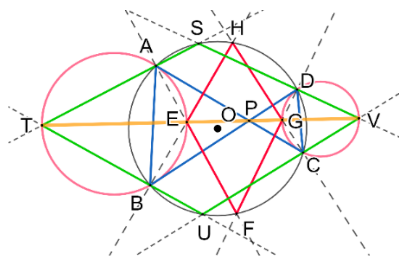
$$=180°+(2n-4-k)\times 180°\text{，其中 }0\le k\le 2n-4\text{，}k\in N$$

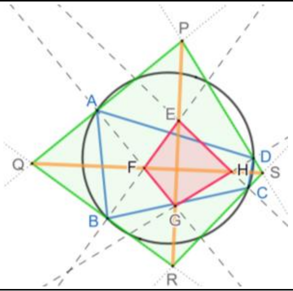
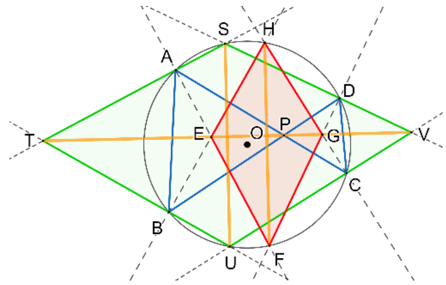
目前我們已經討論完 $2n$ 邊形的內角多邊形角度關係，想要進一步探討外角多邊形角度關係，並且想發現在什麼樣的狀況內角多邊形會圍出優角，未來我們會繼續朝這方面發展。

陸、結論

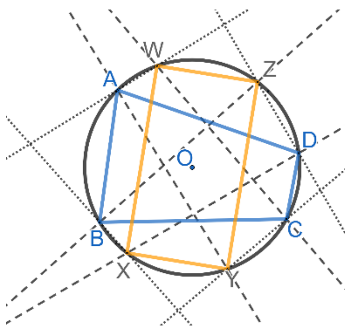
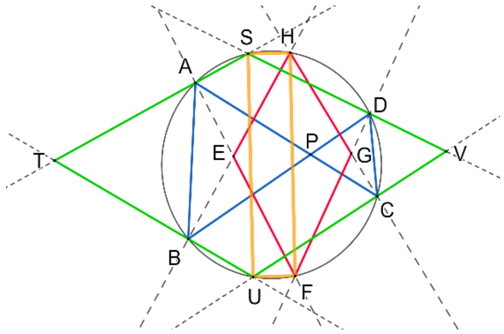
一、任意凸四邊形的內角四邊形、外角四邊形皆是圓內接四邊形。

二、圓內接四邊形與圓內接蝴蝶形內、外角平分線所圍圖形的比較。

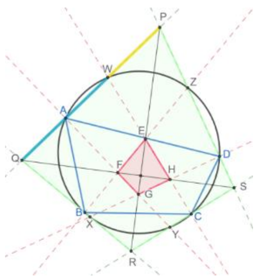
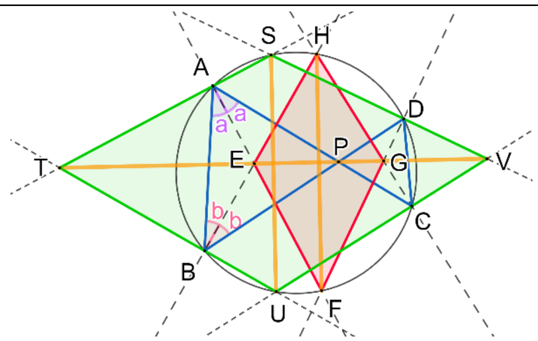
四邊形	蝴蝶形
1.外接圓	
	

<table>
<tr><td colspan="2">圖形可發現有兩個四邊形有外接圓</td></tr>
<tr><td colspan="2">2.內外角四邊形</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>1.相似

2.對角線互相垂直且共線</td><td>1.在等腰蝴蝶形時才會相似

2. 對角線互相垂直，其中一組會共線</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.內、外角平分線交於外接圓上的點</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>四組一內、一外角平分線</td><td>四條內角平分線與四條外角平分線</td></tr>
<tr><td colspan="2">圍出矩形</td></tr>
</table>

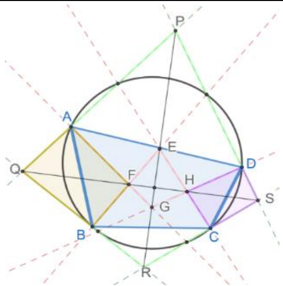
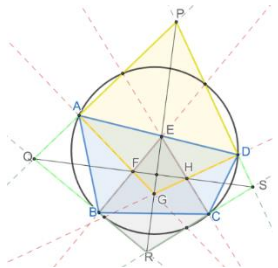
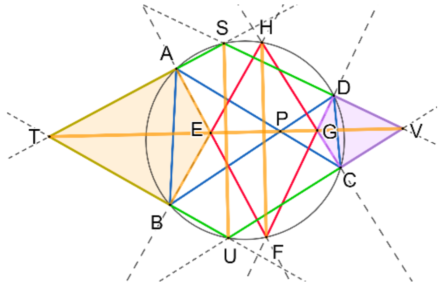
三、面積關係

<table>
<tr><td colspan="2">1 內、外角四邊形面積比</td></tr>
<tr><td>**圓內接四邊形**內、外角四邊形</td><td>圓內接蝴蝶形內、外角四邊形</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>*EFGH*：*PSRQ*=

$(\overline{QW}+\overline{WP})^2:(\overline{QW}-\overline{WP})^2$</td><td>*EFGH*：*STUV*=

$(\sin a°\sin b°)$ ： $(\cos a°\cos b°)$</td></tr>
</table>

2.內、外角四邊形中的相似四邊形面積比和原圖形邊長的關係

<table>
<tr><td colspan="2">四邊形</td><td>蝴蝶形</td></tr>
<tr><td>左、右相似</td><td>上、下相似</td><td>左、右相似</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$AQBF：CHDS=\overline{AB}^2:\overline{CD}^2$</td><td>$PAGD：ECRB=\overline{AD}^2:\overline{BC}^2$</td><td>$EATB：GDVC=\overline{AB}^2:\overline{CD}^2$</td></tr>
</table>

柒、參考文獻資料

一、張幼賢等(2022)。國中數學課本第四冊。翰林出版社。

二、張幼賢等(2022)。國中數學課本第五冊。翰林出版社。

三、吳波(2013)。圓內接四邊形的一個有趣性質。數學傳播，37(3)，68-70。

四、吳波(2015)。圓內接四邊形與其平分圓的關係。數學傳播，39(3)，76-81。

五、維基百科四邊形

https://zh.wikipedia.org/zh-hant/%E5%9B%9B%E9%82%8A%E5%BD%A2#%E8%A4%87%E9%9B%9C%E5%9B%9B%E9%82%8A%E5%BD%A2

【評語】030401

給定一個凸四邊形及蝴蝶形其內外角平分線所構成的四邊形作一些分析，得到一些不錯的結論，作者們透過觀察看到一些性質，並予以論證，條理分明，值得肯定。固定一個角來看他的內外角平分線是會相互垂直的，如果能利用這樣的特性應該可以讓一些論述更加精簡，另是否有可能透過凸四邊形及蝴蝶形共有的一些特性，推論出更一般化的性質出來?

作品海報

圓圓不絕

-從四邊形角平分線想起

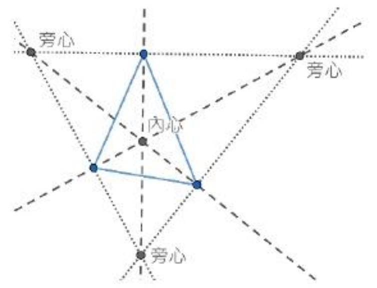
摘要

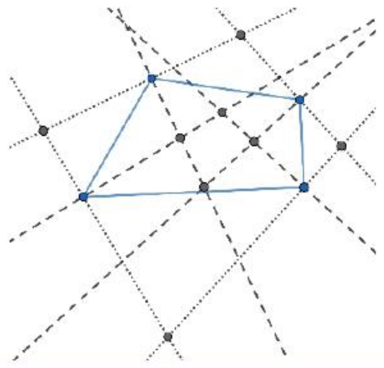
本文觀察在任意四邊形和蝴蝶形的內、外角平分線所圍成各種四邊形的特性，並找出相關的性質，其中發現了許多兩兩相似且有外接圓的四邊形，試著證明這些四邊形之間的幾何性質，並探討這些四邊形的面積關係。

前言

一、研究動機

某次上課老師利用內、外角平分線找出三角形內心、旁心，當時就想到四邊形會不會也有類似的結果，因此便利用 GeoGebra 去畫出任意四邊形的內、外角平分線，找到一些有趣的發現，引發我們想要對四邊形與其內、外角平分線所圍出的四邊形作進一步探討。





二、研究目的

（一） 四邊形的探討

1. 探討任意四邊形內、外角平分線所圍圖形的性質。
2. 探討圓內接四邊形內、外角平分線所圍圖形的關係。

（二） 蝴蝶形的探討

1. 探討任意蝴蝶形內、外角平分線所圍圖形的性質。
2. 探討圓內接蝴蝶形內、外角平分線所圍圖形的關係。

（三） 圓內接四邊形與圓內接蝴蝶形內、外角平分線圖形中的面積關係。

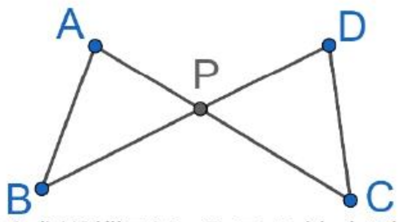
三、文獻探討

圓內接四邊形的一個有趣性質（吳波，2013）	
內容概述	本研究的方向
內、外角平分線所圍出的圖形會有外接圓，探討三個圓的圓心關係。	在圖形中發現很多組的相似四邊形及其面積關係，並加以證明。
圓內接四邊形與其平分圓的關係（吳波，2015）	
內容概述	本研究的方向
討論圓內接蝴蝶形一內角和一外角平分線所圍的圖形。	從任意蝴蝶形內角或外角平分線所圍的圖形做探討。

研究過程與方法

一、名詞解釋

1. 蝴蝶形：兩不平行的線段 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 交於 P 點，連接 $\overline{AB}$、$\overline{DC}$，稱 ABCD 為蝴蝶形，P 點為其中心點。

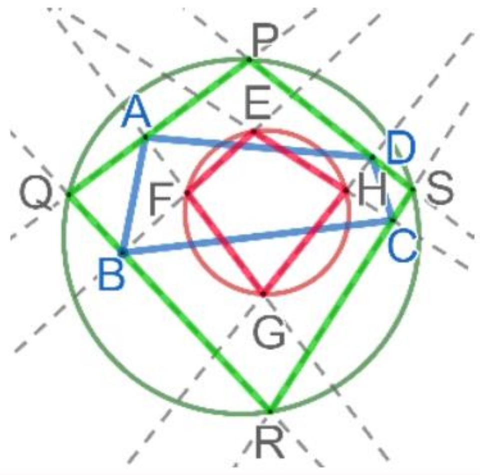


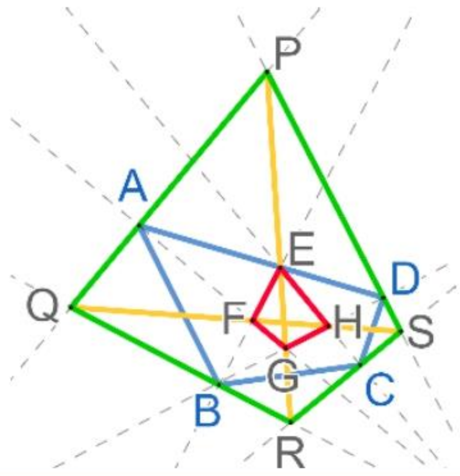
2. 內角四邊形：四邊形或蝴蝶形內角平分線交點所構成的四邊形。
3. 外角四邊形：四邊形或蝴蝶形外角平分線交點所構成的四邊形。

二、研究架構

研究結果

一、任意四邊形內、外角平分線所圍圖形的性質

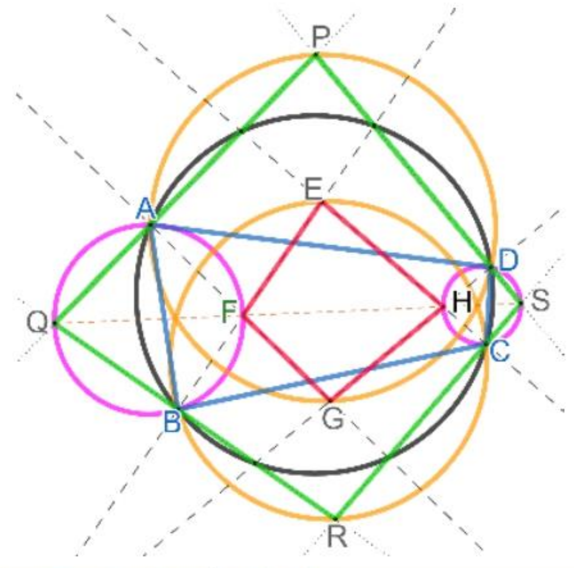


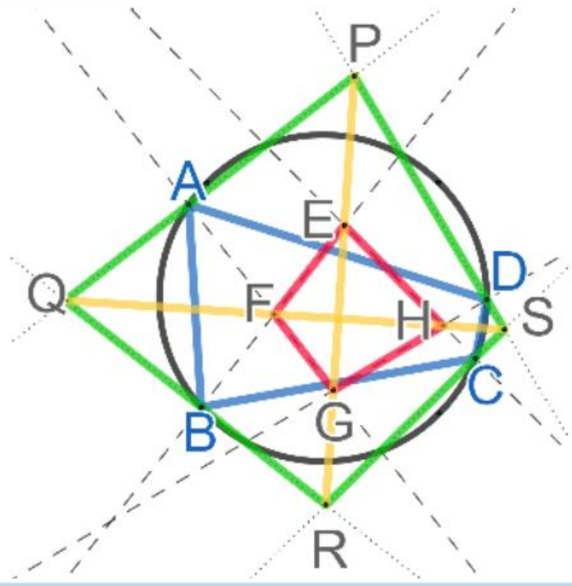


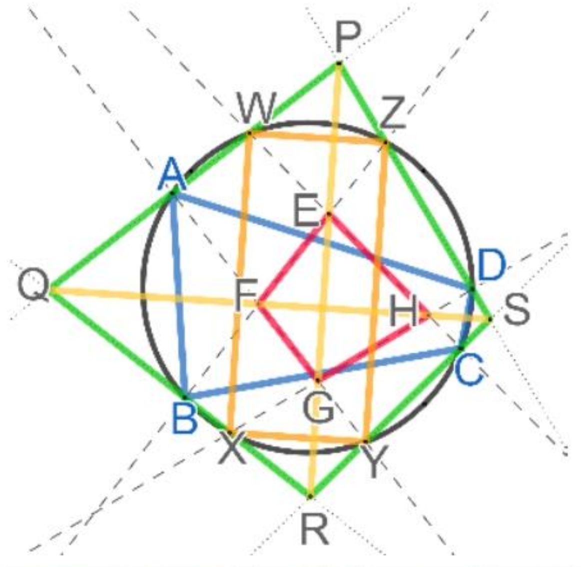
若內角平分線不交於同一點，內、外角四邊形分別有外接圓。

內、外角四邊形
1. 兩組對角線分別共線。（可利用三角形內心、旁心共線證明）
2, 四個角會對應相等。

二、圓內接四邊形內、外角平分線所圍圖形的關係





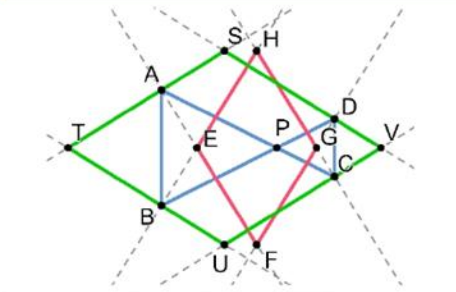
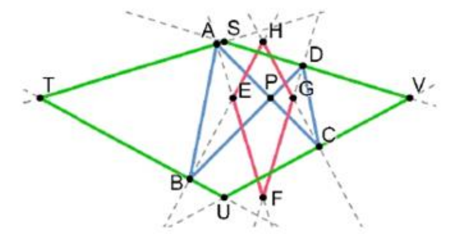
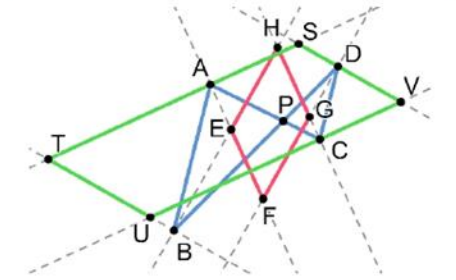
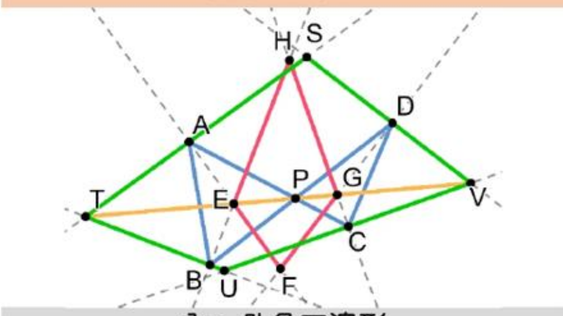


1. 內、外角四邊形相似。
2. 上下及左右兩組四邊形相似。
3. 四個四邊形分別有外接圓。

1. 內、外角四邊形對角線共線。
2. 對角線會互相垂直。

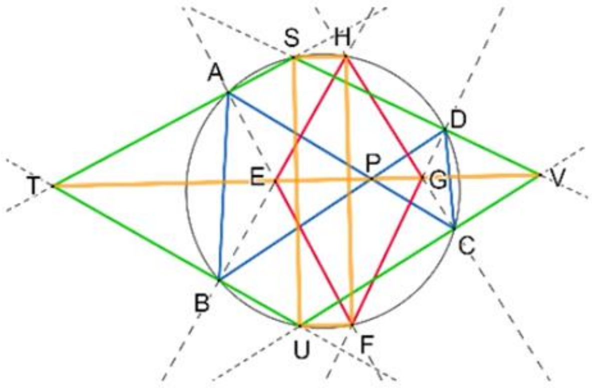
1. 內、外角平分線交點構成矩形，恰在外接圓上。
2. 交點連線與內、外角四邊形對角線平行。

三、任意蝴蝶形內、外角平分線所圍圖形的性質

等腰蝴蝶形	翻轉蝴蝶形	旋轉蝴蝶形	任意蝴蝶形
			
內、外角四邊形	內、外角四邊形	內、外角四邊形	內、外角四邊形
皆為菱形。	皆為箏形。	皆為平行四邊形。	1. 皆有一組對角相等，必不共圓。 2. 一組對角線頂點共線，通過中心點。 (利用三角形內心、旁心共線證明)

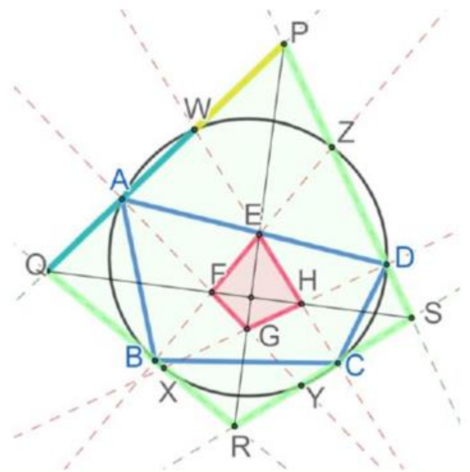
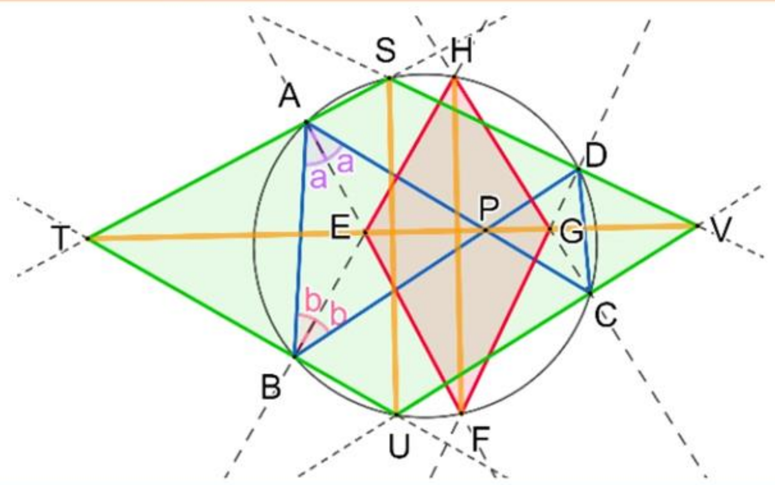
四、圓內接蝴蝶形內、外角平分線所圍圖形的關係

1. 只有在等腰蝴蝶形時會相似。
2. 還有兩個四邊形分別有外接圓且會相似。
3. 有四個頂點在其外接圓上，且會圍出矩形，而另外四個頂點一定不會在其外接圓上。
4. 兩對角線互相垂直。
5. 有一組對角線的頂點會共線，另一組只有在兩三角形全等時會共線。

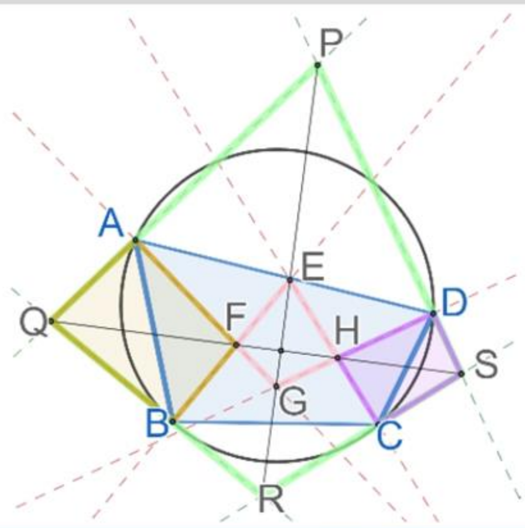
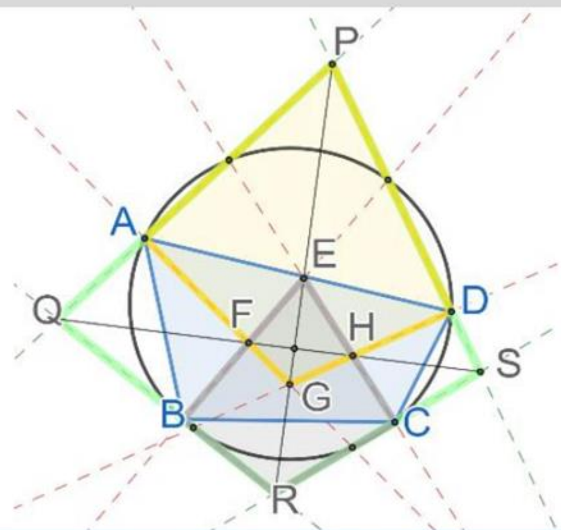
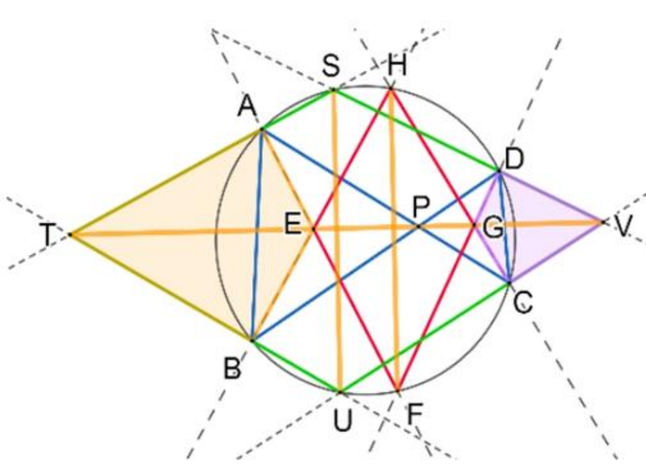


五、圓內接四邊形與圓內接蝴蝶形內、外角平分線圖形中的面積關係

1. 內、外角四邊形面積比

四邊形內、外角四邊形	蝴蝶形內、外角四邊形
	
EFGH：PSRQ＝$(\overline{QW}-\overline{WP})^2:(\overline{QW}+\overline{WP})^2$	EFGH：STUV＝$(\sin a^\circ \sin b^\circ):(\cos a^\circ \cos b^\circ)$

2. 內、外角四邊形中的相似四邊形面積比和原圖形邊長的關係

四邊形		蝴蝶形
左、右相似	上、下相似	左、右相似
		
AQBF：CHDS＝$\overline{AB}^2:\overline{CD}^2$	PAGD：ECRB＝$\overline{AD}^2:\overline{BC}^2$	EATB：GDVC＝$\overline{AB}^2:\overline{CD}^2$

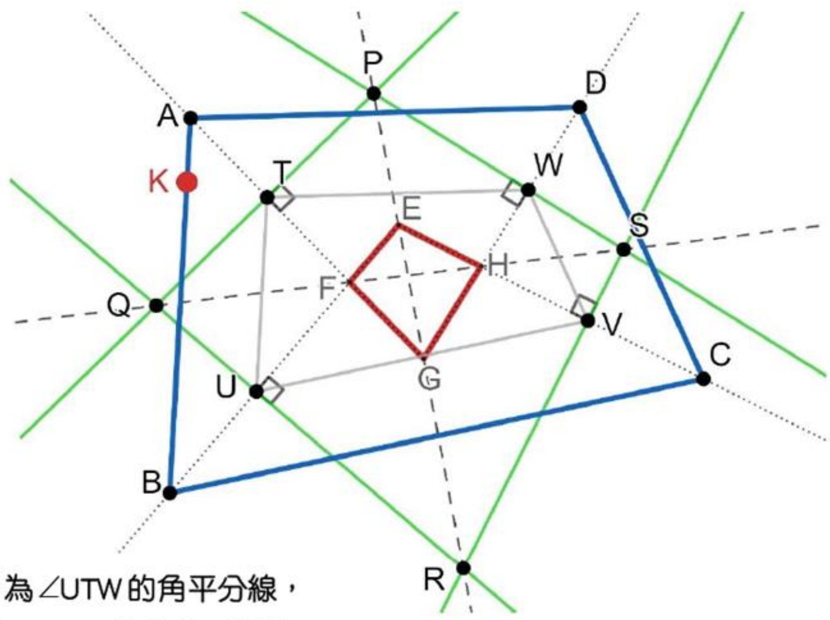
六、內、外角四邊形性質的應用─逆向作圖

已知：圓內接四邊形 EFGH，$\overline{EG}\perp\overline{FH}$，以及形外一點 K。

求作：過 K 之四邊形 ABCD，使 EFGH 為其內角四邊形。

作法：

1. 連接$\overline{EG}$、$\overline{FH}$，延長$\overrightarrow{GF}$、$\overrightarrow{EF}$、$\overrightarrow{GH}$、$\overrightarrow{EH}$，且在$\overline{EG}$上任取一點 P。
2. 過點 P 作$\overrightarrow{GF}$的垂線，分別交$\overrightarrow{GF}$、$\overrightarrow{FH}$於 T、Q 點，
   過 Q 點作$\overrightarrow{EF}$的垂線，分別交$\overrightarrow{EF}$、$\overrightarrow{EG}$於 U、R 點，
   過 R 點作$\overrightarrow{EH}$的垂線，分別交$\overrightarrow{EH}$、$\overrightarrow{FH}$於 V、S 點。
3. 連$\overrightarrow{PS}$，交$\overrightarrow{GH}$於 W。
4. 過 K 點作一四邊形各邊與 TUVW 平行，分別交$\overrightarrow{GF}$、$\overrightarrow{EF}$、$\overrightarrow{EH}$、$\overrightarrow{GH}$
   於 A、B、C、D，則四邊形 ABCD 即為所求。



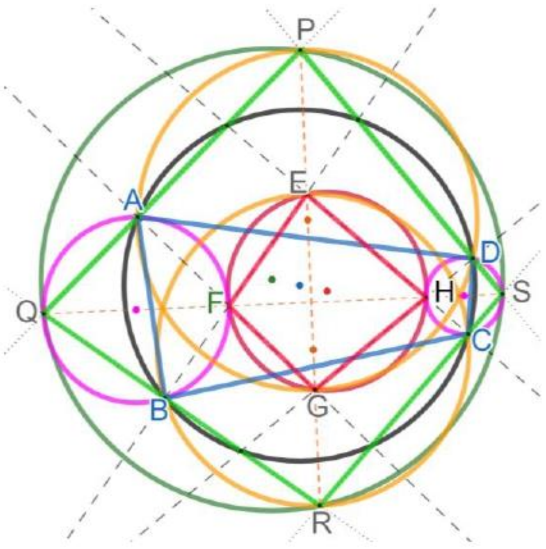
證明：

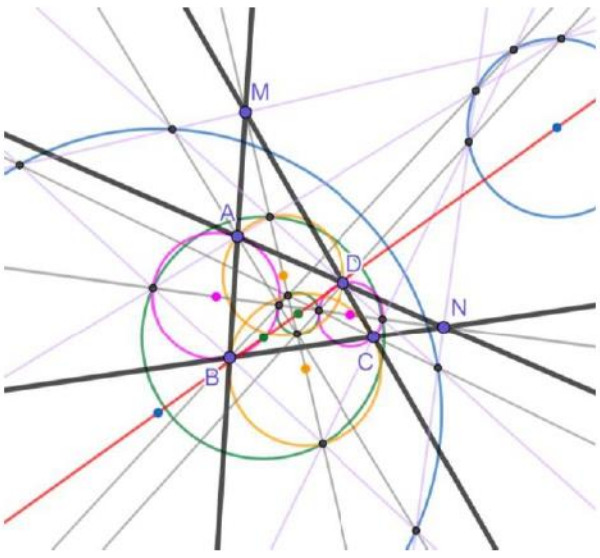
1. TQUF、PTGW、PQRS 分別共圓，可推得 ∠FTU = ∠FQU = ∠WPG = ∠WTG，則$\overline{TG}$為∠UTW 的角平分線，
   同理可證$\overline{WG}$、$\overline{VE}$、$\overline{UE}$分別為∠TWV、∠WVU、∠VUT 的角平分線，則 EFGH 為 TUVW 的內角四邊形。
2. ∵ $\overline{TW}$ / / $\overline{AD}$、$\overline{TU}$ / / $\overline{AB}$　∴ ∠DAG = ∠WTG = ∠GTU = ∠GAB，則$\overline{AG}$為∠BAD 的角平分線，
   同理可證$\overline{DG}$、$\overline{CE}$、$\overline{BE}$分別為∠ADC、∠DCB、∠CBA 的角平分線，則 EFGH 為 ABCD 的內角四邊形。

給定四邊形或蝴蝶形之內、外角四邊形均可逆向作圖，請參閱工作日誌。

討論

一、圓圓不絕





二、2n 邊形角度關係

任意四邊形的內角四邊形會有外接圓，因此想增加邊數觀察。

猜想 1：內角多邊形必有外接圓 ………(X)

猜想 2：偶數邊形的內角多邊形對角互補 ………(X)

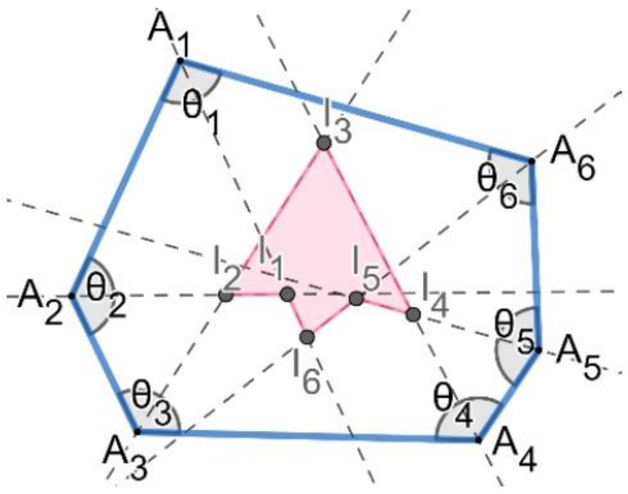
猜想 3：將內角多邊形的內角分成兩組，利用角度和的關係去觀察 ………(O)

我們發現內角平分線圍成的 2n 邊形有 2n－4 個優角，

進一步將 2n 個角分組：

$$\sum_{j=1}^{n}\angle I_{2j-1}=\angle I_1+\angle I_3+\angle I_5+\ldots+\angle I_{2n-1}=180^\circ+(2n-4-k)\times180^\circ$$

$$\sum_{j=1}^{n}\angle I_{2j}=\angle I_2+\angle I_4+\angle I_6+\ldots+\angle I_{2n}=180^\circ+k\times180^\circ$$ ，其中$0\le k\le 2n-4$，$k\in Z$



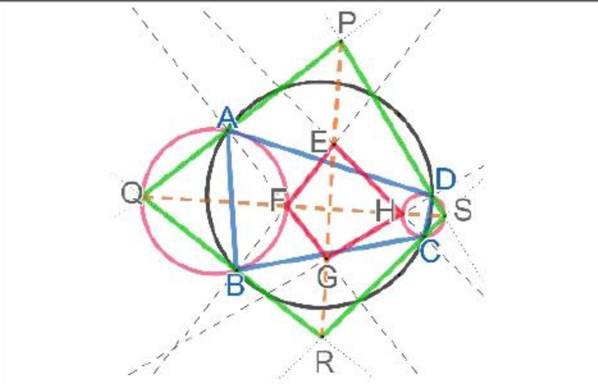
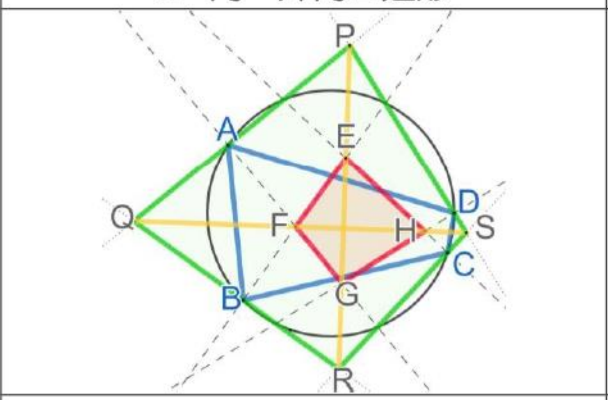
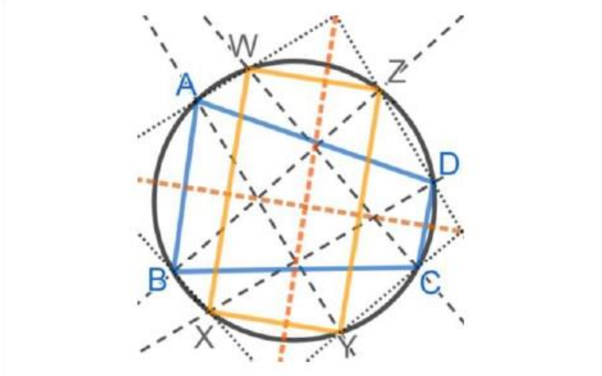
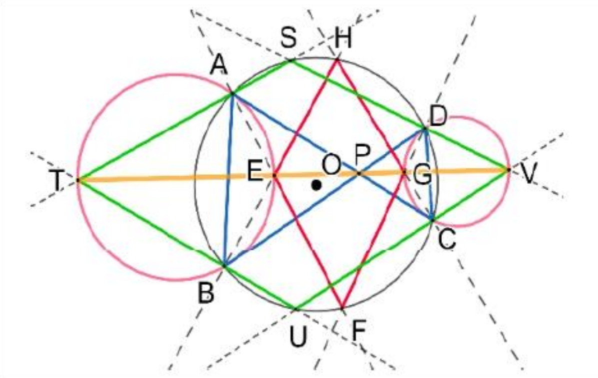
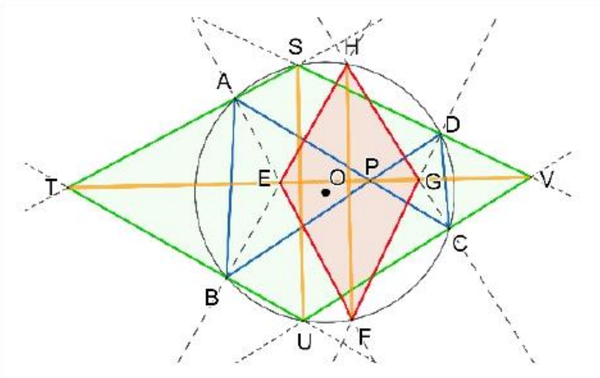
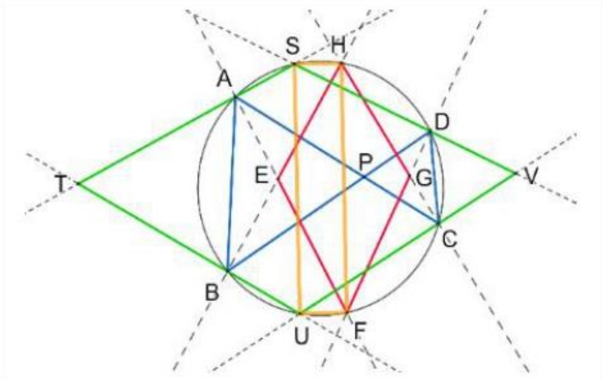
目前我們討論完 2n 邊形的內角多邊形角度關係，想要進一步探討外角多邊形角度關係，並且想找出在什麼樣的狀況內角多邊形會圍出優角，未來我們會繼續朝這方面發展。

三、圓內接四邊形中找到內、外角四邊形面積比為$(\overline{QW}-\overline{WP})^2:(\overline{QW}+\overline{WP})^2$，且外角四邊形面積大於內角四邊形，想進一步找出$\overline{QW}$、$\overline{WP}$與原四邊形邊長及角度的關係，並驗證四邊形面積大小關係。

結論

一、任意凸四邊形的內角四邊形及外角四邊形皆有外接圓

二、圓內接四邊形與圓內接蝴蝶形內、外角平分線所圍圖形的比較

	1. 外接圓	2. 內、外角四邊形	3. 在外接圓上的點
四邊形			
蝴蝶形			

三、圓內接四邊形與圓內接蝴蝶形內、外角平分線圖形中的面積關係

參閱研究結果第五點。

四、內、外角四邊形的性質應用

可利用以上所觀察到的性質，在已知內、外角四邊形及形外一點作原圖形。

未來展望

本研究在平面上畫出四條兩兩相交的直線，將圖形中所有角平分線上三線共點的點找出後，發現許多共圓的圖形，且這些圓的圓心會共線，而平面中五條以上的直線兩兩相交是否也會有共圓及共線的情形產生？有待未來進一步研究。

參考文獻資料

一、吳波 (2013)。圓內接四邊形的一個有趣性質。數學傳播，37 (3)，68-70。

二、吳波 (2015)。圓內接四邊形與其平分圓的關係。數學傳播，39 (3)，76-81。

三、維基百科四邊形

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%9B%9B%E9%82%8A%E5%BD%A2

四、The ABCD of cyclic quadrilaterals

https://orbilu.uni.lu/bitstream/10993/43232/1/CyclicQuadrilaterals.pdf